Université Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi Bordj Bou Arréridj
Faculté des mathématiques et de l'informatique
Département des mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme

MASTER

FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Sur les polynômes de Legendre et applications

Présenté par :
ALLALI Soumia

Sous la direction de :
Dr. MAADADI Asma

Soutenu le 21 Juin 2023, Devant le jury :

Dr. GUECHI Ahmed :	MCB	- Président
Dr. DEBBICHE Hanane :	MCB	- Examinateur

Année universitaire
2022/2023

Remerciments

Tout d'abord, je remercie Allah qui m'aide et m'a donné la patience et le courage durant ce

J'adre
qui j'ex
tout le long de mon travail. Je la remercie pour se
pour sa patience, pour se
remarque

J'ex
Guechi et Dr. H. Debbiche à la Faculté de
de Bordj Bou Arréridj, pour l'intérêt qu'il ont porté à notre travail en
acce

Un grand merci à Mr. N. Belkacem, Mr. A. Mani, Dr. S. Addoune, Dr. H. Adimi et Dr. R. Benterki pour avoir obtenu ce mémoire, merci pour leurs conseil

Je souhait adre
la Faculté de
mathématique
Bou Arréridj, aussi tous ceux qui, de prè
la réalisation de ce travail.

J'aimerais ex
tro
sujet. Chacun de ce

Dédicaces

Avec l'ex
ceux qui, quel
leur ex

A l'homme, mon précieux offre du Allah, qui doit ma vie, ma réussite tu as toujours été à me
travail traduit ma gratitude et mon affection et tout mon re
cher père MOUHAMED.

A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à me
heureuse, Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta pré
affronter le

A ma chére soeur Marwa et mon cher frère Abd Eldjallil, il
ce
Que Dieu le

A mon mignon petit frère Iyad qui sait toujours apporter joie et bonheur à toute la famille.

A me
longue et joyeuse vie.

A ma grand-mère Mbarka et mon grand-père Aissa, que Dieu ait pitié d'eux et fasse de leur maison un paradis.

Table des matières

Introduction générale **6**

1 Définitions et notions **8**
1.1 Espaces de Hilbert 8
1.2 Méthode de Frobenius 9
1.3 Rappel sur les polynômes orthogonaux 11

2 Polynômes de Legendre **15**
2.1 Équations de Legendre 15
2.2 Propriétés des polynômes de Legendre 20
2.2.1 Formule de Rodrigue 20
2.2.2 Fonction génératrice 21
2.2.3 Relation de récurrence 24
2.2.4 Orthogonalité des polynômes de Legendre 25
2.3 Polynômes de Legendre décalés 29
2.4 Quadrature de Gauss-Legendre 31

3 Application des polynômes de Legendre dans la méthode de décomposition d'Adomian **37**
3.1 Série d'Adomian 37
3.2 Méthode de décomposition d'Adomian 38
3.3 Méthode de décomposition d'Adomian modifiée 41

Conclusion **46**

Table des figures

1.1 Polynômes de Jacobi de degré 0 à 4 14

2.1 Polynômes de Legendre de degré 0 à 4 21
2.2 Polynômes de Legendre décalés de degré 0 à 4 30

3.1 Méthode de décomposition d'Adomian modifiée, Fonction $g(x)$ et fonction modifiée $g_m(x)$, Exemple 3.3 44
3.2 Méthode de décomposition d'Adomian modifiée, Solution exacte $u(x)$ et solution approchée $u_p(x)$, Exemple 3.3 44
3.3 Méthode de décomposition d'Adomian modifiée, Erreur absolue, Exemple 3.3 . . 44

Liste des tableaux

2.1 Quadrature de Gauss-Legendre $n = 2$, Exemple 2.12 34
2.2 Quadrature de Gauss-Legendre $n = 2$, Exemple 2.13 35
2.3 Points et poids d'intégration de quadrature de Gauss-Legendre 36

3.1 Méthode de décomposition d'Adomian modifiée, Erreur absolue, Exemple 3.3 . . 45

Introduction générale

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'étude des polynômes de Legendre et leurs propriétés principales et leurs applications pour résoudre les équations différentielles.

