الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد البشير الإبراهيمي برج بوعريريج

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

UNIVERSITE MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI
BORDJ BOU ARRERIDJ

محاضرات في مقياس الإحصاء 2

مدعمة بملخصات أبحاث الأعمال الموجهة

موجهة لطلبة السنة الأولى ليسانس
جذع مشترك

إعداد:

الدكتور براهم شاوش توفيق

أستاذ باحث بقسم العلوم الاقتصادية

سلسلة المحاضرات والدروس الجامعية

محتوى المقياس

الفصل الأول: مفاهيم عامة حول الحوادث

في كثير من الحالات ما تصادفنا في حياتنا اليومية العديد من الظواهر التي لا يمكن مسبقا التأكد من حدوثها من عدمه، فلا يمكن معرفة الوجه الظاهر عند رمي قطعة النقود، ولا يمكن معرفة من سيفوز في مباراة كرة القدم التي ستجمع الفريقين، وحتى إن كان من الممكن التحكم في العوامل المختلفة التي تسيطر على الظاهرة فهناك عوامل أخرى غير مرتقبة أو مجهولة تؤثر في النتائج المنتظرة، فيمكن تهيئة كل الشروط الملائمة والظروف المثلى للعملية الإنتاجية إلا أنه لا يمكن التأكد بصفة دقيقة من الحصول على أعلى إنتاجية.

غير أن جهلنا بالنتائج المنتظرة غير كلي، فلكل ظاهرة من الظواهر المذكورة سابقا يمكن إرفاقها بعدد يعبر عن أملنا في حدوث الظاهرة فنقول نحصل على الوجه عند رمي قطعة النقود باحتمال 0.5، وفرصة فوز الفريق الأول بنسبة **0.65**.

إن دراسة المتغيرات العشوائية يستلزم فهم بعض المصطلحات والمفاهيم التي سيتم استخدامها.

1. التجربة والتجربة العشوائية:

هي كل عملية لإعادة مقصودة ومصطنعة لظاهرة معينة ينتج عنها مجموعة من النتائج الممكنة، وذلك يكون يهدف منها الملاحظة أو القياس، ، وقد يتم إجراء هذه التجربة في ظل شروط معينة ومدروسة قد يمكن التحكم بها وضبطها كالتجارب في المخابر العلمية وقد تكون خارج نطاق تحكمنا ولا يمكن الإلمام بجميع الشروط المؤثرة فيها (كالتجارب في العلوم الإنسانية)، ونحن نهتم بالتجربة العشوائية أو التجربة الاحتمالية وهي تلك التي لا يمكن تحديد نتيجتها مسبقا قبل إجراء التجربة بشكل وحيد لأنها تعتمد على الصدفة العشوائية، فهي تجربة واقعية تجرى تحت شروط معينة، ويمكن أن ينتج منها أكثر من نتيجة، ويكون كل ناتج من نواتجها ممكنا أي محتمل الوقوع ولكنه غير مؤكد التحقق أو الوقوع.

2. الحدث:

تعتبر كلمة الحدث مصطلحا هاما في نظرية الاحتمالات، ويعرف الحدث بالواقعة أو الظاهرة التي يمكن أن تتحقق أو لا تتحقق أثناء القيام بالتجربة كإكمال الطالب أو عدم إكماله الدراسة في الجامعة، إلا أنه يجب الإشارة أنه لا نهتم بتحقق الحدث وعدم تحققه فقط، بل يجب النظر إلى الأشكال التي يتحقق بها أو التي لا يتحقق بها، فقد يمكن أن يتم دراسته في أربع سنوات أو خمس أو أكثر، وقد لا يتمها لأسباب اجتماعية أو صحية أو غير ذلك ولهذا يجب أن لا ينظر للحدث من وجهين فقط (التحقق وعدمه) بل على العكس تماما، يجب أن نتذكر دائما أن كل من حالتي التحقق وعدمه يمكن أن تتضمن عددا كبيرا من الحالات الممكنة لكل منها .

3. أنواع الحوادث

أ- فراغ الحوادث الأولية (Ω)

ونرمز لها بالرمز (Ω)، وهي مجموعة تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة، بحيث أن كل نتيجة ممكنة من نتائج هذه التجربة تمثل حدثا بذاته وتوافق عنصرا من عناصر فراغ العينة.

مثلا: رمي زهرة نرد مرقمة من الواحد إلى (6) فإن فراغ الحوادث الأولية $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

انطلاقا من النتائج الممكنة للتجربة الاحتمالية يمكننا أن نقول إن الحوادث تختلف بين الطبيعة والنوعية.

ب- الحدث البسيط: (الحدث الأولي):

إن كل نتيجة من نتائج التجربة تمثل حدثا في حد ذاته والذي يوافق كل منها عنصرا من عناصر مجموعة الحوادث الأولية، ونرمز له بالرمز (w_i)، فهو يعتبر حدثا بسيطا غير قابل للتجزئة يوافق عنصرا واحدا فقط، فمثلا عندما نرمي زهرة نرد فإننا نحصل على أحد الأرقام $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ وإن ظهور كل وجه أو رقم من هذه الأرقام يوافق عنصرا من فراغ الحوادث الأولية $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ والذي يعتبر حدثا بسيطا.

ج- الحدث المركب:

نقول أنحدث معين أنه حدث مركب إذا كان يتكون من أكثر من عنصر من عناصر مجموعة فراغ الحوادث الأولية، أي أن تحققه يوافق الحصول على أكثر من نتيجة من نتائج التجربة الاحتمالية، فكل حادث مركب هو عبارة عن مجموعة جزئية من فراغ الحوادث الأولية (Ω).

فعند رمي زهرة نرد وكان الحدث المدروس A هو حصولنا على عدد زوجي، أي أننا نتحصل على أحد الأرقام الزوجية، فتحققه يوافق الحصول على أكثر من نتيجة واحدة تمثل كل واحدة منها حدثا بسيطا، فعندئذ يكون هذا الحدث هو حدث مركب من ثلاثة حوادث بسيطة ويوافق مجموعة جزئية تتكون من أكثر من عنصر من فراغ الحوادث الأولية $A = \{2, 4, 6\}$

د- الحدث الأكيد:

هو الحدث الذي يوافق تحققه الحصول كل النتائج الممكنة للتجربة، فهو يقابل مجموعة تحتوي على كل عناصر مجموعة الحوادث الأولية أو بعبارة أخرى يتضمن كل الحوادث الأولية المرتبطة بالتجربة ونرمز له عادة بالرمز (Ω)، وكمثال عن ذلك الحصول على عدد أقل من (07) عند رمي حجرة النرد هو عبارة عن حدث أكيد لأن كل نتيجة ممكنة للتجربة توافق تحقق هذا الحدث.

ه- الحدث المستحيل:

هو الحدث الذي لا يوافق تحققه أي نتيجة من النتائج الممكنة للتجربة، أي أن العناصر المرتبطة بتحققه لا ينتمي أي منها إلى مجموعة الحوادث الأولية (Ω)، فهو لا يتضمن أي حدث بسيط مرتبط بالتجربة ويكون تحققه مستحيلا، ونرمز له عادة بالمجموعة الخالية $\emptyset$.

كأمثلة على الحدث المستحيل نذكر الأمثلة التالية: الحصول على عدد أكبر من (07) عند رمي حجرة النرد.

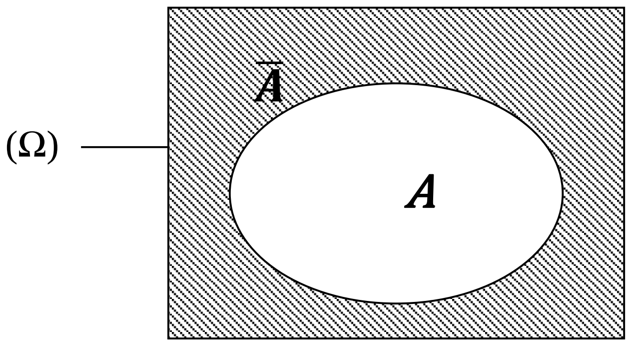
و- الحدث المعاكس (الحدث المتمم):

كل حدث A مرتبط بتجربة يقابل حدثا آخر يسمى الحدث لمعاكس أو المتمم $\bar{A}$ أو A^c يوافق تحققه عدم الحصول على أي نتيجة من النتائج التي توافق تحقق الحدث الأساسي، فالحدث المعاكس عبارة عن مجموعة جزئية من فراغ الحوادث الأولية (Ω) ويتضمن كل العناصر لا تنتمي أي منها إلى مجموعة العناصر المرتبطة بتحقق الحدث الأصلي، أو بعبارة أخرى هو الحدث الذي يعني تحققه عدم تحقق الحدث الأساسي، أي أن:

$$\bar{A} = \{w_i \in \Omega : w_i \notin A\}$$

فمثلا لنأخذ الحدث **A** المتمثل في الحصول على أحد الأرقام **(1 ,2, 5)** فإن الحدث المتمم له هو الحصول على أحد الأرقام التالية **(3,4,6)**، ونلاحظ هنا أن تحقق الحدث **A** هو الحصول على مجموعة جزئية من فراغ الحوادث الأولية **(Ω)** ونكتب $A = \{1, 2, 5\}$ فإن تحقق الحدث المتمم له يوافق هو الآخر مجموعة جزئية من **(Ω)** غير أن عناصرها لا ينتمي أي منها إلى المجموعة الجزئية **A** حيث أن $\bar{A} = \{3, 4, 6\}$.

إن هذين الحدثين لا يمكن لهما أن يتحققا في آن واحد بل إنهما حدثان متعارضان تماما، حيث نلاحظ أنه إذا لم يتحقق الحدث الأساسي فلابد أن يتحقق الحدث المتمم أو المعاكس، أي أن الحدث ومتممه يشكلان حدثا أكيدا، وعليه فإن:



الشكل رقم (01): الحدث المتمم

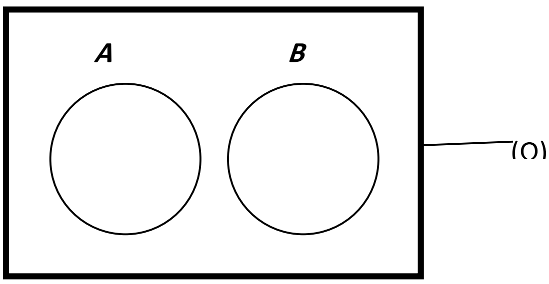
4. العلاقة بين الحوادث:

أ- الحوادث المتنافية:

نقول عن الحدثين **A** و**B** المرتبطين بالتجربة العشوائية أنهما حدثين متنافيين إذا كان تحقق أحدهما يمنع أو ينفي وقوع الآخر، أي أنه من غير الممكن حدوث **A** و**B** معا، فالحصول على أحد النتائج الموافقة لتحقق أحد الحدثين لا يوافق أي منها النتائج الموافقة لتحقق الحدث الآخر، وبعبارة أخرى تحققهما في آن واد عبارة عن الحدث المستحيل.

فإذا مثلنا تحقق الحدث **A** بمجموعة جزئية من **Ω** والمتكونة من العناصر w_i الموافقة لتحقق الحدث **A**، ومثلنا تحقق الحدث **B** بمجموعة جزئية من **Ω** والمتكونة من العناصر w_i الموافقة لتحقق الحدث **B**، يكون الحدثين **A** و**B** منافيين إذا كان كل عنصر w_i ينتمي إلى A لا ينتمي إلى B، وكل عنصر w_i ينتمي إلى **B** لا ينتمي إلى **A**، وبعبارة أخرى فإن تقاطعهما يساوي إلى المجموعة الخالية ونكتب: $A \cap B = \emptyset$.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} \forall w_i \in A : w_i \notin B \\ \forall w_i \in B : w_i \notin A \end{cases}$$



الشكل رقم (2): الحدثان المتنافيان

يمكن التعميم على متتالية من الحوادث القابلة للعد ($A_1, A_2, \ldots A_n$) والمرتبطة بالتجربة العشوائية فإنها متنافية مثنى مثنى إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall i \neq j: A_i \cap A_j = \emptyset$$

ب- الحوادث المستقلة:

هي الحوادث التي تحقق أحدها لا يؤثر على احتمال تحقق أي من الحوادث الأخرى أو بعبارة أخرى هي الحوادث التي لا يمنع ولا يؤثر حدوث أحدهما على حدوث أي حدث آخر منها وكمثال على ذلك نجاح أي طالب في القسم لا يؤثر على نجاح أو رسوب طالب آخر في نفس القسم.

ج- الحوادث المرتبطة:

هي الحوادث التي إذا تحقق أحدها يؤثر بمقدار على تحقق أحد أو بعض الحوادث الأخرى، وكمثال ذلك مراجعة الدروس ونجاح الطالب في الامتحان.

ملاحظة:

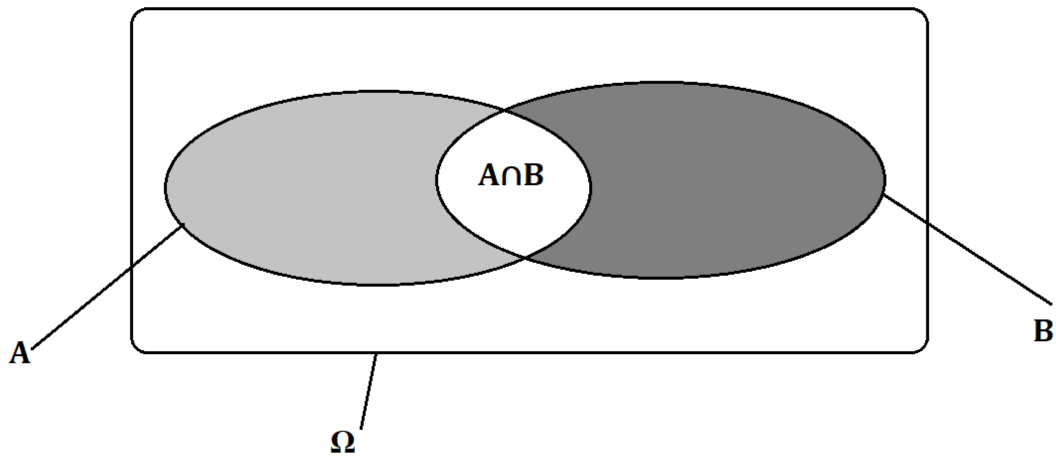
إن الحوادث المستقلة هي الحوادث الغير مرتبطة ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحا، فلا نستطيع أن نستنتج أنه إذا كانت الحوادث غير مرتبطة فهي مستقلة.

5. العمليات على الحوادث:

أ- تقاطع الحوادث

يمثل تقاطع الحدثين A وB المرتبطين بالتجربة العشوائية حدثا يعبر عن تحقق كلا الحدثين في آن واحد، أي الحصول على أحد النتائج الموافقة لتحقق الحدث A أو تلك الموافقة لتحقق الحدث B أو تلك الموافقة لتحقق الحدثين A و B معا، فإذا مثلنا تحقق الحدث A بمجموعة جزئية من **Ω** والمتكونة من العناصر w_i الموافقة لتحقق الحدث A، ومثلنا تحقق الحدث B بمجموعة جزئية من **Ω** والمتكونة من العناصر w_i الموافقة لتحقق الحدث B، فإن تقاطع الحدثين A وB يمثل هو الآخر بمجموعة جزئية من Ω والمتكونة من العناصر الموافقة لتحقق الحدث A وتحقق الحدث B معا، أي العناصر التي تنتمي إلى A وتنتمي إلى B أي أ مجموعة الحوادث المشتركة بين A ، B ونرمز لها بالرمز (A∩B) حيث أن:

$$A \cap B = B \cap A = \{w_i \in \Omega: w_i \in A \wedge w_i \in B\}$$

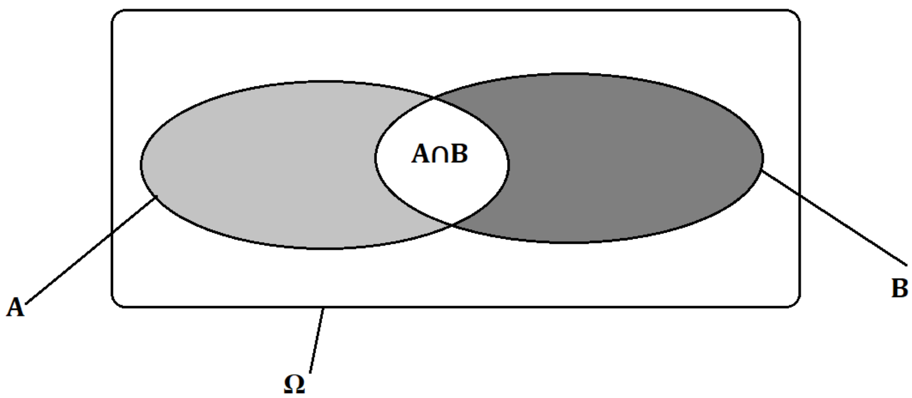


الشكل رقم (03): تقاطع حدثين

ب- اتحاد الحوادث:

يمثل اتحاد الحدثين **A** و**B** المرتبطين بالتجربة العشوائية حدثا يعبر عن تحقق أحد الحدثين على الأقل، أي تحقق الحدث **A** أو تحقق الحدث **B** أو تحقق الحدثين **A** و**B** معا، فإذا مثلنا تحقق الحدث A بمجموعة جزئية من **Ω** والمتكونة من العناصر w_i الموافقة لتحقق الحدث **A**، ومثلنا تحقق الحدث **B** بمجموعة جزئية من **Ω** والمتكونة من العناصر w_i الموافقة لتحقق الحدث **B**، فإن اتحاد الحدثين **A** و**B** يمثل هو الآخر بمجموعة جزئية من **Ω** والمتكونة من العناصر w_i الموافقة لتحقق الحدث **A** أو تحقق الحدث **B** أو تحققهما معا، أي العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى **B** أو تنمي إلى **(A∩B)**، ونكتب **A ∪ B**.

$$\mathbf{A \cup B = B \cup A = \{w_i \in \Omega : w_i \in A \vee w_i \in B\}}$$



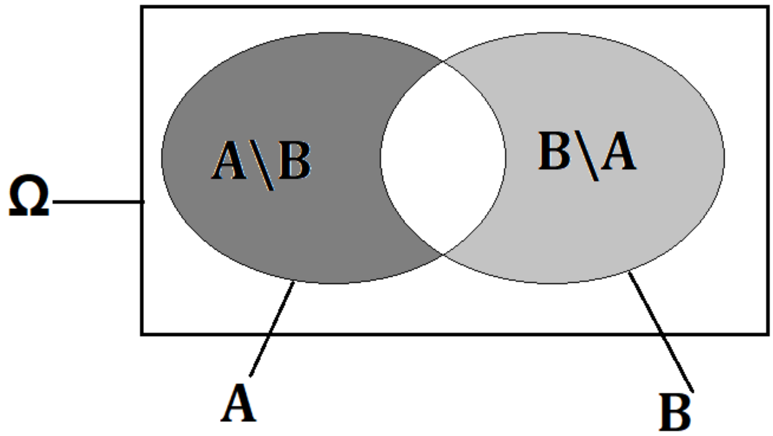
الشكل رقم (04): اتحاد حدثين

ج- الفرق بين الحوادث:

يمثل الفرق بين الحدثين **A** و**B** المرتبطين بالتجربة العشوائية حدثا يعبر عن تحقق أحد الحدثين دون تحقق الحدث الآخر، فإذا مثلنا تحقق الحدث **A** بمجموعة جزئية من Ω والمتكونة من العناصر w_i الموافقة لتحقق الحدث **A**، ومثلنا تحقق الحدث **B** بمجموعة جزئية من Ω والمتكونة من العناصر w_i الموافقة لتحقق الحدث **B**، فإن الفرق بين

الحدثين A وB يمثل هو الآخر بمجموعة جزئية من Ω والمتكونة من العناصر w_i الموافقة لتحقق الحدث A وعدم تحقق الحدث B، أي العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B ونكتب A \ B.

$$A\backslash B=\{w_i\in\Omega : w_i\in A\wedge w_i\notin B\}=A\cap\bar{B}$$



الشكل رقم (05): الفرق بين حدثين

ملاحظة:

عن عملية الفرق بين حدثين ليست بعملية تبديلية، أي أن A\B التي تعبر عن تحقق الحدث A وعدم تحقق B أي العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B تختلف عن B\A التي تعبر عن تحقق الحدث A وعدم تحقق B أي العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B تختلف عن B\A.

$$A\backslash B=\{w_i\in\Omega : w_i\in A\wedge w_i\notin B\}$$
$$B\backslash A=\{w_i\in\Omega : w_i\in B\wedge w_i\notin A\}$$
$$A\backslash B\neq B\backslash A$$

سلسلة تمارين محلولة متعلقة بالفصل:

التمرين الأول:

نقوم برمي حجرة نرد متوازنة بطريقة عشوائية مرقمة أوجهها من 1 إلى 6، ولتكن الحادثة A الحصول على عدد زوجي والحادثة B على عدد أكبر من 3، أوجد الحوادث التالية:

-1 $A\cup B$	-4 $\bar{A}\cap B$	-7 $\overline{A\cap B}$
-2 $A\cap B$	-5 $\cup\ \bar{A}\bar{B}$	-8 $\cap\,\bar{B}\bar{A}$
-3 $,\bar{A}\bar{B}$	-6 $\overline{A\cup B}$	-9 $B\backslash A$

الحل:

يهدف هذا التمرين على إتقان تركيب حدثين من نفس النوعية، حيث أن نتائج التجربة متكونة من الثنائية من رقم النرد الظاهر المتمثل في المجوعة {1, 2, 3, 4, 5, 6}، ونعرف الحوادث بمجموعات متكونة من العناصر الموافقة لتحقق كل حدث كما يلي:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad A = \{2, 4, 6\}$ $\quad B = \{4, 5, 6]$

1- حساب $A \cup B$:

إن الحدث $A \cup B$ يوافق تحقق A أو B أي أن الرقم المتحصل عليه يكون عددا زوجيا أو أكبر من كبر من 3 وبعبارة أخرى:

$$\boldsymbol{A \cup B = B \cup A = \{w_i \in \Omega : w_i \in A \vee w_i \in B\}}$$

$$\boldsymbol{A \cup B = B \cup A = \{2, 4, 5, 6\}}$$

2- حساب $A \cap B$:

إن الحدث $A \cap B$ يوافق تحقق A وB أي أن الرقم المتحصل عليه يكون عددا زوجيا وأكبر من كبر من 3 وبعبارة أخرى:

$$\boldsymbol{A \cap B = B \cap A = \{w_i \in \Omega : w_i \in A \wedge w_i \in B\}}$$

$$\boldsymbol{A \cap B = B \cap A = \{4, 6\}}$$

3- حساب $\bar{A}\bar{B}$, :

إن الحدث $\bar{A}$ يوافق عدم حدوث A أي أن الرقم المتحصل عليه لا يكون عددا زوجيا وهي العناصر التي لا تنتمي لـ A وبعبارة أخرى:

$$\boldsymbol{\bar{A} = \{w_i \in \Omega : w_i \notin A\}}$$

$$\boldsymbol{\bar{A} = \{1, 3, 5\}}$$

إن الحدث $\bar{B}$ يوافق عدم حدوث B أي أن الرقم المتحصل عليه لا يكون عددا أكبر من 3 وهي العناصر التي لا تنتمي لـ B وبعبارة أخرى:

$$\boldsymbol{\bar{B} = \{w_i \in \Omega : w_i \notin B\}}$$

$$\boldsymbol{\bar{A} = \{1, 2, 3\}}$$

4- حساب $\bar{A} \cap B$:

إن الحدث $\bar{A}B \cap$ يوافق عدم حدوث A وحدث B أي أن الرقم المتحصل عليه لا يكون عددا زوجيا ويكون عددا أكبر من 3 وبعبارة أخرى:

$$\boldsymbol{\bar{A} \cap B = B \cap \bar{A} = \{w_i \in \Omega : w_i \in \bar{A} \wedge w_i \in B\}}$$

$$\boldsymbol{\bar{A} \cap B = B \cap \bar{A} = \{w_i \in \Omega : w_i \notin A \wedge w_i \in B\}}$$

$$\boldsymbol{\bar{A} \cap B = B \cap \bar{A} = \{5\}}$$

5- حساب $\bar{A}\bar{B} \cup$:

إن الحدث $\bar{A} \cup \bar{B}$ **يوافق** عدم حدوث A أو عدم حدوث B أي عدم الحصول على عدد زوجي أو عدم الحصول على أكبر من 3 أي تحقق أحد الحدثين فقط وبعبارة أخرى:

$$\boldsymbol{\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{B} \cup \bar{A} = \{w_i \in \Omega : w_i \in \bar{A} \vee w_i \in \bar{B}\}}$$

$$\boldsymbol{\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{B} \cup \bar{A} = \{1, 2, 3, 5\}}$$

6- حساب $\overline{A \cup B}$:

$\overline{A \cup B}$ = عدم حدوث A أو B ، أي أن الرقم المتحصل عليه لا يكون زوجيا ولا يكون أكبر من 3 في آن واحد أي:

$$\overline{A \cup B} = \overline{B \cup A} = \{w_i \in \Omega : w_i \notin A \cup B\}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{B \cup A} = \{1\}$$

7- حساب $\overline{A \cap B}$:

إن $\overline{A \cap B}$ يوافق عدم حدوث A و B معا، أي أن الرقم المتحصل عليه لا يكون زوجيا ولا يكون أكبر من 3 في آن واحد أي تحقق أحد الحدثين فقط، وبعبارة أخرى فإنه:

$$\overline{A \cap B} = \overline{B \cap A} = \{w_i \in \Omega : w_i \notin A \cap B\}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{B \cap A} = \{1, 2, 3, 5\} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

8- حساب $\bar{A} \cap \bar{B}$:

إن الحدث $\bar{A} \cap \bar{B}$ يوافق عدم تحقق A وعدم تحقق B معا، أي أن يكون الرقم المتحصل عليه لا يكون زوجيا ولا يكون أكبر من 3 وبعبارة أخرى:

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{B} \cap \bar{A} = \{w_i \in \Omega : w_i \in \bar{A} \wedge w_i \in \bar{B}\}$$
$$\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{B} \cap \bar{A} = \{w_i \in \Omega : w_i \notin \bar{A} \wedge w_i \notin \bar{B}\}$$
$$\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{B} \cap \bar{A} = \{1\} = \overline{A \cup B}$$

9- حساب B\A:

إن تحقق الحدث B\A يوافق تحق الحدث B وعدم تحقق الحدث A، أي أن الرقم المتحصل عليه يكون أكبر من 3 ولا يكون زوجيا، بعبارة أخرى:

$$B \backslash A = \{w_i \in \Omega : w_i \in B \wedge w_i \notin A\}$$
$$B \backslash A = \{w_i \in \Omega : w_i \in B \wedge w_i \in \bar{A}\}$$
$$B \backslash A = \{w_i \in \Omega : w_i \in B \cap \bar{A}\} = \{5, 3\}$$

التمرين الثاني:

تتألف تجربة من رمي قطعة نقود وزهرة نرد في آن واحد ولتكن الأحداث التالية:

A = ظهور الكتابة مع عدد فردي.

B = ظهور الصورة مع عدد زوجي.

C = ظهور عدد أولي.

1 – أوجد فراغ الحوادث الأولية الموافقة لهذه التجربة.

2 – حدد الحوادث C, B, A.

3 – عبر عن الحوادث: وقوع A أو B، وقوع B و C، وقوع الحدث B فقط، وقوع جميع الحوادث، وقوع على الأكثر حدث.

4 – أي من الأحداث C, B, A يتنافى مع الآخر.

الحل:

يهدف هذا التمرين على إتقان تركيب حدثين ذات طبيعتين مختلفين، حيث أن نتائج التجربة متكونة من الثنائية: رقم النرد الظاهر المتمثل في المجوعة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ والوجه الظاهر للقطعة النقدية والمتمثل بدوره في المجموعة $\{P, F\}$،

1- إن عناصر مجموعة الحوادث الأولية Ω للتجربة تعرف كما يلي:

$$\Omega = \{(1,P), (2,P), (3,P), (4,P), (5,P), (6,P), (1,F), (2,F), (3,F), (4,F), (5,F), (6,F)\}$$

2- تحديد الحوادث C, B, A:

- **الحادث A** وهو يتحقق عند الحصول على كتابة مع عدد فردي: أي أن الرقم الظاهر للنرد يكون عدد فرديا أي أحد الأعداد $\{1, 3, 5\}$ وأن يكون الوجه الظاهر للقطعة النقدية كتابة أي **P**، ومنه فإن الحادثة **A** عبارة عن المجموعة الجزئية مجموعة الحوادث الأولية Ω للتجربة والمتكونة من الثنائيات التالية:

$$A = \{(1,P), (3,P), (5,P\}$$

- **الحادث B** وهو يتحقق عند الحصول على صورة مع عدد زوجي: أي أن الرقم الظاهر للنرد يكون عدد زوجيا أي أحد الأعداد $\{2, 4, 6\}$ وأن يكون الوجه الظاهر للقطعة النقدية صورة أي **F**، ومنه فإن الحادثة **B** عبارة عن المجموعة الجزئية مجموعة الحوادث الأولية Ω للتجربة والمتكونة من الثنائيات التالية:

$$B = \{(2, F), (4, F), (6, F)\}$$

- **الحدث C** وهو يتحقق عند الحصول عدد أولي: أي أن الرقم الظاهر للنرد يكون عدد أوليا أي أحد الأعداد $\{1, 2, 3, 5\}$ مهما كان نتيجة الوجه الظاهر كتابة أو صورة، ومنه فإن الحادثة **C** عبارة عن المجموعة الجزئية مجموعة الحوادث الأولية Ω للتجربة والمتكونة من الثنائيات التالية:

$$C = \{(1,P), (2,P), (3,P), (5,P), (1,F), (2,F), (3,F), (5,F)\}$$

التمرين الثالث:

يطلق على هدف ثلاثة طلقات متتالية، وليكن الحدث A_k إصابة الهدف في الطلقة k، والحدث $\overline{A}_k$ عدم إصابة الهدف في الطلقة k، بحيث $k = 1, 2, 3$ وباستعمال العمليات على الحوادث A_k، $\overline{A}_k$ أكتب الحوادث التالية:

B: إصابة الهدف في الطلقات الثلاث.

C: عدم إصابة الهدف في الطلقات الثلاث.

D: إصابة الهدف في طلقة واحدة.

E: إصابة الهدف في طلقتين.

F: إصابة الهدف بطلقتين على الأكثر.

G: إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل.

الحل:

1. <u>كتابة الحدث B:</u>

الحدث B هو إصابة الهدف في الطلقات الثلاث، أي إصابته في الطلقة الأولى (أي تحقق A1)، وإصابته في الطلقة الثانية (أي تحقق A2) وإصابته في الطلقة الثالثة (أي تحقق A3) ونكتب:

$$B = A1 \cap A2 \cap A3$$

2. **كتابة الحدث C:**

الحدث C هو عدم إصابة الهدف في الطلقات الثلاث، أي عدم إصابته في الطلقة الأولى (أي تحقق$\bar{A}_1$)، وعدم إصابته في الطلقة الثانية (أي تحقق$\bar{A}_2$) وعدم إصابته في الطلقة الثالثة (أي تحقق$\bar{A}_3$) ونكتب:

$$C = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

3. **كتابة الحدث D:**

الحدث D هو إصابة الهدف في طلقة واحدة، أي إصابته في الطلقة الأولى (أي تحقق A1) وعدم إصابته في الطلقة الثانية (أي تحقق$\bar{A}_2$) وعدم إصابته في الطلقة الثالثة (أي تحقق$\bar{A}_3$)، أو عدم إصابته في الطلقة الأولى (أي تحقق$\bar{A}_1$) وإصابته في الطلقة الثانية (أي تحقق A2) وعدم إصابته في الطلقة الثالثة (أي تحقق$\bar{A}_3$)، أو عدم إصابته في الطلقة الأولى (أي تحقق$\bar{A}_1$) وعدم إصابته في الطلقة الثانية (أي تحقق$\bar{A}_2$) وإصابته في الطلقة الثالثة (أي تحقق A3) ونكتب:

$$D = (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$$

4. **كتابة الحدث E:**

الحدث E هو إصابة الهدف في طلقتين، أي إصابته في الطلقة الأولى (أي تحقق A1) وإصابته في الطلقة الثانية (أي تحقق A2) وعدم إصابته في الطلقة الثالثة (أي تحقق$\bar{A}_3$)، أو إصابته في الطلقة الأولى (أي تحقق A1) وعدم إصابته في الطلقة الثانية (أي تحقق$\bar{A}_2$) وعدم إصابته في الطلقة الثالثة (أي تحقق$\bar{A}_3$)، أو عدم إصابته في الطلقة الأولى (أي تحقق$\bar{A}_1$) وإصابته في الطلقة الثانية (أي تحقق A2) وإصابته في الطلقة الثالثة (أي تحقق A3) ونكتب:

$$E = (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

5. **كتابة الحدث F:**

الحدث F هو إصابة الهدف بطلقتين على الأكثر، أي عدم إصابته في الطلقات الثلاث (تحقق الحادثة C)، أو إصابته بطلقة واحدة (تحقق الحادثة D) أو إصابته بطلقتين (تحقق الحادثة E) ونكتب:

$$F = C \cup D \cup E$$

$$\begin{aligned} F = {} & (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \\ & \cup ((A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)) \\ & \cup ((A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)) \end{aligned}$$

6. **كتابة الحدث G:**

الحدث G هو إصابة الهدف بطلقة واحدة على الأقل، أي إصابة الهدف بطلقة واحدة (تحقق الحادثة D)، أو إصابته بطلقتين اثنتين (تحقق الحادثة E) أو إصابته بثلاث طلقات (تحقق الحادثة B) ونكتب:

$$G = D \cup E \cup B$$

$$\begin{aligned} G = {} & ((A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)) \\ & \cup ((A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ & \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \end{aligned}$$

الفصل الثاني: بعض القوانين الأساسية في الاحتمالات

يعبر الاحتمال عن التقدير الكمي لإمكانية تحقق الحدث من عدمه من خلال قيمة موجبة محصورة بين الصفر والواحد، وبهنا يمكن إعطاء عدة تعاريف للاحتمال منها:

الطريقة التقليدية:

باستخدام مبدأ السبب غير كافي أي مبدأ التساوي في إمكانية الظهور أو بصورة عامة إذا اعتبرنا N الحوادث الأولية (البسيطة)$w\in\Omega$ متساوية الإمكانية فإن كل حدث أولي يمكن وضعه مقابل لنفس الاحتمال وهو مقلوب عدد الحوادث المكونة لـ Ω أي أنه يساوي: $\frac{1}{N}$

وبصورة عامة فإنه:

$$P(w_i)=\frac{1}{N}\Leftrightarrow P(w_1)=P(w_2)=\cdots=P(w_n)=\frac{1}{N}$$

$$P(w_i)=\frac{1}{N}\quad\forall\quad w_i\in\Omega$$

$$\boxed{P(A)=\frac{N_A}{N}=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}}}$$

ملاحظة:

من بين أحد التعاريف الخاصة بالاحتمالات هو التعريف المبني على فكرة التكرار النسبي:

$$\frac{n_i}{N}=\frac{f_i}{\sum_{i=1}^{n}f}$$

1- التعريف الهندسي:

ليكن (Ω) فراغ الحوادث الأولية الموافقة للتجربة (E) يتضمن عدد غير منتهي للحوادث الأولية (w_i) يمكن تفسيرها كإحداثيات نقطة في الفراغ $\Re_n(n=1,2,3)$. والحوادث كمنطقة ما من هذا الفراغ Ω ، وبالتالي الحوادث لها قياس في ($\Re$) طول، وفي ($\Re^2$) مساحة وفي ($\Re^3$) حجم.

