Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

KEBABI YOUSSRA

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Système dynamique

Spécialité : Système dynamique

Thème

Les dérivations des algèbres associatives et Hom-associatives

---

Soutenu publiquement Juin 2022 devant le jury composé de

BERRAH ABDELMALEK	Président
ADIMI HADJER	Encadrant
CHEBEL ZOHEIR	Examinateur
DEKKAR KHADRA	Examinateur

Promotion 2021/2022

Remerciements

Je remerciais Dieu tout-puissant qui me a donné la patience, la puissance et la force pour finir ce travail. vif remerciement à Madame "ADIMI HADJER" de m'avoir encadré, encouragé et c'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils et ses orientations que nous avons pu mener à bien ce travail. Pour cela, nous lui adressons un grand merci. Nous remercions les membres jury d'avoir accepté d'examiner et de juger notre travail.

Enfin, nous n'oublions pas de remercier toutes les personnes dues qui ont facilité notre tâche et tous ceux que nous avons connus à la faculté des mathématiques qui ont rendu notre séjour à le département agréable.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail et adresse ma profonde gratitude à celle qui a tant prié pour moi, à la source de bienveillance et de tendresse, à la femme-là plus merveilleuse qui existe, ma tendre mère, **"Lwiza"**. À celui qui m'a tout donné, à celui qui a œuvré pour mon confort et mon succès, à l'homme le plus grand et le plus cher de l'univers, mon cher père **"Layachi"**.

À ceux qui m'ont soutenu et aidé avec tout ce qu'ils ont, ce sont mes frères **"zaydi , abd el hakim , sami ,basema"** pour toujours.

À ceux qui ont partagé ma réussite, mes amis et camarades **"Amal , ranya , zakyia , zinb , saadia"**

À toute la famille **"Kebabi"** et **"Araoui"**.

Table des matières

Introduction

Les algèbres associatives sont l'une des algèbres classiques qui ont été largement étudiées et dont on a découvert qu'elles sont liées à d'autres algèbres classiques comme les algèbres de Lie et de Jordan. La classification des algèbres associatives de petite dimension ont été étudiée pour la première fois par Peirce[9]. En 1916, Hazlett a classifié les algèbres nilpotentes de dimension ≤ 4 [5]. Mazzola a publié son résultat en 1979 sur la classification algébrique et géométrique des algèbres associatives en dimension cinq [8]. La plupart des problèmes de classification des algèbres associatives de dimension finie ont été étudiés pour une ou plusieurs propriétés des algèbres associatives. Tandis que la classification complète des algèbres associatives en général est toujours un problème ouvert. La théorie des algèbres associatives de dimension finie est l'un des domaines les plus anciens de l'algèbre moderne. Elle trouve son origine principalement dans les travaux de Hamilton, qui a découvert les célèbres quaternions et Cayley, qui a a développé la théorie des matrices. Plus tard, la théorie structurelle des algèbres associatives de dimension finie a été traitée par un certain nombre de mathématiciens, notamment B. Pierce, C. S. Pierce, Clifford, Weierstrass, Dedekind, Jordan, Frobenius.

La notion d'algèbre Hom-associative est une généralisation des algèbres associatives, elle correspond à la notion d'algèbre Hom-Lie qui est apparue en physique, dans le sens que le commutateur d'une algèbre Hom-associative donne une algèbre Hom-Lie. Elle a été initialement introduite par Makhlouf et Silvestrov dans [12]. L'algèbre Hom-associative considérée s'obtient en modifiant la condition d'associativité à l'aide d'un morphisme.
Une dérivation de $\mathcal{A}$ est une application linéaire $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ telle que

$$D(ab) = D(a)b + aD(b), \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

L'objectif de cette mémoire est de calculer les dérivations des algèbres associatives et les algèbres Hom-associatives, en petite dimension. On prend la classification des algèbres associatives introduite dans [8], et dans le cas Hom on prend la classification introduite dans [11].

Le mémoire comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, on rappelle les bases de la théorie des anneaux et modules. Dand la première section, on rappelle quelques définitions et propriétés des anneaux et sous anneaux. La deconde section sera consacrée aux modules. La toixième section se consacrera à la notion d'algèbre.

Dans le deuxième chapitre, on donne les dérivations des algèbres associatives en dim 2 et 3 on rappelle d'abord des notions de base des algèbres associatives, puis l'algorithme qui permet de calculer les dérivations. On donne la classification et les dérivations qui correspond. Dans le troixième chapitre, on s'intéresse aux dérivations des algèbres Hom-associative on commence par définir une algèbre Hom-associative, on on identifie cette algèbres à ses constantes de structure. On donne les équations qui permet de déterminer les dérivations des algèbres Hom-associative

Ce mémoire est illusté par un Annexe qui visualise les calcules faite sous le logiciel Mathematica.

Chapitre 1

Prèliminaires

1.1 Structure de $\mathbb{K}$-algèbre

1.1.1 Structure d'anneaux et sous anneaux

Nous commençons par rappeler brièvement les définitions d'un anneau commutatif, d'un module et d'une application linéaire.

Définition 1.1.1. *Un anneaux K est un ensemble muni de deux opérations internes $K \times K \to K$ notées respectivement $+$ et $\cdot$, et appelées respectivement l'addition et la multiplication de l'anneau telles que*

1. *K muni de l'addition $(a, b) \to a + b$ est une groupe abélien, c'est-à-dire vérifie les axiomes :*
   - *$a + (b + c) = (a + b) + c$ pour tous $a, b, c \in K$,*
   - *$a + b = b + a$ pour tous $a, b \in K$,*
   - *Il existe un élément neutre 0 ou 0_K pour l'addition de K, c'est-à-dire que pour tout $a \in K$ on a*
   $$a + 0 = 0 + a = a,$$
   - *A chaque élément $a \in K$ est associé son opposé , ou négatif $(-a) \in K$ que satisfait*
   $$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$
2. *La multiplication $(a, b) \longmapsto a \cdot b$ ou ab de K est doublement distributive sur l'addition $+$, c'est-à-dire que l'on a*
   $$a(b + c) = ab + ac,$$

et

$$(b+c)a = ba + ca,$$

pour tous $a, b, c \in K$.

Exemple 1.1.1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

1. $(\mathbb{Z}, +)$ *est une groupe commutatif :*

► $(+)$ *admet un élément neutre*

$$\exists e \in \mathbb{Z}, \quad \forall a \in \mathbb{Z} : a + e = e + a = a,$$

►

$$\forall a \in \mathbb{Z} : a' + a = 0 \to a = -a',$$

► $(+)$ *est associative*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a+b) + c = a + (b+c),$$

► $(+)$ *est commutative*

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a + b = b + a,$$

2. $(\cdot)$ *est distributive*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

et

$$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c),$$

3. $(\cdot)$ *est associative*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

d'ou : $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *est un anneau.*

Remarque 1.1.1. *1. Si* K *est un anneau associatif et unitaire, la multiplication de* K *satisfait les deux axiomes :*

- $a(bc) = (ab)c$ *pour tous* $a, b, c \in K$.
- *Il existe un élément neutre* 1 *ou* 1_K *pour la multiplication de* K *, c'est-à-dire que pour tout* $a \in K$*, on a*

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

2. *L'élément* 0 *est appelé le zéro de* K*, l'élément* 1 *son identité.*
3. *Si la multiplication de* K *est commutatif. On dit que* K *est une anneau commutatif.*
4. *Si tout élément non nul de* K *admet un inverse pour la multiplication , on dit que* K *est un corps .*

1.1.2 Sous anneaux

Soit $(A, +, .)$ est un anneau et B un sous ensemble de A, B est un sous anneau de A si $(B, +, \cdot)$ est un anneau . Ceci revient :

1. $(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$, c'est-à-dire :
$$0_A \in B,$$
et
$$\forall a, b \in B, a - b \in B.$$
2. B stable pour la multiplication :
$$\forall a, b \in B, a.b \in B,$$
3. $1_A \in B$

1.1.3 Morphisme d'anneaux

Un morphisme d'anneaux est une application f entre deux anneaux (unitaires)A et B que vérifie les trois propriétés suivantes :
pour tous a, b dans A :

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a)+f(b), \\ f(a.b) &= f(a).f(b), \\ f(1_A) &= 1_B. \end{aligned}$$

Par la suit , et sauf mention expresse du contraire , la lettre K désignera toujours un anneau commutatif. On peut donc par exemple prendre K égal à $\mathbb{Z}$ (anneau des entiers)ou encore à un corps commutatif tel que $\mathbb{Q}$ (corps des rationnels), $\mathbb{R}$(corps des réels) ou $\mathbb{C}$ (corps des complexes).