Les polynômes orthogonaux est une branche très vaste de mathématiques, de la physique théorique et de la physique mathématique. Ces polynômes sont un sujet d'étude depuis longtemps. Au début du XIXe siècle, plus précisément en 1939, les polynômes orthogonaux ont reçu leur premier étude détaillé par [12]. Les suites de polynômes orthogonaux sont apparues comme solutions des équations de la physique mathématiques, particulièrement les équations aux dérivées partielles. Parmi les polynômes orthogonaux classiques les plus importants, nous mentionnons les polynômes de Jacobi, Tchebyshev, Legendre, Hermite, etc.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'exemple le plus simple de polynômes orthogonaux qui le polynômes de Legendre. Ces dernier ont été découvert par Adrien-Marie Legendre [1] en 1782. Ils sont des cas particuliers de polynômes de Jacobi. Les polynômes de Legendre sont des solutions polynomiales $p_n(x)$ sur l'intervalle $[-1,1]$ de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0.$$

On définit ainsi le polynôme de Legendre p_n (pour tout entier naturel n) :

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dp_n(x)}{dx}\right]+n(n+1)p_n(x)=0,\ p_n(1)=1$$

Les polynômes de Legendre ont une grande importance en analyse numérique et en physique mathématique, ils ont été utilisés et étudiés beaucoup plus ces derniers années à cause de leur importance dans les applications, par exemple pour la décomposition d'une fonction en série de polynômes de Legendre.

Après une introduction générale, la suite de ce mémoire est donc organisée en trois chapitres.

Dans le *premier* chapitre, on donne quelques définitions et notions de base dont nous aurons besoin tout au cours dans notre mémoire.

Le *deuxième* chapitre est consacré à l'étude des polynômes de Legendre. On introduis d'abord l'équation différentielle de Legendre. Puis, on traite quelques propriétés principales de ces polynômes notamment la formule de Rodrigue, la fonction génératrice, la relation de récurrence

1. Adrien-Marie Legendre $(1752-1833$ Paris-France)

et l'orthogonalité. Ainsi, on présente les polynômes de Legendre décalés. En fin, on donne le principe de la méthode de quadrature de Gausse-Legendre.

L'application des polynômes de Legendre font l'objet du *dernier* chapitre. Le but de ce chapitre est de décrire la méthode de décomposition d'Adomian modifiée en utilisant ces polynômes pour résoudre les équations différentielles. La méthode de décomposition d'Adomian a été introduite par George Adomian [2] au début des années 1980 pour résoudre des équations fonctionnelles linéaires et non linéaires de différents types (algébriques, différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, intégro-différentielles,etc) [2]. Elle est basée sur la décomposition d'une fonction en une somme infinie de fonctions définies par une relation récurrente. Le terme non linéaire est écrit sous forme d'une somme infinie de polynômes spéciaux appelés polynômes d'Adomian. Si la série converge et le calcul de la somme est possible, la méthode conduit à une expression analytique de la solution. Nous allons traiter quelques exemples pour valider cette méthode.

2. George Adomian (1922 – 1996 New York, États-Unis)

Chapitre 1 Définitions et notions

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et notions de base dont nous aurons besoin tout au cours dans notre mémoire.

1.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.1. (Produit scalaire)
Soit $\mathbb{H}$ un espace vectoriel. Un produit scalaire $\langle x,y\rangle$ est une forme bilinéaire de $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), symétrique et définie positive.

Exemple 1.1. *L'application*

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

En effet, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, *on a*

- $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)z_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \beta\sum_{i=1}^{n} y_i z_i.$
- $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y,x\rangle.$
- $\langle x,x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0.$
- $\langle x,x\rangle = 0$ *implique que* $x_i = 0$ *pour tout* i, *alors* $x = 0$.

Définition 1.2. (Espace complet)
On dit que $\mathbb{H}$ est un espace complet si toute suite de Cauchy de $\mathbb{H}$ converge dans $\mathbb{H}$.