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{قياس } A}{\text{قياس } \Omega}}\qquad A_i\in IB$$

2- التعريف الإحصائي:

في الواقع ليس معلوما دائما عدد الحوادث الأولية للفراغ (Ω) بالإضافة شرط الإمكانية المتساوية لوقوع الحوادث غير متوفر في أغلب المسائل في الحياة الواقعية، كما أنه ليس دائما $(w\in\Omega)$ القياس الهندسي لـ A، Ω :

1. عدد الحوادث الأولية في الواقع ليس دائما معلوما.
2. شرط الإمكانية المتساوية لوقوع الحوادث غير متوفر في أغلب مسائل الحياة الواقعية.

$$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}}=\frac{n}{N}=\lim_{\substack{n\to+\infty\\ N\to+\infty}}\frac{n}{N}$$

$$P(A)=\lim_{\substack{n\to+\infty\\ N\to+\infty}} f_i(A)$$

3- بديهيات الاحتمالات:

هناك في نظرية الاحتمالات ثلاث بديهيات أساسية يتم الاستناد عليها في حساب الاحتمالات تسمى بديهيات كولموغوروف les axiomes de Kolmogorov والمتمثلة في:

1. البديهية الأولى:

إذا كان A حدثا معينا من فضاء العينة، فإن احتمال عبارة عن قيمة عددية موجبة محصورة بين الصفر والواحد

$$0\le P(A_i)\le 1$$

2. البديهية الثانية:

إن احتمال تحقق الحدث الأكيد Ω يساوي إلى الواحد، ومن ثم فإن احتمال تحقق الحدث المستحيل $\emptyset$ يساوي إلى الصفر.

$$P(\Omega)=1\Rightarrow P(\emptyset)=0$$

3. البديهية الثالثة:

إذا كان لدينا n حدث من الحوادث المتنافية A_i مثنى مثنى فإن احتمال اتحاد هذه الحوادث يساوي إلى مجموع احتمالات هذه الحوادث.

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)\quad \forall A_i\neq A_j$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

انطلاقا من هذه البديهيات يمكن استنتاج أن احتمال الحدث المتمم يساوي إلى الواحد مطروحا منه احتمال الحدث الأصلي، حيث أنه لدينا:

$$A\cup\bar{A}=\Omega\Rightarrow P(A\cup\bar{A})=P(\Omega)=1$$

وبما أن:

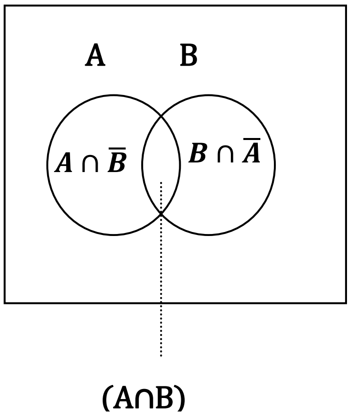
$$A\cap\bar{A}=\emptyset\Rightarrow P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})=1$$

ومن ثم فإن:

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

4- الدستور العام لاحتمال اتحاد حدثين:

إذا كان لدينا حدثين كيفيين، حيث أن تحقق الحدث الأول يكون بالحصول على أحد النتائج الموافقة له، وتحقق الحدث الثاني هو الحصول على أحد النتائج الموافقة له، فإن الحادثة المرتبطة باتحاد هذين الحدثين هي تلك الحادثة المرتبطة بتحقق أحد الحدثين على الأقل، أي تحقق الحدث الأول الحصول على أحد النتائج الموافقة له دون تحقق الحدث الثاني ويكتب بـ $(A\cap\bar{B})$، أو تحقق الحدث الثاني بالحصول على أحد النتائج الموافقة له دون تحقق الحدث الأول ويكتب بـ $(B\cap\bar{A})$أو تحققهما في آن واحد أي الحصول على أحد النتائج الموافقة للحدث الأول والحدث الثاني في آن واحد يكتب بـ $(A\cap B)$، ولنأخذ حدثين A ،B مرتبطين بالتجربة (E) ولنفرض أنهما متقاطعين وغير متنافيين كما هو مبين في الشكل:



من الشكل يتبين لنا ببساطة أن اتحاد الحدثين هو:

$$A \cup B = \{w_i \in \Omega, w_i \in \mathrm{A} \text{ أو } w_i \in \mathrm{B}\}$$

يمكن لنا كتابة الحدث A على شكل اتحاد حدثين متنافيين كما يلي:

$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \quad \text{حيث أن} \quad (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

وبالاعتماد على البديهية الثالثة فإن:

$$P(A) = P\big((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)\big) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$$

ومن ثم فإن:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

كما يمكن لنا كتابة الحدث B على شكل اتحاد حدثين متنافيين كما يلي:

$$B = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) \quad \text{حيث أن} \quad (B \cap \bar{A}) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

وبالاعتماد دائما على البديهية الثالثة فإن:

$$P(B) = P\big((B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)\big) = P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B)$$

ومن ثم فإن:

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$$

وبالتالي فإن احتمال اتحاد الحدثين A وB يساوي إلى:

$$P(A \cup B) = \big(P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)\big) + \big(P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B)\big)$$

$$P(A \cup B) = \big(P(A) - P(A \cap B)\big) + P(A \cap B) + \big(P(B) - P(A \cap B)\big) + P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ومن ثم فإن احتمال اتحاد حدثين كيفيين يساوي إلى مجموع احتمالهما مطروحا منه احتمال تقاطعهما.

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

5- الاحتمال الشرطي:

هو عبارة عن ارتباط الحادث A بالحدث B ويتم حساب احتمال A الذي يتم علما بعد تحقق الحدث B ونرمز له بالرمز P(A/B) ويكون مساويا لـ:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad ,P(B) > 0$$
$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad ,P(A) > 0$$

ومنه فإن احتمال تقاطع الحادثين A و B هو جداء احتمال الأولى أو الثانية وتكتب بالشكل:

$$P(A\cap B) = P(B).P(A/B)$$

وكذلك:

$$P(A\cap B)P(A).P(B/A)$$

أي أن احتمال تقاطع حدثين كيفيين يساوي إلى حاصل جداء احتمال أحدهما في احتمال الحدث الثاني علما أن الحدث الأول قد تحقق.

ملاحظة :

1. نقول عن حدثين (A, B) أنهما حدثين مستقلين عن بعضهما البعض إذا كانت:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$$
$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B)$$

ومنه يصبح احتمال حادثين مستقلين بالشكل التالي:

$$P(A\cap B) = P(B\cap A) = P(A)\bullet P(B)$$

وهنا تكتب الحالة العامة بالشكل من أجل *n* حادث:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1)\bullet P(A_2)\bullet\cdots\cdots\bullet P(A_n)$$

2. نقول عن حدثين *(A, B)* أنهما مرتبطان إذا كانت :

$$P(A/B) \neq P(A)$$
$$P(B/A) \neq P(B)$$

3. إذا كان الحدثين *(A, B)* مستقلين فإن متمماتهما تكونان مستقلة.

6- الاحتمال الكلي:

إذا كانتA هي نتيجة إحدى الحوادث المتنافية مثنى مثنى والمتكاملة H_1, H_2...H_n كما في الشكل التالي:

$$\begin{cases} \xrightarrow{P(H_1)} H_1 \begin{cases} \to \overline{A} \\ \to A \end{cases} \\ \xrightarrow{P(H_2)} H_2 \begin{cases} \to \overline{A} \\ \to A \end{cases} \\ \vdots \\ \xrightarrow{P(H_2)} H_n \begin{cases} \to \overline{A} \\ \to A \end{cases} \end{cases}$$

إن تحقق الحادثة A يكون نتيجة تحقق أحد الحوادث H_i، إذ أنه لا يمكن أن تتحقق A تحقق أكثر من حادثة H_i، وبعبارة أخرى فإن تحقق الحادثة A نتيجة أكثر من حادثة واحدة H_i حدث مستحيل، وهذا إن دل على شيء فإنه يدل على أن الحوادث H_i حوادث متنافية مثنى مثنى وتقاطعها حدث مستحيل، وهذا يمكن كتابته باستعمال تعبير المجموعات كما يلي:

$$H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

ومن جانب آخر فإن تحقق الحادثة A لا يكون إلا بتحقق أحد الحوادث H_i، وبالتالي فإن تحقق الحادثة A هو نتيجة تحقق مجمل الحوادث H_i، وهذا إن دل على شيء فإنه يدل على أن الحوادث H_i عبارة عن حوادث متكاملة واتحادها يساوي إلى فراغ الحوادث الأولية Ω، وهذا يمكن كتابته باستعمال تعبير المجموعات كما يلي:

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$$

إن تحقق الحادثة A مرتبط مباشرة بتحقق أحد الحوادث H_i، أي أنه تتحقق الحادثة A بتحقق الحادثة H_1، أو بتحقق الحادثة H_2 أو ... أو بتحقق الحادثة H_n، أي يمكن كتابة:

$$A = A \cap (\mathrm{H}_1 \cup \mathrm{H}_2 \cup \dots \mathrm{H}_n)$$

وبما أن عملية التقاطع (∩) توزيعية على عملية الاتحاد (∪) تصبح العلاقة السابقة كما يلي:

$$A = (A \cap \mathrm{H}_1) \cup (A \cap \mathrm{H}_2) \cup (A \cap \mathrm{H}_3) \cup \dots \cup (A \cap \mathrm{H}_n)$$

ومن ثم حساب احتمال الحادثة A يعود بنا إلى حساب احتمال الطرف الثاني من المعادلة، والذي هو عبارة عن اتحاد مجموعة من الحوادث أي الكتابة التالية:

$$P(A) = P\big((A \cap \mathrm{H}_1) \cup (A \cap \mathrm{H}_2) \cup (A \cap \mathrm{H}_3) \cup \dots \cup (A \cap \mathrm{H}_n)\big)$$

وبتطبيق دستور الاحتمال الخاص باتحاد الحوادث المتنافية والتي ينص إلى أن احتمال اتحاد مجموعة من الحوادث المتنافية فيما بينها مثنى مثنى يساوي إلى مجموع احتمالات هذه الحوادث أي:

$$P(A) = P(A \cap \mathrm{H}_1) + P(A \cap \mathrm{H}_2) + P(A \cap \mathrm{H}_3) + \dots + P(A \cap \mathrm{H}_n)$$

نلاحظ أن احتمال تحقق الحادثة A يساوي إلى مجموع مجموعة من الحدود، يمثل كل حد احتمال تقاطع حدثين، والذي ما يساوي إلى احتمال أحد هذه الحوادث مضروب باحتمال الجدث الآخر علما أن الحدث الأول قد تحقق، وذلك حسب دستور احتمال تقاطع حدثين أي أن:

$$\begin{cases} P(A\cap H_1) = P(H_1).P(A/H_1) \\ P(A\cap H_2) = P(H_2).P(A/H_2) \\ \vdots \\ P(A\cap H_n) = P(H_n).P(A/H_n) \end{cases}$$

ومنه يصبح لدينا:

$$P(A) = P(H_1).P(A/H_1) + P(H_2).P(A/H_2) + \cdots + P(H_n).P(A/H_n)$$

لتصبح العلاقة في النهاية:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A/H_i)$$

مثال تطبيقي:

يتم الاعتماد في مؤسسة لصناعة قطع الكترونية على ثلاث آلات M_1، M_2 وM_3، حيث تستخدم يوميا الآلة الأولى M_1في إنتاج 40 %من القطع، وتستخدم الآلة الثانية M_2 في إنتاج 35 %من القطع ، في حين تستخدم الآلة الثالثة M_3 في إنتاج 25 %من القطع يوميا، وحسب مصلحة مراقبة الجودة فإن 10% من القطع المنتجة باستخدام الآلة الأولى M_1 غير موافقة لمعايير الجودة، وبالمقابل فإن 5% من القطع المنتجة باستخدام الآلة الثانية M_2 غير موافقة لمعايير الجودة، في حين أن فإن 1% من القطع المنتجة من باستخدام الثالثة M_3 غي غير موافقة لمعايير الجودة، فإذا تم اختيار قطعة بطريقة عشوائية، فما هو احتمال أن تكون هذه القطعة غير موافقة لمعايير الجودة؟

الحل:

للإجابة على هذا السؤال نستعمل دستور الاحتمال الكلي، ولكن قبل ذلك لنعرف الحوادث التالية:

1. A أن تكون القطعة المسحوبة غير موافقة لمعايير الجودة.
2. H_i أن تكون القطعة منتجة باستخدام الآلة M_i حيث أن $i=1,2,3$ أي أن :

- H_1 أن تكون القطعة منتجة باستخدام الآلة M_1؛
- H_2 أن تكون القطعة منتجة باستخدام الآلة M_2؛
- H_3 أن تكون القطعة منتجة باستخدام الآلة M_3؛

وبالمقابل لنعرف الاحتمالات التالية:

1. P(A) احتمال أن تكون القطعة المسحوبة غير موافقة لمعايير الجودة (وهو ما يطلب إيجاده)
2. $P(H_i)$ احتمال أن تكون القطعة المسحوبة منتجة باستخدام الآلة M_i حيث أن $i=1,2,3$ أي أن :

- $P(H_1)$ احتمال أن تكون القطعة المسحوبة منتجة باستخدام الآلة M_1 ويساوي إلى نسبة القطع المنتجة باستخدام الآلة M_1 من مجموع القطع المنتجة يوميا حيث أن $P(H_1)=0.4$.
- $P(H_2)$ احتمال أن تكون القطعة المسحوبة منتجة باستخدام الآلة M_2 ويساوي إلى نسبة القطع المنتجة باستخدام الآلة M_2 من مجموع القطع المنتجة يوميا حيث أن $P(H_2)=0.35$.
- $P(H_3)$ احتمال أن تكون القطعة المسحوبة منتجة باستخدام الآلة M_3 ويساوي إلى نسبة القطع المنتجة باستخدام الآلة M_3 من مجموع القطع المنتجة يوميا حيث أن $P(H3)=0.35$.

3. $P(A/H_i)$ وهو احتمال أن تكون القطعة التي لا توافق معايير الجودة قد تم إنتاجها باستخدام الآلة M_i حيث أن $i=1,2,3$ أي أن :

- $P(A/H_1)$ وهو احتمال أن تكون القطعة التي لا توافق معايير الجودة قد تم إنتاجها باستخدام الآلة M_1، حيث أن $P(A/H_1)=0.10$.
- $P(A/H_2)$ وهو احتمال أن تكون القطعة التي لا توافق معايير الجودة قد تم إنتاجها باستخدام الآلة M_2، حيث أن $P(A/H_2)=0.05$.
- $P(A/H_3)$ وهو احتمال أن تكون القطعة التي لا توافق معايير الجودة قد تم إنتاجها باستخدام الآلة M_3، حيث أن $P(A/H_3)=0.01$.

$$\Omega:\begin{cases} \xrightarrow{P(H_1)=0.4} M_1 \begin{cases} \xrightarrow{0.90} \bar{A} \\ \xrightarrow{0.10} A \end{cases} \\ \xrightarrow{P(H_2)=0.35} M_2 \begin{cases} \xrightarrow{0.95} \bar{A} \\ \xrightarrow{0.05} A \end{cases} \\ \xrightarrow{P(H_3)=0.25} M_3 \begin{cases} \xrightarrow{0.99} \bar{A} \\ \xrightarrow{0.01} A \end{cases} \end{cases}$$

إن تحقق الحادثة A مرتبط مباشرة بتحقق أحد الحوادث H_i، حيث أنه حتى تكون القطعة المسحوبة غير موافقة لمعايير الجودة يجب أن هذه القطعة منتجة باستخدام إحدى الآلات M_i وغير موافقة لمعايير الجودة، وبعبارة أكثر تفصيلا هي أن تكون القطعة منتجة باستخدام الآلة M_1 (أي تحقق H_1) وأن تكون في آن واحد غير موافقة لمعايير الجودة (أي تحقق الحادثة A)، أو أن تكون القطعة منتجة باستخدام الآلة M_2 (أي تحقق H_2) وأن تكون في آن واحد غير موافقة لمعايير الجودة (أي تحقق الحادثة A) أو أن تكون القطعة منتجة باستخدام الآلة M_3 (أي تحقق H_3) وأن تكون في آن واحد غير موافقة لمعايير الجودة (أي تحقق الحادثة A).

ويمكن إعادة كتابة الفقرة السابقة باستخدام تعبير المجموعات كما يلي:

$$A=(A\cap H_1)\cup(A\cap H_2)\cup(A\cap H_3)$$

ومن ثم حساب احتمال الحادثة A يعود بنا إلى حساب احتمال الطرف الثاني من المعادلة، والذي هو عبارة عن اتحاد مجموعة من الحوادث أي الكتابة التالية:

$$P(A)=P\big((A\cap H_1)\cup(A\cap H_2)\cup(A\cap H_3)\big)$$

إن عملية إنتاج قطعة معينة يكون باستخدام آلة واحدة وواحدة فقط، إذ أنه لا يمكن أن نجد قطعة الكترونية تم إنتاجها باستخدام آلتين أو أكثر، وبعبارة أخرى فإن إنتاج قطعة باستخدام أكثر من آلة واحدة حدث مستحيل، وهذا إن دل على شيء فإنه يدل على أن الحوادث H_i حوادث متنافية مثنى مثنى وتقاطعها حدث مستحيل، وهذا يمكن كتابته باستعمال تعبير المجموعات كما يلي:

$$\begin{cases} H_1\cap H_2=\emptyset \\ H_1\cap H_3=\emptyset \\ H_2\cap H_3=\emptyset \end{cases} \quad \text{أي} \quad H_i\cap H_j=\emptyset \quad \forall i\neq j$$

ومن جانب آخر فإن أي قطعة الكترونية من إجمالي الإنتاج اليومي لا يتم إنتاجها إلا باستخدام إحدى الآلات M_i، وبالتالي فإن إجمالي الإنتاج اليومي للقطع الالكترونية متكون من مجموع إنتاج الآلة M_1 ومجموع إنتاج الآلة M_2 مجموع إنتاج الآلة M_3، وهذا إن دل على شيء فإنه يدل على أن الحوادث H_i التي تعبر عن استخدام الآلة M_i في الإنتاج

عبارة عن حوادث متكاملة واتحادها يساوي إلى فراغ الحوادث الأولية Ω، وهذا يمكن كتابته باستعمال تعبير المجموعات كما يلي:

$$\bigcup_{i=1}^{3} H_i = H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Omega$$

وبتطبيق دستور الاحتمال الخاص باتحاد الحوادث المتنافية والتي ينص إلى أن احتمال اتحاد مجموعة من الحوادث المتنافية فيما بينها مثنى مثنى يساوي إلى مجموع احتمالات هذه الحوادث أي:

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + P(A \cap H_3)$$

نلاحظ أن احتمال تحقق الحادثة A يساوي إلى مجموع مجموعة من الحدود، يمثل كل حد احتمال تقاطع حدثين، والذي ما يساوي إلى احتمال أحد هذه الحوادث مضروب باحتمال الجدث الآخر علما أن الحدث الأول قد تحقق، وذلك حسب دستور احتمال تقاطع حدثين أي أن:

$$\begin{cases} P(A \cap H_1) = P(H_1).P(A/H_1) \\ P(A \cap H_2) = P(H_2).P(A/H_2) \\ P(A \cap H_3) = P(H_3).P(A/H_3) \end{cases}$$

ومنه يصبح لدينا:

$$P(A) = P(H_1).P(A/H_1) + P(H_2).P(A/H_2) + P(H_3).P(A/H_3)$$

وبتعويض قيمة الاحتمالات بما يساويها نجد:

$$P(A) = \big((0.4) \times (0.1)\big) + \big((0.35) \times (0.05)\big) + \big((0.25) \times (0.01)\big)$$

$$P(A) = (0.04) + (0.0175) + (0.0025) = 0.06$$

احتمال أن تكون القطعة المسحوبة من الإنتاج اليومي لهذه المؤسسة هو 0.06 لا يوافق معايير الجودة، أي أن 6% من الإنتاج اليومي لهذه المؤسسة لا يوافق معايير الجودة.

7- دستور الاحتمال الشرطي لبايز(Bayes) :

إذا كانت (Ω) فراغ الحوادث الأولية لتجربة ما، وكان A حدثامتعلقا بإحدى الحوادث H_i المكونة لـ (Ω)وكان H_kأي حدث من (Ω)، فإن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A/H_i)$$
$$P(A \cap H_k) = P(A).P(H_k/A)$$
$$P(A \cap H_k) = P(H_k).P(A/H_k)$$

ومنه فإن:

$$P(A).P(H_k/A) = P(H_k).P(A/H_k)$$

وبالتالي فإن:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k).P(A/H_k)}{P(A)}$$

ويعطى الدستور العام لبايز بالشكل التالي:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k).P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A/H_i)}$$

مثال:

بالاعتماد على معطيات المثال السابق، تبين عند سحب قطعة من إجمالي الإنتاج اليومي بطريقة عشوائية أنها غير موافقة لمعايير الجودة، فما هو احتمال أن تكون قد أنتجت باستخدام الآلة M_1؟ باستخدام الآلة M_2؟ باستخدام الآلة M_3؟

الحل:

لنسمي الاحتمال $P(H_i/A)$ وهو احتمال أن تكون القطعة المسحوبة فد أنتجت باستخدام الآلة M_i علما أنها غير موافقة لمعايير الجودة حيث أن $i=1,2,3$ أي:

- الاحتمال $P(H_1/A)$ وهو احتمال أن تكون القطعة المسحوبة فد أنتجت باستخدام الآلة M_1 علما أنها غير موافقة لمعايير الجودة.
- الاحتمال $P(H_2/A)$ وهو احتمال أن تكون القطعة المسحوبة فد أنتجت باستخدام الآلة M_2 علما أنها غير موافقة لمعايير الجودة.
- الاحتمال $P(H_3/A)$ وهو احتمال أن تكون القطعة المسحوبة فد أنتجت باستخدام الآلة M_3 علما أنها غير موافقة لمعايير الجودة.

وبتطبيق دستور بايز للاحتمال الشرطي نجد:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{(0.4)\times(0.1)}{0.06} = 0.67$$
$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{(0.35)\times(0.05)}{0.06} = 0.29$$
$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{(0.25)\times(0.01)}{0.06} = 0.04$$

سلسلة تمارين محلولة متعلقة بالفصل:

التمرين الأول:

أ -إذا كان A ، B حدثين، فأثبت أن :

$$P(A\backslash B) = P(A) - P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B) = 1 - P(\bar{A}\cap \bar{B})$$

ب – لنفرض الآن الحدثين A و B بحيث أن:

$$P(A\cap B) = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{1}{2} \qquad P(A) = \frac{3}{8}$$

أحسب الاحتمالات التالية:

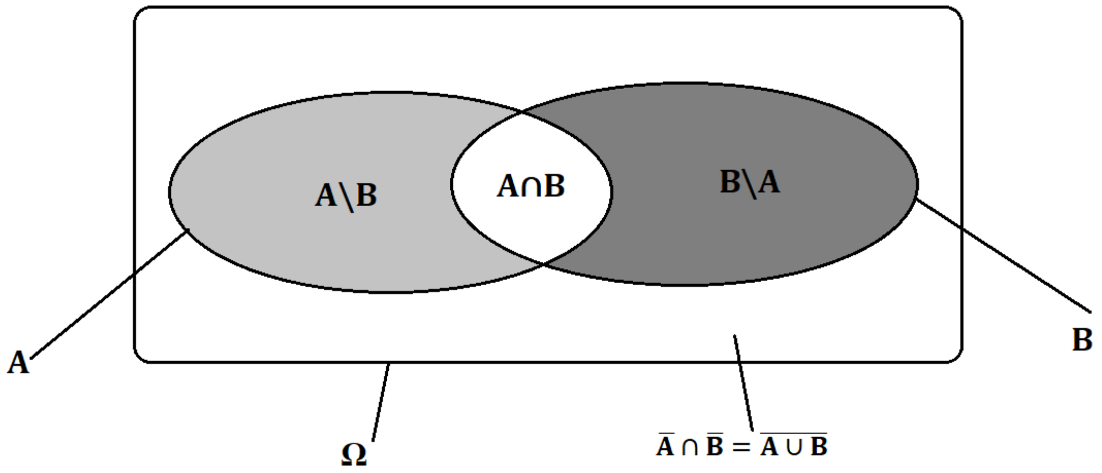
-1 $P(A\cup B)$ -4 $P(\bar{A}\cup\bar{B})$

-2 $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$ -5 $P(A\cap\bar{B})$

3- $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ 6- $P(\bar{A} \cap B)$

الحل:

لنعرف الحدثين الكيفيين **A** و **B** المرتبطين بالتجربة العشوائية واللذين ينتميان لمجموعة الحوادث الأولية **Ω**، كما هو مبين في الشكل الموالي:



ولنعرف الحوادث التالية:

$\bar{A} = \{w_i \in \Omega : w_i \notin A\}$

$\bar{B} = \{w_i \in \Omega : w_i \notin B\}$

$= A \cap \bar{B} A \backslash B = \{w_i \in \Omega : w_i \in A \wedge w_i \notin B\}$

$B \backslash A = \{w_i \in \Omega : w_i \in B \wedge w_i \notin A\} = \bar{A} \cap B$

1- يمكن كتابة الحادثة **A** بالشكل التالي:

$$A = (A \backslash B) \cup (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$$

ومن ثم فإن احتمال الحادثة **A** يساوي إلى احتمال الحدثين $(A \cap \bar{B})$ و $(A \cap B)$ أي أن:

$$P(A) = P\big((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)\big)$$

بما أن $(A \cap \bar{B})$ و $(A \cap B)$ حادثتين متنافيين حيث أن:

$$(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) = (A \cap A) \cap (\bar{B} \cap B)$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

فان احتمال اتحادهما يساوي إلى مجموع الاحتمالين، ويمكن كتابة العبارة التالية:

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$$

ومنه فإن:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) + P(A \cap B)$$

ويصبح لدينا:

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$$

2- تعرف الحوادث $\bar{A}$ و $\bar{B}$ كما يلي:

$$\bar{A} = \{w_i \in \Omega, w_i \notin A\}$$

$$\bar{B} = \{w_i \in \Omega, w_i \notin B\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{w_i \in \Omega, w_i \in \bar{A} \wedge w_i \in \bar{B}\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{w_i \in \Omega, w_i \notin A \wedge w_i \notin B\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{w_i \in \Omega, w_i \notin A \cup B\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{w_i \in \Omega, w_i \in \overline{A \cup B}\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

حساب $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

حساب $P(\bar{A})$ و $P(\bar{B})$:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

حساب $P(\bar{A} \cap \bar{B})$:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

حساب $P(\bar{A} \cup \bar{B})$:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

حساب $P(A \cap \bar{B})$:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

حساب $P(\bar{A} \cap B)$:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

التمرين الثاني:

نعتبر الحدثين A وB حيث أن:

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(B) = \frac{1}{3}$ $\quad$ $P(A) = \frac{1}{2}$

أحسب الاحتمالات التالية:

P(A U B) $\quad$ *P(B/A)* $\quad$ *P(A/B)*

الحل:

حساب $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

حساب $P(B/A)$:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \Rightarrow P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B/A) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

حساب $P(A/B)$:

$$P(A \cap B) = P(AB) \cdot P(A/B) \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$$

التمرين الثالث:

نعتبر الآن الحدثين A و B حيث أن:

$P(B/\bar{A}) = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(B) = \frac{1}{3}$ $\quad$ $P(A) = \frac{1}{2}$

احسب $P(A \cup B)$.