Remarque 1.1.2. *Un anneau qui n'est pas commutatif et dans lequel tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication est appelé un corps gauche.*

1.2 Structure d'un module

Définition 1.2.1. *Étant donné un anneau commutatif K, un K-module M est un ensemble muni de deux opération, la première $M \times M \to M$ étant notée $+$ et appelée l'addition, et la seconde $M \times K \to M$ étant notée $\cdot$ et appelée la multiplication externe (à droite), telles que :*

1. *M muni de l'addition $(x, y) \to x + y$ est un groupe abélien, c'est-à-dir vérifie les axiomes :*

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

pour tout

$$x, y, z \in M.$$

$x + y = y + x$ *pour tout* $x, y \in M$

- *Il existe un élément neutre* 0 *ou* 0_M *pour l'addition , c'est-à-dir que pour tout* $x \in M$*, on a*

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

- *A chaque élément $x \in M$ est associé son opposé, ou négatif $(-x) \in M$ qui satisfait*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0,$$

2. *M muni de la multiplication $(x, a) \longmapsto x \cdot a$ ou xa vérifie les axiomes :*
- $x(ab) = (xa)b$ *pour tous* $x \in M$.
3. *La multiplication externe est doublement distributive sur l'addition, c'est-à-dire que l'on a*
- $x(a + b) = xa + xb$ *pour tous* $x \in M$ *et* $a, b \in K$,
- $(x + y)a = xa + ya$ *pour tous* $x, y \in M$*et* $a \in K$.

Exemple 1.2.1. *Si $K = \mathbb{Z}$, un K-module n'est donc autre qu'un groupe abélien, tandis que si K est un corps commutatif, un $K-$module est un $K -$ espace vectoriel.*

1.2.1 Sous module

Définition 1.2.2. *Soit M un A-module et $N \subseteq M$ .Alors, on dit que N est un sou-module de M si et seulement si*

1. *N est un sous-groupe de M(N est donc vide).*
2. *Pour tout $a \in A$ et $m \in N$, on a $a \cdot m \in N$.*

1.2.2 Morphisme de module

Définition 1.2.3. *Soit M et N deux A-modules . Un morphisme de A module $f : M \to N$ est une application vérifiant*

1. *f est morphisme de groupes*
2. *Pour tout $a \in A$ et $m \in M$, on a $f(am) = af(m)$.*

1.3 Notion d'algèbre

Après ce bref rappel, nous en venons à la définition d'algèbre.

Définition 1.3.1. *On appelle K-algèbre (ou algèbre sur K, ou simplement algèbre lorsqu'aucune confusion n'est à craindre) on ensemble A muni de deux opération internes, la première étant notée $+$ et appelée l'addition, et la seconde étant notée $\cdot$ et appelée la multiplication , ainsi que d'une multiplication externe (à gauche) $A \times K \to A$, également notée .*
Et tel que :

1. *A muni de son addition $(a, b) \longmapsto a+b$ et de sa multiplication externe $(a, \alpha) \longmapsto a\cdot\alpha$ ou $(a\alpha)$ est noté d'une structure de K-module (à droite) c'est-à-dir vérifie les axiomes :*

- *$a + (b + c) = (a + b) + c$ pour tout $a, b, c \in A$.*
- *$a + b = b + a$ pour tout $a, b \in A$.*
- *Il existe un élément neutre 0 ou 0_A pour l'addition , c'est-à-dir que pour tout $a \in A$ on a*
$$a + 0 = 0 + a = a.$$
- *A chaque élément $a \in A$ est associé son opposé, ou négatif $(-a) \in A$ que satisfait*
$$a + (-a) = (-a) + a = 0,$$
- *$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta$ pour tous $a \in A$et $\alpha, \beta \in K$,*

- $a \cdot 1 = a$ *pour tous* $a \in A$,
- $(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha$ *pour tout* $a, b \in A$ *et* $\alpha \in K$
- $a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta$ *pour tous* $a \in A$ *et* $\alpha, \beta \in K$.

2. A muni de sa multiplication $(a, b) \longmapsto a \cdot b$ *ou ab satisfait les propriétés suivantes :*

- $a(b+c) = ab + ac$ *pour tous* $a, b, c \in A$,
- $(a+b)c = ac + bc$ *pour tous* $a, b, c \in A$,
- $(ab)\alpha = a(b\alpha) = (a\alpha)b$ *pour tous* $a, b \in A$ *et* $\alpha \in K$.

En d'autres termes, A est à fois un K-module et un anneau,

Remarque 1.3.1. ▶ *L'anneau K étant commutatif , une K-algèbre A est aussi munie canoniquement d'une structure de K-module à gauche : en effet, on définit une multiplication à gauche* $K \times A \longrightarrow A$ *par* $(\alpha, a) \longmapsto a\alpha$ *pour tout simplement que A est une* $K-$*module*

▶ *Lorsque le produit de A admet une identité, c'est-à-dir s'il existe un élément* 1 *ou* 1_A *dans A tel que* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *pour tout* $a \in A$ *, on dit que A est une K-algèbre unitaire.*

▶ *Lorsque le produit de Aest associatif , c'est-à-dir si* $a(bc) = (ab)c$ *pour tous* $a, b, c \in A$, *on dit que A est une K-algèbre associative .*

▶ *Si* $\mathbb{K}$ *est un corps , un* $\mathbb{K}$*-module n'est rien d'autre qu'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

D'après la dernière remarque, on peut définir une algèbre par :

Définition 1.3.2. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps commutatif. On appelle* $\mathbb{K}$*-algèbre tout* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel A muni d'une application bilinéaire appelée multiplication et noté* $\cdot$ *telle que l'application*

$$A \times A \longrightarrow A$$

$$(a, b) \longrightarrow a \cdot b$$

Exemple 1.3.1. *Soit A un* $\mathbb{K}$*-algèbre .Alors l'algèbre est dite*

▶ *commutatives si* $ab = ba$.

▶ *associatives si* $a(bc) = (ab)c$.

▶ *Algèbre de lie* $a^2 = 0$

(La multiplication des algèbres lie est appelée crochet et notée $[x, y] = xy - yx$*)*

Remarque 1.3.2. *C'est la définition la plus utilisé pour définir une l'algèbre*

Chapitre 2

Les dérivations des algèbre associatives

2.1 Généralités sur les Algèbres associatives

2.1.1 Algèbre associative

Définition 2.1.1. *Soient V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et une application bilinéaire :*

$$\mu : V \times V \to V,$$

le couple (V, μ) est appelé algèbre associative si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall x, y, z \in V, \mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z)(associativit\acute{e}).$$

Exemple 2.1.1. *L'espace des endomorphismes d'un espace vectoriel V muni de la loi $\circ$, $(End(V), \circ)$ est une algèbre associative.*

Exemple 2.1.2. *L'espace des fonction des fonction des classes $\mathbb{C}^{\propto}$ sur $\mathbb{R}$ muni de la loi classique produit " $\cdot$ ", $(\mathbb{C}^{\propto}(\mathbb{R}), \cdot)$, est une algèbre associative.*

2.1.2 Sous algèbres associatives et idéaux

Définition 2.1.2. *Un sous espace vectoriel h d'une algèbre associative (V, μ) est dit sous algèbre associative de V si :*

$$\forall x, y \in h, \mu(x, y) \in h,$$

qui est équivalent à :

$$\mu(h, h) \subset h.$$

2.1.3 Morphismes d'algèbres associatives

Définition 2.1.3. *Un morphisme d'algèbres associatives est une application linéaire,* $\varphi : V \to V'$ *ou* V *et* V' *sont deux algèbres associatives munis respectivement du produit* μ_1 *et* μ_2 *tel que :*
pour tous $x, y \in V, \varphi(\mu_1(x, y)) = \mu_2(\varphi(x), \varphi(y))$.