Définition 1.3. (Espace de Hilbert)
Un espace de Hilbert est un espace vectoriel $\mathbb{H}$ muni d'un produit scalaire $\langle x,y\rangle$ et qui est complet pour la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Exemple 1.2.

- $\mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire* $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *où* $x=(x_1,\cdots,x_n)$ *et* $y=(y_1,\cdots,y_n)$.
- $\mathbb{C}^n$ *muni du produit scalaire* $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$.
- *On note* $\mathbb{L}^2(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions mesurables de carré intégrables sur* Ω. *Une fonction* f *définie sur* Ω *à valeurs complexes est dite de carré intégrable si* $\int_\Omega |f(t)|^2 dt < \infty$. *On définie alors la norme sur* $\mathbb{L}^2(\Omega)$ *par*

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2 Méthode de Frobenius

Définition 1.4. (Équation différentielle)
Une équation différentielle est une équation tel que les inconnues sont des fonctions, elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leur dérivées successive.

— L'ordre d'une équation différentielle ordinaire, est l'ordre de la dérivée le plus élevée dans cette équation.
— On dit qu'une équation différentielle est linéaire si elle consiste en une somme de termes linéaires, toutes les autres équations différentielles sont dites non linéaires.

Solutions en série de Frobenius

Théorème 1.3. [13]
Soit l'équation différentielle du type de Fuchs

$$y'' + \frac{a(x)}{x}y' + \frac{b(x)}{x^2}y = 0, \tag{1.1}$$

où les fonctions

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots, \\ b(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots. \end{aligned}$$

Sont analytiques sur $-R < x < R$. *Si* r_1 *et* r_2 $(r_1 \geq r_2)$ *sont les racines de l'équation déterminante appelée aussi équation indicielle*

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0. \tag{1.2}$$

Alors l'équation (1.1) admet toujours une solution de la forme

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{m=0}^{+\infty} c_m x^m = x^{r_1}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots), \quad c_0 \neq 0. \tag{1.3}$$

Le rayon de convergence de l'équation (1.3) est au moins égal à R.
La forme de la $2^{\text{ème}}$ *solution dépend de la différence* $r_1 - r_2$. *On distingue* 3 *cas.*
Cas 1 *: Si* $0 < r_1 - r_2 \neq$ *entier, alors*

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{m=0}^{+\infty} c_m^* x^m, \quad c_0^* \neq 0. \tag{1.4}$$

Cas 2 *: Si $r_1 = r_2$, alors*

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + x^{r_2}\sum_{m=1}^{+\infty} A_m x^m, \quad x > 0, \quad A_1 \neq 0.$$

Cas 3 *: Si $0 < r_1 - r_2 = p$, un entier positif, alors*

$$y_2(x) = k y_1(x)\ln(x) + x^{r_2}\sum_{m=0}^{+\infty} C_m x^m, \quad x > 0, \quad C_0 \neq 0.$$

La solution dans le 1^{er} cas et dans le $3^{\text{ème}}$ cas, si le terme logarithmique est absent $(k = 0)$, s'obtient par la méthode de Frobenius proprement dite. La solution dans les cas 2 et 3, où apparait le logarithme, s'obtient par la méthode des séries généralisées.

Définition 1.5. (Point singulier régulier)
On dit que le point singulier 0 est régulier si les fonctions

$$x\left(\frac{a(x)}{x}\right) = a(x), \quad x^2\left(\frac{b(x)}{x^2}\right) = b(x)$$

sont analytiques au voisinage de 0, donc, l'équation (1.1) admet le point singulier régulier $x = 0$.