الحل:

انطلاقا من علاقة اتحاد الحدث $\bar{A}$ والحدث B التي مفادها:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

من جانب آخرلدينا:

$$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

ومن ثم يمكن حساب $P(A \cup B)$ كما يلي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{24} = \frac{5}{8}$$

التمرين الرابع:

تعتمد العملية الإنتاجية في ورشة صناعية على ثلاث آلات، حيث أن احتمال أن تتعطل الآلة الأولى في يوم معين هو **0.05**، وتتعطل الثانية باحتمال **0.10**، والثالثة باحتمال **0.15**. ما هو احتمال خلال هذا اليوم أن تتحقق الحوادث التالية:

1 – أن تتعطل آلة واحدة فقط؟

2 – أن تتعطل آلتان فقط؟

3 – ألا تتعطل أي آلة؟

4 – أن تتعطل آلة واحدة على الأقل؟

الحل:

لنسمي الحادثة H_i أن تتعطل الآلة i حيث أن: $i = 1, 2, 3$ ، أي أننا نعرف الحوادث التالية:

- الحادثة H_1 تتحقق عندما تتعطل الآلة الأولى باحتمال $P(H_1) = 0.05$، وبالتالي احتمال ألا تتعطل هذه الآلة يساوي إلى: $P(\bar{H}_1) = 1 - P(H_1) = 1 - 0.05 = 0.95$
- الحادثة H_2 تتحقق عندما تتعطل الآلة الثانية باحتمال $P(H_2) = 0.10$، وبالتالي احتمال ألا تتعطل هذه الآلة يساوي إلى: $P(\bar{H}_2) = 1 - P(H_2) = 1 - 0.10 = 0.90$
- الحادثة H_3 تتحقق عندما تتعطل الآلة الثانية باحتمال $P(H_3) = 0.15$، وبالتالي احتمال ألا تتعطل هذه الآلة يساوي إلى: $P(\bar{H}_3) = 1 - P(H_3) = 1 - 0.15 = 0.85$

1. <u>حساب P(A):</u>

تتحقق الحادثة A عندما تتعطل آلة واحدة وآلة واحدة فقط، أي عندما تتعطل الآلة الأولى (تحقق H_1) ولا تتعطل الآلة الثانية (تحقق $\bar{H}_2$) ولا تتعطل الآلة الثالثة (تحقق $\bar{H}_3$)، أو تتعطل الآلة الثانية (تحقق H_2) ولا تتعطل الآلة الأولى (تحقق $\bar{H}_1$) ولا تتعطل الآلة الثالثة (تحقق $\bar{H}_3$)، أو تتعطل الآلة الثالثة (تحقق H_3) ولا تتعطل الآلة الأولى (تحقق $\bar{H}_1$) ولا تتعطل الآلة الثانية (تحقق $\bar{H}_2$)، ويمكن التعبير عن الحادثة A بالعلاقة التالية:

$$A = (H_1 \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_3) \cup (\bar{H}_1 \cap H_2 \cap \bar{H}_3) \cup (\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap H_3)$$

ومنه فإن احتمال تحقق الحادثة A يساوي إلى:

$$P(A) = P\big((H_1 \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_3) \cup (\bar{H}_1 \cap H_2 \cap \bar{H}_3) \cup (\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap H_3)\big)$$

غير أننا نلاحظ أن الحادثة A متكونة من اتحاد مجموعة من الحوادث المتنافية فيما بينها مثنى مثنى أي أنه:

$$\begin{cases}(H_1 \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_3) \cap (\bar{H}_1 \cap H_2 \cap \bar{H}_3) = \emptyset \\ (H_1 \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_3) \cap (\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap H_3) = \emptyset \\ (\bar{H}_1 \cap H_2 \cap \bar{H}_3) \cap (\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap H_3) = \emptyset\end{cases}$$

ومن ثم فإن احتمال اتحاد هذه الحوادث يساوي إلى مجموع احتمالات كل واحد منها، وبعبارة أخرى نكتب:

$$P(A) = P(H_1 \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_3) + P(\bar{H}_1 \cap H_2 \cap \bar{H}_3) + P(\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap H_3)$$

ومن جانب آخر نلاحظ أن احتمال الحادثة A يساوي مجموع احتمالات مجموعة من الحوادث المتقاطعة فيما بينها، وبما أن الآلات i مستقلة فيما بينها فإن احتمال تقاطع هذه الحوادث يساوي إلى جداء احتمالاتها ونكتب العبارة التالية:

$$P(A) = P(H_1)P(\bar{H}_2)P(\bar{H}_3) + P(\bar{H}_1)P(H_2)P(\bar{H}_3) + P(\bar{H}_1)P(\bar{H}_2)P(H_3)$$

وبالقيام بالتطبيق العددي نجد:

$$P(A) = (0.05)(0.90)(0.85) + (0.95)(0.10)(0.15) + (0.95)(0.90)(0.15)$$
$$P(A) = (0.03825) + (0.8075) + (0.12825)$$
$$P(A) = 0.24725$$

2. حساب P(B):

تتحقق الحادثة B عندما تتعطل آلتان فقط، أي عندما تتعطل الآلة الأولى (تحقق H_1) وتتعطل الآلة الثانية (تحقق H_2) ولا تتعطل الآلة الثالثة (تحقق $\bar{H}_3$)، أو تتعطل الآلة الأولى (تحقق H_1) ولا تتعطل الآلة الثانية (تحقق $\bar{H}_2$) وتتعطل الآلة الثالثة (تحقق H_3) أو لا تتعطل الآلة الأولى (تحقق $\bar{H}_1$) وتتعطل الآلة الثانية (تحقق H_2) وتتعطل الآلة الثالثة (تحقق H_3) ، ويمكن التعبير عن الحادثة B بالعلاقة التالية:

$$B = (H_1 \cap H_2 \cap \bar{H}_3) \cup (H_1 \cap \bar{H}_2 \cap H_3) \cup (\bar{H}_1 \cap H_2 \cap H_3)$$

ومنه فإن احتمال تحقق الحادثة B يساوي إلى:

$$P(B) = P\big((H_1 \cap H_2 \cap \bar{H}_3) \cup (H_1 \cap \bar{H}_2 \cap H_3) \cup (\bar{H}_1 \cap H_2 \cap H_3)\big)$$

وهنا كذلك نلاحظ أن الحادثة B متكونة من اتحاد مجموعة من الحوادث المتنافية فيما بينها مثنى مثنى أي أنه:

$$\begin{cases}(H_1 \cap H_2 \cap \bar{H}_3) \cap (H_1 \cap \bar{H}_2 \cap H_3) = \emptyset \\ (H_1 \cap H_2 \cap \bar{H}_3) \cap (\bar{H}_1 \cap H_2 \cap H_3) = \emptyset \\ (H_1 \cap \bar{H}_2 \cap H_3) \cap (\bar{H}_1 \cap H_2 \cap H_3) = \emptyset\end{cases}$$

ومن ثم فإن احتمال اتحاد هذه الحوادث يساوي إلى مجموع احتمالات كل واحد منها، وبعبارة أخرى نكتب:

$$P(B) = P(H_1 \cap H_2 \cap \bar{H}_3) + P(H_1 \cap \bar{H}_2 \cap H_3) + P(\bar{H}_1 \cap H_2 \cap H_3)$$

وبما أن الآلات i مستقلة فيما بينها فإن احتمال تقاطع هذه الحوادث يساوي إلى جداء احتمالاتها ونكتب العبارة التالية:

$$P(B) = P(H_1)P(H_2)P(\bar{H}_3) + P(H_1)P(\bar{H}_2)P(H_3) + P(\bar{H}_1)P(H_2)P(H_3)$$

وبالقيام بالتطبيق العددي نجد:

$$P(B) = (0.05)(0.10)(0.85) + (0.05)(0.90)(0.15) + (0.95)(0.10)(0.15)$$
$$P(B) = (0.00425) + (0.00675) + (0.01425)$$
$$P(B) = 0.02525$$

3. **حساب P(C):**

تتحقق الحادثة C عندما تتعطل الآلات الثلاث في آن واحد، أي تتعطل الآلة الأولى (تحقق H_1) وتتعطل الآلة الثانية (تحقق H_2) وتتعطل كذلك الآلة الثالثة (تحقق H_3) ونكتب بالشكل التالي:

$$C = H_1 \cap H_2 \cap H_3$$

ومنه فإن احتمال تحقق الحادثة C يساوي احتمال تقاطع الحوادث H_i إلى:

$$P(C) = P(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$$

وبما أن الحوادث H_i مستقلة عن بعضها البعض، فإن احتمال تحقق الحادثة C يساوي إلى جداء الاحتمالات $P(H_i)$ ونكتب:

$$P(C) = P(H_1)\,P(H_2)P(H_3)$$

وبالقيام بالتطبيق العددي نجد:

$$P(C) = (0.05)(0.10)(0.15)$$
$$P(C) = 0.00075$$

4. **حساب P(D):**

تتحقق الحادثة D عندما لا تتعطل أي آلة من الآلات الثلاث، أي لا تتعطل الآلة الأولى (تحقق $\bar{H}_1$) ولا تتعطل الآلة الثانية (تحقق $\bar{H}_2$) ولا تتعطل كذلك الآلة الثالثة (تحقق $\bar{H}_3$) ونكتب بالشكل التالي:

$$C = \bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_3$$

ومنه فإن احتمال تحقق الحادثة D يساوي احتمال تقاطع الحوادث $\bar{H}_i$ إلى:

$$P(C) = P(\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_3)$$

وبما أن الحوادث H_i مستقلة عن بعضها البعض، فإن احتمال تحقق الحادثة D يساوي إلى جداء الاحتمالات $P(\bar{H}_i)$ ونكتب:

$$P(D) = P(\bar{H}_1)\,P(\bar{H}_2)P(\bar{H}_3)$$

وبالقيام بالتطبيق العددي نجد:

$$P(D) = (0.95)(0.90)(0.85)$$
$$P(D) = 0.72675$$

5. **حساب P(E):**

تتحقق الحادثة **E** عندما تتعطل آلة واحدة على الأقل، أي تتعطل آلة واحدة فقط (تحقق الحادثة **A**) أو تتعطل آلتين (تحقق الحادثة **B**) أو تتعطل الآلات الثلاث في آن واحد (تحقق الحادثة **C**)، وهنا يمكن التعبير عن الحادثة **E** بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{E = A \cup B \cup C}$$

وبما أن الحوادث **A**، **B** و**C** متنافية فيما بينها مثنى مثنى فإن احتمال تحقق الحادثة **E** يساوي إلى مجموع احتمالات الحوادث **A**، **B** و**C** ونكتب:

$$\boldsymbol{P(E) = P(A) + P(B) + P(C)}$$

وبالقيام بالتطبيق العددي نجد:

$$P(E) = (0.24725) + (0.02525) + (0.00075)$$

$$\boldsymbol{P(E) = 0.27325}$$

التمرين الخامس:

للوصول إلى مقره عمله يوميا يمكن لشخص معين أن يسلك ثلاثة طرق مختلفة، حيث يسلك الطريق الأول A في 40% من الأيام، ويسلك الطريق الثاني B في 35% من الأيام، في حين أنه يسلك الطريق الثالث C في 25% من الأيام، وقد لاحظ هذا الشخص أن احتمال أن يصل متأخرا لمقر عمله يساوي 3% عندما يستخدم الطريق A، وأن احتمال أن يصل متأخرا لمقر عمله يساوي 2% عندما يستخدم الطريق B، في حين أن هذا الاحتمال يساوي 1% فقط عندما يستخدم الطريق C، ولنسمي الحادثة H أن يصل هذا الشخص متأخرا لمقر عمله.

- ما هو احتمال يصل هذا الشخص في يوم معين متأخرا لمقر عمله؟
- إذا علمت أن هذا الشخص قد وصل متأخرا، فما هو احتمال أن يكون قد استخدم الطريق A؟

الحل:

للإجابة على هذا السؤال نستعمل دستور الاحتمال الكلي، ولكن قبل ذلك لنعرف الحوادث التالية:

1. A أن يصل هذا الشخص متأخرا إلى مقر عمله.
2. H_i أن يسلك هذا الشخص الطريق i، حيث أن i=1 ,2 ,3 أي أن :
   - H_1 أن يسلك هذا الشخص الطريق الأول؛
   - H_2 أن يسلك هذا الشخص الطريق الثاني؛
   - H_3 أن يسلك هذا الشخص الطريق الثالث؛

وبالمقابل لنعرف الاحتمالات التالية:

4. P(A) احتمال أن يصل هذا الشخص متأخرا إلى مقر عمله (وهو ما يطلب إيجاده)
5. $P(H_i)$ احتمال أن يسلك هذا الشخص الطريق i،حيث أن i=1 ,2 ,3 أي أن :
   - $P(H_1)$ احتمال أن يسلك هذا الشخص الطريق الأول ويساوي إلى $P(H_1)=0.4$.
   - $P(H_2)$ احتمال أن يسلك هذا الشخص الطريق الثاني ويساوي إلى $P(H_2)=0.35$.
   - $P(H_3)$ احتمال أن يسلك هذا الشخص الطريق الثالث ويساوي إلى $P(H_3)=0.25$.

6. $P(A/H_i)$ وهو احتمال ان يصل هذا الشخص متأخرا إلى مقر عمله علما أن سلك الطريق i حيث أن $i=1,2,3$ أي أن :

- $P(A/H_1)$ وهو احتمال ان يصل هذا الشخص متأخرا إلى مقر عمله علما أن سلك الطريق الأول، حيث أن $P(A/H_1)=0.03$.
- $P(A/H_2)$ وهو احتمال ان يصل هذا الشخص متأخرا إلى مقر عمله علما أن سلك الطريق الثاني، حيث أن $P(A/H_2)=0.02$.
- $P(A/H_3)$ وهو احتمال ان يصل هذا الشخص متأخرا إلى مقر عمله علما أن سلك الطريق الثالث، حيث أن $P(A/H_3)=0.01$.

$$\Omega:\begin{cases} \xrightarrow{P(H_1)=0.4} M_1 \begin{cases} \xrightarrow{0.97} \bar{A} \\ \xrightarrow{0.03} A \end{cases} \\ \xrightarrow{P(H_2)=0.35} M_2 \begin{cases} \xrightarrow{0.98} \bar{A} \\ \xrightarrow{0.02} A \end{cases} \\ \xrightarrow{P(H_3)=0.25} M_3 \begin{cases} \xrightarrow{0.99} \bar{A} \\ \xrightarrow{0.01} A \end{cases} \end{cases}$$

إن تحقق الحادثة A مرتبط مباشرة بتحقق أحد الحوادث Hi، حيث أنه حتى يصل هذا الشخص إلى مقر عمله عليه أن يسلك أحد الطرق Mi وأن يصل متأخرا، وبعبارة أكثر تفصيلا هي أن يذهب إلى مقر عمله عبر الطريق M_1 (أي تحقق H_1) وأن يصل في آن واحد متأخرا على مقر عمله (أي تحقق الحادثة A)، أو أن يذهب إلى مقر عمله عبر الطريق M_2 (أي تحقق H_2) وأن يصل في آن واحد متأخرا على مقر عمله (أي تحقق الحادثة A) أو أن يذهب إلى مقر عمله عبر الطريق M_3 (أي تحقق H_3) وأن يصل في آن واحد متأخرا على مقر عمله (أي تحقق الحادثة A).

ويمكن إعادة كتابة الفقرة السابقة باستخدام تعبير المجموعات كما يلي:

$$\boldsymbol{A = (A \cap \mathrm{H_1}) \cup (A \cap \mathrm{H_2}) \cup (A \cap \mathrm{H_3})}$$

ومن ثم حساب احتمال الحادثة A يعود بنا إلى حساب احتمال الطرف الثاني من المعادلة، والذي هو عبارة عن اتحاد مجموعة من الحوادث أي الكتابة التالية:

$$\boldsymbol{P(A) = P\big((A \cap \mathrm{H_1}) \cup (A \cap \mathrm{H_2}) \cup (A \cap \mathrm{H_3})\big)}$$

إن وصول هذا الشخص إلى مقر عمله يكون عبر طريق واحد وواحد فقط، إذ أنه لا يمكن له أن يسلك طريقين أو أكثر في آن واحد، وبعبارة أخرى فإن وصول الشخص إلى مقر عمله عبر أكثر من طريق حدث مستحيل، وهذا إن دل على شيء فإنه يدل على أن الحوادث H_i حوادث متنافية مثنى مثنى وتقاطعها حدث مستحيل، وهذا يمكن كتابته باستعمال تعبير المجموعات كما يلي:

$$\begin{cases} H_1 \cap H_2 = \emptyset \\ H_1 \cap H_3 = \emptyset \\ H_2 \cap H_3 = \emptyset \end{cases} \quad \text{أي} \quad H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

ومن جانب آخر فإن وصول هذا الشخص إلى مقر عمله لا يكون إلا عبر أحد الطرق التي يسلكها M_i، وهذا إن دل على شيء فإنه يدل على أن الحوادث Hi التي تعبر عن استخدام الآلة Mi في الإنتاج عبارة عن حوادث متكاملة واتحادها يساوي إلى فراغ الحوادث الأولية Ω، وهذا يمكن كتابته باستعمال تعبير المجموعات كما يلي:

$$\bigcup_{i=1}^{3} H_i = H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Omega$$

وبتطبيق دستور الاحتمال الخاص باتحاد الحوادث المتنافية والتي ينص إلى أن احتمال اتحاد مجموعة من الحوادث المتنافية فيما بينها مثنى مثنى يساوي إلى مجموع احتمالات هذه الحوادث أي:

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + P(A \cap H_3)$$

نلاحظ أن احتمال تحقق الحادثة A يساوي إلى مجموع مجموعة من الحدود، يمثل كل حد احتمال تقاطع حدثين، والذي ما يساوي إلى احتمال أحد هذه الحوادث مضروب باحتمال الجدث الآخر علما أن الحدث الأول قد تحقق، وذلك حسب دستور احتمال تقاطع حدثين أي أن:

$$\begin{cases} P(A \cap H_1) = P(H_1).P(A/H_1) \\ P(A \cap H_2) = P(H_2).P(A/H_2) \\ P(A \cap H_3) = P(H_3).P(A/H_3) \end{cases}$$

ومنه يصبح لدينا:

$$P(A) = P(H_1).P(A/H_1) + P(H_2).P(A/H_2) + P(H_3).P(A/H_3)$$

وبتعويض قيمة الاحتمالات بما يساويها نجد:

$$P(A) = \big((0.4) \times (0.03)\big) + \big((0.35) \times (0.02)\big) + \big((0.25) \times (0.01)\big)$$

$$P(A) = (0.012) + (0.007) + (0.0025) = 0.0215$$

احتمال أن يصل هذا الشخص متأخرا إلى مقر عمله هو 0.0215.

الفصل الثالث: المتغيرات العشوائية ومميزاتها العددية

نهتم في مقياس الإحصاء الرياضي بدراسة ما يسمى المتغيرات العشوائية، ونقصد بالمتغير العشوائي هو ذلك المتغير الذي يتحول بين مجموعة من القيم أوفي مجال من القيم بطريقة غير منظمة، فإذا أخذ قيمة من بين القيم الممكنة أو قيمة ما محتواه في المجال فلا يمكننا أن نعرف مسبقا القيمة التي سيأخذها، ويستطيع أن يأخذ قيمة من قيمه الغير مفروضة عليه مسبقا بشكل تكراري، وهنا نميز بين نوعين من المتحولات العشوائية:

أ – المتغير العشوائي المنقطع:

هو ذلك المتغير العشوائي الذي تكون قيمه منقطعة على شكل نقاط أو قيم منفصلة ومتباعدة ومن أمثلة ذلك يمكن ذكر ما يلي:

- الأرقام الظاهرة عند رمي حجر نرد التي هي:{1, 2, 3, 4, 5, 6} فإنه لا توجد قيم ممكنة من القيمة 1 والقيمة 2 مثلا أو بين أي قيمتين مختلفتين.
- عدد الأشخاص الذين يطلبون الخدمة في شباك معين؛
- عدد القطع المعيبة في مجموع الإنتاج اليومي؛
- عدد البواخر التي ترسو في الميناء أو عدد الطائرات التي تحط بأرضية المطار...

وهنا يجب ان نؤكد أن القيم التي يمكن ان يأخذه المتغير العشوائي المنقطع وإن كانت متباينة ومتباعدة فهذا لا يعني أنها حتما أعداد صحيحة، فمثلا إذا أخذنا علامة امتحان متكون من أربعة أسئلة، يمنح الطالب 2.5 نقطة على كل جواب صحيح و 0 نقطة في حالة الجواب الخاطئ، فإن العلامة يمكن ان تأخذ النقاط التالية: {0, 2.5, 5, 7.5, 10} ، ففي هذه الحالة فإن العلامات قيم متباينة ومتباعدة ولا يمكن ان يأخذ المتغير قيمة محصورة بين قيمتين مختلفتين بالرغم من أن قيمها ليست بأعداد صحيحة.

ب – المتغير العشوائي المستمر:

هو ذلك المتحول العشوائي الذي لا يمكن التفرقة بن مخالف قيمه الممكنة، وهنا لا يمكن إعطاء قيمه على شكل نقاط وإنما تعطى على شكل مجال محدود أو غير محدود، ومن أمثلة ذلك يمكن ذكر ما يلي:

- المسافة المقطوعة لوسيلة نقل قيل تعطلها؛
- مدة صلاحية التجهيزات؛
- أعمار الأشخاص الذين يصابون بمرض معين؛
- كمية الإنتاج، رقم الأعمال...

1 ـ المتحول العشوائي المنقطع

ليكن لدينا متحولا عشـــوائيا نرمز له بالرمز (x) له n قيمة ممكنة متقاطعة مكونةً مجموعة جزئية X من مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$، حيث أن $X = \{ x_1, x_2,....x_n\}$.

إن كل قيمة x_i من هذه القيم توافق نتيجة ممكنة للتجربة، وبالتالي فهي تمثل حدثا من الحوادث الممكن التحقق أثناء القيام بالتجربة وباحتمال مفروض وخاص P_i حيث أن $i = 1, 2, ... n$.

أي أن: $P(x=x_1)=P_1\,,\quad P(x=x_2)=P_2\,,\quad ....\quad P(x=x_n)=P_n$

وبما أن هذه الحوادث متعارضة ومتكاملة فيما بينها:

$$\forall x_i \in X: \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1 \\ 0 \le P(X = x_i) \le 1 \end{cases}$$

أ- قانون توزيع الاحتمالات

هي العلاقة التي تربط بين القيم الممكنة لـــ X وبين الاحتمالات المرافقة لهذه القيم، ويمكن إعطاؤها على شكل منحنى بياني، دالة رياضـــية أو جدول، على أن يكون يحتوي على كل القيم دون اســـتثناء وقيمة الاحتمال المقابلة لكل قيمة، كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} p_1 & \text{si} \quad x = x_1 \\ p_2 & \text{si} \quad x = x_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ p_n & \text{si} \quad x = x_n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

كما يمكن تمثيل هذه العلاقة بين كل قيمة من قيم المتغيرة والاحتمالات الموافقة لها في شـكل جدول متكون من ســـطرين (أو عمودين) يمثل الســـطر الأول (أو العمود الأول) قيم المتغيرة ويمثل الســـطر الثاني (أو العمود الثاني) الاحتمالات الموافقة لكل قيمة، كما يمثله الجدول التالي:

X	x_1	x_2	....	x_n
$P(X=xi)$	P_1	P_2	....	P_n

بحيث أن يجب أن يتحقق الشرطان التاليان:

$$0 \le P(X = xi) \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

ملاحظة هامة:

إن قانون احتمال متحول عشوائي منقطع X يتميز بقيم المجموعة الكلية (Ω) أي مجموعة قيمه الممكنة والاحتمالات المرافقة لهذه القيم، وبالتالي فإننا نقول عن متحولين عشوائيين منقطعين، إنهما يخضعان لنفس قانون الاحتمال إذا كان:

- ✓ نفس القيم الممكنة.
- ✓ نفس احتمالات القيم الممكنة.

مثال:

لتكن التجربة العشوائية المتمثلة في رمي حجر نرد بطريقة عشوائية، وليكن المتغير العشوائي X المتمثل في الرقم الظاهر، والمطلوب إعداد قانون توزيع الاحتمالات لهذا المتغير.

الحل:

مجموعة الحوادث الأولية $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5,6\}$ والتي عدد عناصرها $Car(\Omega) = 6$

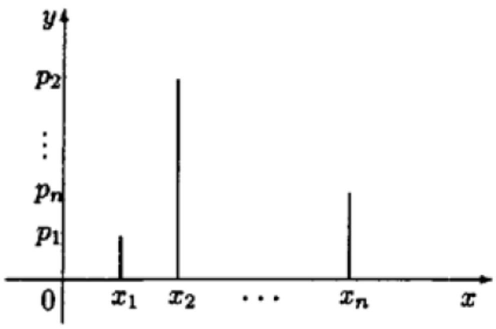
إن ظهور أي رقم له نفس إمكانية الظهور وبالتالي الحصول على أي وجه له احتمال $1/n = 1/6$، ومنه نتحصل على تابع الاحتمالات المبين في الجدول التالي:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=xi)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

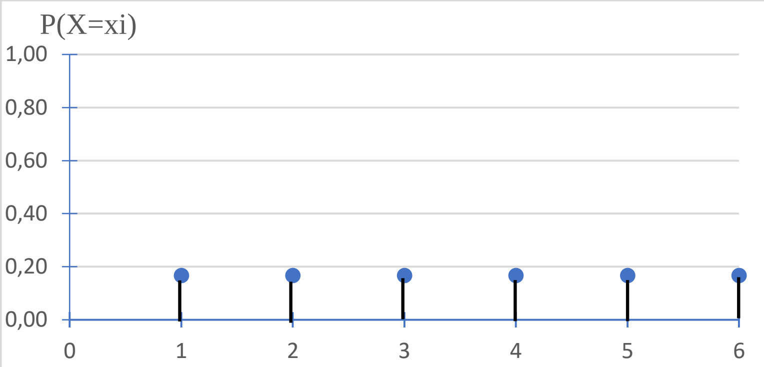
نلاحظ أن كل قيمة من قيم الاحتمالات محصورة بين الصفر والواحد، وأن مجموع الاحتمالات يساوي إلى الواحد، ومنه فإن المتغيرة X تتبع قانون توزيع احتمالات.

ب- التمثيل البياني لقانون توزيع الاحتمالات

نقوم بتمثيل قانون توزيع الاحتمالات بالنسبة للمتغير العشوائي المنقطع عن طريق الأعمدة التكرارية، حيث يمثل محور الفواصل القيم الممكنة للمتغير العشوائي ويمثل محور التراتيب قيم الاحتمالات، حيث نقوم بإسقاط عمود أمام كل قيمة من قيم المتغيرة يوافق طوله قيمة الاحتمال كما في الشكل التالي:



ويمكن تمثل قانون توزيع الاحتمالات في المثال السابق كما يلي:



ج- تابع الاحتمالات أو دالة التوزيع

هو ذلك التابع الذي يعطينا احتمال X في أية قيمة بأخذها ويعطى على النحو التالي:

حيث أن الاحتمالات P_f، P_1, P_2............ .

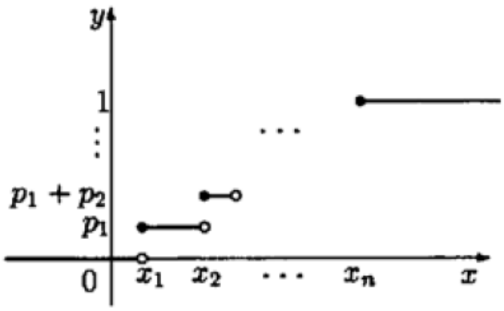
$$F(x_f) = P(x \leq x_f) = \sum_{i=1}^{f} P(x = x_i)$$

ومنه فإن دالة التوزيع أو تابع الاحتمالات يحسب بالشكل التالي:

$$F(X)=\begin{cases} p_1 & si\ X \leq x1 \\ p_1+p_2 & si\ x_1 \leq X \leq x_2 \\ p_1+p_2+p_3 & si\ x_2 \leq X \leq x_3 \\ \vdots & \vdots \\ p_1+p_2+\ldots+p_{n-1} & si\ x_{n-2} \leq X \leq x_{n-1} \\ 1 & si\ x_{n-1} \leq X \leq x_n \end{cases}$$

ملاحظات:

- إن دالة التوزيع عبارة عن القيم التجميعية لقانون توزيع الاحتمالات، أي عبارة عن التكرار التجميعي الصاعد لهذا الأخير.
- عندما **(X)** تؤول إلى (∞+) فإن تابع الاحتمالات يكون مساويا إلى الواحد أي أن $F(+\infty) = 1$.
- عندما **(X)** تؤول إلى (∞-) فإن تابع الاحتمالات يكون مساويا إلى الصفر أي أن $F(-\infty) = 0$.
- يتم تمثيل دالة التوزيع في معلم متعامد ومتجانس، يمثل فيه محور الفواصل قيم المتغيرة X، ويمثل محور التراتيب القيم التراكمية أو التجميعية للاحتمالات عند كل قيمة من قيم المتغيرة، ويكون على شكل سلالم escaliers كما يبينه الشكل التالي:



د- حساب الاحتمالات

إن عملية حساب أن تأخذ المتغيرة العشوائي X قيمة معينة أو مجموعة قيم من القيم الممكنة لها تكون من خلال تجميع أو جمع الاحتمالات الموافقة لتلك القيم، وهنا يجب أن نتأكد من أخذ بعين الحسبان أو عدمه القيمة الموجودة في حدود المجال حسب الحالة، حيث أنه إذا طلب الأخذ بعين الاعتبار القيم الأكبر أو تساوي (أو أصغر أو تساوي) من قيمة معينة فإن الاحتمال الموافق لتلك القيمة يؤخذ بالحسبان، في حين أنه يستثني ولا يحسب إذا طلب الأخذ القيم التي تكون أكبر تماما (أو أصغر تماما) من تلك القيمة، وهنا حسب الحالات المطلوبة يمكن الاعتماد على القواعد التالية:

- $P(X \leq x_f) = F(x_f) = \sum_{i=1}^{i=f} P(X = x_i)$
- $P(X < x_f) = \sum_{i=1}^{i=f-1} P(X = x_i) = F(x_f) - P(X = x_f)$
- $P(X \geq x_f) = \sum_{i=f}^{n} P(X = x_i) = 1 - \sum_{i=1}^{i=f-1} P(X = x_i)$

  $P(X \geq x_f) = 1 - \left(F(x_f) - P(X = x_f)\right) = 1 - P(X < x_f)$
- $P(X > x_f) = \sum_{i=f+1}^{n} P(X = x_i) = 1 - \sum_{i=1}^{i=f} P(X = x_i)$

  $P(X > x_f) = 1 - F(x_f) = 1 - P(X \leq x_f)$
- $P(x_{f'} \leq X \leq x_f) = \sum_{i=f'}^{i=f} P(X = x_i)\, x_{f'} \leq x_f$

  $P(x_{f'} \leq X \leq x_f) = P(X \leq x_f) - P(X < x_{f\prime})$

  $P(x_{f'} \leq X \leq x_f) = F(x_f) - F(x_{f'}) + P(X = x_{f\prime})$
- $P(x_{f'} < X \leq x_f) = \sum_{i=f'+1}^{f} P(X = x_i) = P(X \leq x_f) - (X \leq x_{f\prime})$

  $P(x_{f'} < X \leq x_f) = F(x_f) - (x_{f\prime})$
- $P(x_{f'} \leq X < x_f) = \sum_{i=f'}^{i=f-1} P(X = x_i) = P(X < x_f) - (X < x_{f'})$

  $P(x_{f'} \leq X < x_f) = \left(F(x_f) - P(X = x_f)\right) - \left(F(x_{f'}) - P(X = x_{f'})\right)$

$$P(x_{f'} \leq X < x_f) = \left(F(x_f) - F(x_{f'})\right) - \left(P(X = x_{f'}) - P(X = x_f)\right)$$

ه- المميزات العددية للمتحولات العشوائية

أ ـ التوقع الرياضي

ويرمز له بالرمز بـــ $E(X)$ وهو عبارة القيمة المتوقعة أو المأمولة للمتغيرة العشــوائية، ويتم حســابها بجمع كل قيمة من قيم المتغيرة x_i مضــروبة في قيمة الاحتمال الموافق لها، أي أننا نقوم بحســاب المتوســط المرجح للمتغيرة X على نقوم بترجيح كل قيمة من قيم المتغيرة بالاحتمال الموافق لها $P(X=x_i)$، ويحســب التوقع الرياضـي بالعلاقة الرياضـية التالية:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet P(X = x_i)$$

ملاحظة:

بوجود عدد ثابت C، يمكن استنتاج بعض الخواص الرياضية للتوقع الرياضي كما يلي:

1. $E(C) = \sum_{i=1}^{n} C.P(X = x_i) = C.\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = C \times 1 = C$

2. $E(CX) = \sum_{i=1}^{n} C.x_i P(X = x_i) = C.\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

   $E(CX) = C.E(X)$

3. $E(C + X) = \sum_{i=1}^{n} (C + x_i) P(X = x_i)$

$$E(C + X) = \sum_{i=1}^{n} C.P(X = x_i) + \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

$$E(C + X) = \sum_{i=1}^{n} C.P(X = x_i) + \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

$$E(C + X) = C.\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) + \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

$$E(C + X) = C.1 + E(X)$$

$$E(C + X) = E(X) + C$$

ب ـ العزوم الابتدائية

يعرف العزم الابتدائي من الدرجة s للمتغيرة العشـــوائية المنقطعة X بمجموع جداء كل قيمة من قيم المتغيرة x_i مرفوعة إلى القوة بقيمة الاحتمال الموافقة لها $P(X=x_i)$ ويحسب بالعلاقة التالية:

$$M_s(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^s P(X = x_i)$$

وبالاعتماد على العلاقة المعرفة للعزم الابتدائي من الدرجة s يمكن حساب العزوم الابتدائية التالية:

العزم الابتدائي من الدرجة 0: $M_0(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

العزم الابتدائي من الدرجة الأولى: $M_1(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = E(X)$

العزم الابتدائي من الدرجة الثانية: $M_2(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) = E(X^2)$

العزم الابتدائي من الدرجة الثالثة: $M_3(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 P(X = x_i) = E(X^3)$

ج ـ العزوم المركزية

يعرف العزم المركزي من الدرجة s للمتغيرة العشـــوائية المنقطعة X بمجموع جداء انحراف كل قيمة من قيم المتغيرة x_i بالنســـبة لتوقعها الرياضـــي مرفوعة إلى القوة s بقيمة الاحتمال الموافق لها $P(X=x_i)$، ويحســـب بالعلاقة التالية:

$$\mu_s(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^s . P(X = x_i)$$

وبالاعتماد على العلاقة المعرفة للعزم المركزي من الدرجة s يمكن حساب العزوم المركزية التالية:

- العزم المركزي من الدرجة الأولى $\mu_1(X)$ يساوي الصفر:

$$\mu_1(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^1 . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(X = x_i) - \sum_{i=1}^{n} E(X) . P(X = x_i)$$

$$= E(X) - E(X) \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = E(X) - E(X) . 1$$

$$= E(X) - E(X) = 0$$

- العزم المركزي من الدرجة الثانية $\mu_2(X)$ يســـاوي إلى الفرق بين العزم الابتدائي من الدرجة الثانية ومربع العزم الابتدائي من الدرجة الأولى:

$$\mu_2(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 . P(X = x_i)$$

$$\mu_2(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + (E(X))^2 - 2E(X)x_i\right) P(X = x_i)$$

$$\mu_2(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) + (E(X))^2 \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

$$\mu_2(X) = M_2(X) + \left(E(X)\right)^2 .1 - 2E(X).E(X)$$

$$\mu_2(X) = M_2(X) + \left(E(X)\right)^2 - 2\left(E(X)\right)^2$$

$$\mu_2(X) = M_2(X) - \left(E(X)\right)^2$$

$$\mu_2(X) = M_2(X) + M_1^2(X)$$

د ـالتباين والانحراف المعياري

يعرف التباين $V(X)$ بالنسبة المتغيرة العشوائية X على أنه العزم المركزي من الدرجة الثانية، في حين أن الانحراف المعياري δ_X هو عبارة عن الجذر التربيعي للتباين.

$$V(X) = \partial_X^2 = \mu_2(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 . P(X = x_i)$$

$$V(X) = M_2(X) + M_1^2(X)$$

$$\partial_X = \sqrt{V(X)}$$

<u>ملاحظة:</u>

بوجود عدد ثابت C، ويمكن استنتاج بعض الخواص الرياضية للتباين كما يلي:

1. $V(C) = \sum_{i=1}^{n} (C - E(C))^2 \bullet P_i = \sum_{i=1}^{n} (C - C)^2 \bullet P_i = \sum_{i=1}^{n} (0)^2 \bullet P_i = 0$

2. $V(C \cdot X) = \sum_{i=1}^{n} (Cx_i - E(C \cdot X))^2 \bullet P_i = \sum_{i=1}^{n} (C \cdot x_i - C \cdot E(X))^2 \bullet P_i = C^2 V(X)$

3. $V(C + X) = \sum_{i=1}^{n} ((C + x_i) - E(C + X))^2 \bullet P = V(X)$

مثال تطبيقي:

ليكن المتغير العشوائيX الذي يتبع التوزيع المبين في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0.1	0.3	a	0.2	0.1	0.1

بحيث أن aثابت.

المطلوب:

1. ما نوع هذا المتغير؟
2. أوجد قيمة a حتى يكون X يتبع قانون توزيع احتمالات وارسم بيان التوزيع.
3. أوجد دالة التوزيع $F(X)$وأرسم بيانها.
4. أحسب كل من التوقع الرياضي والتباين.

الحل:

1- هذا المتغير عبارة عن متغير عشوائي كمي منقطع لأنه يأخذ شكل قيم عددية متباعدة ومتباينة.