2.2 Algèbre de Lie

Définition 2.2.1. *Une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Lie est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathcal{G}$ *muni d'une application* $\mathbb{K}$*-bilinéaire :*

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

$$(x, y) \longmapsto [x, y],$$

appelée ***crochet de Lie*** *et satisfaisant les deux axiomes :*
L'antisymétrique :

$$[x, y] = -[y, x]$$

L'identité de Jacobi :

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

pour tous $x, y, z \in \mathcal{G}$.

Remarque 2.2.1.

1. *L'identité de Jacobi peut s'écrire sous la forme*

$$\circlearrowleft_{x,y,z} [x, [y, z]] = 0$$

2. *L'antisymétrique* $[x, y] = -[y, x]$ *est équivalent à* $[x, x] = 0$

Proposition 2.2.1. *(Algèbre de Lie sous-jacente à une algèbre associative)*
Si A *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre associative , alors* $[x, y] = \mu(x, y) - \mu(y, x)$ *définit un crochet de Lie sur* A.

Démonstration 1. *Le crochet est anti-symétrique et avec un calcule direct nous avons :*

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] &= \mu(x,\mu(y,z))-\mu(x,\mu(z,y))-\mu(\mu(y,z),x)\\
&+ \mu(\mu(z,y),x)+\mu(y,\mu(z,x))-\mu(y,\mu(x,z))\\
&- \mu(\mu(z,x),y)+\mu(\mu(x,z),y)+\mu(z,\mu(x,y))\\
&- \mu(z,\mu(y,z))-\mu(\mu(x,y),z)+\mu(\mu(y,x),z)\\
&= 0
\end{aligned}$$

2.3 Dérivations

Définition 2.3.1. *Une dérivation d'une algèbre associative (V,μ) sur un corps $\mathbb{K}$ est une application linéaire de V dans V,*

$$D : V \to V,$$

tel que :

$$\forall x, y \in V, D(\mu(x,y)) = \mu(Dx,y)+\mu(x,Dy).$$

L'ensemble des dérivations de V est noté $Der_K V$.

Exemple 2.3.1. *Soit (V,μ) une algèbre associative , tout morphisme de V dans lui même (endomorphisme de V) est une dérivation de V.*
Ainsi, $Der_K V = End(V)$

2.3.1 Algorithme pour trouver les dérivations des algèbres associatives

Soit $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ une base d'algèbre associative A de dimensions n. On identifie μ à ses constantes de structure C_{ij}^k.

$$\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k$$

Les constantes de structure des loi d'algèbres associatives vérifient le système d'équation polynomiales quadratiques suivant :

$$\sum_{s=1}^{n}(C_{jk}^s C_{is}^m - C_{ij}^s C_{sk}^m) = 0, 1 \leq i, j, k, l \leq n.$$

en effet :

$$\begin{aligned}
\mu(e_i, \mu(e_j e_k)) &= \mu(\mu(e_i, e_j), e_k) \\
\mu(e_i, \sum_{s=1}^{n} C_{jk}^{s} e_s) &= \mu(\sum_{l=1}^{n} C_{ij}^{l} e_l, e_k) \\
\sum_{s=1}^{n} C_{jk}^{s} \mu(e_i, e_s) &= \sum_{l=1}^{n} C_{ij}^{l} \mu(e_l, e_k) \\
\sum_{s=1}^{n} C_{jk}^{s} \sum_{m=1}^{n} C_{is}^{m} e_m &= \sum_{l=1}^{n} C_{ij}^{l} \sum_{m} C_{lk}^{m} e_m \\
\sum_{m=1}^{n} (\sum_{s=1}^{n} C_{jk}^{s} C_{is}^{m} e_m - \sum_{l=1}^{n} C_{ij}^{l} C_{lk}^{m}) e_m &= 0 \\
\sum_{s=1}^{n} (C_{jk}^{s} C_{is}^{m} - C_{ij}^{s} C_{sk}^{m}) &= 0
\end{aligned}$$

La dérivation est donnée par la condition :

$$\sum_{k=1}^{n} (C_{ij}^{k} d_{mk} - C_{kj}^{m} d_{ki} - C_{ik}^{m} d_{kj}) = 0 \tag{2.1}$$

en effet :

$$\begin{aligned}
D(\mu(e_i, e_j)) &= \mu(De_i, e_j) + \mu(e_i, De_j), \\
D(\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} e_k) &= \mu(\sum_{s=1}^{n} d_{si} e_s, e_j) + \mu(e_i, \sum_{l=1}^{n} d_{lj} e_l), \\
\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} D(e_k) &= \sum_{s=1}^{n} d_{si} \mu(e_s, e_j) + \sum_{l=1}^{n} d_{lj} \mu(e_i, e_l), \\
\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} \sum_{m=1}^{n} d_{mk} e_m &= \sum_{s=1}^{n} d_{si} \sum_{m=1}^{n} C_{sj}^{m} e_m + \sum_{l=1}^{n} d_{lj} \sum_{m=1}^{n} C_{il}^{m} e_m, \\
\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} e_m &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_{sj}^{m} d_{si} e_m + \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} C_{il}^{m} d_{lj} e_m, \\
\sum_{k=1}^{n} (C_{ij}^{k} d_{mk} - C_{kj}^{m} d_{ki} - C_{ik}^{m} d_{kj}) &= 0.
\end{aligned}$$

La résolution du système des équations précidentes permet de déterminer les dérivations des algèbres associatives.

Dans la suite on donne la classification des algèbres associatives dont on calculera ses dérivées.

2.3.2 Classification des algèbres associatives

La classification des algèbres associatives de dimension n est connue pour $n \leq 5$. Nous rappelons les résultats dans les dimensions 2 et 3 . Soit$\{e_1, ..., e_n\}$ une base de l'espace vectoriel.

Proposition 2.3.1. *Toute algèbre associative de dimension 2 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

$$A_1^2 : \mu_1^2(e_1, e_1) = e_1, \mu_1^2(e_1, e_2) = e_2, \mu_1^2(e_2, e_1) = e_2, \mu_1^2(e_2, e_2) = 0,$$
$$A_2^2 : \mu_2^2(e_1, e_1) = e_1, \mu_2^2(e_1, e_2) = e_2, \mu_2^2(e_2, e_1) = e_2, \mu_2^2(e_2, e_2) = e_2.$$