Détermination des coefficients de la solution par récurrence

Posons

$$y(x) = c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + c_2 x^{r+2} + \cdots.$$

Dans

$$x^2 y'' + x a(x) y' + b(x) y = 0.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl}
x^2 y'' & = & r(r-1)c_0 x^r + (r+1)r c_1 x^{r+1} + (r+2)(r+1)c_2 x^{r+2} + \cdots, \\
x a(x) y' & = & [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots][r c_0 x^r + (r+1)c_1 x^{r+1} + \cdots], \\
b(x) y & = & [b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots][c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + \cdots], \\
0 & = & 0, \quad \text{pour tout x.}
\end{array}$$

Le coefficient de x^r

$$r(r-1)c_0 + a_0 r c_0 + b_0 c_0 = 0.$$

D'où

$$[r(r-1) + a_0 r + b_0]c_0 = 0.$$

Si $c_0 \neq 0$, r est solution de l'équation indicielle.

$$r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0.$$

Alors c_0 est indéterminé.
Le coefficient de x^{r+1} on a l'équation

$$(r+1)r c_1 + a_1 r c_0 + a_0(r+1)c_1 + b_1 c_0 + b_0 c_1 = 0.$$

Qu'on peut résoudre pour c_1 en fonction de c_0.

$$[(r+1)r+a_0(r+1)+b_0]c_1 = -(a_1r+b_1)c_0.$$

Le coefficient de x^{r+2} on a l'équation

$$(r+2)(r+1)c_2+a_0(r+2)c_2+a_1(r+1)c_1+a_2rc_0+b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0=0.$$

Qu'on peut résoudre pour c_2 en fonction de c_0 et c_1.

$$[(r+2)(r+1)+a_0(r+2)+b_0]c_2 = -[a_1(r+1)+b_1]c_1-[a_2r+b_2]c_0.$$

On trouve ainsi par récurrence le coefficient c_s de x^{s+r} en fonction de $c_0,\cdots,c_{s-1}$.

Remararque 1.4. *Si r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation indicielle (1.2), alors les coefficients c_0 et c_0^*, A_1 et C_0 des solutions non nulles $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont non nuls.*

1.3 Rappel sur les polynômes orthogonaux

Espace des polynômes

L'étude des polynômes orthogonaux à une variable nécessite de travailler dans l'espace vectoriel des polynômes à une variable réelle $\mathbb{R}[x]$. Un polynôme $P_n(x)$ est de degré n s'il s'écrit de la forme

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,$$

avec $a_n\neq 0$.

Polynômes orthogonaux

Soient $I=]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $w:I\longrightarrow\mathbb{R}^+$ une fonction poids qui est continue strictement positive telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_I |x|^n w(x)\,dx<+\infty.$$

On définie l'espace de Hilbert $\mathbb{E}=L^2_w(I)$ par

$$\mathbb{E}=\{f|\int_I f^2(x)w(x)\,dx<+\infty\}.$$

L'espace $\mathbb{E}$ est muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle_w=\int_I f(x)g(x)w(x)\,dx.$$

Les polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $w(x)$ sont les polynômes P_n de degré n vérifiant la relation d'orthogonalité sur $\mathbb{E}$

$$\langle P_n,P_m\rangle_w=\int_I P_n(x)P_m(x)w(x)\,dx=0,\quad n\neq m,\quad n,m=0,1,2,\cdots.$$

Polynômes de Jacobi

Soit l'espace de Hilbert $L^2_{w^{(\alpha,\beta)}}([-1,1])$ avec la fonction poids $w^{(\alpha,\beta)}(x)$

$$w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.$$

Pour que la fonction poids $w^{(\alpha,\beta)}$ soit intégrable sur l'intervalle $[-1,1]$, on impose la condition suivante aux paramètres α et β [12]

$$\alpha, \beta > -1.$$

Définition 1.6. [16]
Les polynômes de Jacobi est les plus général des polynômes orthogonaux classique notés par $J_n^{(\alpha,\beta)}$. Il sont des solutions de l'équation différentielle homogène du second ordre

$$(1-x^2)y'' + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0,$$

avec n est le degré du polynôme.