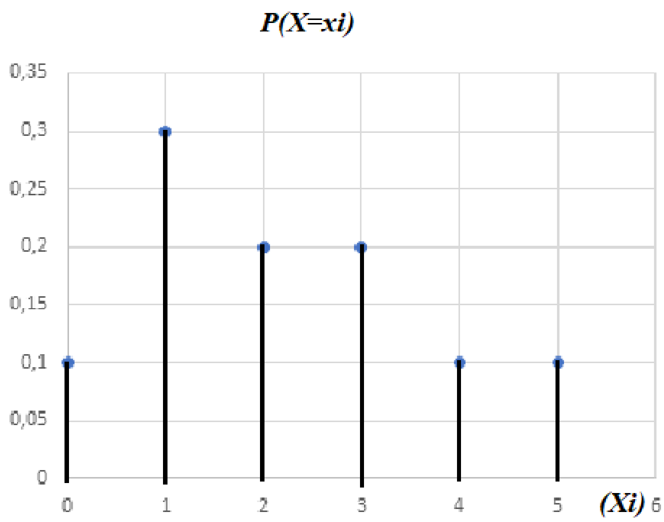
2- حتى يكون X يتبع قانون توزيع احتمالات يجب ان يحقق الشرط التالي:

$$\forall x_i \in X: \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1 \\ 0 \leq P(X=x_i) \leq 1 \end{cases}$$

أي:

$$\sum_{i=1}^{6} P(X=x_i) = (0.1) + (0.1) + (0.2) + a + (0.3) + (0.1) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = a + 0.8 = 1 \Rightarrow a = 0.2$$

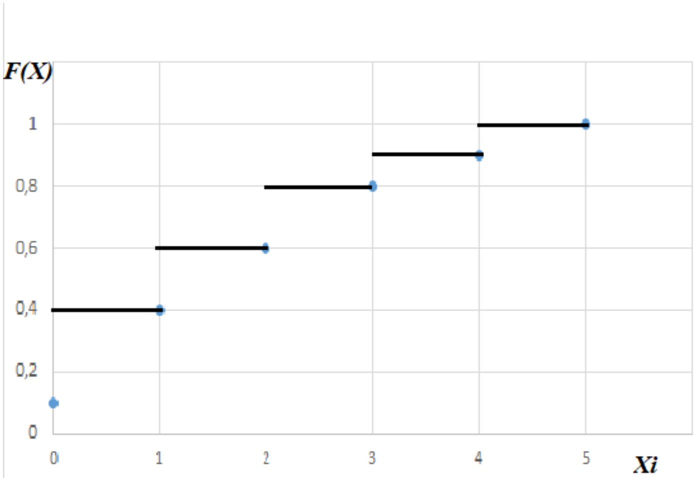


3- دالة التوزيع عبارة التكرار التجميعي الصاعد لدالة الكثافة وتحسب بالشكل التالي:

F(X)=

0.1	*si X ≤ 0*
0.1+0.1=0.2	*si 0 < X ≤ 1*
0.1+0.1+0.2=0.4	*si 1 < X ≤ 2*
0.1+0.1+0.2+0.2=0.6	*si 2 < X ≤ 3*
0.1+0.1+0.2+0.2+0.3=0.9	*si 3 < X ≤ 4*
0.1+0.1+0.2+0.2+0.3+0.1=1	*si 4 < X ≤ 5*

ويكون التمثيل البياني لدالة التوزيع على شكل سلالم كما يبينه الشكل التالي:



حساب التوقع الرياضي:

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i . P(X = x_i)}$$

$$\boldsymbol{E(X)} = \big(0 \times (0.1)\big) + \big(1 \times (0.3)\big) + \big(2 \times (0.2)\big) + \big(3 \times (0.2)\big) + \big(4 \times (0.1)\big) + \big(5 \times (0.1)\big)$$

$$\boldsymbol{E(X) = 2.2}$$

حساب التباين:

$$\boldsymbol{V(X) = \partial_X^2 = \mu_2(X) = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - E(X)\big)^2 . P(X = x_i)}$$

$$\boldsymbol{V(X)} = \big((0-2.2)^2.(0.1)\big) + \big((1-2.2)^2.(0.3)\big) + \big((2-2.2)^2.(0.2)\big) + \big((3-2.2)^2.(0.2)\big) + \big((4-2.2)^2.(0.1)\big) + \big((5-2.2)^2.(0.1)\big)$$

$$\boldsymbol{V(X) = 2.16}$$

وبطريقة أخرى:

$$\boldsymbol{V(X) = M_2(X) + M_1^2(X)}$$

$M_2(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 P(X = x_i) = ((0)^2 \times 0.1) + ((1)^2 \times 0.3) + ((2)^2 \times 0.2) +$

$((3)^2 \times 0.2) + ((4)^2 \times 0.1) + ((5)^2 \times 0.1) = 7$

$V(X) = 7 - (2.2)^2 = \mathbf{2.16}$

2- المتحول العشوائي المستمر

أ- دالة الكثافة الاحتمالية

يعرف المتحول العشوائي المستمر في مجال له ما لا نهاية من القيم الممكنة، لهذا قانون توزيعه لا يمكن إعطاؤه على شكل جدول كما رأيناه سابقا في المتحول العشوائي المنقطع، ولكنه يعطى على شكل دالة لـ (x) تسمى بدالة الكثافة وتكون على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

حتى تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق شرطين أساسيين وهما:

- يجب أن تكون موجبة على طول مجال تعريفها؛

$$f(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

- يجب أن تكون قيمة المســاحة التي تحصــرها في هذا المجال تســاوي إلى الواحد، أي تكاملها المحدود في مجال تعريفها يساوي إلى الواحد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx = 1$$

ملاحظة هامة:

إن قانون احتمال متحول عشــوائي مســتمر يتميز بمعطيات كثافة الاحتمال f في مجال تعريف معين، وبالتالي نقول عن متحولين عشوائيين مستمرين، إنهما يخضعان لنفس قانون الاحتمالات إذا كان لديهما:

- ✓ نفس مجال التعريف.
- ✓ نفس قيم احتمال أية نقطة تنتمي إلى المجال.

ب- دالة التوزيع

تعرف دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية x المعرفة في مجال تعريفها **[a,b]** ونكتب **F(X)** بمايلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

وانطلاقا من هذا التعريف فإن دالة التوزيع تتميز بالخصائص التالية:

- دالة التوزيع **F(X)** دالة مستمرة موجبة وتأخذ قيم محصورة بين الصفر والواحد أي: $0 \leq F(x) \leq 1$
- دالة التوزيع **F(X)** دالة متزايدة، أنه إذا كان $x < y$ فإن $F(x) \leq F(y)$؛
- عندما **(X)** تؤول إلى **(+∞)** فإن نهاية دالة التوزيع تكون مساويا إلى الواحد أي: $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
- عندما **(X)** تؤول إلى **(-∞)** فإن نهاية دالة التوزيع تكون مساويا إلى الصفر أي: $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

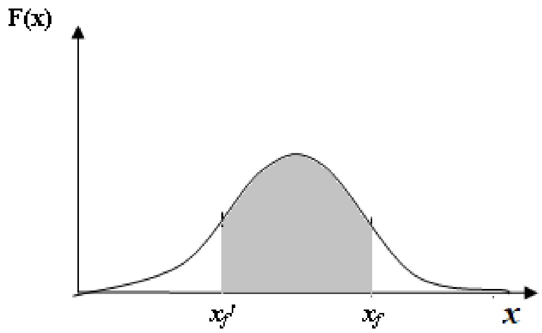
ج- حساب الاحتمالات

إذا أردنا حساب احتمال أن تأخذ متغيرة عشوائية قيم محصورة بين قيمتين $(x_f\ ,\ x_{f'})$ حيث أن $x_f \geq x_{f'}$ فعلينا أن نحسب قيمة المساحة التي يحصرها منحنى دالة الكثافة الاحتمالية ***f(x)*** ومحور الفواصل في حدود المجال $[x_{f'},x_f]$ أي أن:

$$P\left(x_{f'} \leq x \leq x_f\right) = \int_{x_{f'}}^{x_f} f(x)dx$$

$$P\left(x_{f'} \leq x \leq x_f\right) = \int_{-\infty}^{x_f} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_{f'}} f(x)dx$$

$$P\left(x_{f'} \leq x \leq x_f\right) = F\left(x_f\right) - F\left(x_{f'}\right)$$



ملاحظة:

بما أن حساب الاحتمال في المتغير العشوائي المستمر هو حساب المساحة المحصورة لمنحنى دالة الكثافة ومحور التراتيب عند حدود نقطتين من مجال التعريف، والتي ما هي إلا نهاية التكامل المحدود في ذلك المجال، لذلك لا نميز بين أن تكون القيم أكبر أو تساوي(≥)وأن تكون أكبر تماما (>)، كما أنه لا لا نميز بين أن تكون القيم أقل أو تساوي(≤)وأن تكون أكبر تماما (<)، كما يجدر الإشارة إلى النقاط التالية:

- $P(X = x) = \int_x^x f(x) = 0$
- $P\left(X > x_f\right) = \int_{x_f}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 - \int_{-\infty}^{x_f} f(x)dx$

$$= 1 - F(x_f)$$

د- المميزات العددية

أ-التوقع الرياضي

ويرمز له بالرمز بـ $E(X)$ وهو عبارة القيمة المتوقعة أو المأمولة للمتغيرة العشوائية، وهو عبارة عن المساحة التي يحصرها منحنى دالة الكثافة الاحتمالية مضروبة بقيمة المتغيرة في مجال تعريفها، أي يساوي إلى قيمة التكامل المحدود لدالة الكثافة الاحتمالية مضروبة بقيمة المتغيرة في مجال تعريفها، يعرف التوقع الرياضي بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

ملاحظة:

بوجود عدد ثابت C، يمكن استنتاج بعض الخواص الرياضية للتوقع الرياضي كما يلي:

1. $E(C.X) = C.E(X)$

$$E(C.X) = \int_{-\infty}^{+\infty} Cxf(x)dx = C\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = C.E(X)$$

2. $E(C+X) = C + E(X)$

$$E(C+X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (C+x)f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} cf(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$= C\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + E(X) = C \times 1 + E(X) = C + E(X)$$

ب-العزوم الابتدائية

يعرف العزم الابتدائي من الدرجة s للمتغيرة العشوائية المستمرة X عبارة عن المساحة التي يحصرها منحنى دالة الكثافة الاحتمالية مضروبة بقيمة المتغيرة x مرفوعة إلى القوة s في مجال تعريفها، أي يساوي إلى قيمة التكامل المحدود لدالة الكثافة الاحتمالية مضروبة بقيمة المتغيرة مرفوعة إلى القوة s في مجال تعريفها، وتعطى علاقة العزم الابتدائي من الدرجة s بالعلاقة:

$$M_s(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)dx$$

وبالاعتماد على العلاقة المعرفة للعزم الابتدائي من الدرجة s يمكن حساب العزوم الابتدائية التالية:

العزم الابتدائي من الدرجة 0: $M_0(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

العزم الابتدائي من الدرجة الأولى: $M_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^1 f(x)dx = E(X)$

العزم الابتدائي من الدرجة الثانية: $M_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = E(X^2)$

العزم الابتدائي من الدرجة الثالثة: $M_3(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)dx = E(X^3)$

ج-العزوم المركزية

يعرف العزم الابتدائي من الدرجة s للمتغيرة العشوائية المستمرة X عبارة عن المساحة التي يحصرها منحنى دالة الكثافة الاحتمالية مضروبة بقيمة انحراف المتغيرة x بالنسبة لتوقعها الرياضي $E(X)$ مرفوعة إلى القوة s في مجال تعريفها، أي يساوي إلى قيمة التكامل المحدود لدالة الكثافة الاحتمالية مضروبة بقيمة انحراف المتغيرة x بالنسبة لتوقعها الرياضي $E(X)$ مرفوعة إلى القوة s في مجال تعريفها، وتعطى علاقة العزم الابتدائي من الدرجة s بالعلاقة:

$$\mu_s(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^s f(x)dx$$

وبالاعتماد على العلاقة المعرفة للعزم المركزي من الدرجة s يمكن حساب العزوم المركزية التالية:

- العزم المركزي من الدرجة الأولى $\mu_1(X)$ يساوي الصفر:

$$\mu_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} E(X)f(x)dx$$

$$\mu_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx - E(X)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$\mu_1(X) = E(X) - E(X) = 0$$

- العزم المركزي من الدرجة الثانية $\mu_2(X)$ يساوي إلى الفرق بين العزم الابتدائي من الدرجة الثانية ومربع العزم الابتدائي من الدرجة الأولى:

$$\mu_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 + \left(E(X)\right)^2 - 2xE(X)\right)f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(E(X)\right)^2 f(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} 2xE(X)f(x)dx$$

$$= M_2(X) - 2E(X)\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$
$$= M_2(X) - 2E(X)E(X) = M_2(X) - (E(X))^2$$
$$= M_2(X) - M_1^2(X)$$

د ـ التباين والانحراف المعياري

يعرف التباين $V(X)$ بالنسبة المتغيرة العشوائية X على أنه العزم المركزي من الدرجة الثانية، في حين أن الانحراف المعياري δ_X هو عبارة عن الجذر التربيعي للتباين.

$$V(X) = \partial_X^2 = \mu_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx$$

$$V(X) = M_2(X) - M_1^2(X)$$

$$\partial_X = \sqrt{V(X)}$$

ه- مثال تطبيقي:

ليكن مغير عشوائي مستمر والذي يخضع لقانون التوزيع الاحتمالي التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

المطلوب:

1. أوجد التوقع الرياضي.
2. أوجد العزوم الابتدائية و المركزية.
3. احسب التباين و الانحراف المعياري.
4. أحسب $P(X \le 1)$.

الحل:

1.حساب التوقع الرياضي:

يساوي التوقع الرياضي إلى قيمة التكامل المحدود لدالة الكثافة الاحتمالية مضروبة بقيمة المتغيرة في مجال تعريفها، يعرف التوقع الرياضي بالعلاقة التالية:

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{2} xf(x)dx$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.\frac{x}{2}dx$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2}dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2$$

$$E(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3}{6}\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{6}\right)=\frac{(2)^3}{6}-\frac{(0)^3}{6}=\frac{8}{6}$$

$$E(x)=\frac{4}{3}$$

2. حساب العزوم الابتدائية:

يساوي العزم المركزي من الدرجة s إلى قيمة التكامل المحدود لدالة الكثافة الاحتمالية مضروبة بقيمة المتغيرة مرفوعة إلى القوة s في مجال تعريفها، وتعطى علاقة العزم الابتدائي من الدرجة s بالعلاقة:

$$M_s(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)dx=\int_{0}^{2} x^s f(x)dx$$

$$M_s(X)=\int_{0}^{2} x^s\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^{s+1}\,dx$$

$$M_s(X)=\left.\frac{x^{s+2}}{2(s+2)}\right|_0^2=\lim_{x\to 2}\frac{x^{s+2}}{2(s+2)}-\lim_{x\to 0}\frac{x^{s+2}}{2(s+2)}$$

$$M_s(X)=\frac{2^{s+2}}{2(s+2)}-\frac{0^{s+2}}{2(s+2)}$$

$$M_s(X)=\frac{2^{s+1}}{(s+2)}$$

3. **حساب العزوم المركزية:**

يساوي العزم المر إلى قيمة التكامل المحدود لدالة الكثافة الاحتمالية مضروبة بقيمة انحراف المتغيرة X بالنسبة لتوقعها الرياضي $E(X)$ مرفوعة إلى القوة s في مجال تعريفها، وتعطى علاقة العزم الابتدائي من الدرجة s بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\mu_s(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^s f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{\mu_s(X) = \int_0^2 \left(x - \frac{4}{3}\right)^s \frac{x}{2} dx}$$

باستعمال التكامل بالتجزئة نضع:

$$V = \frac{x}{2} \Longrightarrow dV = \frac{dx}{2}$$

$$dU = \left(x - \frac{4}{3}\right)^s dx \Longrightarrow U = \frac{\left(x - \frac{4}{3}\right)^{s+1}}{(s+1)}$$

ومن ثم فإن:

$$\mu_s(X) = \frac{\left(x - \frac{4}{3}\right)^{s+1}}{(s+1)} \cdot \frac{dx}{2}\Bigg|_0^2 - \int_0^2 \frac{\left(x - \frac{4}{3}\right)^{s+1}}{(s+1)} \cdot \frac{dx}{2}$$

$$\mu_s(X) = \frac{\left(2 - \frac{4}{3}\right)^{s+1}}{2(s+1)} - \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^{s+1}}{2(s+1)} - \frac{\left(x - \frac{4}{3}\right)^{s+2}}{2(s+1)(s+2)}\Bigg|_0^2$$

$$\mu_s(X) = \frac{\left(2 - \frac{4}{3}\right)^{s+1}}{2(s+1)} - \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^{s+1}}{2(s+1)} - \frac{\left(2 - \frac{4}{3}\right)^{s+2} - \left(0 - \frac{4}{3}\right)^{s+2}}{2(s+1)(s+2)}$$

$$\mu_s(X) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{s+1} - \left(-\frac{4}{3}\right)^{s+1}}{2(s+1)} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{s+2} - \left(-\frac{4}{3}\right)^{s+2}}{2(s+1)(s+2)}$$

حساب التباين والانحراف المعياري:

$$\boldsymbol{V(X) = \partial_X^2 = M_2(X) - M_1^2(X)}$$

$$\boldsymbol{M_2(X) = \frac{2^{2+1}}{(2+2)} = \frac{8}{4} = 2}$$

$$V(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

ومن ثم فإن الانحراف المعياري يساوي:

$$\partial_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

سلسلة تمارين محلولة متعلقة بالفصل:

التمرين الأول:

نرمي نردين بحيث أن X_1 يمثل رقم النرد الأول، X_2 يمثل رقم النرد الثاني، المطلوب ما يلي:

1. إذا كانت $X=X_1+X_2$، أوجد قانون احتمال (X) ومثله بيانيا.
2. إيجاد دالة التوزيع **F(X)** ومثلها بيانيا.
3. أرسم بيان توزيع احتمال **(X)**؟

الحل:

لإيجاد القيم الممكنة لـ Y نقوم بالاعتماد على جدول ذي بعدين، حيث نضع في العمود الأول القيم المكنة للنرد الأول (X_1) وفي السطر الأول القيم الممكنة للنرد الثاني (X_2)، في حين نضع في الخانات التي تعبر عن تقاطع السطر والعمود قيمة X التي تعبر عن مجموع الوجهين الظاهرين كما يلي:

X_2 \ X_1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	5	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

نلاحظ أن فراغ الحوادث الأولية لهذه التجربة Ω الذي يعبر عن النتائج الممكنة للتجربة والتي تمثل الأرقام التي يمكن أن نتحصل عليها عند جمع الرقمين الظاهرين لنردين مختلفين من الجدول عبارة عن المجموعة التالية:

Ω = {2, 3, 4, 5, 6 7, 8, 9, 10, 11, 12}

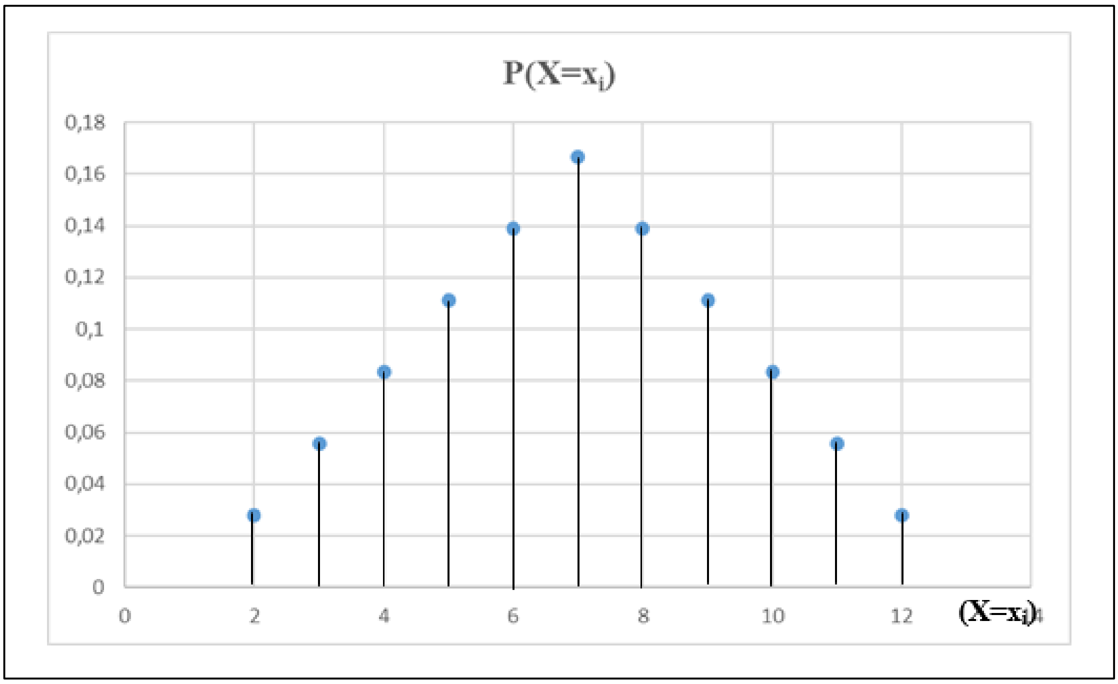
ولإيجاد احتمال الحصول على كل عنصر نقوم بالاعتماد على الطريقة التقليدية لحساب الاحتمالات، أي نقوم بتقسيم عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة لنتحصل على الجدول التالي:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

نلاحظ من الجدول أن:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} P(X = x_i) = 1 \\ 0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \end{cases}$$

ومنه فإن X يتبع قانون توزيع احتمالات، ويتم تمثيلها بيانيا عن طريق الأعمدة التكرارية كما يلي:



2- إيجاد دالة التوزيع:

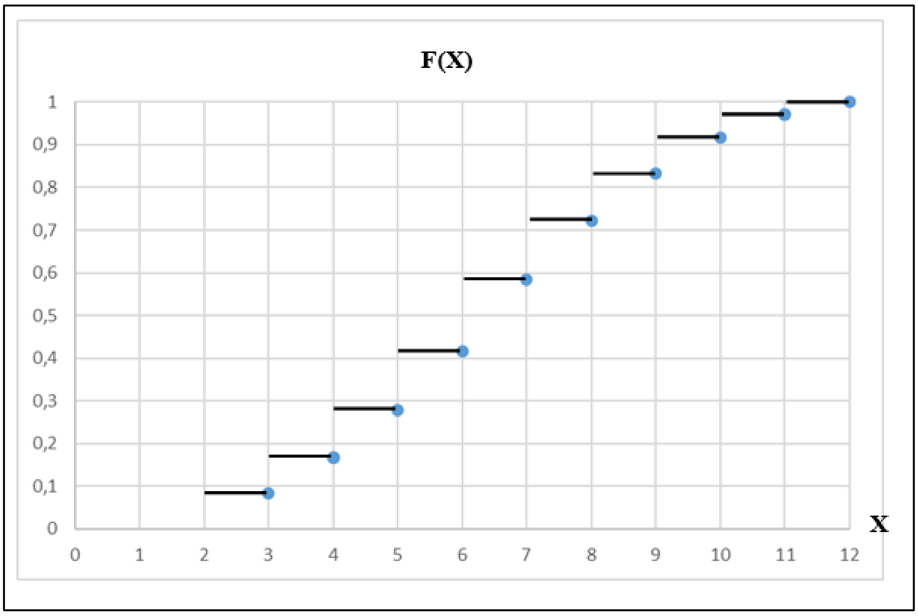
دالة التوزيع F(X) ما هي إلا الدالة التراكمية لقانون توزيع الاحتمالات والتي نتحصل عليها بتجميع قيمة الاحتمالات إلى القيمة المدروسة أي:

$$F(x_f) = P(X \leq x_f) = \sum_{i=1}^{f} P(X = x_i)$$

ونتحصل على النتائج في الجدول التالي:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
F(X)	-	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36

أما عن التمثيل البياني لدالة التوزيع فهو مبين في الشكل الموالي:



التمرين الثاني:

ليكن X متحول عشوائي معرف بقانون الاحتمالات التالي:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	1/10	3/10	4/10	1/10	0.5/10	0.5/10

أحسب وأرسم بيان الدالة التوزيعية *F(X)*.

أحسب الاحتمالات التالية: $P(X \leq 4)$، $P(X \geq 2)$، $P(2 \leq X \leq 4)$.

أحسب التوقع الرياضي.

أحسب كل من $E(X^2)$، $E(X^3)$، $E[X-E(X)]^2$.

الحل:

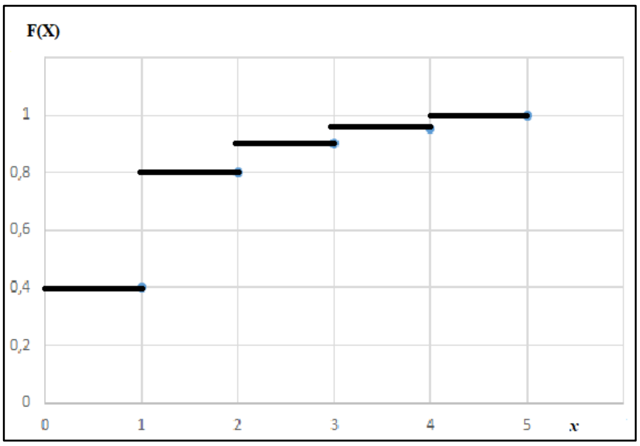
حساب دالة التوزيع وتمثيلها بيانيا:

دالة التوزيع F(X) ما هي إلا الدالة التراكمية لقانون توزيع الاحتمالات والتي نتحصل عليها بتجميع قيمة الاحتمالات إلى القيمة المدروسة أي:

$$F(x_f) = P(X \leq x_f) = \sum_{i=1}^{f} P(X = x_i)$$

ونتحصل على النتائج في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	1/10	3/10	4/10	1/10	0.5/10	0.5/10
$F(X)$	-	4/10	8/10	9/10	9.5/10	1



حساب الاحتمالات:

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$P(2 \leq X \leq 4) = 0.4 + .01 + 0.05 = 0.45$$

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X \geq 2) = 0.4 + 0.1 + 0.05 + 0.05 = 0.6$$

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$P(X \leq 4) = 0.1 + 0.3 + 0.4 + 0.1 + 0.05 = 0.95$$

كما يمكن اعتماد العلاقة التالية:

$$P(X \leq 4) = 1 - P(X > 4) = 1 - P(X = 5)$$

$$P(X \leq 4) = 1 - 0.05 = 0.95$$

حساب المميزات العددية:

حساب التوقع الرياضي E(X):

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(X = x_i)$$

$$E(X) = (0 \times 0.1) + (1 \times 0.3) + (2 \times 0.4) + (3 \times 0.1) + (4 \times 0.05) + (6 \times 0.05)$$

$$E(X) = 1.85$$

حساب العزم الابتدائي من الدرجة الثانية $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . P(X = x_i)$$

$$E(X^2) = ((0)^2 \times 0.1) + ((1)^2 \times 0.3) + ((2)^2 \times 0.4) + ((3)^2 \times 0.1) + ((4)^2 \times 0.05) + ((5)^2 \times 0.05)$$

$$E(X^2) = 4.85$$

حساب العزم الابتدائي من الدرجة الثالثة $E(X^3)$:

$$E(X^3) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 . P(X = x_i)$$

$$E(X^{23}) = ((0)^3 \times 0.1) + ((1)^3 \times 0.3) + ((2)^3 \times 0.4) + ((3)^3 \times 0.1) + ((4)^3 \times 0.05) + ((5)^3 \times 0.05)$$

$$E(X^2) = 15.65$$

حساب العزم المركزي من الدرجة الثانية $E((X-E(X))^2)$:

$$E((X-E(X))^2)$$
$$= \left((0-1.85)^2 \times 0.1\right) + \left((1-1.85)^2 \times 0.3\right) + \left((2-1.85)^2 \times 0.4\right)$$
$$+ \left((3-1.85)^2 \times 0.1\right) + \left((4-1.85)^2 \times 0.05\right) + \left((5-1.85)^2 \times 0.05\right)$$

$$E((X-E(X))^2) = 1.4275$$

كما يمكن حساب العزم المركزي من الدرجة الثانية بحساب الفرق بين العزم الابتدائي من الدرجة الثانية ومربع العزم الابتدائي من الدرجة الأولى أي:

$$E((X-E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E((X-E(X))^2) = 4.85 - (1.85)^2$$

$$E((X-E(X))^2) = 1.4275$$

ونسجل جميع العمليات الحسابية في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	4	5	$\sum$
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,1	0,05	0,05	1
$x_i .P(X=x_i)$	0	0,3	0,8	0,3	0,2	0,25	1,85
$(x_i)^2$	0	1	4	9	16	25	-
$(x_i)^2 .P(X=x_i)$	0	0,3	1,6	0,9	0,8	1,25	4,85
$(x_i)^3$	0	1	8	27	64	125	-
$(x_i)^3 .P(X=x_i)$	0	0,3	3,2	2,7	3,2	6,25	15,65
$(x_i-E(X))$	-1,85	-0,85	0,15	1,15	2,15	3,15	-
$(x_i-E(X))^2$	3,4225	0,7225	0,0225	1,3225	4,6225	9,9225	-
$(x_i-E(X))^2 P(X=x_i)$	0,34225	0,21675	0,009	0,13225	0,231125	0,496125	1,4275

التمرين الثالث:

يقوم لاعبا عند رميه لحجرة نرد بإعطاء الاحتمالات التالية لمختلف الحوادث:

X	1	2	3	1 أو 5	2 أو 6	عدد زوجي
$P(X=x_i)$	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3	0.6

عدم تساوي قيم الاحتمالات لمختلف الحوادث يرجع لعدة أسباب: حجرة النرد غير متزنة، طريقة خاصة لدى اللاعب عند رمي الحجر...الخ.

المطلوب:

أحسب كل من P(X=4)، P(X=5) و P(X=6) ، ثم أثبت أن مجموع الاحتمالات يساوي إلى الواحد.

ليكن الحدث A: الحصول على عدد أكبر من 3 وليكن الحدث B الحدث الحصول على عدد زوجي فأثبت صحة العبارتين التاليتين:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الحل:

حساب الاحتمالات:

$$P[(X = 2) \cup (X = 6)] = 0.3$$

$$\Rightarrow P(X = 2) + P(X = 6) = 0.3$$

$$\Rightarrow P(X = 6) = P[(X = 2) \cup (X = 6)] - P(X = 2)$$

$$\Rightarrow P(X = 6) = 0.3 - 0.2$$

$$\Rightarrow P(X = 6) = 0.1$$

$$P[(X = 2) \cup (X = 4) \cup (X = 6)] = 0.6$$

$$\Rightarrow P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = 0.3$$

$$\Rightarrow P(X = 4) = P[(X = 2) \cup (X = 4) \cup (X = 6)] - [P(X = 2) + P(X = 6)]$$

$$\Rightarrow P(X = 4) = 0.6 - (0.2 + 0.1)$$

$$\Rightarrow P(X = 4) = 0.3$$

$$P[(X = 1) \cup (X = 5)] = 0.2$$

$$\Rightarrow P(X = 1) + P(X = 5) = 0.2$$

$$\Rightarrow P(X = 5) = P[(X = 1) \cup (X = 5)] - P(X = 1)$$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(X=5)=0.2-0.1}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(X=5)=0.1}$

لنقم بإعداد جدول الاحتمالات:

X	1	2	3	4	5	6	$\sum$
P(X)	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1	1

نلاحظ من الجدول أن:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} P(X=x_i)=1 \\ 0 \le P(X=x_i) \le 1 \end{cases}$$

ومنه فإن X يتبع قانون توزيع احتمالات.

إثبات صحة العلاقة $\boldsymbol{P(\bar{A})=1-P(A)}$:

$\boldsymbol{P(A)=P(X>3)=P[(X=4)\cup(X=5)\cup(X=6)]}$

$\boldsymbol{P(A)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)}$

$\boldsymbol{P(A)=0.3+0.1+0.1}$

$\boldsymbol{P(A)=0.5}$

من جانب آخر فإن:

$\boldsymbol{P(\bar{A})=P(X\le 3)=P[(X=1)\cup(X=2)\cup(X=3)]}$

$\boldsymbol{P(\bar{A})=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)}$

$\boldsymbol{P(\bar{A})=0.1+0.2+0.2}$

$\boldsymbol{P(\bar{A})=0.5=1-P(A)}$

إثبات صحة العلاقة $\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$:

$\boldsymbol{P(B)=P[(X=2)\cup(X=4)\cup(X=6)]}$

$\boldsymbol{P(B)=P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)}$

$\boldsymbol{P(B)=0.2+0.3+0.1}$

$\boldsymbol{P(B)=0.6}$

كما لدينا:

$$P(A \cup B) = P[(X=2) \cup (X=4) \cup (X=5) \cup (X=6)]$$

$$P(A \cup B) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$P(A \cup B) = 0.2 + 0.3 + 0.1 + 0.1$$

$$P(A \cup B) = 0.7$$

ومن جانب آخر لدينا:

$$P(A \cap B) = P[(X=4) \cup (X=6)]$$

$$P(A \cap B) = P(X=4) + P(X=6)$$

$$P(A \cap B) = 0.3 + 0.1$$

$$P(A \cap B) = 0.4$$

نلاحظ أن:

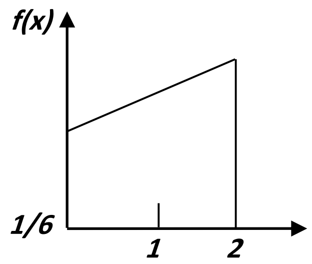
$$(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.4 = 0.7$$

وبالتالي فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

التمرين الرابع:

إذا كانت لدينا دالة الكثافة الاحتمالية *f(x)* المعرفة بالشكل التالي:



1. ما هو نوع هذا المتحول ثم أوجد دالة كثافته الاحتمالية

f(x) و مجال تعريفها.