Proposition 2.3.2. *Toute algèbre associative de dimension 3 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

$$A_1^3 : \begin{cases} \mu_1^3(e_1, e_1) = e_1, \mu_1^3(e_1, e_2) = e_2, \mu_1^3(e_2, e_1) = e_2, \\ \mu_1^3(e_2, e_2) = e_2, \mu_1^3(e_1, e_3) = e_3, \mu_1^3(e_3, e_1) = e_3, \\ \mu_1^3(e_2, e_3) = e_3, \mu_1^3(e_3, e_2) = e_3, \mu_1^3(e_3, e_3) = e_3. \end{cases}$$
$$A_2^3 : \begin{cases} \mu_2^3(e_1, e_1) = e_1, \mu_2^3(e_1, e_2) = e_2, \mu_2^3(e_2, e_1) = e_2, \\ \mu_2^3(e_2, e_2) = e_2, \mu_2^3(e_1, e_3) = e_3, \mu_2^3(e_3, e_1) = e_3, \\ \mu_2^3(e_2, e_3) = e_3, \mu_2^3(e_3, e_2) = e_3, \mu_2^3(e_3, e_3) = 0. \end{cases}$$
$$A_3^3 : \begin{cases} \mu_3^3(e_1, e_1) = e_1, \mu_3^3(e_1, e_2) = e_2, \mu_3^3(e_2, e_1) = e_2, \\ \mu_3^3(e_2, e_2) = e_2, \mu_3^3(e_1, e_3) = e_3, \mu_3^3(e_3, e_1) = e_3, \\ \mu_3^3(e_2, e_3) = 0, \mu_3^3(e_3, e_2) = 0, \mu_3^3(e_3, e_3) = 0. \end{cases}$$
$$A_4^3 : \begin{cases} \mu_4^3(e_1, e_1) = e_1, \mu_4^3(e_1, e_2) = e_2, \mu_4^3(e_2, e_1) = e_2, \\ \mu_4^3(e_2, e_2) = 0, \mu_4^3(e_1, e_3) = e_3, \mu_4^3(e_3, e_1) = e_3, \\ \mu_4^3(e_2, e_3) = 0, \mu_4^3(e_3, e_2) = 0, \mu_4^3(e_3, e_3) = 0. \end{cases}$$
$$A_5^3 : \begin{cases} \mu_5^3(e_1, e_1) = e_1, \mu_5^3(e_1, e_2) = e_2, \mu_5^3(e_2, e_1) = e_2, \\ \mu_5^3(e_2, e_2) = e_2, \mu_5^3(e_1, e_3) = e_3, \mu_5^3(e_3, e_1) = e_3, \\ \mu_2^3(e_2, e_3) = e_3, \mu_5^3(e_3, e_2) = 0, \mu_5^3(e_3, e_3) = 0. \end{cases}$$

2.3.3 Dérivations

Les dérivation des algèbres associatives à deux dimensions sont donnéespar le tableau ci-dessous :

Algèbre	Dérivation	Dim
A_1^2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$	1
A_2^2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0

Les dérivation des algèbres associatives de dimensions 3 sont données par le tableau ci-dessous :

Algèbre	Dérivation	Dim
A_1^3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0
A_2^3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	1
A_3^3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	1
A_4^3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$	2
A_5^3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$	2

Chapitre 3

Les dérivations des algèbres Hom-associatives

3.1 Généralité sur les algèbres Hom-associatives

3.1.1 Algèbre Hom-associative

Définition 3.1.1. *Une algèbre Hom-associative est une triplet (A, μ, α) constitué d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A, une application bilinéaire $\mu : A \times A \to A$ et une application linéaire $\alpha : A \to A$, vérifiant pour tous $x, y, z \in A$:*

$$\mu(\alpha(x), \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), \alpha(z)).$$

Elle est dite multiplicative si α est un morphisme d'algèbre :

$$\alpha(\mu(x, y)) = \mu(\alpha(x), \alpha(y)), \text{ pour tous } x, y \in A$$

Exemple 3.1.1. *$(M((n, \mathbb{K}), \mu, \alpha)$ est une Hom-algèbre associative , ou $M(n, \mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées d'ordre n sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,*

$$\mu : M(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K}) \to M(n, \mathbb{K})$$

tel que :

$$\forall A, B \in M(n, \mathbb{K}), \mu(A, B) = AB,$$

et

$$\alpha : M(n, \mathbb{K}) \to M(n, \mathbb{K}),$$

tel que :

$$\forall A \in M(n, \mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \alpha(\lambda A) = \lambda(\alpha(A)).$$

Remarque 3.1.1. *Tout algèbre associative (V, μ), sur un corps $\mathbb{K}$, est une Hom-algèbre associative pour $\alpha = id$.*

3.1.2 Sous algèbre Hom-associative et idéal

Définition 3.1.2. *Soit $A = (A, \mu, \alpha)$ une algèbre Hom-associative, un sous-espace H de A est appelé sous-algèbre Hom associative si :*

$$\mu(H, H) \subset H \text{ et } \alpha(H) \subseteq H.$$

Définition 3.1.3. *Un sous-ensemble I de (A, μ, α) est un idéal de (A, μ, α) si I est un sous-espace vectoriel de (A, μ, α) et si pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in A$, on a :*

$$\mu(x, y) \in I \text{ et } \alpha(I) \subseteq I.$$

Remarque 3.1.2. *Une application bilinéaire $\mu : v \times v \longrightarrow v$, ou v est un espace vectoriel sur un courbe K, est une application satisfaisant à :*

$$\begin{aligned}
\mu(x, y+z) &= \mu(x, y) + \mu(x, z), \\
\mu(x+y, z) &= \mu(x, z) + \mu(y, z), \\
\mu(kx, y) &= k\mu(x, y), \\
\mu(x, ky) &= k\mu(x, y).
\end{aligned}$$

3.1.3 Morphisme d'algèbre Hom-associative

Définition 3.1.4. *Soient (A_1, μ_1, α_1) et (A_2, μ_2, α_2) deux algèbres de Hom-associatives. une application linéaire $\varphi : A_1 \to A_2$ est un morphisme d'algèbre Hom-associative si pour tous $x, y \in A_1$:*

$$\varphi(\mu_1(x, y)) = \mu_2(\varphi(x), \varphi(y)) \text{ et } \varphi(x) \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi(x).$$

En particulier, les algèbres Hom-associatives (A_1, μ_1, α_1) et (A_2, μ_2, α_2) sont isomorphes si φ est également bijective.

Proposition 3.1.1. *Soit (v, μ, α) une algèbre Hom-associative,supposez $\alpha(x) = kx$ pour tout $x \in v$ ou $k \neq 0$ est une élément fixe dans k. Alors la associative tient la preuve.*
Soit $x, y, z \in v$ alors

$$\mu(\alpha(x), \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), \alpha(z)),$$

on obtient

$$\mu(kx, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), kz),$$

par bilinéarité,on obtient

$$k\mu(x, \mu(y, z)) = k\mu(\mu(x, y), z),$$

puisque K est un corps, et $k \in K$, ceci implique que

$$\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z),$$

3.2 Algèbres multiplicative

Les algèbres Hom-associatives multiplicatives sont une classe d'algèbres Hom-associatives, que nous présenterons dans la définition suivante

Définition 3.2.1. *Une algèbre Hom-associative (v, μ, α) est multiplicative si*

$$\alpha(\mu(x, y)) = \mu(\alpha(x), \alpha(y))$$

pour tout $x, y \in V$

3.3 Algèbre Hom-Lie

Définition 3.3.1. *On appel algèbre Hom-Lie le triplet $(\mathcal{G}, [,], \alpha)$ ou $\mathcal{G}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $[,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ est une application bilinéaire et $\alpha : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ une application linéaire tels que :*
(l'antisymtrique)

$$[x, y] = -[y, x].$$

(l'identité de Hom-Jacobi)

$$[\alpha(x), [y, z]] + [\alpha(y), [z, x]] + [\alpha(z), [x, y]] = 0,$$

pour tous $x, y, z \in \mathcal{G}$.

— *Une algèbre de Hom-lie $(\mathcal{G}, [,], \alpha)$ est dite multiplicative si α est un morphisme d'algèbre, c'est à dire :*

$$\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)], \forall x, y \in \mathcal{G}.$$

Il est dite régulière si α est un automorphisme algébrique.