Les polynômes de Jacobi sont définis explicitement par ces trois formules :

1. Formule de Rodrigues

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right).$$

2. Formule analytique

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+\alpha}{i}\binom{n+\beta}{n-i}(x-1)^{n-i}(1+x)^i.$$

3. Relation de récurrence

$$\begin{aligned}
J_0^{(\alpha,\beta)} &= 1,\\
J_1^{(\alpha,\beta)} &= \frac{\alpha+\beta+2}{2}x + \frac{\alpha-\beta}{2},\\
J_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) &= (a_n x + b_n)J_n^{(\alpha,\beta)}(x) - c_n J_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)},\\
b_n &= \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)},\\
c_n &= \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

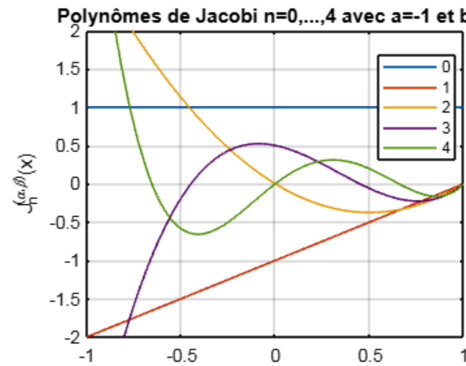
Les premiers de ces polynômes :

$$\begin{aligned}
J_0^{(\alpha,\beta)}(x) &= 1,\\
J_1^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2}[2(\alpha+1) + (\alpha+\beta+2)(x-1)],\\
J_2^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{8}[4(\alpha+1)(\alpha+2) + 4(\alpha+\beta+3)(\alpha+2)(x-1) + (\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)(x-1)^2].
\end{aligned}$$

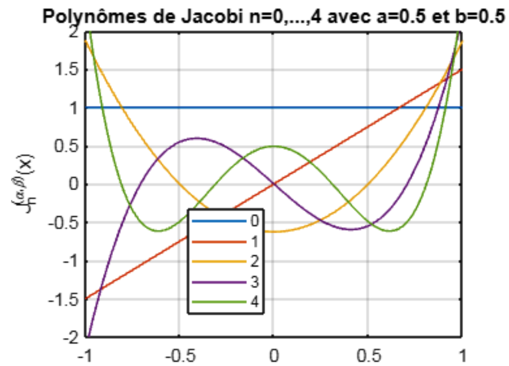
Les polynômes orthogonaux standard sont des cas particuliers des polynômes de Jacobi. Les cas les plus connues sont les polynômes de Gegenbauer (ou ultrasphérique), obtenus en posant $\alpha = \beta$. Les polynômes de Legendre P_n en posant $\alpha = \beta = 0$ et tous les types de polynômes de Tchebyshev T_n^i avec $i = 1, 2, 3$ et 4

$$\begin{cases} T_n^1(x) & = J_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}, \\ T_n^2(x) & = J_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}, \\ T_n^3(x) & = J_n^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}, \\ T_n^4(x) & = J_n^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}. \end{cases}$$

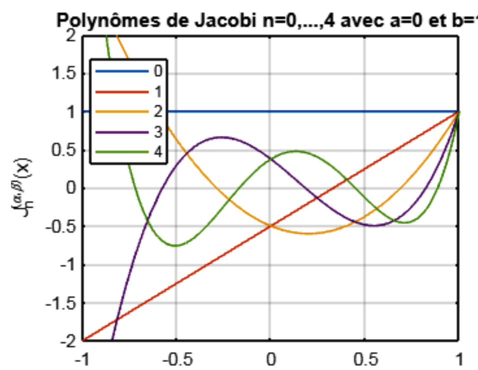
Les figures suivantes illustrent la représentation géométriques de quelques types de polynômes de Jacobi :



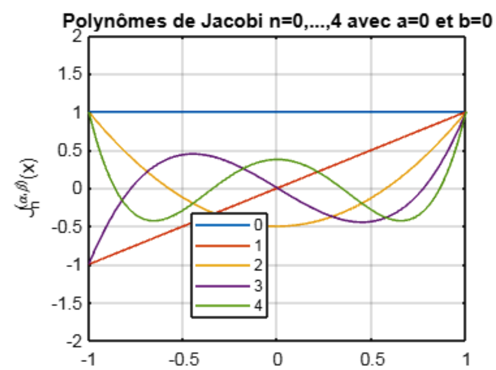
(a)