2. إيجاد دالة التوزيع F(X) ثم أرسم شكلها البياني.
3. إيجاد كل من التوقع الرياضي E(X) والتباين V(X).

الحل:

1. المتغير المدروس هو متغير عشوائي مستمر، ومن البيان نلاحظ أن دالة كثافته الاحتمالية معرفة في المجال [0,2]، وهي دالة خطية من الشكل $f(x) = a + bx$ حيث أن $a = f(0) = 1/6$، ولإيجاد شكل الدالة نحن نعلم أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{2} (a + bx) = 1$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{6} + bx\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{6}x + \frac{b}{2}x^2\right)\Big|_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{6}x + \frac{b}{2}x^2\right) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}x + \frac{b}{2}x^2\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{1}{6} \times 2\right) + \left(\frac{b}{2} \times 2^2\right)\right) + 0 = 1$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

ومنه فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير x معرفة بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x, & x \in [0,2] \\ 0, & sinon \end{cases}$$

2. إيجاد دالة التوزيع:

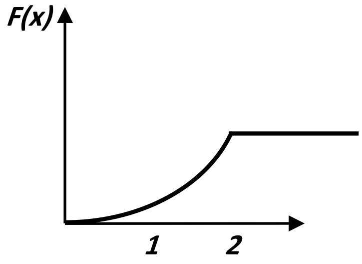
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x\right)dx$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x^2\right)\Big|_0^x$$

$$F(x) = \lim_{x\to x}\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^2\right) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^2\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{6}x(x+1)$$

وهي عبارة عن دالة كثير حدود من الدرجة الثانية تمر من المبدأ، ويكون شكلها قطع مكافئ كما يلي:



3. حساب التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X) = M_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x\right)dx$$

$$E(X) = \int_0^2 \left(\frac{x}{6}+\frac{x^2}{3}\right)dx = \left(\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{9}\right)\Big|_0^2$$

$$E(X) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{9}\right) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{9}\right)$$

$$E(X) = \frac{4}{12}+\frac{8}{9}$$

$$E(X) = \frac{11}{9}$$

التباين هو الفرق بين العزم الابتدائي من الدرجة والثانية ومربع العزم الابتدائي من الدرجة الأولى والذي يمكن كتابته بالعلاقة التالية:

$$V(x) = M_2(X) - M_1^2(X)$$

لنقم بحساب العزم الابتدائي من الدرجة الثانية والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$M_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x\right)dx$$

$$M_2(X) = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{3}\right)dx = \left(\frac{x^3}{18}+\frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^2$$

$$M_2(X) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3}{18}+\frac{x^4}{12}\right) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{18}+\frac{x^4}{12}\right)$$

$$M_2(X) = \frac{8}{18}+\frac{16}{12}$$

$$M_2(X) = \frac{16}{9}$$

ومن ثم فإن التباين يساوي إلى:

$$V(X) = \frac{16}{9} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 = \frac{144}{81} - \frac{121}{81}$$

$$V(X) = \frac{23}{81}$$

التمرين الخامس:

نقول عن المتغير العشوائي المستمر أنه يتبع قانون توزيع "باريطو" Paretto إذا كتبت دالة كثافته بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha C^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & si \quad x \geq C \\ 0 & si \quad x < C \end{cases}$$

حيث α و C ثابتان حقيقيان

1 - أثبت أن هذا القانون هو قانون توزيع احتمالات.

2 - أوجد العزم الابتدائي من الدرجة k.

3 - استنتج التوقع الرياضي والتباين.

الحل:

1. إثبات أن قانون Paretto هو قانون توزيع احتمالات:

حتى تكون هذه الدالة قانون توزيع احتمالات يجب أن يكون التكامل المحدود في مجال تعريفها يساوي إلى الواحد، بعبارة أخرى نكتب:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{c}^{+\infty} \frac{\alpha C^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx$$

$$= \alpha C^{\alpha} \int_{c}^{+\infty} x^{-(\alpha+1)} dx$$

$$= -C^{\alpha} x^{-\alpha} \Big|_{C}^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(-C^{\alpha}x^{-\alpha}) - \lim_{x\to C}(-C^{\alpha}x^{-\alpha})$$

$$= 0 - (-C^{\alpha}C^{\alpha}) = 1$$

ومنه فإن قانون توزيع Paretto هو قانون توزيع احتمالات.

2. حساب العزم الابتدائي من الدرجة k:

$$\boldsymbol{M_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx = \int_{c}^{+\infty} x^k \left(\frac{\alpha C^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{M_k(X) = \alpha C^{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-\alpha-1}dx}$$

$$\boldsymbol{M_k(X) = \alpha C^{\alpha}\left(\frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha}\right)\Bigg|_{C}^{+\infty}}$$

$$\boldsymbol{M_k(X) = \lim_{x\to+\infty}\alpha C^{\alpha}\left(\frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha}\right) - \lim_{x\to C}\alpha C^{\alpha}\left(\frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha}\right)}$$

$$\boldsymbol{M_k(X) = 0 - \alpha C^{\alpha}\left(\frac{c^{k-\alpha}}{k-\alpha}\right) \qquad k<\alpha}$$

$$\boldsymbol{M_k(X) = \frac{\alpha}{\alpha-k}C^k}$$

3. استنتاج التوقع الرياضي والتباين:

$$\boldsymbol{E(X) = M_1(X) = \frac{\alpha}{\alpha-1}C}$$

$$\boldsymbol{V(x) = M_2(X) - M_1^2(X)}$$

$$\boldsymbol{V(x) = M_2(X) - M_1^2(X) = \frac{\alpha}{\alpha-2}C^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}C\right)^2}$$

$$\boldsymbol{V(x) = C^2\left(\frac{\alpha}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}\right)}$$

الفصل الرابع: بعض قوانين التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغير العشوائي المنقطع

في كثير من الحالات نجد أن التجارب العشوائية تتشابه من حيث مضمونها والشروط التي تحدد معالم المتغير العشوائي المدروس وتحدد كذلك احتمال تحققه من عدمه، كعدد مرات تكرار التجربة، استقلالية الحوادث ونتائج التجربة من مرة لأخرى، لذلك استطاع علماء الإحصاء من استنتاج التوزيعات الإحصائية التي تتبعها المتغيرات العشوائية حسب كل تجربة وطبيعتها، فقاموا بصياغة العلاقات الرياضية الخاصة بكل توزيع وكذا استخراج المميزات العددية ها، وسنحاول من خلال هذا الفصل الاطلاع على أهم التوزيعات الخاصة بالمتغير العشوائي المنقطع، حيث سنقوم بصياغة الدالة الرياضية للقانون انطلاقا من الشروط العامة للتجربة الموافقة له، كما سنقوم باستنتاج المميزات العددية المتمثلة في التوقع الرياضي والتباين.

1ـ قانون توزيع برنولي:

أ- شكل القانون:

نقول إن المتغير العشوائي المنقطع يتبع قانون توزيع برنولي إذا كانت للتجربة المتعلقة بهذا المتغير نتيجتين ممكنتين: إمكانية تحقق الحدث (نجاح) وإمكانية عدم تحقق الحدث (خسارة)، مثل نجاح الطالب في الامتحان من عدمه، الحصول على قطعة غير صالحة من الإنتاج اليومي...

وهنا يتم إرفاق المتغير العشوائي X القيمة 1 في حالة تحقق الحدث، والقيمة 0 في حالة عدم تحققه، وبالتالي فإن القيم الممكنة التي يأخذها هي **1** في حالة النجاح وتحقق الحدث باحتمال p، و **0** في حالة الفشل وعدم تحقق الحدث باحتمال q حيث أن:

$$p + q = 1$$

$$\Omega = \{0, 1\}$$

$$P(X = 0) = q = 1 - p$$

$$P(X = 1) = p$$

مثال:

- عند رمي قطعة النقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور الوجه هو $p = 1/2$ واحتمال عدم ظهوره $q = 1 - p = 1/2$.
- عند رمي حجر النرد مرة واحدة فاحتمال ظهور الرقم 4 هو $p = 1/6$ واحتمال عدم ظهوره $q = 1 - p = 5/6$

ونكون أمام تجربة برنولي عندما نقوم بالتجربة مرة واحدة، ولكن هل يمثل قانون توزيع برنولي قانون توزيع احتمالات؟

نقول أن X يتبع قانون توزيع احتمالات إذا كان: $\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = 1$ أي بعبارة أخرى نكتب:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

ونحن نعلم أن:

$$P(X = 0) = q = 1 - p$$

وكذلك أن:

$$P(X = 1) = p$$

ومنه فإن:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = p + q = p + 1 - p = 1$$

ومنه فإن قانون توزيع برنولي هو قانون توزيع احتمالات.

ب- المميزات العددية لقانون توزيع برنولي:

التوقع الرياضي:

انطلاقا من العلاقة التعريفية للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنقطع فإن:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{1} x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1)$$

$$E(X) = 0 \times q + 1 \times p = p$$

ومنه فإن التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منقطع يتبع قانون توزيع برنولي يساوي إلى:

$$E(X) = p$$

التباين:

تعطى علاقة التباين بالشكل التالي:

$$V(X) = M_2(X) + M_1^2(X)$$

لنقم بحساب أولا العزم الابتدائي من الدرجة الثانية الذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$M_2(X) = E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i)$$

$$M_2(X) = (0)^2 \times P(X = 0) + (1)^2 \times P(X = 1)$$

$$M_2(X) = 0 \times q + 1 \times p$$

$$M_2(X) = p$$

بتعويض قيمة التوقع الرياضي وقيمة العزم الابتدائي من الدرجة الثانية في علاقة حساب التباين نجد:

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

ومنه فإن التباين لمتغير عشوائي منقطع يتبع قانون توزيع برنولي يساوي إلى:

$$V(X) = pq$$

2ـ قانون التوزيع الثنائي La loi binomiale:

أ- شكل القانون:

يتعلق قانون التوزيع الثنائي عندما نكرر تجربة برنولي n مرة في نفس الظروف، حيث أنه في كل مرة يكون للتجربة نتيجتين ممكنتين النجاح في حالة تحقق الحدث والخسارة في حالة عدم تحققه، ونظرا لاستقلالية الحوادث فيما بينها عند إعادة التجربة وعدم تغير شروط القيام بالتجربة التي تؤثر على إمكانية تحقق الحدث من عدمه فإن قيمة احتمال النجاح p يبقى ثابتا مهما أعيدت التجربة، وبالمقابل يبقى q احتمال عدم تحقق التجربة هو الآخر ثابتا.

ولإعطاء علاقة قانون التوزيع الثنائي سنقوم بدراسة المثال التالي:

نقوم برمي حجر نرد ثلاث(03) رميات متتالية بطريقة عشوائية، وسنقوم باستخراج قانون توزيع الاحتمال للمتغيرة X التي تمثل عدد مرات الحصول على الرقم (5).

ونشير هنا أن احتمال الحصول على الرقم (5) أي احتمال تحقق الحدث في كل رمية يبقى ثابتا ويساوي $p=1/6$، واحتمال عدم تحقق الحدث يبقى ثابتا كذلك ويساوي $q=5/6$.

إنه عند رمي حجر النرد ثلاث مرات فإننا قد لا نتحصل على الرقم (5) في أي مرة وفي هذه الحالة $(X=0)$، أو أننا نتحصل على الرقم (5) في مرة واحدة وفي هذه الحالة $(X=1)$، أو أننا نتحصل على الرقم (5) مرتين وفي هذه الحالة $(X=2)$، أو أننا نتحصل على الرقم (5) ثلاث مرات وفي هذه الحالة $(X=3)$، أي أن $X = \{0, 1, 2, 3\}$

لنسمي الحوادث: E_i الحصول على الرقم (5) في الرمية i

- E_1 الحصول على الرقم (5) في الرمية الأولى.
- E_2 الحصول على الرقم (5) في الرمية الثانية.
- E_3 الحصول على الرقم (5) في الرمية الثالثة.

كما نسمي الحوادث: $\overline{E_i}$ عدم الحصول على الرقم (5) في الرمية i

- $\overline{E_1}$ عدم الحصول على الرقم (5) في الرمية الأولى.
- $\overline{E_2}$ عدم الحصول على الرقم (5) في الرمية الثانية.

○ $\overline{E_3}$عدم الحصول على الرقم (5) في الرمية الثالثة.

علما أن نتيجة أي رمية مستقلة عن نتيجة رمية أخرى بما أن الرميات كلها عشوائية وأن زهرة النرد مفترض أنها متزنة.

1- حساب $P(X=0)$:

$$P(X=0)=P(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3})$$

وبما أن الحوادث مستقلة فيما بينها فإن احتمال تقاطع هذه الحوادث يساوي إلى جداء الاحتمالات أي:

$$P(X=0)=P(\overline{E_1}).P(\overline{E_2}).P(\overline{E_3})$$
$$P(X=0)=(1-p).(1-p).(1-p)=q.q.q$$
$$P(X=0)=q^3$$

2- حساب $P(X=1)$:

$$P(X=1)=P((E_1\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3})\cup(\overline{E_1}\cap E_2\cap\overline{E_3})\cup(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap E_3))$$

وبما أن هذه الحوادث متنافية مثنى مثنى أي:

$$\begin{cases}(E_1\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3})\cap(\overline{E_1}\cap E_2\cap\overline{E_3})=\emptyset\\(E_1\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3})\cap(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap E_3)=\emptyset\\(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap E_3)\cap(\overline{E_1}\cap E_2\cap\overline{E_3})=\emptyset\end{cases}$$

فإن احتمال اتحاد حوادث متنافية يساوي إلى مجموع الاحتمالات فإنه:

$$P(X=1)=P(E_1\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3})+P(\overline{E_1}\cap E_2\cap\overline{E_3})+P(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap E_3)$$

وبما أن p ثابت فإن نتيجة الطلقة الأولى لا تؤثر على نتيجة الطلقة الثانية ولا الثالثة، أي أن الحوادث E_2, E_1 و E_3 حوادث مستقلة، وبالتالي فإن احتمال تقاطع حوادث مستقلة هو جداء الاحتمالات أي:

$$P(X=1)=\left(P(E_1).P(\overline{E_2}).P(\overline{E_3})\right)+\left(P(\overline{E_1}).P(E_2).P(\overline{E_3})\right)$$
$$+\left(P(\overline{E_1}).P(\overline{E_2}).P(E_3)\right)$$
$$P(X=1)=p.(1-p).(1-p)+(1-p).p.(1-p)+(1-p).(1-p).p$$
$$P(X=1)=p.q.q+q.p.q+q.q.p$$
$$P(X=1)=3pq^2$$

3- حساب $P(X=2)$:

$$P(X=2)=P((E_1\cap E_2\cap\overline{E_3})\cup(E_1\cap\overline{E_2}\cap E_3)\cup(\overline{E_1}\cap E_2\cap E_3))$$

وبما أن هذه الحوادث متنافية مثنى مثنى أي:

$$\begin{cases}(E_1\cap E_2\cap\overline{E_3})\cap(E_1\cap\overline{E_2}\cap E_3)=\emptyset\\(E_1\cap E_2\cap\overline{E_3})\cap(\overline{E_1}\cap E_2\cap E_3)=\emptyset\\(E_1\cap\overline{E_2}\cap E_3)\cap(\overline{E_1}\cap E_2\cap E_3)=\emptyset\end{cases}$$

فإن احتمال اتحاد حوادث متنافية يساوي إلى مجموع الاحتمالات فإنه:

$$P(X=2)=P(E_1\cap E_2\cap \overline{E_3})+P(E_1\cap \overline{E_2}\cap E_3)+P(\overline{E_1}\cap E_2\cap E_3)$$

وبما أن p ثابت فإن نتيجة الطلقة الأولى لا تؤثر على نتيجة الطلقة الثانية ولا الثالثة، أي أن الحوادث E_2, E_1 و E_3 حوادث مستقلة، وبالتالي فإن احتمال تقاطع حوادث مستقلة هو جداء الاحتمالات أي:

$$P(X=2)=\left(P(E_1).P(E_2).P(\overline{E_3})\right)+\left(P(E_1).P(\overline{E_2}).P(E_3)\right)+\left(P(\overline{E_1}).P(E_2).P(E_3)\right)$$

$$P(X=2)=p.p.(1-p)+(1-p).(1-p).p+(1-p).p.p$$

$$P(X=2)=p.p.q+q.qp+q.p.p$$

$$P(X=2)=3p^2q$$

4- حساب $P(X=3)$:

$$P(X=3)=P(E_1\cap E_2\cap E_3)$$

وبما أن p ثابت فإن نتيجة الطلقة الأولى لا تؤثر على نتيجة الطلقة الثانية ولا الثالثة، أي أن الحوادث E_2, E_1 و E_3 حوادث مستقلة، وبالتالي فإن احتمال تقاطع حوادث مستقلة هو جداء الاحتمالات أي:

$$P(X=3)=P(E_1).P(E_2).P(E_3)$$

$$P(X=3)=p.p.p$$

$$P(X=3)=p^3$$

لنقم بكتابة النتائج المتوصل إليها بالشكل التالي:

- $P(X=0)=q^3=1.1.q^3=C_3^0p^0q^3=C_3^0p^0q^{3-0}$
- $P(X=1)=3pq^2=C_3^1p^1q^2=C_3^1p^1q^{3-1}$
- $P(X=2)=3p^2q=C_3^2p^2q^1=C_3^2p^2q^{3-2}$
- $P(X=3)=p^3=1.p^3.1=C_3^3p^3q^0=C_3^3p^3q^{3-3}$

فإذا قمنا برمي زهرة النرد n رمية وبحثنا عن احتمال تحقق الحادثة x مرة فيكون القانون بالشكل التالي:

$$\boxed{\begin{array}{c}P(X=x_i)=C_n^xp^xq^{n-x}\\0\le x\le n\\p+q=1\\p=cte\end{array}}$$

ولكن هل يمثل قانون التوزيع الثنائي قانون توزيع احتمالات؟ حيث أنه حتى يكون هذا القانون قانون توزيع احتمالات يجب أن يحقق العبارة التالية:

$$\sum_{x=0}^{n}P(X=x_i)=\sum_{x=0}^{n}C_n^xp^xq^{n-x}=1$$

نحن نعلم انطلاقا من مفكوك نيوتن أن:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \cdots + C_n^n a^n b^0$$

أي بعبارة أخرى: $(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} C_n^x a^x b^{n-x}$

بالمطابقة يمكن استنتاج أن:

$$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} C_n^x p^x q^{n-x}$$

وبما أن:

$$(p+q) = 1 \Rightarrow (p+q)^n = 1$$

أي أن:

$$\sum_{x=0}^{n} P(X=x_i) = \sum_{x=0}^{n} C_n^x p^x q^{n-x} = 1$$

ومنه فإن قانون التوزيع الثنائي هو قانون توزيع احتمالات.

ب- المميزات العددية:

التوقع الرياضي:

انطلاقا من العلاقة التعريفية للتوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} xP(X=x_i) = \sum_{x=0}^{n} xC_n^x p^x q^{n-x}$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!\,(n-x)!} p.p^{x-1} q^{n-x}$$

$$E(X) = np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}$$

بوضع : $n = m+1 \Rightarrow m = n-1$ و $k = x-1 \Rightarrow x = k+1$ نجد:

$$E(X) = np \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} p^k q^{m-k}}_{=1}$$

ومنه فإن:

$$E(X) = np$$

وبطريقة أخرى نحن نعلم أن:

$$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} C_n^x p^x q^{n-x}$$

نقوم بالاشتقاق بالنسبة لـ p:

$$n(p+q)^{n-1}=\sum_{x=0}^{n} xC_n^x p^{x-1}q^{n-x}$$

$$n(p+q)^{n-1}=\sum_{x=0}^{n} xC_n^x p^{x}q^{n-x}p^{-1}$$

$$np\underbrace{(p+q)^{n-1}}_{=1}=\sum_{x=0}^{n} xC_n^x p^{x}q^{n-x}=E(X)$$

ومنه فإن:

$$E(X)=np$$

التباين:

انطلاقا من العلاقة التي تعرف التباين فإنه:

$$V(X)=M_2(X)+M_1^2(X)$$

لنقم أولا بحساب العزم الابتدائي من الدرجة الثانية:

$$M_2(X)=\sum_{x=0}^{n} x^2P(X=x_i)=\sum_{x=0}^{n} x^2C_n^x p^{x}q^{n-x}$$

$$M_2(X)=\sum_{x=0}^{n}(x(x-1)+x)C_n^x p^{x}q^{n-x}$$

$$M_2(X)=\underbrace{\sum_{x=0}^{n} x(x-1)C_x^n p^{x}q^{n-x}}_{=A}+\underbrace{\sum_{x=0}^{n} xC_n^x p^{x}q^{n-x}}_{=E(X)=np}$$

لنقم بحساب الجزء A على حدا:

$$A=\sum_{x=0}^{n} x(x-1)C_n^x p^{x}q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x!\,(n-x)!}p^{x}q^{n-x}$$

$$A=\sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!\,(n-x)!}p^{x-2}q^{n-x}p^2$$

$$A=n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!}p^{x-2}q^{n-x}$$

بوضع : $n=m+2 \Rightarrow m=n-2$ و $k=x-2 \Rightarrow x=k-2$

$$A=n(n-1)p^2\underbrace{\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!\,(m-k)!}p^{k}q^{m-k}}_{=1}$$

$$A=n(n-1)p^2$$

ومنه فإن العزم الابتدائي من الدرجة الثانية يساوي:

$$M_2(X) = n(n-1)p^2 + np$$

$$M_2(X) = n^2p^2 - np^2 + np$$

وبالعودة إلى التباين فهو يساوي:

$$V(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$
$$V(X) = np - np^2$$
$$V(X) = np\,\underbrace{(1-p)}_{=q}$$

$$V(X) = npq$$

كما يمكن حساب التباين وذلك باشتقاق العلاقة $(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} C_x^n p^x q^{n-x}$ بالنسبة لـ p مرتين على التوالي لنصل إلى نفس النتيجة، حيث نجد:

$$n(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)C_n^x p^{x-2}q^{n-x}$$
$$n(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)C_n^x p^x q^{n-x}p^{-2}$$
$$n(n-1)p^2\,\underbrace{(p+q)^{n-2}}_{=1} = \underbrace{\sum_{x=0}^{n} x^2C_n^x p^x q^{n-x}}_{=M_2(X)} - \underbrace{\sum_{x=0}^{n} xC_n^x p^x q^{n-x}}_{=E(X)=np}$$
$$M_2(X) = n(n-1)p^2 + np$$
$$V(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$
$$V(X) = np - np^2$$
$$V(X) = np\,\underbrace{(1-p)}_{=q}$$

$$V(X) = npq$$

مثال:

بالاعتماد على مثال رمي حجر النرد، استخرج قانون توزيع الاحتمالات والمميزات العددية الخاصة به.

الحل:

بما أن المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد مرات الحصول على الرقم 5 يتبع قانون توزيع بواسون والذي يعطى بالعلاقة: $P(X=x) = C_n^x p^x q^{n-x}$ ومن ثم فإن:

- $P(X=0) = C_3^0p^0q^{3-0} = C_3^0p^0q^3 = \frac{3!}{(3-0)!0!}(1/6)^0(5/6)^3 = 0{,}579$
- $P(X=1) = C_3^1p^1q^{3-1} = C_3^1p^1q^2 = \frac{3!}{(3-1)!1!}(1/6)^1(5/6)^2 = 0{,}347$
- $P(X=2) = C_3^2p^2q^{3-2} = C_3^2p^2q^1 = \frac{3!}{(3-2)!2!}(1/6)^2(5/6)^1 = 0{,}069$
- $P(X=3) = C_3^3p^3q^{3-3} = C_3^3p^3q^0 = \frac{3!}{(3-3)!3!}(1/6)^3(5/6)^0 = 0{,}005$

حساب التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X) = np = 3 \times (1/6) = ½$$

$$V(X) = npq = 3 \times (1/6) \times (5/6) = 5/12$$

3 ـ قانون توزيع بواسون La loi de Poisson:

إن هذا القانون يهتم بالظواهر التي لها حالتين متنافيتين: تحقق الحادث (نجاح) أو عدم تحققه (خسارة) كما رأيناه سابقا في قانون التوزيع الثنائي ولكن في هذا القانون يشترط فيه:

1. إن عدد التجارب n التي نقوم بها يكون كبيرا جدا أي $n \longrightarrow +\infty$.
2. إن احتمال حدوث الظاهرة p يكون صغيرا جدا أي $p \longrightarrow 0$.

بحيث أن نهاية ضرب p في n مساوية إلى عدد حقيقي موجب وليكن λ وبعبارة أخرى: $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} np = \lambda$

أ- شكل القانون:

قلنا أنه يشترط في هذا القانون أن يكون عدد التجارب n كبيرا جدا، واحتمال تحقق الحدث المنشود p صغيرا جدا، أي أن هذا القانون يهتم بالحوادث النادرة بحيث أن: $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} np = \lambda$

وبعبارة أخرى: $\lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$

إن قانون التوزيع الثنائي عرفناه بالعلاقة: $P(X = x_i) = C_x^n p^x q^{n-x}$

الحالة التي يكون فيها المتغير X مساويا للصفر فإن :

$$P(X=0) = C_x^0 p^0 q^{n-0}$$
$$P(X=0) = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} p^0 q^n$$
$$P(X=0) = q^n = (1-p)^n$$

وبتعويض $p = \frac{\lambda}{n}$ نحصل على $P(X=0) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$

لنأخذ لوغارتم طرفي المعادلة: $ln\big(P(X=0)\big) = ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$

ونعلم أنه من خواص اللوغارتم: $ln\big(P(X=0)\big) = n.\,ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$

لنهتم بالطرف الأيمن من المساواة: $ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$

لحل هذه العلاقة نطبق عليها النشر المحدود ماك لوران بجوار الصفر أي نطبق القانون العام :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0).x}{1!} + \frac{f''(0).x^2}{2!} + \frac{f'''(0).x^3}{3!} + \cdots$$

لنقوم بتطبيق النشر المحدود على الدالة $ln(1+x)$ بواسطة قاعدة ماك لوران (بجوار الصفر)

$$ln(1+x) = \ln(1) + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$ln(1+x) = 0 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

وبالنسبة لـ $\left(\frac{\lambda}{n}\right)$- فإننا نحصل على العلاقة التالية:

$$ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = -\frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda^2}{2!\,n^2} - \frac{\lambda^3}{3!\,n^3} + \cdots$$

وبضرب الطرفين في n نتحصل على:

$$n.\,ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda + \frac{\lambda^2}{2!\,n} - \frac{\lambda^3}{3!\,n^2} + \cdots$$

$$ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = -\lambda + \frac{\lambda^2}{2!\,n} - \frac{\lambda^3}{3!\,n^2} + \cdots$$

وبما أن عدد التجارب n التي نقوم بها يكون كبيرا جدا أي $n \longrightarrow +\infty$ فإن:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{\lambda^2}{2!\,n} - \frac{\lambda^3}{3!\,n^2} + \cdots\right) = 0$$

وبالتالي فإنه:

$$ln\big(P(X=0)\big) = ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = -\lambda$$

ومن ثم فإن:

$$P(X=0) = e^{-\lambda}$$

من جانب آخر إذا كان n كبيرا جدا و p صغيرا جدا فإن العلاقة:

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)} = \frac{C_n^x p^x q^{n-x}}{C_n^{x-1} p^{x-1} q^{n-x+1}}$$

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)} = \frac{\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}}{\frac{n!}{(x-1)!(n-x+1)!}p^{x-1} q^{n-x+1}}$$

يمكننا كتابة: $x! = x(x-1)!$ وكذلك $(n-x+1)! = (n-x+1)\,(n-x)!$

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)} = \frac{\frac{n!}{x(x-1)!(n-x)!}p^x q^{n-x}}{\frac{n!}{(x-1)!(n-x+1)(n-x)!}p^{x-1} q^{n-x+1}}$$

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)} = \frac{\frac{p^x q^{n-x}}{x}}{\frac{p^{x-1} q^{n-x+1}}{(n-x+1)}}$$

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)} = \frac{\frac{p^x q^{n-x}}{x}}{\frac{(p^x q^{n-x})p^{-1}q}{(n-x+1)}}$$

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)} = \frac{\frac{p^x q^{n-x}}{x}}{\frac{(p^x q^{n-x})q}{(n-x+1)p}}$$

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)}=\frac{(p^x q^{n-x})}{x}\cdot\frac{(n-x+1)p}{(p^x q^{n-x})q}$$

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)}=\frac{(n-x+1)p}{xq}$$

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)}=\frac{\big(n-(x-1)\big)p}{xq}$$

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)}=\frac{np-(x-1)p}{xq}$$

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)}=\frac{\lambda-(x-1)p}{xq}$$

إذا كانت p صغيرة جدا أي $p \longrightarrow 0$ فهذا يعني منطقيا أن $q \longrightarrow 1$ لأن $(p+q)=1$ فيبقى لدينا :

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)}=\frac{\lambda}{x}\Longrightarrow P(X=x)=\frac{\lambda P(X=x-1)}{x}$$

لدينا:

عندما $X = 0$ $\qquad P(X=0)=e^{-\lambda}$

عندما $X= 1$ $\qquad P(X=1)=\lambda P(X=0)=\lambda e^{-\lambda}$

عندما $X =2$ $\qquad P(X=2)=\frac{\lambda P(X=1)}{2}=\frac{\lambda(\lambda e^{-\lambda})}{2}=\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$

عندما $X =3$ $\qquad P(X=3)=\frac{\lambda P(X=2)}{3}=\frac{\lambda(\lambda^2 e^{-\lambda})}{3\times 2}=\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$

.
.
.

يمكن التعميم لما $X = x$ $\qquad P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

وفي النهاية نستطيع أن نقول عندما تكون (n) كبير جدا و (p) صغيرة جدا أن قانون التوزيع بواسون يقترب إلى قانون التوزيع الثنائي، إذن نقول أن X أن متحول عشوائي منقطع ذو وسيط (λ) خاضع لقانون توزيع بواسون إذا كانت صيغة قانونه على النحو التالي:

$$\boxed{\begin{gathered}P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\\ X=0,1,2,\dots,+\infty\\ \lambda=np\end{gathered}}$$

ولكن هل يمثل قانون بواسون قانون توزيع احتمالات؟

نقول عليه أنه قانون توزيع احتمالات إذا كان مجموع احتمالاته الممكنة مساوية للواحد أي أن:

$$\sum_{x=0}^{+\infty} P(X = x_i) = 1$$

كما رأيناه سابقا فإن قانون توزيع بواسون معرف بالعلاقة التالية:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \Rightarrow \sum_{0}^{+\infty} P(X = x) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

بما أن $e^{-\lambda}$ يمكن إخراجه من داخل المجموع فيصبح لدينا:

$$\sum_{0}^{+\infty} P(X = x) = e^{-\lambda} \sum_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

حتى يكون هذا المجموع مساويا للواحد يجب أن يكون:

$$\sum_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$$

لنقوم بنشر الدالة $f(x) = e^{\lambda}$ بجوار الصفر باستعمال طريقة ماك لوران:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0).x}{1!} + \frac{f''(0).x^2}{2!} + \frac{f'''(0).x^3}{3!} + \cdots$$

وبما أن : $f(0) = 1, \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = e^0 = 1$

إذن:

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots = \sum_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

من ثم فإنه:

$$\sum_{0}^{+\infty} P(X = x) = e^{-\lambda}.e^{\lambda} = e^0$$

$$\sum_{0}^{+\infty} P(X = x) = 1$$

ومنه فإن قانون توزيع بواسون هو قانون توزيع احتمالات.

ب- المميزات العددية:

التوقع الرياضي:

انطلاقا من العلاقة التعريفية للتوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} xP(X = x_i) = \sum_{x=0}^{+\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} x \frac{\lambda . \lambda^{x-1}}{x(x-1)!}$$

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

نضع:

$$\begin{cases} s = x - 1 \\ x = s + 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} s = 0, 1, 2, \dots, +\infty \\ x = 1, 2, \dots, +\infty \end{matrix}$$

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\lambda^s}{s!}$$

لكن رأينا سابقا أن:

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\lambda^s}{s!} = e^{\lambda}$$

إذن:

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda} . e^{\lambda} = \lambda$$

ومنه

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

التباين:

انطلاقا من العلاقة التي تعرف التباين فإنه:

$$V(X) = M_2(X) + M_1^2(X)$$

لنقم أولا بحساب العزم الابتدائي من الدرجة الثانية:

$$M_2(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} x^2 P(X = x_i) = \sum_{x=0}^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$M_2(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} (x(x-1) + x) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$M_2(X) = \underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty} (x(x-1)) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}_{=A} + \underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}_{=E(X)=\lambda}$$

لنهتم أولا بالطرف A:

$$A = \sum_{x=0}^{+\infty} (x(x-1)) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=2}^{+\infty} (x(x-1)) \frac{\lambda^2 \lambda^{x-2} e^{-\lambda}}{x(x-1)(x-2)!}$$

نضع:

$$\begin{cases} s = x - 2 \\ x = s + 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} s = 0, 1, 2, \dots, +\infty \\ x = 2, 3, \dots, +\infty \end{matrix}$$

$$A=\lambda^2\underbrace{\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{\lambda^s e^{-\lambda}}{s!}}_{=1}=\lambda^2$$

ومنه فإن العزم الابتدائي من الدرجة الثانية يساوي:

$$M_2(X)=\lambda^2+\lambda$$

ومن ثم فإن التباين يساوي إلى:

$$V(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2$$

$$\boxed{V(X)=\lambda}$$

4 ـ قانون توزيع باسكال (قانون التوزيع الهندسي):

أ- شكل القانون:

لتكن تجربة متعلقة بالحادثة A حيث أن احتمال وقوع الحادثة (النجاح) يســاوي إلى p واحتمال عدم وقوعها يساوي إلى q حيث أن $q = 1 - p$.