Proposition 3.3.1. *On peut associer a chaque algèbre Hom-associative (A, μ, α), une algèbre Hom-lie dont le crochet est défini pour tous $x, y \in A$ par : $[x, y] = \mu(x, y) - \mu(y, x)$.*

Démonstration 2. *Le crochet est anti-symétrique et avec un calcule direct nous avons :*

$$\begin{aligned}
[\alpha(x),[y,z]]+[\alpha(y),[z,x]]+[\alpha(z),[x,y]] &= \mu(\alpha(x),\mu(y,z))-\mu(\alpha(x),\mu(z,y))-\mu(\mu(y,z),\alpha(x))\\
&+ \mu(\mu(z,y),\alpha(x))+\mu(\alpha(y),\mu(z,x))-\mu(\alpha(y),\mu(x,z))\\
&- \mu(\mu(z,x),\alpha(y))+\mu(\mu(x,z),\alpha(y))+\mu(\alpha(z),\mu(x,y))\\
&- \mu(\alpha(z),\mu(y,z))-\mu(\mu(x,y),\alpha(z))+\mu(\mu(y,x),\alpha(z))\\
&= 0
\end{aligned}$$

3.4 Principe de twist

Le théorème suivant donne un moyen aisé permettant de déformer des structures usuelles en Hom-structures

Théorème 3.4.1. — *Soit $A=(A,\mu)$ une algèbre associative et $\alpha : A \longrightarrow A$ une application linéaire que est multiplicative par rapport à μ, c'est à dire :*

$$\alpha\circ\mu(x,y)=\mu(\alpha(x),\alpha(y)).$$

Alors $A_\alpha=(A,\mu_\alpha=\alpha\circ\mu,\alpha)$ est une algèbre Hom-associative.

Démonstration 3.

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha(\alpha(x),\mu_\alpha(y,z)) &= \mu_\alpha(\mu_\alpha(x,y),\alpha(z))\\
\alpha\circ\mu(\alpha(x),\alpha\circ\mu(y,z)) &= \alpha\circ\mu(\alpha\circ\mu(x,y),\alpha(z))\\
\mu(\alpha^2(x),\mu(\alpha^2(y),\alpha^2(z)) &= \mu(\mu(\alpha^2(x),\alpha^2(y)),\alpha^2(z))\\
\alpha^2(\mu(x,\mu(y,z)) &= \alpha^2(\mu(\mu(x,y),z))\\
(\mu(x,\mu(y,z)) &= (\mu(\mu(x,y),z)).
\end{aligned}$$

3.5 Dérivation des algèbres Hom-associatives

Définition 3.5.1. *Soit (A,μ,α) une algèbre Hom-associative multiplicative. une application linéaire $D : A\to A$, est une α-dérivation de l'algèbre Hom-associative multiplicative (A,μ,α) si :*

$$\mu(D,\alpha)=0 \ \textit{i.e}\ D\circ\alpha=\alpha\circ D.$$

et

$$D(\mu(x,y)) = \mu(D(x),\alpha(y)) + \mu(\alpha(x),D(y)), \forall x,y \in A.$$

Nous désignons par $Der_\alpha\alpha(A)$ l'ensemble des α-dérivation de l'algèbre Hom-associative multiplicative(A,μ,α).

3.5.1 Algorithme pour trouver les dérivations des algèbres Hom-associatives

Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ un base d'algèbre Hom-associative A de dimension n. On identifie μ à ses constantes de structure C_{ij}^k :

$$\mu(e_i,e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k,$$

et dans la base $\{e_i\}_{i=1..n}$

$$D(e_i) = \sum_{j=1}^{n} d_{ji} e_j,$$
et
$$\alpha(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j.$$

On a donc

$$\alpha \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{2n} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

la Hom-associativité est donnée par la condition :

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_{si}C_{jk}^l C_{sl}^m - C_{ij}^l a_{sk} C_{ls}^m) = 0. \tag{3.1}$$

en effet :

$$\begin{aligned}
\mu(\alpha(e_i),\mu(e_j,e_k)) &= \mu(\mu(e_i,e_j),\alpha(e_k)),\\
\mu(\sum_{s=1}^{n}e_s,\sum_{l=1}^{n}C_{jk}^{l}e_l) &= \mu(\sum_{l=1}^{n}C_{ij}^{l}e_l,\sum_{s=1}^{n}a_{sk}e_s),\\
\sum_{s=1}^{n}a_{si}\sum_{l=1}^{n}C_{jk}^{l}\mu(e_s,e_l) &= \sum_{l=1}^{n}C_{ij}^{l}\sum_{s=1}^{n}a_{sk}\mu(e_l,e_s)\\
\sum_{s=1}^{n}a_{si}\sum_{l=1}^{n}C_{jk}^{l}\sum_{m=1}^{n}C_{sl}^{m}e_m &= \sum_{l=1}^{n}C_{ij}\sum_{s=1}^{n}a_{sk}\sum_{m=1}^{n}C_{ls}^{m}e_m,\\
\sum_{m=1}^{n}(\sum_{s=1}^{n}a_{si}\sum_{l=1}^{n}C_{sl}^{m}-\sum_{l=1}^{n}C_{ij}^{l}\sum_{s=1}^{n}a_{sk}C_{ls}^{m})e_m &= 0,\\
\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_{si}C_{jk}^{l}C_{sl}^{m}-C_{ij}^{l}a_{sk}C_{ls}^{m}) &= 0.
\end{aligned}$$

La multiplicativité de α est donnée par :

$$\begin{aligned}
\alpha(\mu(e_i,e_j)) &= \mu(\alpha(e_i),\alpha(e_j)),\\
\alpha(\sum_{s=1}^{n}C_{ij}^{s}e_s) &= \mu(\sum_{l=1}^{n}a_{il}e_l,\sum_{k=1}^{n}a_{kj}e_k),\\
\sum_{s=1}^{n}C_{ij}^{s}\alpha(e_s) &= \sum_{l=1}^{n}a_{li}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\mu(e_l,e_k),\\
\sum_{s=1}^{n}C_{ij}^{s}\sum_{m=1}^{n}a_{ms}e_m &= \sum_{l=1}^{n}a_{li}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\sum_{m=1}^{n}C_{lk}^{m}e_m,\\
\sum_{m=1}^{n}(\sum_{s=1}^{n}C_{ij}^{s}a_{ms}-\sum_{l=1}^{n}a_{il}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}C_{lk}^{m})e_m &= 0,
\end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^{n}(C_{ij}^{l}a_{ml}-a_{li}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}C_{lk}^{m})=0. \tag{3.2}$$

La commutativité de D et α est donnée par :

$$\begin{aligned}
\alpha\circ D &= D\circ\alpha,\\
\alpha(D(e_i)) &= D(\alpha(e_i)),\\
\alpha\sum_{p=1}^{n}d_{pi}e_p-D(\sum_{p=1}^{n}a_{pi}e_p) &= 0,\\
\sum_{p=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}d_{pi}a_{ps}e_s-\sum_{p=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{pi}d_{ps}e_s &= 0.
\end{aligned}$$

$$\sum_{p=1}^{n}(d_{pi}a_{ps} - a_{pi}d_{ps}) = 0. \tag{3.3}$$

Exprimant maintenant la dérivation en terme de constantes de structure :(des le cas multiplicatif)

$$\sum_{S=1}^{n}(C_{pq}^{s}d_{ms} - (d_{sp}C_{sq}^{m} - d_{sq}C_{sq}^{m})) = 0. \tag{3.4}$$

En effet :

$$D(\mu(\alpha(e_i), \alpha(e_j))) = \mu(D(\alpha(e_i)), (\alpha(e_j))) + \mu(\alpha(e_i), D(\alpha(e_j)).$$

$$D'ou : D[\mu(\sum_{p=1}^{n}a_{pi}e_p, (\sum_{q=1}^{n}a_{qj}e_j)] = \mu(D(\sum_{p=1}^{n}a_{pi}e_p), \sum_{q=1}^{n}a_{qj}e_q) + \mu(\sum_{p=1}^{n}a_{pi}e_p, D(\sum_{q=1}^{n}a_{qj}e_q)).$$

Donc on aura

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(a_{pi}a_{pj}C_{pq}^{s}D(e_s) - (a_{pi}a_{pj}d_{sp}\mu(e_s, e_q) - a_{pi}a_{qj}d_{sq}\mu(e_p, e_s)) &= 0,\\ \sum_{S=1}^{n}(C_{pq}^{s}d_{ms} - (d_{sp}C_{sq}^{m} - d_{sq}C_{sq}^{m})) &= 0.\end{aligned}$$

La résolution du système des équations précidentes permet de déterminer les dérivations des algèbres Hom-associatif.
Dans la suite on donne la classification des algèbres hom-associatives dont on calculera ses dérivées.