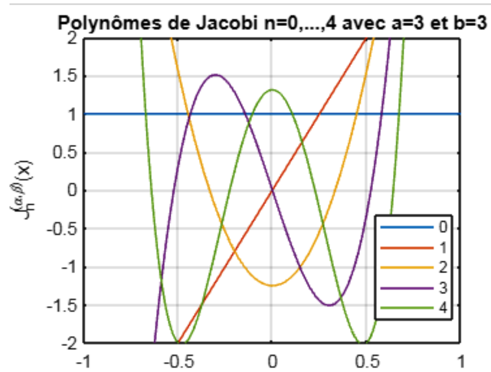
(b)



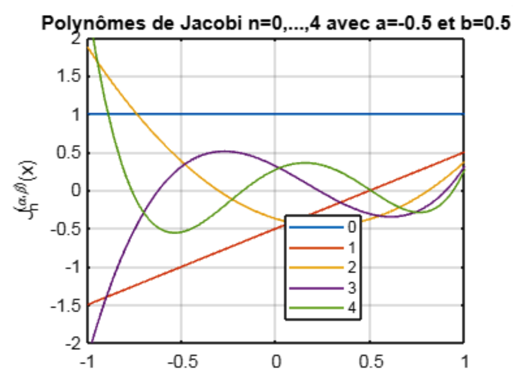
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE 1.1 – Polynômes de Jacobi de degré 0 à 4

Chapitre 2 Polynômes de Legendre

Le second chapitre introduit les polynômes de Legendre. D'abord, on expose l'équation différentielle de Legendre. Ensuite, on présente les définitions usuelles pour ces polynômes et on cite quelques propriétés classiques. On décrit enfin la quadrature de Gauss-Legendre.

2.1 Équations de Legendre

Les polynômes de Legendre sont des solutions polynomiales sur l'intervalle $[-1,1]$, de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients variables appelée équation différentielle de Legendre. Cette équation est donnée par

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0, \quad n\in\mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Avant de chercher le solution de l'équation (2.1), cherchons d'abord le domaine de convergence. Pour cela, on utilise le théorème suivant : Si on a une équation différentielle de la forme.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-xq(x)\frac{dy}{dx}+p(x)y=0, \tag{2.2}$$

et si $q(x)$ et $p(x)$ peuvent être développées sous les formes suivantes

$$q(x)=\sum_{i=0}^{\infty}q_i x^i, \quad p(x)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i x^i.$$

Donc, le domaine de convergence de la solution de l'équation (2.2) est la même que le domaine de convergence de $q(x)$ et $p(x)$.

Pour déterminer les deux fonctions $q(x)$ et $p(x)$, on écrit l'équation (2.1) sous la forme

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{2x^2}{(1-x^2)}\frac{dy}{dx}+\frac{n(n+1)x^2}{(1-x^2)}y=0. \tag{2.3}$$

En comparant l'équation (2.3) avec l'équation (2.2), on déduit que

$$q(x)=\frac{2x^2}{(1-x^2)}, \quad p(x)=\frac{n(n+1)x^2}{(1-x^2)}.$$

Le développement en série entière des fonctions $q(x)$ et $p(x)$ est

$$\begin{aligned} q(x) &= 2x^2 \frac{1}{(1-x^2)} = 2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}, \\ p(x) &= n(n+1)x^2 \frac{1}{(1-x^2)} = n(n+1)x^2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}. \end{aligned}$$

Donc, les deux fonctions $q(x)$ et $p(x)$ sont convergentes seulement dans l'intervalle $]-1,1[$.