نقوم بتكرارالتجربةحتى تتحقق الحادثة A مع بقاء احتمال النجاح ثابتا مهما تكرار التجربة (استقلالية الحوادث)، ولتكن X المتغيرة العشوائية والتي تمثل عدد مرات تكرار التجربة اللازمة للحصول على الحادثة A .

ظهور A في الرمية الأولى $P(X=1)=P(A)=p=p\times 1=pq^{1-1}$

ظهور A في الرمية الثانية $P(X=2)=P(A\cap\bar{A})=pq=pq^{2-1}$

ظهور A في الرمية الثالثة $P(X=3)=P(A\cap\bar{A}\cap\bar{A})=pq^2=pq^{3-1}$

ظهور A في الرميةالرابعة $P(X=4)=P(A\cap\bar{A}\cap\bar{A}\cap\bar{A})=pq^3=pq^{4-1}$

.
.
.

ظهور A في الرمية x $P(X=x)=P\left(A\cap\underbrace{\bar{A}\cap\bar{A}\cap\ldots\cap\bar{A}}_{\text{مرة }(x-1)}\right)=pq^{x-1}$

ومنه فإن الصيغة العامة لقانون توزيع باسكال تكتب بالشكل:

$$P(X=x)=pq^{x-1}$$
$$X=1,2,\ldots,+\infty$$
$$p=cte$$

إن قانون توزيع باسكال هو قانون توزيع احتمالات:

$$\sum_{1}^{+\infty}P(X=x)=\sum_{1}^{+\infty}pq^{x-1}$$

$$\sum_{1}^{+\infty} P(X=x) = p\sum_{1}^{+\infty} q^{x-1}$$
$$\sum_{1}^{+\infty} P(X=x) = p(1+q^1+q^2+q^3+\cdots)$$

يمثل هذا المجوع مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول هو 1 وأساسها q التي تعطى بالشكل:

$$(1+q^1+q^2+q^3+\cdots) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

ومنه فإن:

$$\sum_{1}^{+\infty} P(X=x) = \sum_{1}^{+\infty} pq^{x-1} = p.\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

المميزات العددية:

التوقع الرياضي:

انطلاقا من العلاقة التعريفية للتوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} xP(X=x_i) = \sum_{x=1}^{+\infty} xpq^{x-1}$$

$$E(X) = (p + 2pq + 3pq^2 + 4pq^3 + 5pq^4 + \ldots\ldots)$$

$$E(X) = p\,(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \ldots\ldots)$$

$$E(X) = p\,(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots\ldots)^2$$

$$E(X) = p.\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$$

التباين:

انطلاقا من العلاقة التي تبن أن التباين هو الفرق بين العزم الابتدائي من الدرجة الثانية ومربع العزم الابتدائي من الدرجة الأولى، وبما أننا قمنا بإيجاد العزم الابتدائي من الدرجة الأولى في الفقرة السابقة لنقم الآن بحساب العزم الابتدائي من الدرجة الثانية وذلك انطلاقا من العلاقة التعريفية الخاصة به، حيث أن:

$$M_2(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2P(X=x_i) = \sum_{x=1}^{+\infty} (x(x-1)+x)P(X=x_i)$$
$$M_2(X) = \underbrace{\sum_{x=1}^{+\infty} \big(x(x-1)\big)P(X=x_i)}_{=A} + \underbrace{\sum_{x=1}^{+\infty} xP(X=x_i)}_{=E(X)=\frac{1}{P}}$$

لنهتم أولا بالجزء A:

$$A = \sum_{x=1}^{+\infty} \big(x(x-1)\big) P(X = x_i) = 0 + 2pq + 6pq^2 + 12pq^3 + \cdots$$

$$A = 2pq(1 + 3q + 6q^2 + \cdots)$$

$$A = 2pq(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)^3$$

$$A = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}$$

ومنه فإن العزم الابتدائي من الدرجة الثانية يساوي:

$$M_2(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} + \frac{p}{p^2}$$

$$M_2(X) = \frac{2q + p}{p^2} = \frac{2(1-p) + p}{p^2}$$

$$M_2(X) = \frac{2 - 2p + p}{p^2} = \frac{2 - p}{p^2}$$

ومن ثم فإن التباين يساوي إلى:

$$V(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{q}{p^2}}$$

5- القانون فوق الهندسي:

أ- شكل القانون:

يتعلق الأمر هنا بالسحب العشوائي وبدون إعادة، أي احتمال الظهور في هذا السحب غير ثابت ($p \neq cte$) ومتغير من حالة إلى أخرى وكل سحب مرتبط بالسحب الذي يسبقه.

ليكن لدينا مجتمع متكون من N عنصر، منها P عنصر يحمل الخاصية المدروسة و$Q = N\text{-}P$ عنصر لا يحمل الخاصية المدروسة.

نقوم بسحب على التوالي ودون إرجاع بطريقة عشوائية عينة متكونة من n عنصر، ولتكن X المتغيرة العشوائية التي تعبر عن عدد العناصرالمسحوبة التي تحمل الخاصية المدروسة.

- إن عدد العينات التي تتكون من n التي يمكن سحبها من من أصل N عنصر هي عدد التوفيقات المتكونة من n عنصرالتي يمكنها تكوينها من أصل N عنصر C_n^N .
- إن عدد العينات التي تحتوي على x يحمل الخاصية المدروسة يساوي إلى عدد التوفيقات التي تتكون من x عنصر ويمكن تكوينها من أصل P عنصر يحمل الخاصية الدروسة C_x^P .
- أما عدد العينات التي لا تحمل عناصرها الخاصية المدروسة فيساوي عدد التوفيقات التي تتكون من n-x عنصر ويمكن تكوينها من أصل N-P عنصرلا يحمل الخاصية الدروسة C_{n-x}^{N-P} .
- وبالتالي احتمال سحب عينة تحتوي على x عنصر تحمل الخاصية المدروسة، وعلى n-x عنصر لا تحمل الخاصية المدروسة عند سحب n عنصر من أصل N عنصر به P عنصر يحمل الخاصية المدروسة وN-P عنصر لا يحمل الخاصية المدروسة يساوي:

$$P(X=x)=\frac{C_P^x . C_{N-P}^{n-x}}{C_N^n}$$

إن هذا القانون عبارة عن قانون توزيع احتمالات حيث أن إنطلاقا من خصائص التحليل التوافقي فإن:

$$\sum_{x=0}^{n} P(X=x)=\sum_{x=0}^{n}\frac{C_P^x . C_{N-P}^{n-x}}{C_N^n}=1$$

ب- المميزات العددية:

التوقع الرياضي:

انطلاقا من العلاقة التعريفية للتوقع الرياضي فإن:

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n} xP(X=x)=\sum_{x=0}^{n} x\frac{C_P^x . C_{N-P}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n} x.\frac{\frac{P!}{x!(P-x)!}.\frac{(N-P)!}{(n-x)!((N-p)-(n-x))!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n} x.\frac{P!}{x!\,(P-x)!}.\frac{(N-P)!}{(n-x)!\,((N-p)-(n-x))!}.\frac{n!\,(N-n)!}{N!}$$

$$E(X)=\sum_{x=1}^{n} x.\frac{P(P-1)!}{x(x-1)!\,(P-x)!}.\frac{(N-P)!}{(n-x)!\,((N-p)-(n-x))!}.\frac{n(n-1)!\,(N-n)!}{N(N-1)!}$$

$$E(X)=\frac{nP}{N}\sum_{x=1}^{n}\frac{(P-1)!}{(x-1)!\,(P-x)!}\cdot\frac{(N-P)!}{(n-x)!\,\big((N-p)-(n-x)\big)!}\cdot\frac{(n-1)!\,(N-n)!}{(N-1)!}$$

$$E(X)=\frac{nP}{N}\sum_{x=1}^{n}\frac{C_{P-1}^{x-1}.C_{N-P}^{n-x}}{C_{N-1}^{n-1}}$$

بوضع:

$$\left.\begin{matrix} x-1=k\\ n-1=m\\ P-1=P'\\ N-1=N'\end{matrix}\right\}\Rightarrow E(X)=\frac{nP}{N}\underbrace{\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{P'}^{k}.C_{N'-P'}^{m-k}}{C_{N'}^{m}}}_{=1}$$

ومنه فإن:

$$\boxed{E(X)=\frac{nP}{N}}$$

التباين:

انطلاقا من العلاقة التي تبن أن التباين هو الفرق بين العزم الابتدائي من الدرجة الثانية ومربع العزم الابتدائي من الدرجة الأولى، وبما أننا قمنا بإيجاد العزم الابتدائي من الدرجة الأولى في الفقرة السابقة لنقم الآن بحساب العزم الابتدائي من الدرجة الثانية وذلك انطلاقا من العلاقة التعريفية الخاصة به، حيث أن:

$$M_2(X)=\sum_{x=0}^{n}x^2P(X=x_i)=\sum_{x=0}^{+\infty}(x(x-1)+x)P(X=x_i)$$

$$M_2(X)=\underbrace{\sum_{x=0}^{n}(x(x-1))P(X=x_i)}_{=A}+\underbrace{\sum_{x=0}^{n}xP(X=x_i)}_{=E(X)=\frac{nP}{N}}$$

لنهتم أولا بالجزء A:

$$A=\sum_{x=0}^{n}(x(x-1))P(X=x_i)=\sum_{x=0}^{n}(x(x-1))\frac{C_P^x.C_{N-P}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$A=\sum_{x=0}^{n}(x(x-1)).\frac{\frac{P!}{x!(P-x)!}\cdot\frac{(N-P)!}{(n-x)!((N-p)-(n-x))!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

$$A=\sum_{x=0}^{n}(x(x-1))\frac{P!}{x!\,(P-x)!}\cdot\frac{(N-P)!}{(n-x)!\,\big((N-p)-(n-x)\big)!}\cdot\frac{n!\,(N-n)!}{N!}$$

$$A=\sum_{x=2}^{n}(x(x-1))\frac{P(P-1)(P-2)!}{x(x-1)(x-2)!\,(P-x)!}\cdot\frac{(N-P)!}{(n-x)!\,\big((N-p)-(n-x)\big)!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)!\,(N-n)!}{N(N-1)(N-2)!}$$

$$A=\frac{P(P-1)n(n-1)}{N(N-1)}\sum_{x=2}^{n}\frac{(P-2)!}{(x-2)!\,(P-x)!}\cdot\frac{(N-P)!}{(n-x)!\left((N-p)-(n-x)\right)!}\cdot\frac{(n-2)!\,(N-n)!}{(N-2)!}$$

$$A=\frac{P(P-1)n(n-1)}{N(N-1)}\sum_{x=2}^{n}\frac{C_{P-2}^{x-2}.C_{N-P}^{n-x}}{C_{N-2}^{n-2}}$$

بوضع:

$$\left.\begin{array}{l} x-2=k \\ n-2=m \\ P-2=P' \\ N-2=N' \end{array}\right\}\Rightarrow A=\frac{P(P-1)n(n-1)}{N(N-1)}\underbrace{\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{P'}^{k}.C_{N'-P'}^{m-k}}{C_{N'}^{m}}}_{=1}$$

$$A=\frac{P(P-1)n(n-1)}{N(N-1)}$$

ومنه فإن العزم الابتدائي من الدرجة الثانية يساوي:

$$M_2(X)=\frac{P(P-1)n(n-1)}{N(N-1)}+\frac{nP}{N}$$

بالعودة إلى التباين:

$$V(X)=\frac{P(P-1)n(n-1)}{N(N-1)}+\frac{nP}{N}-\left(\frac{nP}{N}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{(P^2-P)(n^2-n)}{N(N-1)}+\frac{nP}{N}-\left(\frac{nP}{N}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{n^2P^2-n^2P-nP^2+np}{N(N-1)}+\frac{nP}{N}-\frac{n^2P^2}{N^2}\ nP$$

$$V(X)=nP\left[\frac{nP-n-P+1}{N(N-1)}+\frac{1}{N}-\frac{nP}{N^2}\right]$$

$$V(X)=nP\left[\frac{nP-n-P+1}{N(N-1)}.\frac{N}{N}+\frac{1}{N}.\frac{N(N-1)}{N(N-1)}-\frac{nP}{N^2}.\frac{(N-1)}{(N-1)}\right]$$

$$V(X)=\frac{nP}{N}\left[\frac{nPN-nN-PN+N+N^2-N-nPn+nP}{N(N-1)}\right]$$

$$V(X)=\frac{nP}{N}\left[\frac{N^2-nN-PN+nP}{N(N-1)}\right]$$

$$V(X)=\frac{nP}{N}\left[\frac{N^2-nN}{N(N-1)}-\frac{PN-nP}{N(N-1)}\right]$$

$$V(X)=\frac{nP}{N}\left[\frac{N(N-n)}{N(N-1)}-\frac{P(N-n)}{N(N-1)}\right]$$

$$V(X)=\frac{nP}{N}\left[\frac{(N-n)}{(N-1)}-\frac{P(N-n)}{N(N-1)}\right]$$

$$V(X)=\frac{nP}{N}\frac{(N-n)}{(N-1)}\left[1-\frac{P}{N}\right]$$

$$V(X)=\frac{(N-n)}{(N-1)}\frac{nP}{N}\left[1-\frac{P}{N}\right]$$

تمارين محلولة متعلقة بالفصل:

التمرين الأول:

1. ما هو احتمال الحصول على 4 صور إذا رمينا قطعة نقود متوازنة 6 رميات؟ ما هو احتمال الحصول على الرقم 6 ثلاث مرات إذا رمينا حجرة نرد أربع مرات؟
2. إذا كان 20% من الطلبة الذين يلتحقون بالجامعة يغادرونها قبل إتمام الدراسة، من بين (20) طالبا اختيروا عشوائيا، ما هو احتمال أن يترك (03) منهم الجامعة قبل إتمام الدراسة؟
3. إذا كان 40% من عمال مؤسسة يرغبون في تمثيل نقابي، أخذت عينة من 10 عمال، ما هو احتمال أن تتحصل هذه الفكرة على الأغلبية في العينة المختارة؟

الحل:

1. عند رمي قطعة النقود **4** مرات أي **n = 4** فإن الحوادث مستقلة عن بعضها البعض عند كل رمية مع بقاء احتمال الحصول على الصورة (تحقق الحدث) ثابت **p = 0.5** واحتمال عدم الحصول على الصورة (عدم تحقق الحدث) ثابت كذلك **q = 1 – p = 0.5** وبالتالي فإن المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد مرات الحصول على الصورة يتبع قانون التوزيع الثنائي الذي يعطى بالعلاقة:

$$P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}$$

وبالتالي فإن احتمال الحصول على **4** صور إذا رمينا قطعة نقود متوازنة **6** رميات يساوي إلى:

$$P(X=4)=C_6^4(0,5)^4(0,5)^{6-4}$$

$$P(X=4)=0,234$$

بنفس الطريقة في هذه الحالة:

q = 1 – p = 5/6 **p = 1/6 = <u>cte</u>** **n = 4**

وبالتالي فاحتمال الحصول على الرقم 6 ثلاث مرات إذا رمينا حجرة نرد أربع مرات يساوي إلى:

$$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{4-3}$$

$$P(X=3)=0,015$$

2. بنفس الطريقة في هذه الحالة:

q = 1 – p = 0,8 p = 0,2 = cte n = 20

وبالتالي احتمال أن يترك (03) منهم الجامعة قبل إتمام الدراسة يساوي إلى:

$$P(X=3)=C_{20}^{3}(0,2)^{3}(0,8)^{20-3}$$
$$P(X=4)=0,205$$

3. بنفس الطريقة في هذه الحالة:

q = 1 – p = 0,6 p = 0,4 = cte n = 10

4. وبالتالي احتمال أن تتحصل هذه الفكرة على الأغلبية في العينة المختارة يساوي إلى **P(X > 5)** أي:

$$P(X>5)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$

$$P(X=6)=C_{10}^{6}(0,4)^{6}(0,6)^{10-6}=0,111$$
$$P(X=7)=C_{10}^{7}(0,4)^{7}(0,6)^{10-7}=0,042$$
$$P(X=8)=C_{10}^{8}(0,4)^{8}(0,6)^{10-8}=0,010$$
$$P(X=9)=C_{10}^{9}(0,4)^{9}(0,6)^{10-9}=0,001$$
$$P(X=10)=C_{10}^{10}(0,4)^{10}(0,6)^{10-10}=0,0001$$

ومنه فإن:

$$P(X>5)=0,166$$

التمرين الثاني:

احتمال تخرج طالب مسجل في المركز هو 0.4، من بين 5 طلبة اختيروا عشوائيا فما هي الاحتمالات التالية:

1. ألا يتخرج أي واحد منهم؟
2. أن يتخرج واحد منهم؟
3. أن يتخرج واحد منهم على الأقل؟

الحل:

نستعمل هنا كذلك علاقة قانون التوزيع الثنائي حيث أن:

q = 1 – p = 0,6 p = 0,4 = cte n = 5

وبالتالي فإن المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الطلبة المتخرجين يتبع قانون التوزيع الثنائي الذي يعطى بالعلاقة:

$$P(X=x)=C_{n}^{x}p^{x}q^{n-x}$$

1. احتمال ألا يتخرج أي واحد منهم يساوي إلى:

$$P(X=0)=C_5^0(0,4)^0(0,6)^{5-0}=0,077$$

2. أن يتخرج طالب واحد من هؤلاء يساوي إلى:

$$P(X=1)=C_5^1(0,4)^1(0,6)^{5-1}=0,259$$

3. أن يتخرج طالب واحد على الأقل يساوي إلى:

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$P(X=1)=0,259$$

$$P(X=2)=C_5^2(0,4)^2(0,6)^{5-2}=0,345$$

$$P(X=3)=C_5^3(0,4)^3(0,6)^{5-3}=0,230$$

$$P(X=4)=C_5^4(0,4)^4(0,6)^{5-4}=0,076$$

$$P(X=5)=C_5^5(0,4)^5(0,6)^{5-5}=0,010$$

ومنه فإن:

$$P(X\geq 1)=0,923$$

للإشارة يمكن حساب هذا الاحتمال بالاعتماد على طريقة حساب احتمال الحدث المتمم أي:

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)$$

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)$$

$$P(X\geq 1)=1-0,077$$

$$P(X\geq 1)=0,923$$

التمرين الثالث:

إذا تنافست مع خصم له قوتك (مع افتراض أن ليس هناك تعادل في المنافسة) فما هو أكبر احتمال للفوز على الخصم:

1 – في ثلاث (03) مباريات من ضمن (04) أو في خمس (05) من بين ثمانية (08).

2 – على الأقل في ثلاث (03) مباريات من ضمن (04) أو على الأقل في خمس (05) من بين ثمانية (08).

الحل:

1. حساب احتمال الفوز في 03 مباريات من ضمن 04 يحسب كذلك باستعمال علاقة قانون التوزيع الثنائي حيث أن:

n = 4 $\qquad$ p = 0,5 = cte $\qquad$ q = 1 – p = 0,5

$$P(X = 3) = C_4^3(0,5)^3(0,5)^{4-3} = 0,25$$

أما احتمال الفوز في 04 مباريات من ضمن 05 فيساوي إلى:

$$P(X = 4) = C_5^4(0,5)^4(0,5)^{5-4} = 0,156$$

حيث أن:

n = 5 $\qquad$ p = 0,5 = cte $\qquad$ q = 1 – p = 0,5

نلاحظ أن:

$$P(X = 3) > P(X = 4)$$

2. احتمال الفوز في 03 مباريات من ضمن 04 على الأقل أي $P(X \geq 3)$ يساوي إلى:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$P(X = 3) = 0,25$$

$$P(X = 4) = C_4^4(0,5)^4(0,5)^{4-4} = 0,0625$$

$$P(X \geq 3) = 0,3125$$

أما احتمال الفوز في 04 مباريات من ضمن 05 على الأقل أي $P(X \geq 4)$ يساوي إلى:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X = 4) = 0,156$$

$$P(X = 5) = C_5^5(0,5)^5(0,5)^{5-5} = 0,03125$$

$$P(X \geq 4) = 0,1875$$

نلاحظ أن:

$$P(X \geq 3) > P(X \geq 4)$$

التمرين الرابع:

احتمال أن تتحمل قطعة الكترونية من نوع خاص درجة حرارة عالية 0.9، لدينا جهاز يستعمل أربع قطع من هذا النوع، أوجد الاحتمالات التالية:

1. أن يعمل الجهاز لأن كل القطع صالحة؟
2. أن يتعطل الجهاز لأن قطعة واحدة قد تعطلت؟
3. أن يتعطل الجهاز لأن قطعة على الأقل قد تعطلت؟

الحل:

نستعمل علاقة قانون التوزيع الثنائي حيث أن المتغير المدروسة هي عدد القطع الصالحة التي تجع الجهاز يعمل بحيث أن:

n = 4 **p = 0,9 = cte** **q = 1 – p = 0,1**

1. احتمال أن يعمل الجهاز لأن كل القطع صالحة أي $P(X=4)$ يساوي إلى:

$$P(X=4)=C_4^4(0,9)^4(0,1)^{4-4}=0,6561$$

2. احتمال أن يتعطل الجهاز لأن قطعة واحدة قد تعطلت أي بعبارة أخرى 03 قطع صالحة ونكتب $P(X=3)$ يساوي إلى:

$$P(X=3)=C_4^3(0,9)^3(0,1)^{4-3}=0,2916$$

3. احتمال يتعطل الجهاز لأن قطعة على الأقل قد تعطلت أي بعبارة أخرى أن 03 قطع صالحة على الأكثر ونكتب $P(X\le 3)$ يساوي إلى:

$$P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$P(X=0)=C_4^0(0,9)^0(0,1)^{4-0}=0,0001$$

$$P(X=1)=C_4^1(0,9)^1(0,1)^{4-1}=0,0036$$

$$P(X=2)=C_4^2(0,9)^2(0,1)^{4-2}=0,0486$$

$$P(X=3)=C_4^3(0,9)^3(0,1)^{4-3}=0,2916$$

$$P(X\le 3)=0,3439$$

التمرين الخامس:

صندوق يحتوي على عشرين (20) كرة، منها عشر (10) كرات بيضاء، وعشر (10) كرات سوداء. سحبنا لا على التعيين أربع (04) كرات وكان السحب بإرجاع فأحسب:

1 – احتمال سحب ولا كرة بيضاء.

2 – احتمال سحب كريتين (02) بيضاء.

3 – احتمال سحب كريتين (02) بيضاء على الأقل.

4 – احسب الاحتمالات السابقة إذا كان السحب بدون إعادة.

الحل:

بما أن السحب بإرجاع فإن نتيجة كل سحب مستقلة عن نتيجة السحب التي تسبقها وكذاعلى نتيجة السحب الذي يليها واحتمال تحقق الحدث (الحصول على كرة بيضاء) يبقى ثابتا ونقوم باستعمال علاقة قانون التوزيع الثنائي احساب الاحتمالات حيث أن:

$n = 4$ $\qquad p = 0,5 = \underline{cte}$ $\qquad q = 1 - p = 0,5$

1. احتمال سحب ولا كرة بيضاء أي $P(X=0)$ يساوي إلى:

$$P(X=0) = C_4^0(0,5)^0(0,5)^{4-0} = 0,0625$$

2. احتمال سحب كرتين (02) من اللون الأبيض أي $P(X=2)$ يساوي إلى:

$$P(X=2) = C_4^2(0,5)^2(0,5)^{4-2} = 0,375$$

3. احتمال سحب كريتين (02) بيضاء على الأقل أي $P(X \geq 2)$ يساوي إلى:

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$P(X=2) = 0,375$$

$$P(X=3) = C_4^3(0,5)^2(0,5)^{4-3} = 0,25$$

$$P(X=4) = C_4^4(0,5)^4(0,5)^{4-4} = 0,0625$$

$$P(X \geq 2) = 0,6875$$

في حالة السحب بدون إرجاع فإن نتيجة كل سحب مرتبطة بنتيجة السحب التي تسبقها وتؤثر على نتيجة السحب الذي يليها، وبالتالي نستعمل هنا قانو التوزيع الفوق الهندسي الذي يعطى بالعلاقة:

$$P(X=x) = \frac{C_P^x . C_{N-P}^{n-x}}{C_N^n}$$

حيث أن حسب هذا التمرين:

P عدد الكريات البيضاء (التي تحمل الخاصية المدروسة)

n عدد الكريات المسحوبة أي 4.

N حجم العينة والذي يساوي هنا إلى 20.

ومنه فإن الاحتمالات تساوي إلى:

$$P(X=0) = \frac{C_{10}^0 . C_{(20-10)}^{(4-0)}}{C_{20}^4} = \frac{(1)(210)}{(4845)} = 0,043$$

$$P(X=2)=\frac{C_{10}^{2}.C_{(20-10)}^{(4-2)}}{C_{20}^{4}}=\frac{(45)(45)}{(4845)}=0,417$$

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

$$P(X=2)=0,417$$

$$P(X=3)=\frac{C_{10}^{3}.C_{(20-10)}^{(4-3)}}{C_{20}^{4}}=\frac{(120)(10)}{(4845)}=0,247$$

$$P(X=4)=\frac{C_{10}^{4}.C_{(20-10)}^{(4-4)}}{C_{20}^{4}}=\frac{(210)(1)}{(4845)}=0,043$$

$$P(X\geq 2)=0,7089$$

التمرين السادس:

تتمثل تجربة معينة في رمي حجر نرد مرات عديدة ونتوقف بمجرد الحصول على العدد (05). وكانت المتغيرة X عدد المرات اللازمة للحصول على العدد (05).

1. أكتب قانون توزيع X مع إعطاء المميزات العددية الخاصة به.
2. ما هو احتمال أن نتحصل على العدد (05) في الرمية الرابعة؟
3. ما هو احتمال ألا نتحصل على العدد (05) إلا بعد رمي حجر النرد أربع مرات على الأقل؟

الحل:

1. إن المتغيرة X التي تعبر عن عدد مرات رمي حجر النرد اللازمة للحصـــول على الرقم (05) حيث أن احتمال تحقق الحدث عند كل رمية **p = 1/6** واحتمال عدم تحقق الحدث يساوي إلى **q = 1 – p = 5/6** وهو يتبع قانون التوزيع الهندسي الذي تكتب علاقته بالشكل التالي:

$P(X=x)=pq^{x-1}$ حيث أن **X = {1 , 2, …+∞**

p = 1/6 وَ **q = 1 – p = 5/6**

التوقع الرياضي يساوي إلى: $E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)}=6$

2. احتمال أن نتحصل على العدد (05) في الرمية الرابعة أي $P(X=4)$ يساوي إلى:

$$P(X=4)=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1}=0,096$$

3. احتمال ألا نتحصل على العدد (05) إلا بعد رمي حجر النرد أربع مرات على الأقل أي$P(X \geq 4)$ فيساوي إلى:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + \cdots$$

بما أن هذه السلسلة غير منتهية سنستعين بالعلاقة الخاصة بحساب الحدث المتمم أي:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4)$$

$$P(X \geq 4) = 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\big)$$

لنقم بحساب كل حد:

$$P(X = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{1-1} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{2-1} = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} = \frac{25}{216}$$

ومنه فإن:

$$P(X \geq 4) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216}\right)$$

$$P(X \geq 4) = 1 - \frac{91}{216}$$

$$P(X \geq 4) = \frac{125}{216}$$

التمرين السابع:

عند إنتاج قطعة من الغيار كانت نسبة العيب فيها هي (0.01)، تم اختيار عينة بحجم مائة (100) قطعة من مجموع الإنتاج الكلي، حدد الاحتمالات التالية:

1. أن تكون قطعة فاسدة في العينة.
2. أن تكون قطعتان فاسدتان.
3. أن تكون قطعتان فاسدتان على الأقل.

الحل:

نلاحظ من معطيات التمرين ان احتمال تحقق الحدث (وجود العيب في القطعة المختارة) $p = 0.01$ وهو احتمال ضعيف جدا في حين أن حجم العينة $n = 100$ كبير جدا، وبالتالي فإن المتغير المدروس X الذي عبر عن عدد القطع الفاسدة المسحوبة يتبع قانون توزيع بواسون ونكتب:

$$\left.\begin{array}{r} p = 0.01 \to 0 \\ n = 100 \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

حيث أن:

$$\lambda = np = 0.01 \times 100 = 1 \qquad P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

1. احتمال أن تكون قطعة فاسدة واحدة أي $P(X = 1)$ يساوي إلى:

$$P(X = 1) = \frac{(1)^1 e^{-1}}{1!} = 0.367$$

2. احتمال أن تكون هناك قطعتان فاسدتان أي $P(X = 2)$ يساوي إلى:

$$P(X = 2) = \frac{(1)^2 e^{-1}}{2!} = 0.183$$

3. احتمال أن تكون قطعتان فاسدتان على الأقل أي $P(X \geq 2)$ يساوي إلى:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \cdots$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$P(X = 0) = \frac{(1)^0 e^{-1}}{0!} = 0.367$$

ومنه فإن:

$$P(X \geq 2) = 1 - (0.367 + 0.367)$$

$$P(X \geq 2) = 0.264$$

التمرين الثامن:

يتلقى مركز اســتقبال المكالمات الهاتفية في المتوســط (300) مكالمة في ســاعة واحدة، لنفرض أن عدد المكالمات يخضــع لقانون توزيع خاص ومعروف.

عند دقيقتين (02) فقط، أحسب الاحتمالات التالية:

- أن يتلقى (03) ثلاث مكالمات فقط.
- أن يتلقى مكالمة واحدة.
- أن يتلقى مكالمتين على الأكثر.

التمرين التاسع:

أظهرت التجربة الصــحية أن 0.03 من مجموع القوة العاملة يصــابون بمرض خطير خلال الســنة، فإذا اخترت عينة متكونة من 100 عامل فأوجد القيمة المتوقعة لعدد العمال الذين سوف يصابون بهذا المرض، وما هو احتمال أي يصاب 5 عمال بهذا المرض؟

نلاحظ من معطيات التمرين أن احتمال تحقق الحدث (إصابة العامل بالمرض) $p = 0.03$ وهو احتمال ضعيف جدا في حين أن حجم العينة $n = 100$ كبير جدا، وبالتالي فإن المتغير المدروس X الذي عبر عن عدد العمال المصابين بالمرض في العينة يتبع قانون توزيع بواسون ونكتب:

$$\left.\begin{array}{r} p = 0.03 \to 0 \\ n = 100 \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow X \frown \mathcal{P}(\lambda)$$

حيث أن:

$$\lambda = np = 0.03 \times 100 = 3 \qquad P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

ومن ثم فإن القيمة المتوقعة عبارة عن التوقع الرياضي E(X) يساوي إلى:

$$E(X) = \lambda = 3$$

بعبارة أخرى نتوقع أن يكون في العينة المختارة 03 عمال مصابون بهذا المرض.