3.5.2 La classification des algèbres Hom-associative

Dans cette partie, on rappelle quelques classification des algèbre Hom-associative en dimension 2 et 3. Ahmed Al-Zahari a donne toutes les classification des algèbres Hom-associative en dimension 2 et 3

Proposition 3.5.1. *Nous devons considérer deux classes de morphismes qui sont données par les formes de Jordan et qui sont représentées par :* $\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$,$\alpha = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
Toute algèbre Hom-associative de dimension 2 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

1. *Premier cas :* $\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$$A_1^2 : \begin{cases} \mu_1^2(e_1, e_1) = -a_1 e_1, \mu_1^2(e_1, e_2) = a_1 e_2, \alpha(e_1) = e_1, \\ \mu_1^2(e_2, e_1) = a_1 e_2, \mu_1^2 = b_1 e_1, \alpha(e_2) = -e_2. \end{cases}$$

$$A_2^2 : \begin{cases} \mu_2^2(e_1, e_1) = a_2 e_1, \mu_2^2(e_1, e_2) = 0, \alpha(e_1) = e_1, \\ \mu_2^2(e_2, e_1) = 0, \mu_2^2(e_2, e_2) = b_2 e_2, \alpha(e_2) = 0. \end{cases}$$

$$A_3^2 : \begin{cases} \mu_3^2(e_1, e_1) = 0, \mu_3^2(e_1, e_2) = k a_3 e_1, \alpha(e_1) = k e_1, \\ \mu_3^2(e_2, e_1) = k a_3 e_1, \mu_3^2(e_2, e_2) = a_3 e_2, \alpha(e_2) = e_2. \end{cases}$$

$$A_4^2 : \begin{cases} \mu_4^2(e_1, e_1) = 0, \mu_4^2(e_1, e_2) = a_4 e_1, \alpha(e_1) = \frac{a_4}{b_4} e_1, \\ \mu_4^2(e_2, e_1) = a_4 e_1, \mu_4^2(e_2, e_2) = b_4 e_2, \alpha(e_2) = e_2. \end{cases}$$

$$A_5^2 : \begin{cases} \mu_5^2(e_1, e_1) = a_5 e_1, \mu_5^2(e_1, e_2) = b_5 e_2, \alpha(e_1) = e_1, \\ \mu_5^2(e_2, e_1) = b_5 e_2, \mu_5^2(e_2, e_2) = 0, \alpha(e_2) = \frac{b_5}{a_5} e_2. \end{cases}$$

$$A_6^2 : \begin{cases} \mu_6^2(e_1, e_1) = a_6 e_1, \mu_6^2(e_1, e_2) = 0, \alpha(e_1) = 0, \\ \mu_6^2(e_2, e_1) = 0, \mu_6^2(e_2, e_2) = 0, \alpha(e_2) = k e_2. \end{cases}$$

$$A_7^2 : \begin{cases} \mu_7^2(e_1, e_1) = a_7 e_2, \mu_7^2(e_1, e_2) = 0, \alpha(e_1) = k e_1, \\ \mu_7^2(e_2, e_1) = 0, \mu_7^2(e_2, e_2) = 0, \alpha(e_2) = k^2 e_2. \end{cases}$$

2. *Deuxième cas* : $\alpha = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$$A_8^2 : \begin{cases} \mu_8^2(e_1, e_1) = 0, \mu_8^2(e_1, e_2) = a_8 e_2, \alpha(e_1) = 0, \\ \mu_8^2(e_2, e_1) = b_8 e_2, \mu_8^2(e_2, e_2) = c_8 e_1, \alpha(e_2) = e_1. \end{cases}$$

$$A_9^2 : \begin{cases} \mu_9^2(e_1, e_1) = 0, \mu_9^2(e_1, e_2) = a_9 e_1, \alpha(e_1) = e_1, \\ \mu_9^2(e_2, e_1) = 0, \mu_9^2(e_2, e_2) = a_9 e_1 + a_9 e_2, \alpha(e_2) = e_1 + e_2. \end{cases}$$

$$A_{10}^2 : \begin{cases} \mu_{10}^2(e_1, e_1) = 0, \mu_{10}^2(e_1, e_2) = 0, \alpha(e_1) = e_1, \\ \mu_{10}^2(e_2, e_1) = a_{10} e_1, \mu_{10}^2(e_2, e_2) = a_{10} e_1 + a_{10} e_2, \alpha(e_2) = e_1 + e_2. \end{cases}$$

Proposition 3.5.2. *Toute algèbre Hom-associative de dimension 3 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

1. *Première cas* : $\alpha = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

$$A_1^3 : \begin{cases} \mu_1^3(e_1,e_1)=0, \mu_1^3(e_2,e_3)=0, \\ \mu_1^3(e_1,e_2)=p_{21}e_1+p_{23}e_3, \mu_1^3(e_3,e_1)=0, \alpha(e_1)=0, \\ \mu_1^3(e_1,e_3)=p_{31}e_1+p_{33}e_3, \mu_1^3(e_3,e_2)=p_{81}e_1+p_{83}e_3, \alpha(e_2)=e_1, \\ \mu_1^3(e_2,e_1)=0, \mu_1^3(e_3,e_3)=p_{91}e_1+p_{93}e_3, \alpha(e_3)=0, \\ \mu_1^3(e_2,e_2)=p_{51}e_1+p_{53}e_3. \end{cases}$$

$$A_2^3 : \begin{cases} \mu_2^3(e_1,e_1)=0, \mu_2^3(e_2,e_3)=p_{81}e_1, \\ \mu_2^3(e_1,e_2)=p_{21}e_1, \mu_2^3(e_3,e_1)=e_{71}e_1, \alpha(e_1)=0, \\ \mu_2^3(e_1,e_3)=p_{31}e_1, \mu_2^3(e_3,e_2)=p_{81}e_1, \alpha(e_2)=e_1, \\ \mu_2^3(e_2,e_1)=0, \mu_2^3(e_3,e_3)=p_{91}e_1, \alpha(e_3)=0, \\ \mu_2^3(e_2,e_2)=p_{51}e_1. \end{cases}$$

$$A_3^3 : \begin{cases} \mu_3^3(e_1,e_1)=0, \mu_3^3(e_2,e_3)=p_{61}e_1, \\ \mu_3^3(e_1,e_2)=p_{21}e_1, \mu_3^3(e_3,e_1)=0, \alpha(e_1)=0, \\ \mu_3^3(e_1,e_3)=0, \mu_3^3(e_3,e_2)=p_{81}e_1, \alpha(e_2)=e_1, \\ \mu_3^3(e_2,e_1)=0, \mu_3^3(e_3,e_3)=0, \alpha(e_3)=ce_3, \\ \mu_3^3(e_2,e_2)=p_{51}e_1. \end{cases}$$

$$A_4^3 : \begin{cases} \mu_4^3(e_1,e_1)=0, \mu_4^3(e_2,e_3)=p_{61}e_1, \\ \mu_4^3(e_1,e_2)=0, \mu_4^3(e_3,e_1)=0, \alpha(e_1)=0, \\ \mu_4^3(e_1,e_3)=0, \mu_4^3(e_3,e_2)=p_{81}e_1, \alpha(e_2)=e_1+e_2, \\ \mu_4^3(e_2,e_1)=0, \mu_3^3(e_3,e_3)=p_{91}e_1, \alpha(e_3)=e_3, \\ \mu_4^3(e_2,e_2)=p_{51}e_1. \end{cases}$$