L'équation (2.1) se résout par la méthode de Frobenius qui consiste à chercher des solutions sous la forme d'un série entière

$$y(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots. \tag{2.4}$$

Les seuls points singulières de cette équation sont 1 et -1. Par conséquent

$$y'(x) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i\right)' = \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i x^{i-1}, \tag{2.5}$$

et

$$y'' = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i\right)'' = \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1) a_i x^{i-2}. \tag{2.6}$$

En substituant les expressions (2.4), (2.5) et (2.6) dans l'équation (2.1), on trouve

$$(1-x^2) \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1) a_i x^{i-2} - 2x \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i x^{i-1} + n(n+1) \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i = 0. \tag{2.7}$$

Par des changements d'indice, on se ramène à $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i x^i$, où la suite (b_i) s'écrit en fonction de la suite (a_i). On a

$$x \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} i a_i x^i, \tag{2.8}$$

et

$$\begin{aligned} (1-x^2) \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1) a_i x^{i-2} &= \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1) a_i x^{i-2} - x^2 \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1) a_i x^{i-2} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (i+2)(i+1) a_{i+2} x^i - \sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1) a_i x^i. \end{aligned} \tag{2.9}$$

En substituant les expressions (2.8) et (2.9) dans l'équation (2.7), on obtient

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (i+2)(i+1) a_{i+2} x^i - \sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1) a_i x^i - 2 \sum_{i=0}^{+\infty} i a_i x^i + n(n+1) \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \Big[(i+2)(i+1) a_{i+2} + [n(n+1) - i(i-1) - 2i]\, a_i\Big] x^i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\Big[(i+2)(i+1)a_{i+2}+[n(n+1)-i(i+1)]\,a_i\Big]x^i=0.$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty}b_ix^i=0\Longrightarrow b_i=0,$$

telle que

$$b_i=(i+2)(i+1)a_{i+2}+[n(n+1)-i(i+1)]a_i=0.$$

On a donc la relation de récurrence

$$\begin{aligned}a_{i+2}&=a_i\frac{i(i+1)-n(n+1)}{(i+1)(i+2)}\\&=a_i\frac{(i-n)(n+i+1)}{(i+1)(i+2)}.\end{aligned}$$

On voit qu'il y a deux séries de solutions, une série contient seulement des puissances paires de x, l'autre est une série de puissance impaire. Pour déduire la forme du terme général a_i en fonction de a_0 (ou a_1) et i, on considère quelques cas particuliers

$$\begin{aligned}a_2&=-a_0\frac{n(n+1)}{1\cdot 2},\\a_3&=a_1\frac{(1-n)(n+2)}{2\cdot 3},\\a_4&=-a_2\frac{(n-2)(n+3)}{3\cdot 4}\\&=a_0\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\\a_5&=-a_3\frac{(n-3)(n+4)}{4\cdot 5}\\&=a_1\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.\end{aligned}$$

A partir des équations précédentes, on peut déduire le terme général qui est donné par.

$$\begin{aligned}a_{2i}&=\frac{(-1)^ia_0}{(2i)!}n(n-2)(n-4)\cdots(n-2i+2)(n+1)(n+3)\cdots(n+2i-1),\\a_{2i+1}&=\frac{(-1)^ia_1}{(2i+1)!}(n-1)(n-3)\cdots(n-2i+1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2i).\end{aligned}$$

Donc, la solution générale peut être écrite sous la forme.

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} a_{2i} x^{2i} + \sum_{i=0}^{+\infty} a_{2i+1} x^{2i+1} \\
&= a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} a_{2i} x^{2i} + a_1 x + \sum_{i=1}^{+\infty} a_{2i+1} x^{2i+1} \\
&= a_0 \left\{ 1 + (-1)^i \frac{n(n-2)(n-4)\cdots(n-2i+2)(n+1)(n+3)\cdots(n+2i-1)}{(2i)!} x^{2i} \right\} \\
&\quad + a_1 \left\{ x + \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i \frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2i+1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2i)}{(2i+1)!} x^{2i+1} \right\} \\
&= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x).
\end{aligned}$$