1. احتمال أي يصاب 5 عمال بهذا المرض أي $P(X = 5)$ يساوي إلى:

$$P(X = 5) = \frac{(3)^5 e^{-3}}{5!} = 0.100$$

التمرين العاشر:

1. إذا كان X يتبع قانون التوزيع الثنائي بتوقع يساوي 1 وتباين $\frac{3}{2}$ فأوجد $P(X \geq 1)$.
2. إذا كان X يتبع قانون التوزيع بواسون وكانت $P(X = 1) = 2P(X = 0)$ فاحسب $P(X = 4)$

الحل:

1. انطلاقا من معطيات التمرين لدينا:

$$E(X) = np = 1$$

$$V(X) = npq = \frac{3}{2}$$

وبالتالي يمكن كتابة:

$$V(X) = (np)q = 1 \times q = \frac{3}{2} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

ومن ثم يمكن إيجاد p الذي يساوي:

$$p = 1 - q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

وكذلك يمكن إيجاد n الذي يساوي:

$$E(X) = np = 1 \Rightarrow n = \frac{1}{p} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 3$$

والآن يمكن حساب الاحتمال $P(X \geq 1)$ الذي يساوي إلى:

$$P(X = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} = 0,444$$

$$P(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2} = 0,222$$

$$P(X = 3) = C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-3} = 0,0.37$$

ومنه فإن:

$$P(X \geq 1) = 0.703$$

2. انطلاقا من معطيات التمرين لدينا:

$$P(X = 1) = 2P(X = 0)$$

ونعلم كذلك بالمقابل أن:

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda}$$

$$P(X = 1) = \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = \lambda e^{-\lambda}$$

وبالتالي فإن:

$$\lambda e^{-\lambda} = 2e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = 2$$

ومن ثم فإن:

$$P(X = 4) = \frac{(2)^4 e^{-2}}{4!} = 0.195$$

الفصل الخامس: بعض قوانين التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغير العشوائي المستمر

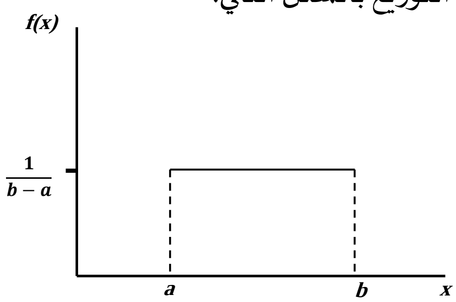
1. قانون التوزيع المنتظم:

أ- شكل دالة الكثافة:

نقول عن المتغير x المعرف في المجال اللامنتهي $[a, b]$ أنه يتبع قانون التوزيع المنتظم إذا كانت دالة كثافته تكتب بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

ويكون منحنى دالة كثافة هذا التوزيع بالشكل التالي:



إن التوزيع المنتظم عبارة عن قانون توزيع احتمالات لأن التكامل المحدود لدالة كثافته الاحتمالية في مجال تعريفها يساوي إلى الواحد حيث أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx$$

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{x}{b-a}\bigg|_a^b$$

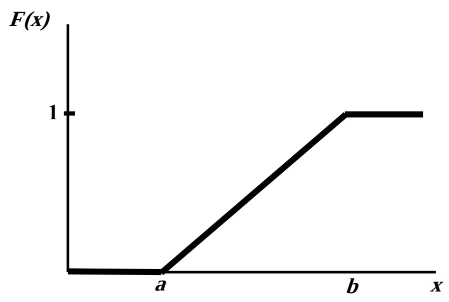
$$\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \lim_{x\to b}\frac{x}{b-a} - \lim_{x\to a}\frac{x}{b-a}$$

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

ومنه فإن قانون التوزيع المنتظم هو قانون توزيع احتمالات، وتكون دالة التوزيع الاحتمالية F(X) بالشكل التالي:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad x \in [a, b] \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

ويكون منحنى دالة التوزيع بالشكل التالي:



ب- المميزات العددية:

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx$$

$$E(X)=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx$$

$$E(X)=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\lim_{x\to b}\frac{x^2}{2(b-a)}-\lim_{x\to a}\frac{x^2}{2(b-a)}$$

$$E(X)=\frac{b^2}{2(b-a)}-\frac{a^2}{2(b-a)}=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$$

$$E(X)=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$E(X)=\frac{(b+a)}{2}$$

التباين:

نعلم أن اتباين عبارة الفرق بين العزم الابتدائي من الدرجة الثانية ومربع العزم الابتدائي من الدرجة الأولى أي:

$$V(X)=M_2(X)-M_1^2(X)$$

لنقم بحساب العزم الابتدائي من الدرجة الثانية:

$$M_2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx$$

$$M_2(X)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx$$

$$M_2(X)=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=\lim_{x\to b}\frac{x^3}{3(b-a)}-\lim_{x\to a}\frac{x^3}{3(b-a)}$$

$$M_2(X) = \frac{b^3}{3(b-a)} - \frac{a^3}{3(b-a)} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

$$M_2(X) = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)}$$

$$M_2(X) = \frac{(b^2 + ab + a^2)}{3}$$

ومن ثم فإن التباين يساوي إلى:

$$V(X) = \frac{(b^2 + ab + a^2)}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. قانون التوزيع الأسي:

أ- شكل دالة الكثافة:

نقول عن المتغير x المعرف في المجال اللامنتهي $]0,+\infty[$ أنه يتبع قانون التوزيع الأسي ذو المعلمة الحقيقية الموجبة λ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تكتب بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

إن التوزيع الأسي عبارة عن قانون توزيع احتمالات لأن التكامل المحدود لدالة كثافته الاحتمالية في مجال تعريفها يساوي إلى الواحد حيث أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-\lambda x}\right) - \lim_{x\to 0}\left(-e^{-\lambda x}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 - (-1) = 1$$

ب- المميزات العددية

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$E(X)=\lambda\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx$$

نقوم باستعمال التكامل بالتجزئة حيث نضع:

$$U=x\Rightarrow dU=dx$$
$$dV=e^{-\lambda x}dx\Rightarrow V=-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$$

ومنه فإن التوقع الرياضي يساوي إلى:

$$E(X)=\lambda\left[\underbrace{-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_{0}^{+\infty}}_{=0}-\int_{0}^{+\infty}-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right]$$
$$E(X)=\lambda\left[0+\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\Bigg|_{0}^{+\infty}\right]$$
$$E(X)=\frac{\lambda}{\lambda^2}$$
$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

التباين:

انطلاقا من العلاقة التعريفية للتباين لدينا:

$$V(X)=M_2(X)-M_1^2(X)$$

لنقوم بحساب العزم الابتدائي من الدرجة الثانية:

$$M_2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

نقوم باستعمال التكامل بالتجزئة حيث نضع:

$$U=x^2\Rightarrow dU=2xdx$$
$$dV=e^{-\lambda x}dx\Rightarrow V=-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$$
$$M_2(X)=\underbrace{-\frac{x^2e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_{0}^{+\infty}}_{=0}-2\int_{0}^{+\infty}-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}dx$$
$$M_2(X)=\frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx}_{=E(X)=\frac{1}{\lambda}}$$
$$M_2(X)=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda}$$
$$M_2(X)=\frac{2}{\lambda^2}$$

ومنه فإن التباين يساوي إلى:

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. قانون التوزيع الطبيعي:

أ- شكل دالة الكثافة:

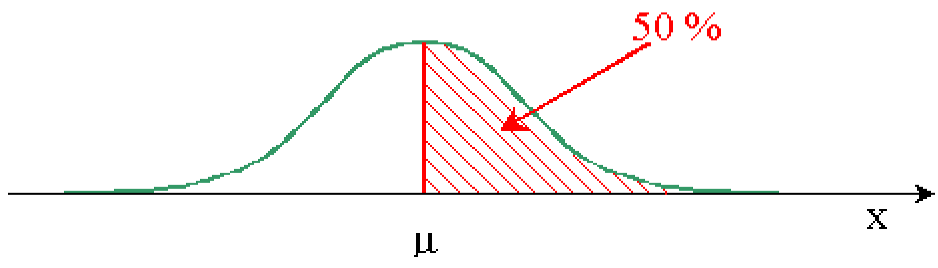
نقول أن X المتغير العشوائي المستمر في المجال اللامنتهي $]-\infty,+\infty[$ أنه يخضع لقانون التوزيع الطبيعي أو توزيع *Laplace – Gausse* إذا كانت دالة كثافته تكتب بالشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} \qquad \forall x \in]-\infty, +\infty[$$

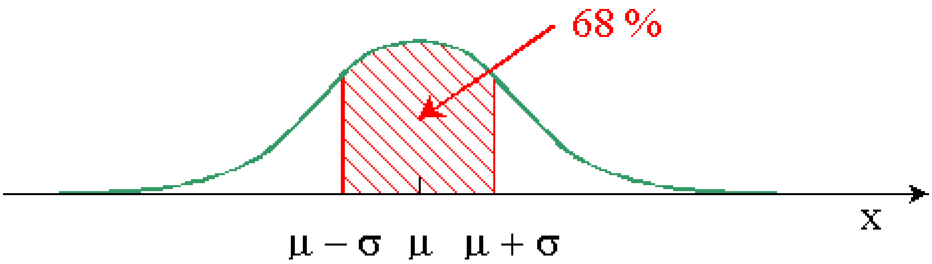
حيث أن μ و δ ثابتان اختياريان.

يعتبر هذا التوزيع من أهم التوزيعات الاحتمالية نظرا لوجود عدد كبير من المتغيرات العشوائية التي تخضع إليه، ويعطى منحنى دالة كثافته على شكل جرس متماثل ومتوازي بالنسبة للمستقيم $X = \mu$ وهو يحقق مجموعة من الخصائص نذكرها فيما يلي:

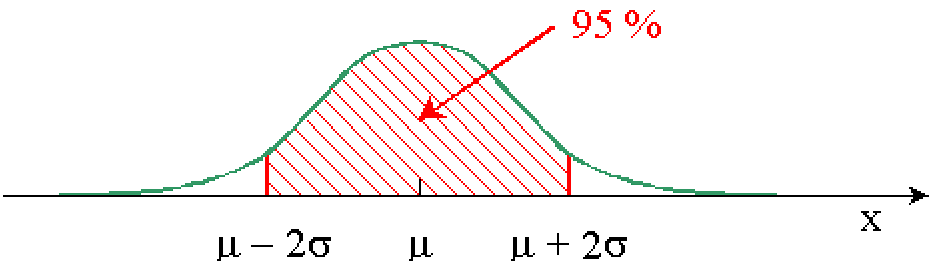
1. في المجتمعات التي تتبع التوزيع الطبيعي فإن
2. تمتلك **50%** من الوحدات الإحصائية قيمة فوق قيمة التوقع الرياضي μ، و**50%** المتبقية لها قيم أقل من القيمة μ.



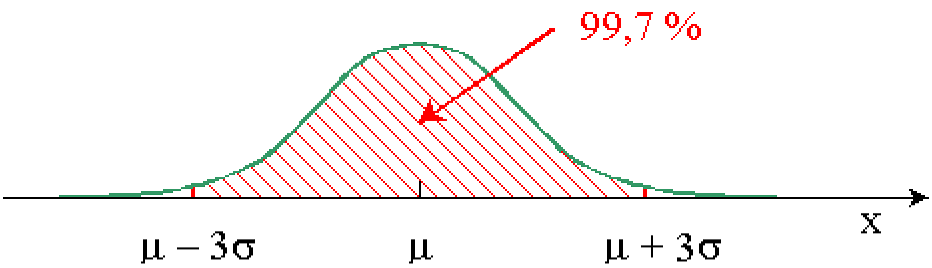
-2 في المجتمعات التي تتبع التوزيع الطبيعي فإن **68%** من الوحدات الإحصائية موجودة في المجال $[\mu - \delta, \mu + \delta]$



3- في المجتمعات التي تتبع التوزيع الطبيعي فإن **95%** من الوحدات الإحصائية موجودة في المجال $[\mu - 2\delta, \mu + 2\delta]$



4- في المجتمعات التي تتبع التوزيع الطبيعي فإن **99,7%** من الوحدات الإحصائية موجودة في المجال $[\mu - 3\delta, \mu + 3\delta]$



من مختلف هذه المنحنيات نلاحظ دور وأهمية الثابتان الاختياران فكلما تغير μ وδ حدث تغير في شكل منحنى دالة الكثافة *f(x)*.

إن التوزيع الطبيعي عبارة عن قانون توزيع احتمالات لأن التكامل المحدود لدالة كثافته الاحتمالية في مجال تعريفها يساوي إلى الواحد حيث أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} dx$$

نضع:

$$t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{x-\mu}{\delta}$$

$$\Rightarrow x = t\delta\sqrt{2} + \mu \Rightarrow dx = \delta\sqrt{2}dt$$

ومنه فإن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\delta\sqrt{2}dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{\delta\sqrt{2}}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

باستعمال تكاملات فوري ***les intégrales de Fourrier*** نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$$

ب- المميزات العددية:

التوقع الرياضي:

انطلاقا من العلاقة التعريفية للتوقع الرياضي فإن:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [(x-\mu)+\mu]f(x)dx$$

$$E(X) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)f(x)dx}_{A} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu f(x)dx}_{B}$$

لنهتم أولا بالجزء A:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} dx$$

نضع $y = x - \mu$

$$A = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} dy$$

نضع كذلك:

$$y^2 = z \Rightarrow dz = 2ydy \Rightarrow dy = \frac{dz}{2y}$$

$$A = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-\frac{z}{2\delta^2}} \frac{dz}{2y}$$

$$A = \frac{1}{2\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z}{2\delta^2}} dz$$

$$A = \frac{1}{2\delta\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{z}{2\delta^2}}}{\frac{-1}{2\delta^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{-\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$A = 0$$

أما الجزء B فيساوي إلى:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu f(x) dx = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \mu \times 1$$

$$B = \mu$$

ومنه فإن التوقع الرياضي يساوي إلى:

$$E(X) = A + B = 0 + \mu = \mu$$

$$E(X) = \mu$$

التباين:

انطلاقا من العلاقة التعريفية للتباين فإن:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)\, dx$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}}{\delta\sqrt{2\pi}} dx$$

$$V(X) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} dx$$

نقوم بوضع:

$$t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2 \Rightarrow t = \frac{x-\mu}{\delta\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = t\delta\sqrt{2} + \mu \Rightarrow dx = \delta dt\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (x-\mu)^2 = 2\delta^2 t^2$$

$$V(X) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, e^{-t^2} \delta dt\sqrt{2}$$

$$V(X) = \frac{2\delta^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, e^{-t^2} dt$$

نستعمل التكامل بالتجزئة حيث نضع:

$$U = t \Rightarrow dU = dt$$

$$dV = te^{-t^2}dt \Rightarrow V = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$$

$$V(X) = \frac{2\delta^2}{\sqrt{\pi}}\left[\underbrace{t - \frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-t^2}dt\right]$$

$$V(X) = \frac{2\delta^2}{\sqrt{\pi}}.\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{2\delta^2}{\sqrt{\pi}}.\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \delta^2$$

ومنه فإن التباين يساوي:

$$V(X) = \delta^2$$

ج- التوزيع الطبيعي المعياري وحساب الاحتمالات:

إن حساب احتمال أن تأخذ المتغير x المعرفة في المجال $]-\infty,+\infty[$ والتي تتبع التوزيع الطبيعي العام ذا التوقع الرياضي μ والتباين δ^2 قيمة محصورة بين $]x_1,x_2[$ حيث أن $x_1 \leq x \leq x_2$، فإننا سنقوم بحساب المساحة التي تحصرها دالة الكثافة في المجال $]x_1,x_2[$ ، أي بعبارة أخرى سنقوم بحساب التكامل المحدود لدالة الكثافة في هذا المجال الذي يكتب بالشكل التالي:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}$$

إن حساب هذا التكامل عملية صعبة ومعقدة، لذلك لجأ علماء الرياضيات والإحصاء إلى القيام ببعض التحويلات الرياضية حيث نقوم بحساب القيمة z المعرفة بالشكل التالي:

$$z = \frac{x-\mu}{\delta}$$

حيث أن هذه المتغيرة تتبع توزيعا طبيعيا ذا التوقع الرياضي $\mu = 0$ والتباين $\delta^2 = 1$ ويكتب بالشكل التالي:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \forall z \in]-\infty, +\infty[$$

ويمكن إثبات هاتين الخاصيتين انطلاقا من خصائص التوقع الرياضي حيث أنه لدينا:

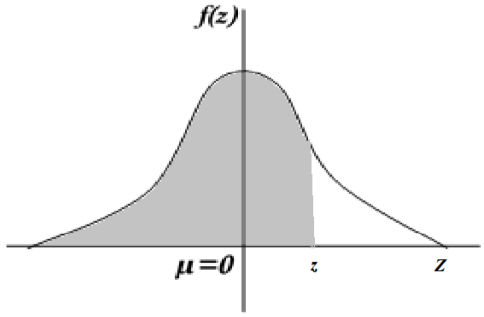
$$E(X) = \mu \Rightarrow E(X-\mu) = E(X) - \mu = 0$$

من جانب آخر لدينا كذلك بالنسبة للتباين:

$$V(X) = \delta^2 \Rightarrow V(X-\mu) = \delta^2$$

$$V\left(\frac{X-\mu}{\delta}\right)=\frac{V(X-\mu)}{\delta^2}=\frac{\delta^2}{\delta^2}=1$$

وتأخذ دالة الكثافة شكل جرس متناظر بالنسبة للمستقيم z = 0 الذي يمثل محور التراتيب ويسمى في هذه الحالة بالتوزيع الطبيعي المعياري ويأتي بالشكل التالي:



ومن ثم قام علماء الإحصاء والرياضيات بحساب المساحة التي تحصرها المتغيرة z أي الدالة التجميعية وقاموا بضع قيم هذه الاحتمالات في جدول.

$$F(z)=P(Z\leq z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000000	0,50398936	0,50797831	0,51196647	0,51595344	0,51993881	0,52392218	0,52790317	0,53188137	0,53585639
0,1	0,53982784	0,54379531	0,54775843	0,55171679	0,55567000	0,55961769	0,56355946	0,56749493	0,57142372	0,57534543
0,2	0,57925971	0,58316616	0,58706442	0,59095412	0,59483487	0,59870633	0,60256811	0,60641987	0,61026125	0,61409188
0,3	0,61791142	0,62171952	0,62551583	0,62930002	0,63307174	0,63683065	0,64057643	0,64430875	0,64802729	0,65173173
0,4	0,65542174	0,65909703	0,66275727	0,66640218	0,67003145	0,67364478	0,67724189	0,68082249	0,68438630	0,68793305
0,5	0,69146246	0,69497427	0,69846821	0,70194403	0,70540148	0,70884031	0,71226028	0,71566115	0,71904269	0,72240468
0,6	0,72574688	0,72906910	0,73237111	0,73565271	0,73891370	0,74215389	0,74537309	0,74857110	0,75174777	0,75490291
0,7	0,75803635	0,76114793	0,76423750	0,76730491	0,77035000	0,77337265	0,77637271	0,77935005	0,78230456	0,78523612
0,8	0,78814460	0,79102991	0,79389195	0,79673061	0,79954581	0,80233746	0,80510548	0,80784980	0,81057035	0,81326706
0,9	0,81593987	0,81858875	0,82121362	0,82381446	0,82639122	0,82894387	0,83147239	0,83397675	0,83645694	0,83891294
1,0	0,84134475	0,84375235	0,84613577	0,84849500	0,85083005	0,85314094	0,85542770	0,85769035	0,85992891	0,86214343
1,1	0,86433394	0,86650049	0,86864312	0,87076189	0,87285685	0,87492806	0,87697560	0,87899952	0,88099989	0,88297680
1,2	0,88493033	0,88686055	0,88876756	0,89065145	0,89251230	0,89435023	0,89616532	0,89795768	0,89972743	0,90147467
1,3	0,90319952	0,90490208	0,90658249	0,90824086	0,90987733	0,91149201	0,91308504	0,91465655	0,91620668	0,91773556
1,4	0,91924334	0,92073016	0,92219616	0,92364149	0,92506630	0,92647074	0,92785496	0,92921912	0,93056338	0,93188788
1,5	0,93319280	0,93447829	0,93574451	0,93699164	0,93821982	0,93942924	0,94062006	0,94179244	0,94294657	0,94408260
1,6	0,94520071	0,94630107	0,94738386	0,94844925	0,94949742	0,95052853	0,95154277	0,95254032	0,95352134	0,95448602
1,7	0,95543454	0,95636706	0,95728378	0,95818486	0,95907049	0,95994084	0,96079610	0,96163643	0,96246202	0,96327304
1,8	0,96406968	0,96485211	0,96562050	0,96637503	0,96711588	0,96784323	0,96855724	0,96925809	0,96994596	0,97062102
1,9	0,97128344	0,97193339	0,97257105	0,97319658	0,97381016	0,97441194	0,97500210	0,97558081	0,97614824	0,97670453
2,0	0,97724987	0,97778441	0,97830831	0,97882173	0,97932484	0,97981778	0,98030073	0,98077383	0,98123723	0,98169110
2,1	0,98213558	0,98257082	0,98299698	0,98341419	0,98382262	0,98422239	0,98461367	0,98499658	0,98537127	0,98573788
2,2	0,98609655	0,98644742	0,98679062	0,98712628	0,98745454	0,98777553	0,98808937	0,98839621	0,98869616	0,98898934
2,3	0,98927589	0,98955592	0,98982956	0,99009692	0,99035813	0,99061329	0,99086253	0,99110596	0,99134368	0,99157581
2,4	0,99180246	0,99202374	0,99223975	0,99245059	0,99265637	0,99285719	0,99305315	0,99324435	0,99343088	0,99361285
2,5	0,99379033	0,99396344	0,99413226	0,99429687	0,99445738	0,99461385	0,99476639	0,99491507	0,99505998	0,99520120
2,6	0,99533881	0,99547289	0,99560351	0,99573076	0,99585470	0,99597541	0,99609297	0,99620744	0,99631889	0,99642740
2,7	0,99653303	0,99663584	0,99673590	0,99683328	0,99692804	0,99702024	0,99710993	0,99719719	0,99728206	0,99736460
2,8	0,99744487	0,99752293	0,99759882	0,99767260	0,99774432	0,99781404	0,99788179	0,99794764	0,99801162	0,99807379
2,9	0,99813419	0,99819286	0,99824984	0,99830519	0,99835894	0,99841113	0,99846180	0,99851100	0,99855876	0,99860511

د- طريقة استعمال الجدول وحساب الاحتمالات:

فلحساب احتمال أن تأخذ المتغيرة كيفية X المعرفة في المجال]∞+,∞-[والتي تتبع التوزيع الطبيعي العام ذا التوقع الرياضي μ والتباين δ^2 لقيمة أقل أو تساوي x_1 أي حساب $P(X\leq x_0)$ نتبع الخطوات التالية:

1. حساب z_0 باستخدام العلاقة: $z_0 = \frac{x_0 - \mu}{\delta}$
2. البحث عن قيمة z_0 في الجدول حيث أن العمود الأول يعطينا الرقم الصحيح والرقم العشري الأول (الرقم الأول بعد الفاصلة) في قيمة z_0، أما السطر الأول فيعطينا الرقم العشري الثاني أي الرقم الثاني بعد الفاصلة في قيمة z_0.
3. قراءة الاحتمال في الجدول الذي يوجد في تقاطع السطر والعمود المحددين لقيمة z_0 ونرمز له بالرمز $\phi(z_0)$.
4. لحساب احتمال $P(Z > z_0)$ نقوم بالعملية التالية:

$$P(Z > z_0) = 1 - P(Z < z_0) = 1 - \Phi(z_0)$$

5. في حالة تكون قيمة z_0 سالبة أي ($-z_0$) نقوم بالعملية التالية:

$$P(Z < -z_0) = P(Z > z_0) = 1 - P(Z < z_0) = 1 - \Phi(z_0)$$

6. لحساب احتمال أن تكون z محصورة بين قيمتين z_1 و z_2 حيث أن $z_1 < z < z_2$ أي حساب الاحتمال $P(z_1 < z < z_2)$ فإننا نقوم بالعملية التالية:

$$P(z_1 < z < z_2) = P(z < z_2) - P(z < z_1) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

أمثلة:

- لنقوم بحساب $P(Z < 1,48)$:

لقراءة قيمة الاحتمال أن تأخذ Z قيمة أقل من 1,48، نبحث في العمود الأول 1,4 الموافق للرقم الصحيح الأول والرقم العشري الأول المكون لقيمة 1,48، ونبحث في السطر الأول عن القيمة 0,08 الموافق للرقم العشري الثاني المكون لقيمة 1,48، ثم نقرا قيمة الاحتمال الموجودة في الخانة التي تمثل تقاطع ذلك السطر وذاك العمود كما هو مبين في الجدول وهي: $\phi(1,48) = 0,93056338$.

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000000	0,50398936	0,50797831	0,51196647	0,51595344	0,51993881	0,52392218	0,52790317	0,53188137	0,53585639
0,1	0,53982784	0,54379531	0,54775843	0,55171679	0,55567000	0,55961769	0,56355946	0,56749493	0,57142372	0,57534543
0,2	0,57925971	0,58316616	0,58706442	0,59095412	0,59483487	0,59870633	0,60256811	0,60641987	0,61026125	0,61409188
0,3	0,61791142	0,62171952	0,62551583	0,62930002	0,63307174	0,63683065	0,64057643	0,64430875	0,64802729	0,65173173
0,4	0,65542174	0,65909703	0,66275727	0,66640218	0,67003145	0,67364478	0,67724189	0,68082249	0,68438630	0,68793305
0,5	0,69146246	0,69497427	0,69846821	0,70194403	0,70540148	0,70884031	0,71226028	0,71566115	0,71904269	0,72240468
0,6	0,72574688	0,72906910	0,73237111	0,73565271	0,73891370	0,74215389	0,74537309	0,74857110	0,75174777	0,75490291
0,7	0,75803635	0,76114793	0,76423750	0,76730491	0,77035000	0,77337265	0,77637271	0,77935005	0,78230456	0,78523612
0,8	0,78814460	0,79102991	0,79389195	0,79673061	0,79954581	0,80233746	0,80510548	0,80784980	0,81057035	0,81326706
0,9	0,81593987	0,81858875	0,82121362	0,82381446	0,82639122	0,82894387	0,83147239	0,83397675	0,83645694	0,83891294
1,0	0,84134475	0,84375235	0,84613577	0,84849500	0,85083005	0,85314094	0,85542770	0,85769035	0,85992891	0,86214343
1,1	0,86433394	0,86650049	0,86864312	0,87076189	0,87285685	0,87492806	0,87697560	0,87899952	0,88099989	0,88297680
1,2	0,88493033	0,88686055	0,88876756	0,89065145	0,89251230	0,89435023	0,89616532	0,89795768	0,89972743	0,90147467
1,3	0,90319952	0,90490208	0,90658249	0,90824086	0,90987733	0,91149201	0,91308504	0,91465655	0,91620668	0,91773556
1,4	0,91924334	0,92073016	0,92219616	0,92364149	0,92506630	0,92647074	0,92785496	0,92921912	0,93056338	0,93188788
1,5	0,93319280	0,93447829	0,93574451	0,93699164	0,93821982	0,93942924	0,94062006	0,94179244	0,94294657	0,94408260
1,6	0,94520071	0,94630107	0,94738386	0,94844925	0,94949742	0,95052853	0,95154277	0,95254032	0,95352134	0,95448602
1,7	0,95543454	0,95636706	0,95728378	0,95818486	0,95907049	0,95994084	0,96079610	0,96163643	0,96246202	0,96327304
1,8	0,96406968	0,96485211	0,96562050	0,96637503	0,96711588	0,96784323	0,96855724	0,96925809	0,96994596	0,97062102
1,9	0,97128344	0,97193339	0,97257105	0,97319658	0,97381016	0,97441194	0,97500210	0,97558081	0,97614824	0,97670453
2,0	0,97724987	0,97778441	0,97830831	0,97882173	0,97932484	0,97981778	0,98030073	0,98077383	0,98123723	0,98169110
2,1	0,98213558	0,98257082	0,98299698	0,98341419	0,98382262	0,98422239	0,98461367	0,98499658	0,98537127	0,98573788
2,2	0,98609655	0,98644742	0,98679062	0,98712628	0,98745454	0,98777553	0,98808937	0,98839621	0,98869616	0,98898934
2,3	0,98927589	0,98955592	0,98982956	0,99009692	0,99035813	0,99061329	0,99086253	0,99110596	0,99134368	0,99157581
2,4	0,99180246	0,99202374	0,99223975	0,99245059	0,99265637	0,99285719	0,99305315	0,99324435	0,99343088	0,99361285
2,5	0,99379033	0,99396344	0,99413226	0,99429687	0,99445738	0,99461385	0,99476639	0,99491507	0,99505998	0,99520120
2,6	0,99533881	0,99547289	0,99560351	0,99573076	0,99585470	0,99597541	0,99609297	0,99620744	0,99631889	0,99642740

2,7	0,99653303	0,99663584	0,99673590	0,99683328	0,99692804	0,99702024	0,99710993	0,99719719	0,99728206	0,99736460
2,8	0,99744487	0,99752293	0,99759882	0,99767260	0,99774432	0,99781404	0,99788179	0,99794764	0,99801162	0,99807379
2,9	0,99813419	0,99819286	0,99824984	0,99830519	0,99835894	0,99841113	0,99846180	0,99851100	0,99855876	0,99860511

- **لنقم حساب احتمال (Z < 0.56)P:**

لقراءة قيمة الاحتمال أن تأخذ Z قيمة أقل من **0,56**، نبحث في العمود الأول **0,5** الموافق للرقم الصحيح الأول والرقم العشري الأول المكون لقيمة **0,56**، ونبحث في السطر الأول عن القيمة **0,06** الموافق للرقم العشري الثاني المكون لقيمة **0,56**، ثم نقرا قيمة الاحتمال الموجودة في الخانة التي تمثل تقاطع ذلك السطر وذاك العمود كما هو مبين في الجدول وهي: **$\phi(0,56) = 0,71226028$**.

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000000	0,50398936	0,50797831	0,51196647	0,51595344	0,51993881	0,52392218	0,52790317	0,53188137	0,53585639
0,1	0,53982784	0,54379531	0,54775843	0,55171679	0,55567000	0,55961769	0,56355946	0,56749493	0,57142372	0,57534543
0,2	0,57925971	0,58316616	0,58706442	0,59095412	0,59483487	0,59870633	0,60256811	0,60641987	0,61026125	0,61409188
0,3	0,61791142	0,62171952	0,62551583	0,62930002	0,63307174	0,63683065	0,64057643	0,64430875	0,64802729	0,65173173
0,4	0,65542174	0,65909703	0,66275727	0,66640218	0,67003145	0,67364478	0,67724189	0,68082249	0,68438630	0,68793305
0,5	0,69146246	0,69497427	0,69846821	0,70194403	0,70540148	0,70884031	0,71226028	0,71566115	0,71904269	0,72240468
0,6	0,72574688	0,72906910	0,73237111	0,73565271	0,73891370	0,74215389	0,74537309	0,74857110	0,75174777	0,75490291
0,7	0,75803635	0,76114793	0,76423750	0,76730491	0,77035000	0,77337265	0,77637271	0,77935005	0,78230456	0,78523612
0,8	0,78814460	0,79102991	0,79389195	0,79673061	0,79954581	0,80233746	0,80510548	0,80784980	0,81057035	0,81326706
0,9	0,81593987	0,81858875	0,82121362	0,82381446	0,82639122	0,82894387	0,83147239	0,83397675	0,83645694	0,83891294
1,0	0,84134475	0,84375235	0,84613577	0,84849500	0,85083005	0,85314094	0,85542770	0,85769035	0,85992891	0,86214343
1,1	0,86433394	0,86650049	0,86864312	0,87076189	0,87285685	0,87492806	0,87697560	0,87899952	0,88099989	0,88297680
1,2	0,88493033	0,88686055	0,88876756	0,89065145	0,89251230	0,89435023	0,89616532	0,89795768	0,89972743	0,90147467
1,3	0,90319952	0,90490208	0,90658249	0,90824086	0,90987733	0,91149201	0,91308504	0,91465655	0,91620668	0,91773556
1,4	0,91924334	0,92073016	0,92219616	0,92364149	0,92506630	0,92647074	0,92785496	0,92921912	0,93056338	0,93188788
1,5	0,93319280	0,93447829	0,93574451	0,93699164	0,93821982	0,93942924	0,94062006	0,94179244	0,94294657	0,94408260
1,6	0,94520071	0,94630107	0,94738386	0,94844925	0,94949742	0,95052853	0,95154277	0,95254032	0,95352134	0,95448602
1,7	0,95543454	0,95636706	0,95728378	0,95818486	0,95907049	0,95994084	0,96079610	0,96163643	0,96246202	0,96327304
1,8	0,96406968	0,96485211	0,96562050	0,96637503	0,96711588	0,96784323	0,96855724	0,96925809	0,96994596	0,97062102
1,9	0,97128344	0,97193339	0,97257105	0,97319658	0,97381016	0,97441194	0,97500210	0,97558081	0,97614824	0,97670453
2,0	0,97724987	0,97778441	0,97830831	0,97882173	0,97932484	0,97981778	0,98030073	0,98077383	0,98123723	0,98169110
2,1	0,98213558	0,98257082	0,98299698	0,98341419	0,98382262	0,98422239	0,98461367	0,98499658	0,98537127	0,98573788
2,2	0,98609655	0,98644742	0,98679062	0,98712628	0,98745454	0,98777553	0,98808937	0,98839621	0,98869616	0,98898934
2,3	0,98927589	0,98955592	0,98982956	0,99009692	0,99035813	0,99061329	0,99086253	0,99110596	0,99134368	0,99157581
2,4	0,99180246	0,99202374	0,99223975	0,99245059	0,99265637	0,99285719	0,99305315	0,99324435	0,99343088	0,99361285
2,5	0,99379033	0,99396344	0,99413226	0,99429687	0,99445738	0,99461385	0,99476639	0,99491507	0,99505998	0,99520120
2,6	0,99533881	0,99547289	0,99560351	0,99573076	0,99585470	0,99597541	0,99609297	0,99620744	0,99631889	0,99642740
2,7	0,99653303	0,99663584	0,99673590	0,99683328	0,99692804	0,99702024	0,99710993	0,99719719	0,99728206	0,99736460
2,8	0,99744487	0,99752293	0,99759882	0,99767260	0,99774432	0,99781404	0,99788179	0,99794764	0,99801162	0,99807379
2,9	0,99813419	0,99819286	0,99824984	0,99830519	0,99835894	0,99841113	0,99846180	0,99851100	0,99855876	0,99860511

- **لنقم حساب احتمال (Z > 2.23)P:**

بما أن الجدول يعطينا احتمال أن تأخذ **Z** قيمة أقل من **2,23** ولا يعطينا احتمال أن تأخذ **Z** قيمة أكبر من **2,23**، سنقوم باستعمال خاصية احتمال الحدث المتمم كما يلي:

$$\boldsymbol{P(Z > 2.23) = 1 - P(Z < 2.23) = 1 - \Phi(2.23)}$$

ولقراءة قيمة الاحتمال أن تأخذ **Z** قيمة أقل من **2,23**، نبحث في العمود الأول **2,2** الموافق للرقم الصحيح الأول والرقم العشري الأول المكون لقيمة **2,23**، ونبحث في السطر الأول عن القيمة **0,03** الموافق للرقم العشري الثاني المكون لقيمة **2,23**، ثم نقرا قيمة الاحتمال الموجودة في الخانة التي تمثل تقاطع ذلك السطر وذاك العمود كما هو مبين في الجدول وهي: **$\phi\ (2,23) = 0,98712628$**.