$$A_5^3 : \begin{cases} \mu_5^3(e_1,e_1)=0, \mu_5^3(e_2,e_3)=0, \\ \mu_5^3(e_1,e_2)=-p_{43}e_3, \mu_5^3(e_3,e_1)=0, \alpha(e_1)=ae_1, \\ \mu_5^3(e_1,e_3)=0, \mu_5^3(e_3,e_2)=0, \alpha(e_2)=e_1+ae_2, \\ \mu_5^3(e_2,e_1)=p_{43}e_3, \mu_5^3(e_3,e_3)=0, \alpha(e_3)=a^2e_3, \\ \mu_5^3(e_2,e_2)=p_{52}e_3. \end{cases}$$

$$A_6^3 : \begin{cases} \mu_6^3(e_1,e_1)=0, \mu_6^3(e_2,e_3)=p_{61}e_1, \\ \mu_6^3(e_1,e_2)=0, \mu_6^3(e_3,e_1)=0, \alpha(e_1)=ae_1, \\ \mu_6^3(e_1,e_3)=0, \mu_6^3(e_3,e_2)=p_{81}e_1, \alpha(e_2)=e_1+ae_2, \\ \mu_6^3(e_2,e_1)=0, \mu_6^3(e_3,e_3)=0, \alpha(e_3)=e_3, \\ \mu_6^3(e_2,e_2)=0. \end{cases}$$

$$A_7^3 : \begin{cases} \mu_7^3(e_1,e_1)=0, \mu_7^3(e_2,e_3)=0, \\ \mu_7^3(e_1,e_2)=0, \mu_7^3(e_3,e_1)=0, \alpha(e_1)=e_1, \\ \mu_7^3(e_1,e_3)=0, \mu_7^3(e_3,e_2)=0, \alpha(e_2)=e_1+e_2, \\ \mu_7^3(e_2,e_1)=0, \mu_7^3(e_3,e_3)=p_{11}e_1, \alpha(e_3)=-e_3, \\ \mu_7^3(e_2,e_2)=p_{51}e_1. \end{cases}$$

2. *2éme cas* : $\alpha = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$$A_8^3 : \begin{cases} \mu_8^3(e_1,e_1)=0, \mu_8^3(e_2,e_3)=p_{61}e_1, \\ \mu_8^3(e_1,e_2)=0, \mu_8^3(e_3,e_1)=0, \alpha(e_1)=0, \\ \mu_8^3(e_1,e_3)=p_{31}e_1, \mu_8^3(e_3,e_2)=p_{81}e_1, \alpha(e_2)=e_1, \\ \mu_8^3(e_2,e_1)=0, \mu_8^3(e_3,e_3)=p_{91}e_1, \alpha(e_3)=e_2, \\ \mu_8^3(e_2,e_2)=0. \end{cases}$$

$$A_9^3 : \begin{cases} \mu_9^3(e_1,e_1)=0, \mu_9^3(e_2,e_3)=-p_{81}e_1, \\ \mu_9^3(e_1,e_2)=0, \mu_9^3(e_3,e_1)=0, \alpha(e_1)=e_1, \\ \mu_9^3(e_1,e_3)=0, \mu_9^3(e_3,e_2)=p_{81}e_1, \alpha(e_2)=e_1+e_2, \\ \mu_9^3(e_2,e_1)=0, \mu_9^3(e_3,e_3)=p_{91}e_1, \alpha(e_3)=e_2+e_3, \\ \mu_9^3(e_2,e_2)=0. \end{cases}$$

3.5.3 Dérivation des algèbres Hom-associative

Les dérivation des algèbres Hom-associatives de dimension deux sont données dans le tableau ci-dessous :

Algèbre	Dérivation	Dim
A_1^2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0
A_2^2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0
A_3^2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$	1
A_4^2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$	1
A_5^2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$	1
A_6^2	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_2 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix}$	2
A_7^2	$\begin{pmatrix} \frac{a+b}{c} & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$	1
A_8^2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0
A_9^2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0

Remarque 3.5.1. *D ne commute pas avec α pour A_{10}^2*

Et les dérivation des algèbres Hom-associatives de dimensions 3 sont données dans le tableau ci-dessous :

Algèbre	Dérivation	Dim
A_1^3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0
A_2^3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0
A_3^3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0
A_4^3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0
A_5^3	$\begin{pmatrix} 2b_2 & b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2

A_6^3	$\begin{pmatrix} c_3 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$	3
A_7^3	$\begin{pmatrix} c_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & c_3 & -c_2 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$	3
A_8^3	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_3 & a_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}c_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$	3
A_9^3	$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$	3

.

Annexe

Dérivations des algèbres associatives

$n = 2;$

$\text{CC} = \text{Flatten}[\text{Table}[c[i,j,k], \{i,1,n\}, \{j,1,n\}, \{k,1,n\}]]$

$\{c[1,1,1], c[1,1,2], c[1,2,1], c[1,2,2], c[2,1,1], c[2,1,2], c[2,2,1], c[2,2,2]\}$

$\text{DD} = \text{Array}[d, \{n,n\}]$

$\{\{d[1,1], d[1,2]\}, \{d[2,1], d[2,2]\}\}$

$\text{For}[i = 1, i \leq n, i{+}{+}, \text{For}[j = 1, j \leq n, j{+}{+}, \text{For}[k = 1, k \leq n, k{+}{+}, c[i,j,k] = 0]]]$

$c[1,1,1] = 1; c[1,2,2] = 1; c[2,1,1] = 1; c[2,2,2] = 1;$

initialisation

L'associativité

$\text{Ass}[\text{i\_}, \text{j\_}, \text{k\_}, \text{m\_}] := \sum_{s=1}^{n} (c[j,k,s]c[i,s,m] - c[i,j,s]c[s,k,m]);$

$\text{AssSyst} = \text{Union}[\text{Flatten}[\text{Table}[\text{Simplify}[\text{Ass}[i,j,k,m]], \{i,n\}, \{j,n\}, \{k,n\}, \{m,n\}]]]$

$\{0\}$

La dérivation

$\text{Dev}[\text{i\_}, \text{j\_}, \text{m\_}] := \sum_{k=1}^{n} (c[i,j,k]d[m,k] - c[k,j,m]d[k,j] - c[i,k,m]d[k,j])$

$\text{DevSyst} = \text{Union}[\text{Flatten}[\text{Table}[\text{Simplify}[\text{Dev}[i,j,m]], \{i,n\}, \{j,n\}, \{m,n\}]]]$

$\{0, -d[1,1] - d[2,1], -d[1,2] - d[2,2]\}$

Résolution :

Systsm = {AssSyst, DevSyst}

$\{\{0\},\{0,-d[1,1]-d[2,1],-d[1,2]-d[2,2]\}\}$

sol = Reduce[Systsm == 0, Variables[Systsm]]

$d[2,1]==-d[1,1]\&\&d[2,2]==-d[1,2]$

Dérivations des algèbres Hom-associatives

$n=3$;

AA = Array[λ, {n, n}]

For[$i=1, i\leq n, i$++, For[$j=1, j\leq n, j$++, For[$k=1, k\leq n, k$++, $c[i,j,k]=0$]]]

$c[1,1,1]$ = p[11]; $c[2,2,2]$ = p[39]; $c[3,3,3]$ = p[52];

For[$i=1, i\leq n, i$++, For[$j=1, j\leq n, j$++, $\lambda[i,j]=0$]]

$\lambda[2,2]=1$;

{p[11], 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, p[39], 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, p[52]}

$\{\{1,0,0\},\{0,1,0\},\{0,0,0\}\}$

$\{\{d[1,1],d[1,2],d[1,3]\},\{d[2,1],d[2,2],d[2,3]\},\{d[3,1],d[3,2],d[3,3]\}\}$

initialisation

Commutativité

Mor[i_, j_, m_] := $\sum_{l=1}^{n}\left(c[i,j,l]\lambda[m,l]-\sum_{k=1}^{n}\lambda[l,i]\lambda[k,j]c[l,k,m]\right)$;

MorSyst = Union[Flatten[Table[Simplify[Mor[i,j,m]], {i,n}, {j,n}, {m,n}]]]