ومن ثم فإن: $\boldsymbol{P(Z > 2.23) = 1 - \Phi(2.23) = 1 - 0.98712628 = 0.01287372}$

- **لنقم بحساب احتمال (Z > -1,33)P:**

بما أن الجدول لا يعطينا احتمال لأن تأخذ Z قيمة أكبر من قيمة سالبة، وبالاعتماد على خاصية التناظر فإنه لدينا:

$$P(Z < -1.33) = P(Z > 1.33) = 1 - P(Z < 1.33) = 1 - \Phi(1.33)$$

ولقراءة قيمة الاحتمال أن تأخذ **Z** قيمة أقل من **1,33**، نبحث في العمود الأول **1,3** الموافق للرقم الصحيح الأول والرقم العشري الأول المكون لقيمة **1,33**، ونبحث في السطر الأول عن القيمة **0,03** الموافق للرقم العشري الثاني المكون لقيمة **1,33**، ثم نقرأ قيمة الاحتمال الموجودة في الخانة التي تمثل تقاطع ذلك السطر وذاك العمود كما هو مبين في الجدول وهي: **ϕ (1,33) = 0,90824086**.

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000000	0,50398936	0,50797831	0,51196647	0,51595344	0,51993881	0,52392218	0,52790317	0,53188137	0,53585639
0,1	0,53982784	0,54379531	0,54775843	0,55171679	0,55567000	0,55961769	0,56355946	0,56749493	0,57142372	0,57534543
0,2	0,57925971	0,58316616	0,58706442	0,59095412	0,59483487	0,59870633	0,60256811	0,60641987	0,61026125	0,61409188
0,3	0,61791142	0,62171952	0,62551583	0,62930002	0,63307174	0,63683065	0,64057643	0,64430875	0,64802729	0,65173173
0,4	0,65542174	0,65909703	0,66275727	0,66640218	0,67003145	0,67364478	0,67724189	0,68082249	0,68438630	0,68793305
0,5	0,69146246	0,69497427	0,69846821	0,70194403	0,70540148	0,70884031	0,71226028	0,71566115	0,71904269	0,72240468
0,6	0,72574688	0,72906910	0,73237111	0,73565271	0,73891370	0,74215389	0,74537309	0,74857110	0,75174777	0,75490291
0,7	0,75803635	0,76114793	0,76423750	0,76730491	0,77035000	0,77337265	0,77637271	0,77935005	0,78230456	0,78523612
0,8	0,78814460	0,79102991	0,79389195	0,79673061	0,79954581	0,80233746	0,80510548	0,80784980	0,81057035	0,81326706
0,9	0,81593987	0,81858875	0,82121362	0,82381446	0,82639122	0,82894387	0,83147239	0,83397675	0,83645694	0,83891294
1,0	0,84134475	0,84375235	0,84613577	0,84849500	0,85083005	0,85314094	0,85542770	0,85769035	0,85992891	0,86214343
1,1	0,86433394	0,86650049	0,86864312	0,87076189	0,87285685	0,87492806	0,87697560	0,87899952	0,88099989	0,88297680
1,2	0,88493033	0,88686055	0,88876756	0,89065145	0,89251230	0,89435023	0,89616532	0,89795768	0,89972743	0,90147467
1,3	0,90319952	0,90490208	0,90658249	0,90824086	0,90987733	0,91149201	0,91308504	0,91465655	0,91620668	0,91773556
1,4	0,91924334	0,92073016	0,92219616	0,92364149	0,92506630	0,92647074	0,92785496	0,92921912	0,93056338	0,93188788
1,5	0,93319280	0,93447829	0,93574451	0,93699164	0,93821982	0,93942924	0,94062006	0,94179244	0,94294657	0,94408260
1,6	0,94520071	0,94630107	0,94738386	0,94844925	0,94949742	0,95052853	0,95154277	0,95254032	0,95352134	0,95448602
1,7	0,95543454	0,95636706	0,95728378	0,95818486	0,95907049	0,95994084	0,96079610	0,96163643	0,96246202	0,96327304
1,8	0,96406968	0,96485211	0,96562050	0,96637503	0,96711588	0,96784323	0,96855724	0,96925809	0,96994596	0,97062102
1,9	0,97128344	0,97193339	0,97257105	0,97319658	0,97381016	0,97441194	0,97500210	0,97558081	0,97614824	0,97670453
2,0	0,97724987	0,97778441	0,97830831	0,97882173	0,97932484	0,97981778	0,98030073	0,98077383	0,98123723	0,98169110
2,1	0,98213558	0,98257082	0,98299698	0,98341419	0,98382262	0,98422239	0,98461367	0,98499658	0,98537127	0,98573788
2,2	0,98609655	0,98644742	0,98679062	0,98712628	0,98745454	0,98777553	0,98808937	0,98839621	0,98869616	0,98898934
2,3	0,98927589	0,98955592	0,98982956	0,99009692	0,99035813	0,99061329	0,99086253	0,99110596	0,99134368	0,99157581
2,4	0,99180246	0,99202374	0,99223975	0,99245059	0,99265637	0,99285719	0,99305315	0,99324435	0,99343088	0,99361285
2,5	0,99379033	0,99396344	0,99413226	0,99429687	0,99445738	0,99461385	0,99476639	0,99491507	0,99505998	0,99520120
2,6	0,99533881	0,99547289	0,99560351	0,99573076	0,99585470	0,99597541	0,99609297	0,99620744	0,99631889	0,99642740
2,7	0,99653303	0,99663584	0,99673590	0,99683328	0,99692804	0,99702024	0,99710993	0,99719719	0,99728206	0,99736460
2,8	0,99744487	0,99752293	0,99759882	0,99767260	0,99774432	0,99781404	0,99788179	0,99794764	0,99801162	0,99807379
2,9	0,99813419	0,99819286	0,99824984	0,99830519	0,99835894	0,99841113	0,99846180	0,99851100	0,99855876	0,99860511

ومن ثم فإن:

$$P(Z < -1.33) = 1 - \Phi(1.33) = 1 - 0.90824086 = 0,09175914$$

سلسلة تمارين محلولة متعلقة بالفصل:

التمرين الأول:

ليكن المتغير العشوائي المعرف بدالة الكثافة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & si \quad 0\leq x\leq 1\\ \frac{1}{4} & si \quad 2\leq x\leq 3\\ 0 & sinon\end{cases}$$

1. أثبت أن f تمثل دالة كثافة احتمالية ومثلها بيانيا.
2. أوجد دالة التوزيع وارسم بيانها.

الحل:

حتى تكون f دالة كثافة احتمالية يجب أن تكاملها المحدود في مجال تعريفها يساوي إلى الواحد أي يحقق العلاقة التالية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

لنقم بحساب هذا التكامل المحدود أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1\frac{3}{4}dx+\int_2^3\frac{1}{4}dx$$

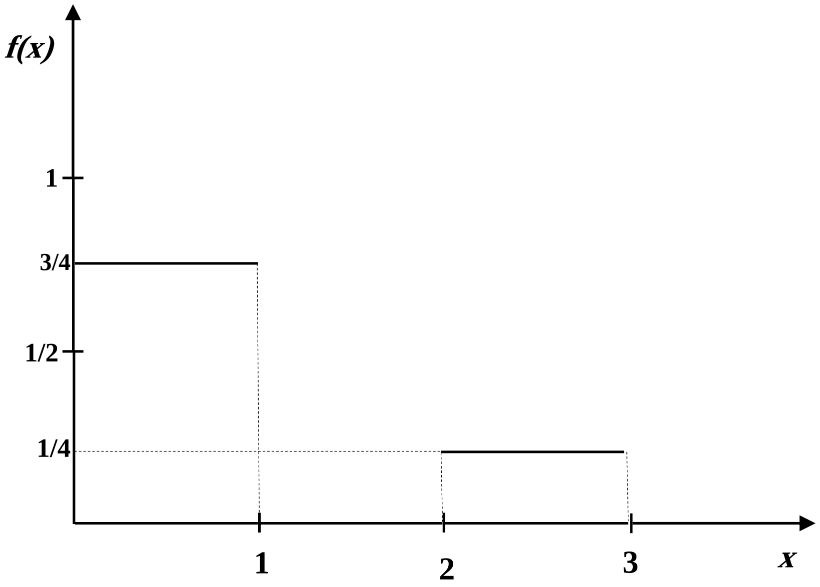
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\frac{3}{4}x\Big|_0^1+\frac{1}{4}x\Big|_2^3$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\left[\lim_{x\to 1}\frac{3}{4}x-\lim_{x\to 0}\frac{3}{4}x\right]+\left[\lim_{x\to 3}\frac{1}{4}x-\lim_{x\to 2}\frac{1}{4}x\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\left[\frac{3}{4}-0\right]+\left[\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\left[\frac{3}{4}\right]+\left[\frac{1}{4}\right]=1$$

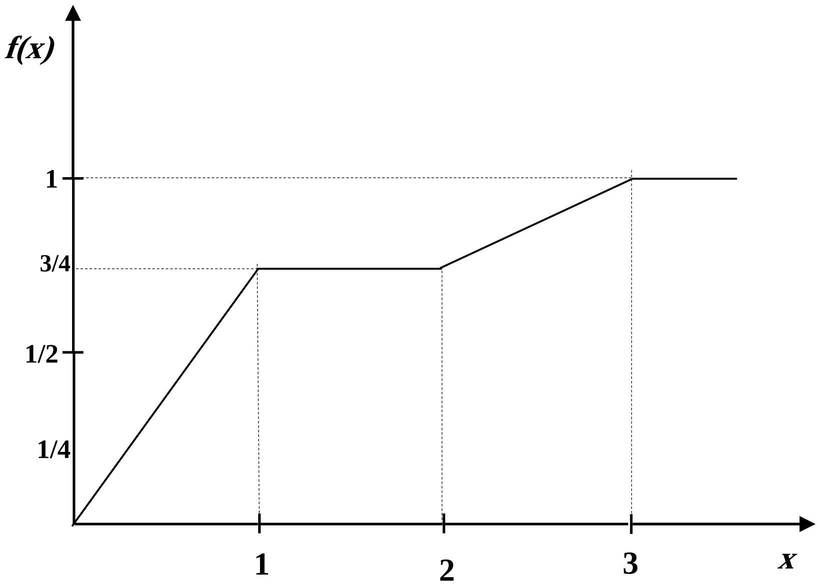
ومنه فإن f يمثل توزيع احتمالات ويكون شكله البياني بالشكل التالي:



إيجاد دالة التوزيع:

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\begin{cases}\frac{3}{4}x & si\quad 0\le x\le 1\\ \frac{3}{4} & si\quad 1\le x\le 2\\ \frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x & si\quad 2\le x\le 3\\ 1 & si\quad x\ge 3\end{cases}$$

ويكون المنحنى البياني لدلة التوزيع بالشكل التالي:



التمرين الثاني:

إن مدة صلاحية قطعة الكترونية مقدرة بالسنوات عبارة عن متغيرة عشوائية T والتي تكتب دالة توزيعها بالشكل التالي :

$$\begin{cases} F(t) = 0 & si \quad t < 0 \\ F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}} & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة T وأعط اسم هذا القانون ومميزاته العددية.

2- إذا علمت أن هذه القطعة قد بقيت صالحة لمدة سنة كاملة، ما هو احتمال أن تبقى صالحة لمدة سنتين أخريين على الأقل؟

الحل:

1- إن دالة الكثافة الاحتمالية عبارة عن الدالة المشتقة لدالة التوزيع وبالتالي فإن دالة الكثافة الاحتمالية التي تتبعها المتغيرة T تساوي إلى:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن دالة الكثافة الاحتمالية من الشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad \text{أن حيث} \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

ومنه فإن T تتبع قانون التوزيع الأسي بوسيط $\lambda = \frac{1}{2}$ حيث أن المميزات العددية تساوي إلى:

$$E(X) == \frac{1}{\lambda} = 2$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 4$$

2- حساب احتمال $P(1 \leq T \leq 3)$:

$$P(1 \leq T \leq 3) = F(3) - F(1)$$

$$P(1 \leq T \leq 3) = \left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$P(1 \leq T \leq 3) = -e^{-\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}$$

$$P(1 \leq T \leq 3) = 0,3834$$

التمرين الثالث:

أوجد المساحة تحت التوزيع الطبيعي المعياري بين:

$t=\pm1.96$, $t=\pm2.58$, $(t=0.9, t=2.10)$, $t\leq0.9$, $t\geq2.1$, $t=\pm1.64$

الحل:

$$P(-1,64 \leq t \leq +1,64) = P(t \leq +1,64) - P(t \leq -1,64)$$
$$P(-1,64 \leq t \leq +1,64) = \Phi(1,64) - \Phi(-1,64)$$
$$P(-1,64 \leq t \leq +1,64) = \Phi(1,64) - [1 - \Phi(1,64)]$$
$$P(-1,64 \leq t \leq +1,64) = 2\Phi(1,64) - 1$$
$$P(-1,64 \leq t \leq +1,64) = 2 \times (0,94949742) - 1$$
$$P(-1,64 \leq t \leq +1,64) = 0,89899484$$

$$P(t \geq 2,1) = 1 - P(t \leq 2,1)$$
$$P(t \geq 2,1) = 1 - \Phi(2,1)$$
$$P(t \geq 2,1) = 1 - 0,98213558$$
$$P(t \geq 2,1) = 0,01786442$$

$$P(t \leq 0,9) = \Phi(0,9)$$
$$P(t \leq 0,9) = 0,81593987$$

$$P(0.9 \leq t \leq 2.1) = P(t \leq 2.1) - P(t \leq 0.9)$$
$$P(0.9 \leq t \leq 2.1) = \Phi(2.1) - \Phi(0.9)$$
$$P(0.9 \leq t \leq 2.1) = 0,98213558 - 0,81593987$$
$$P(0.9 \leq t \leq 2.1) = 0,16619571$$
$$P(-2,58 \leq t \leq +2,58) = P(t \leq +2,58) - P(t \leq -2,58)$$
$$P(-2,58 \leq t \leq +2,58) = \Phi(2,58) - \Phi(-2,58)$$
$$P(-2,58 \leq t \leq +2,58) = \Phi(2,58) - [1 - \Phi(2,58)]$$
$$P(-2,58 \leq t \leq +2,58) = 2\Phi(2,58) - 1$$
$$P(-2,58 \leq t \leq +2,58) = 2 \times (0,99505998) - 1$$
$$P(-2,58 \leq t \leq +2,58) = 0,99011996$$

$$P(-1,96 \leq t \leq +1,96) = P(t \leq +1,96) - P(t \leq -1,96)$$
$$P(-1,96 \leq t \leq +1,96) = \Phi(1,96) - \Phi(-1,96)$$
$$P(-1,96 \leq t \leq +1,96) = \Phi(1,96) - [1 - \Phi(1,96)]$$
$$P(-1,96 \leq t \leq +1,96) = 2\Phi(1,96) - 1$$
$$P(-1,96 \leq t \leq +1,96) = 2 \times (0,97500210) - 1$$
$$P(-1,96 \leq t \leq +1,96) = 0,9500042$$

التمرين الرابع:

معدل استعمال نوع معين من العجلات المطاطية هو 38000 كلم بانحراف معياري 3000، ما هو احتمال أن يكون عمر عجلة اختيرت عشوائيا 35000 كلم على الأقل؟ وما هو أن يتعدى عمرها 45000 كلم علما أن عمر العجلات موزعا توزيعا طبيعيا؟

الحل:

المتغيرة X التي تمثل عمر العجلات المطاطية تتبع التوزيع الطبيعي العام ذا التوقع الرياضي $\mu = 38000$ وانحراف معياري $\delta = 3000$ ونكتب:

$$X \sim \mathcal{N}(38000, (3000)^2)$$

لحساب الاحتمالات نقوم بالانتقال من التوزيع الطبيعي العام نحو المتغير الطبيعي المعياري وذلك بطرح قيمة التوقع الرياضي والقسمة على قيمة الانحراف المعياري أي:

$$P(X \geq 35000) = P\left(Z \geq \frac{35000 - 38000}{3000}\right)$$

حيث أن المتغير Z تتبع التوزيع الطبيعي المعياري أي: $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$P(X \geq 35000) = P(Z \geq -1)$$
$$P(X \geq 35000) = P(Z \leq 1)$$
$$P(X \geq 35000) = \Phi(1)$$
$$P(X \geq 35000) = 0,84134475$$

$$P(X \geq 45000) = P\left(Z \geq \frac{45000 - 38000}{3000}\right)$$

$$P(X \geq 45000) = P(Z \geq 2.33)$$
$$P(X \geq 45000) = 1 - P(Z \leq 2.33)$$
$$P(X \geq 45000) = 1 - \Phi(2.33)$$
$$P(X \geq 45000) = 1 - 0,99009692$$
$$P(X \geq 45000) = 0,00990308$$

التمرين الخامس:

للوصول إلى مقر عمله، يستطيع عامل أن يسلك طريقين، يستغرق الوصول عبر الطريق الأول في المتوسط 27 دقيقة بانحراف معياري 2,5 دقيقة، ويستغرق للوصول عبر الطريق الثاني في المتوسط 29 دقيقة بانحراف معياري 1 دقيقة، وفي الحالتين تتبع مدة الوصول إلى مقر العمل توبعا طبيعيا.

يتبع هذا العامل الطريق الذي يسمح له بالوصول إلى مقر عمله في الوقت المناسب وبأكبر احتمال، فما هو الطريق الأحسن:

- لديه 32 دقيقة للوصول لمقر عمله.
- لديه 28 دقيقة للوصول لمقر عمله.

الحل:

لنسمي المتغيرة X_1 التي الوقت الذي يستغرقه هذا العامل للوصول إلى مقر عمله عبر الطريق الأول والتي تتبع التوزيع الطبيعي العام ذا التوقع الرياضي $\mu = 27$ وانحراف معياري $\delta = 2,5$ ونكتب:

$$X_1 \sim \mathcal{N}(27, (2,5)^2)$$

ولنسمي المتغيرة X_2 التي الوقت الذي يستغرقه هذا العامل للوصول إلى مقر عمله عبر الطريق الثاني والتي تتبع التوزيع الطبيعي العام ذا التوقع الرياضي $\mu = 29$ وانحراف معياري $\delta = 1$ ونكتب:

$$X_2 \sim \mathcal{N}(29, (1)^2)$$

وهنا كذلك لحساب الاحتمالات نقوم بالانتقال من التوزيع الطبيعي العام نحو المتغير الطبيعي المعياري وذلك بطرح قيمة التوقع الرياضي والقسمة على قيمة الانحراف المعياري، ففي حالة لدى العامل 32 دقيقة، فإن احتمال ألا يصل متأخرا عبر الطريق الأول أي ألا يتعدى زمن الوصل الوقت المتاح ونكتب:

$$P(X \leq 32) = P\left(Z \geq \frac{32-27}{2,5}\right)$$
$$P(X \leq 32) = P(Z \leq 2)$$
$$P(X \leq 32) = \Phi(2)$$
$$P(X \leq 32) = 0,97724987$$

أما عند استعمال الطريق الثاني فإن احتمال عدم الوصول متأخرا هو كالآتي:

$$P(X \leq 32) = P\left(Z \geq \frac{32-29}{1}\right)$$
$$P(X \leq 32) = P(Z \leq 3)$$
$$P(X \leq 32) = \Phi(3)$$
$$P(X \leq 32) = 0,9986501$$

نلاحظ أن احتمال استعمال الطريق الثاني أكبر من احتمال استعمال الطريق الأول، وبالتالي عند توفر 32 دقيقة من المستحسن استعمال الطريق الثاني.

أما في حالة لدى العامل 28 دقيقة، فإن احتمال ألا يصل متأخرا عبر الطريق الأول أي ألا يتعدى زمن الوصل الوقت المتاح ونكتب:

$$P(X \leq 28) = P\left(Z \geq \frac{28-27}{2.5}\right)$$
$$P(X \leq 28) = P(Z \leq 0,4)$$
$$P(X \leq 28) = \Phi(0,4)$$
$$P(X \leq 28) = 0,65542174$$

أما عند استعمال الطريق الثاني فإن احتمال عدم الوصول متأخرا هو كالآتي:

$$P(X \leq 28) = P\left(Z \geq \frac{28-29}{1}\right)$$
$$P(X \leq 28) = P(Z \leq -1)$$
$$P(X \leq 28) = \Phi(-1)$$
$$P(X \leq 28) = 1 - \Phi(1)$$
$$P(X \leq 28) = 1 - 0,84134475$$
$$P(X \leq 28) = 0,15865525$$

نلاحظ أن احتمال استعمال الطريق الأول أكبر من احتمال استعمال الطريق الثاني، وبالتالي عند توفر 28 دقيقة من المستحسن استعمال الطريق الأول.

التمرين السادس:

عند مراقبة الإنتاج، يتم رفض أي قطعة لا يتفق بعديها (الطول أو العرض) مع المواصفات التقنية اللازمة والمتمثلة في القيم التالية:

- **0,1** ملم بالزيادة أو النقصان في الطول **X**.
- **0,01** ملم بالزيادة أو النقصان في العرض **Y**.

تقدر المعايير التقنية اللازمة بالنسبة للطول **X** بـ **4** سم، وبالنسبة للعرض **Y** بـ **0,3** سم، وتقدر معدلات **X** و **Y** في عينات من **300** قطعة على الترتيب بـ **4,002** سم و**0,31015** سم، والانحرافات المعيارية تقدر بـ $\delta_y = 0,16\ mm$ بالنسبة للعرض و $\delta_x = \frac{5}{100}\ mm$ بالنسبة للطول.

ما هي نسبة القطع المرفوضة عند نهاية الحلقة الإنتاجية إذا علمت أن كل من الطول **X** والعرض **Y** يتبعان التوزيع الطبيعي؟

الحل:

قبل أن نبدأ في الحل يجب توحيد وحدات القياس إلى المليمتر، حيث أن هناك قيم معطاة بالسنتمتر (بالنسبة للتوقع الرياضي) وأخرى معطاة بالمليمتر (بالنسبة للانحراف المعياري)، فلنسمي المتغيرة **X** طول القطع المنتجة والتي تتبع التوزيع الطبيعي العام ذا التوقع الرياضي $\mu_x = 40{,}02$ وانحراف معياري $\delta_x = \frac{5}{100}$ ونكتب:

$$X \sim \mathcal{N}(40,02, (0,05)^2)$$

و لنسمي المتغيرة **Y** عرض القطع المنتجة والتي تتبع التوزيع الطبيعي العام ذا التوقع الرياضي μ_y =**3,1015** وانحراف معياري $\delta_y = 0,16$ ونكتب:

$$Y \sim \mathcal{N}(3,1015, (0,16)^2)$$

إن القطع المقبولة التي تحقق معايير الجودة في الطول هي التي يكون طولها **X** لا يتعدى عن **40,1** ملم أي بزيادة **0,1** ملم ولا يقل عن **39,9** ملم أي بنقصان **0,1** ملم عن المعايير التقنية المقدرة بـ **40** ملم، وبالتالي فإن نسبة القطع المقبولة هي تلك التي تحقق $(39,9 \le X \le 40.1)$ والتي تساوي:

$$P(39,9 \le X \le 40.1) = P\left(\frac{39,9 - 40,02}{0,05} \le Z \le \frac{40,1 - 40,02}{0,05}\right)$$

$$P(39,9 \le X \le 40,1) = P(-2,4 \le Z \le 1,6)$$

$$P(39,9 \le X \le 40,1) = \Phi(1,6) - \Phi(-2,4)$$

$$P(39,9 \le X \le 40,1) = \Phi(1,6) - \big(1 - \Phi(2,4)\big)$$

$$P(39,9 \le X \le 40,1) = 0,94520071 - (1 - 0,99180246)$$

$$P(39,9 \le X \le 40,1) = 0,937003172$$

ومن ثم فإن نسبة القطع المرفوضة والتي لا تحقق المعايير التقنية من حيث الطول هي:

$$\mathbf{1 - 0,977003172 = 0,062996828 = 6,299\%}$$

إن القطع المقبولة التي تحقق معايير الجودة في العرض هي التي يكون Y لا يتعدى عن **3,01** ملم أي بزيادة **0,01** ملم ولا يقل عن **2,99** ملم أي بنقصان **0,01** ملم عن المعايير التقنية المقدرة بـ **3** ملم، وبالتالي فإن نسبة القطع المقبولة هي تلك التي تحقق $(2,99 \le Y \le 3,01)$ والتي تساوي:

$$P(2,99 \le Y \le 3,01) = P\left(\frac{2,99 - 3,1015}{0,16} \le Z \le \frac{3,01 - 3,1015}{0,16}\right)$$
$$P(2,99 \le Y \le 3,01) = P(-0,696875 \le Z \le -0,571875)$$
$$P(2,99 \le Y \le 3,01) = \Phi(-0,571875) - \Phi(-0,696875)$$
$$P(2,99 \le Y \le 3,01) = \big(1 - \Phi(0,571875)\big) - \big(1 - \Phi(0,696875)\big)$$
$$P(2,99 \le Y \le 3,01) = (1 - 0,71566115) - (1 - 0,75490291)$$
$$P(2,99 \le Y \le 3,01) = 0,03924176$$

ومن ثم فإن نسبة القطع المرفوضة والتي لا تحقق المعايير التقنية من حيث العرض هي:

$$\mathbf{1 - 0,03924176 = 0,96075824 = 96,01\%}$$

التمرين السابع:

لقد أثبتت دراسة طبية أن نسبة الـ ***CHOLESTEROL*** في الدم على مجموعة من أشخاص اختيروا عشوائيا موزعة توزيعا طبيعيا حسب الجدول التالي :

نسبة CHOLESTEROL في الدم	نسبة الأشخاص
نسبة CHOLESTEROL أقل من 165 cg	%58
نسبة CHOLESTEROL محصورة بين 165cg - 180 cg	38 %
نسبة CHOLESTEROL أكثر من 180cg	4%

1 – أحسب القيمة المتوسطة μ والانحراف المعياري δ.

2 – إذا افترضنا أن الأشخاص الذين لديهم نسبة الـ **CHOLESTEROL** في الدم أكثر من **183cg** لابد إخضاعهم إلى معالجة طبية، فما هو عدد الأشخاص الذين سيعالجون في مجتمع موزع توزيعا طبيعيا يحتوي على **10000** شخص.

الحل:

1- لإيجاد قيمة التوقع الرياضي μ وقيمة الانحراف المعياري δ سوف نبحث عن قيم Z الموافقة للاحتمالات المختلفة والمعطاة في الجدول أعلاه حيث أنه:

$$P(X \le 165) = P\left(Z \le \frac{165 - \mu}{\delta}\right) = 0,58$$

عند البحث في جدول الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري سوف نجد قيمة الاحتمال الأقرب لـ **0,58** توافق **Z = 0,20** أي أنه:

$$\frac{165-\mu}{\delta}=0,20 \Rightarrow 0,2\delta+\mu=165$$

من جانب آخر لدينا:

$$P(X\geq 180)=P\left(Z\geq \frac{180-\mu}{\delta}\right)=0,04 \Rightarrow$$
$$P(X\leq 180)=P\left(Z\leq \frac{180-\mu}{\delta}\right)=0,96$$

وكذلك عند البحث في جدول الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري سوف نجد قيمة الاحتمال الأقرب لـ **0,96** توافق **Z = 1,75** أي أنه:

$$\frac{180-\mu}{\delta}=1,75 \Rightarrow 1,75\delta+\mu=180$$

ومن ثم نقوم بحل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases}1,75\delta+\mu=180\\ 0,2\delta+\mu=165\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu=163.0\\ \delta=9,67\end{cases}$$

2- لحساب نسبة الأشخاص الذين تفوق لديهم نسبة الكولسترول في الدم 183 سغ، نقوم بحساب الاحتمال التالي:

$$P(X\geq 183)=P\left(Z\geq \frac{183-163}{9,67}\right)$$
$$P(X\geq 183)=P(Z\geq 2,06)$$
$$P(X\geq 183)=1-P(Z\leq 2,06)$$
$$P(X\geq 183)=1-\Phi(2,06)$$
$$P(X\geq 183)=1-0,98030073$$
$$P(X\geq 183)=0,01969927=1,969\%$$

وبالتالي في المجتمع المتكون من **10.000** شخص فإننا سنجد **197** شخص سيخضعون لمعالجة طبية.

التمرين الثامن:

يتبع الطلب على سلعة معينة في مؤسسة ما قانون التوزيع الطبيعي، وله احتمال **0,1** أن يكون أقل من **15000** وحدة، واحتمال **0,1** أن يكون أكبر من **25000** وحدة.

1 – أوجد المميزات العددية لهذا التوزيع الطبيعي.

2 – إذا كان هامش الربح على التكاليف المتغيرة للوحدة يقدر بـ **10** وحدات نقدية، وكانت التكاليف الثابتة شهريا تقدر بـ **175000** وحدة نقدية، أوجد قانون التوزيع الذي تتبعه نتيجة النشاط شهريا، واستنتج احتمال أن نتعدى عتبة المردودية.

الحل:

1- لإيجاد قيمة التوقع الرياضي μ وقيمة الانحراف المعياري δ سوف نبحث عن قيم Z الموافقة للاحتمالات المختلفة والمعطاة أعلاه حيث أنه:

$$P(X \leq 15000) = P\left(Z \leq \frac{15000 - \mu}{\delta}\right) = 0,1$$

نلاحظ أن قيمة الاحتمال 0,1 هي قيمة أقل من 0,5 وبالتالي فإن القيمة الموافقة لهذا الاحتمال هي قيمة سالبة نرمز لها بالرمز $-Z_0$ أي أنه:

$$P(Z \leq -Z_0) = 0,1 \Rightarrow P(Z \geq Z_0) = 0,1$$
$$\Rightarrow\ P(Z \leq Z_0) = 1 - 0,1 = 0.9$$

عند البحث في جدول الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري سوف نجد قيمة الاحتمال الأقرب لـ 0,9 توافق Z = 1,28 أي أنه:

$$\frac{15000 - \mu}{\delta} = -1.28 \Rightarrow -1.28\delta + \mu = 15000$$

من جانب آخر لدينا:

$$P(X \geq 25000) = P\left(Z \geq \frac{25000 - \mu}{\delta}\right) = 0,1 \Rightarrow$$
$$P(X \leq 25000) = P\left(Z \leq \frac{25000 - \mu}{\delta}\right) = 0,9$$

وسنجد كذلك أن:

$$\frac{25000 - \mu}{\delta} = 1.28 \Rightarrow 1.28\delta + \mu = 25000$$

ومن ثم نقوم بحل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} -1.28\delta + \mu = 15000 \\ 1.28\delta + \mu = 25000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 20000 \\ \delta = 3906,25 \end{cases}$$

إن الوحدات المباعة Q تتبع التوزيع الطبيعي بتوقع رياضي $\mu = 20000$ وانحراف معياري $\delta = 3906,25$ ونكتب:

$$Q \sim \mathcal{N}(20000, (3906,25)^2)$$

إن هامش الربح على التكاليف المتغيرة MCV الوحدوي والمقدر بـ 10 وحدات نقدية عن الوحدة المباعة هو الآخر يتبع التوزيع الطبيعي ولكن بتوقع رياضي يساوي إلى:

$$\mu_{MCV} = 10\mu = 10 \times 20000 = 200000$$

وذلك انطلاقا من خصائص التوقع الرياضي حيث أن:

$$\mathrm{E(c.X)} = \mathrm{c.E(X)}$$

أما الانحراف المعياري للتوزيع الجديد فيساوي إلى:

$$\delta_{MCV} = 10\delta = 10 \times 3906,25 = 39062,5$$

وذلك انطلاقا من خصائص التباين الذي هو عبارة عن مربع الانحراف المعياري حيث أن:

$$V(c.X) = c^2V(X) \Longrightarrow \delta_{cX}^2 = c^2\delta_X^2 \Longrightarrow \delta_{cX} = c\delta_x$$

ومن ثم فإن الهامش على التكاليف المتغيرة **MCV** يتبع التوزيع الطبيعي ذا المميزات العددية التالية:

$$MCV \sim \mathcal{N}(200000, (39062,5)^2)$$

إن نتيجة النشاط تساوي إلى الهامش على التكاليف المتغيرة المحقق من الوحدات المباعة والمطروح منه قيمة التكاليف الثابتة CF، وهو الآخر يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع رياضي يساوي:

$$\mu_R = \mu_{MCV} - CF = 200000 - 175000 = 25000$$

وذلك انطلاقا من خصائص التوقع الرياضي حيث أن:

$$\mathrm{E(X + c) \; = \; c + E(X)}$$

أما الانحراف المعياري للتوزيع الذي نتبعه نتيجة النشاط فيساوي إلى:

$$\delta_R = \delta_{MCV} = 39062,5$$

وذلك انطلاقا من خصائص التباين الذي هو عبارة عن مربع الانحراف المعياري حيث أن:

$$V(c + X) = V(X) \Longrightarrow \delta_{(c+X)}^2 = \delta_X^2 \Longrightarrow \delta_{(c+X)} = \delta_x$$

وبالتالي فإن نتيجة النشاط تتبع التوزيع الطبيعي ذا المميزات التالية:

$$R \sim \mathcal{N}(25000, (39062,5)^2)$$

إن احتمال أن تتعدى هذه المؤسسة عتبة المردودية يساوي إلى احتمال أن يتعدى الهامش على التكاليف المتغيرة قيمة التكاليف الثابتة أي:

$$P(MCV \geq CF) = P(MCV \geq 175000) = P\left(Z \geq \frac{175000 - 200000}{39062,5}\right)$$

$$P(MCV \geq 175000) = P(Z \geq -0,64) = P(Z \leq 0,64)$$

$$P(MCV \geq 175000) = \Phi(0,64) = 0,73891370$$

كما يمكن الوصول لنفس النتيجة بحساب احتمال أن تكون نتيجة النشاط موجبة أي:

$$P(R \geq 0) == P\left(Z \geq \frac{0 - 25000}{39062,5}\right)$$

$$P(R \geq 0) = P(Z \geq -0,64) = P(Z \leq 0,64)$$

$$P(R \geq 0) = \Phi(0,64) = 0,73891370$$

ومنه فإن احتمال أن تتعدى هذه المؤسسة عتبة المردودية هو **73,89%**.