$\{0\}$

Hom-Associativité

HAss[i_, j_, k_, m_] := $\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\lambda[i,s]c[j,k,l]c[s,l,m]-c[i,j,l]\lambda[s,k]c[l,s,m])$

HAssSyst = Union[Flatten[Table[Simplify[HAss[i,j,k,m]], {i,n}, {j,n}, {k,n}, {m,n}]]]

$\{0\}$

Multiplicativité

Mul[i_, s_] := $\sum_{p=1}^{n}(d[p,i]\lambda[p,s] - d[p,s]\lambda[p,i])$
MulSyst = Union[Flatten[Table[Simplify[Mul[i, s]], {i, n}, {s, n}]]]
$\{0, -d[1,3], d[1,3], d[1,2] - d[2,1], -d[1,2] + d[2,1], -d[2,3], d[2,3]\}$

Hom-Dérivation

Hdev[p_, q_, m_] := $\sum_{s=1}^{n}(c[p,q,s]d[s,m] - (c[s,q,m]d[p,s] - c[p,s,m]d[q,s]))$
HdevSyst = Union[Flatten[Table[Simplify[Hdev[p, q, m]], {p, n}, {q, n}, {m, n}]]]
$\{0, d[1,1]\mathrm{p}[11], d[1,2]\mathrm{p}[11], d[1,3]$
$\mathrm{p}[11], -d[2,1]\mathrm{p}[11], d[2,1]\mathrm{p}[11], -d[3,1]\mathrm{p}[11], d[3,1]\mathrm{p}[11], -d[1,2]$
$\mathrm{p}[39], d[1,2]\mathrm{p}[39], d[2,1]\mathrm{p}[39], d[2,2]\mathrm{p}[39], d[2,3]\mathrm{p}[39], -d[3,2]\mathrm{p}[39], d[3,2]\mathrm{p}[39], -d[1,3]$
$\mathrm{p}[52], d[1,3]\mathrm{p}[52], -d[2,3]\mathrm{p}[52], d[2,3]\mathrm{p}[52], d[3,1]\mathrm{p}[52], d[3,2]\mathrm{p}[52], d[3,3]\mathrm{p}[52]\}$
syst = Union[MorSyst, HAssSyst, MulSyst, HdevSyst]
$\{0, -d[1,3], d[1,3], d[1,2]-d[2,1], -d[1,2]+d[2,1], -d[2,3], d[2,3], d[1,1]\mathrm{p}[11], d[1,2]\mathrm{p}[11], d[1,3]$
$\mathrm{p}[11], -d[2,1]\mathrm{p}[11], d[2,1]\mathrm{p}[11], -d[3,1]\mathrm{p}[11], d[3,1]\mathrm{p}[11], -d[1,2]\mathrm{p}[39], d[1,2]\mathrm{p}[39], d[2,1]\mathrm{p}[39], d[2,2]$
$\mathrm{p}[39], d[2,3]\mathrm{p}[39], -d[3,2]\mathrm{p}[39], d[3,2]\mathrm{p}[39], -d[1,3]\mathrm{p}[52], d[1,3]\mathrm{p}[52], -d[2,3]\mathrm{p}[52], d[2,3]$
$\mathrm{p}[52], d[3,1]\mathrm{p}[52], d[3,2]\mathrm{p}[52], d[3,3]\mathrm{p}[52]\}$
Reduce[syst == 0, Variables[syst]]
$((d[1,3] == 0\&\&d[2,1] == d[1,2]\&\&d[2,3] == 0\&\&\mathrm{p}[11] == 0\&\&\mathrm{p}[39] == 0$
$\&\&\mathrm{p}[52] == 0)\|(d[1,1] == 0\&\&d[1,2] == 0\&\&d[1,3] == 0\&\&d[2,1] == 0\&\&d[2,3] ==$
$0\&\&d[3,1] == 0\&\&\mathrm{p}[39] == 0\&\&\mathrm{p}[52] == 0)\|(d[1,2] == 0\&\&d[1,3] == 0\&\&d[2,1] ==$
$0\&\&d[2,2] == 0\&\&d[2,3] == 0\&\&d[3,2] == 0\&\&\mathrm{p}[11] == 0\&\&\mathrm{p}[52] == 0)\|(d[1,3] ==$
$0\&\&d[2,1] == d[1,2]\&\&d[2,3] == 0\&\&d[3,1] == 0\&\&d[3,2] == 0\&\&d[3,3] ==$
$0\&\&\mathrm{p}[11] == 0\&\&\mathrm{p}[39] == 0)\|(d[1,1] == 0\&\&d[1,2] == 0\&\&d[1,3] == 0\&\&d[2,1] ==$
$0\&\&d[2,2] == 0\&\&d[2,3] == 0\&\&d[3,1] == 0\&\&d[3,2] == 0\&\&d[3,3] == 0)\|(d[1,1] ==$
$0\&\&d[1,2] == 0\&\&d[1,3] == 0\&\&d[2,1] == 0\&\&d[2,2] == 0\&\&d[2,3] == 0\&\&d[3,1] ==$
$0\&\&d[3,2] == 0\&\&\mathrm{p}[52] == 0)\|(d[1,1] == 0\&\&d[1,2] == 0\&\&d[1,3] == 0\&\&d[2,1] ==$
$0\&\&d[2,3] == 0\&\&d[3,1] == 0\&\&d[3,2] == 0\&\&d[3,3] == 0\&\&\mathrm{p}[39] == 0)\|(d[1,2] ==$
$0\&\&d[1,3] == 0\&\&d[2,1] == 0\&\&d[2,2] == 0\&\&d[2,3] == 0\&\&d[3,1] == 0\&\&d[3,2] ==$
$0\&\&d[3,3] == 0\&\&\mathrm{p}[11] == 0))$

conclusion

Dans ce mémoire on calcule les dérivations des algèbres associatives et Hom-associatives sous le logiciel Mathematica. On identifie les équations satisfaisant les conditions de dérivations à leurs constantes de structure. La résolution du système des équations donne les dérivations.

Bibliographie

[1] I.Assem, *Cours d'algèbre "Groupes, anneaux, modules et corps"*, Cours Et Exercices-Dunod (1997)

[2] M.A.Alenezi, *On an Algorithm for Finding Derivations of Associative Algebras*, Pure Mathematical sciences, vol.9,2020, no.1,13-20.

[3] Z.Chebel, *Sur les bialgèbres faibles et les algèbres de Hopf faibles*, Thèse de doctorat université des fréres mentouri constantine 1,2018.

[4] M.A.Fiidow, I.S.Rakhimov and S.K.Said Husain, *Centroids and Derivations of Associative Algebras* ,All content following this page was uploaded by isamiddin rakhimov on 28 December 2015.

[5] O.c.Hazlett, *On classification and invariance characterization of nilpotent algebras*, Amer.J.Math,vol.38(2),pp.109-138,1916.

[6] A.Makhlouf and S.Silvestrov"Hom-algebras and hom-calgebras", Journal of Algebra and its Applications Vol. 09, No. 04, pp. 553-589 (2010.)

[7] A.Makhlouf, *Algèbres associatives et calcul formel(Associative algebras and computer algebra)*,theoretical computer science 187 (1997) 123-145.

[8] G. Mazzola, *The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five*, manuscripta mathematica volume 27, pages81–101 (1979).

[9] B.Peirce, *Linear associative algebra*, amer.J.Math ;vol.79,pp.391-404,2009.

[10] I.S.Rakhimov,I.M.Rikhsiboev and W.Basri, *Complete lists of low dimensional complex associative algebras*, All content following this page was uploaded by lkrom rikhsiboev on 18 april 2014.

[11] A.Zahari et Abdou Damdji, *Etude et classification des algèbres Hom-associatives* , Submitted on 1 Mar 2018.

[12] Hom-algèbres and coalgebras , Journal of algebra and its application (9)(2010),no 4,p.553-589.