Nous soulignons que cette solution est valable dans l'intervalle $-1 < x < 1$. Afin d'étendre la solution aux point $x = -1$ et $x = 1$, nous utilisons l'observation suivante

- Si n est pair, i.e., $n = 2i$, on a

$$a_2 \neq 0, a_4 \neq 0, \cdots, a_{2i} \neq 0,$$

$$a_{2i+2} = a_{2i+4} = \cdots = 0.$$

- Si n est impair, i.e., $n = 2i+1$

$$a_3 \neq 0, a_5 \neq 0, \cdots, a_{2i+1} \neq 0,$$

$$a_{2i+3} = a_{2i+5} = \cdots = 0.$$

Donc pour $n = 2i$, le polynôme $y_2(x)$ est nul et $y_1(x)$ devient fini pour tout x à l'intérieur de l'intervalle $[-1,1]$ et on a l'inverse pour $n = 2i+1$ où le polynôme $y_1(x)$ est nul tandis que le polynôme $y_2(x)$ devient fini pour tout x à l'intérieur de l'intervalle $[-1,1]$. La solution de l'équation de Legendre dans l'intervalle $[-1,1]$ est donc donnée soit par $y_1(x)$ (dans le cas où n est pair) ou par $y_2(x)$ (si n est impair). $y(x)$ peut être écrit sous la forme générale

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} + \cdots + \begin{cases} a_0, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ a_1 x, & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} a_{n-2k} x^{n-2k}, \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

où

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

a_{n-2k} peut être déduit de la forme générale de a_i. On a

$$a_i = -a_{i+2} \frac{(i+2)(i+1)}{(n-i)(n+i+1)}. \qquad (2.11)$$

En remplaçant i par $n-2$ dans l'équation (2.11), on trouve

$$a_{n-2} = -a_n \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}.$$

Pour $i = n-4$, on obtient

$$\begin{aligned} a_{n-4} &= -a_{n-2}\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} \\ &= a_n \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}. \end{aligned}$$

A partir des équations de a_{n-2} et a_{n-4}, on peut déduire la forme générale

$$a_{n-2k} = (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2k+1)}{2\cdot 4\cdots(2k)(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)}.$$

En remplace a_{n-2k} dans l'équation (2.10), on obtient

$$y(x) = a_n \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2k+1)}{2\cdot 4\cdots(2k)(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)} x^{n-2k}.$$

On peut simplifie l'expression de $y(x)$ en écrivant autrement le numérateur et le dénominateur

$$\begin{aligned} n(n-1)\cdots(n-2k+1) &= n(n-1)\cdots(n-2k+1)\frac{(n-2k)!}{(n-2k)!} = \frac{n!}{(n-2k)!}, \\ 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k &= (2\cdot 1)(2\cdot 2)(2\cdot 3)\cdots(2\cdot k) = 2^k k!. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} (2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1) &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)(2n-2k)!}{2n(2n-2)\cdots(2n-2k+2)(2n-2k)!} \\ &= \frac{(2n)!}{2^k n(n-1)\cdots(n-k+1)(2n-2k)!} \\ &= \frac{(2n)!(n-k)!}{2^k n!(2n-2k)!}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y(x) &= a_1 \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!}\frac{1}{2^k k!}\frac{2^k n!(2n-2k)!}{(2n)!(n-k)!} x^{n-2k} \\ &= a_1 \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(n!)^2(2n-2k)!}{k!(n-2k)!(2n)!(n-k)!} x^{n-2k}. \end{aligned}$$

Choisissant a_1 d'être

$$a_1 = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

On obtient le résultat final pour la solution de l'équation de Legendre (2.1)

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad -1 \le x \le 1.$$

2.2 Propriétés des polynômes de Legendre

2.2.1 Formule de Rodrigue

Proposition 2.1. [9]
La formule de Rodrigue est donnée par

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{2.12}$$

Preuve. Si $k \leq n$, on a

$$\frac{d^k}{dx^k} x^n = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}(-1)^k x^{2n-2k}.$$

Donc

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}(-1)^k \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k}.$$

Mais

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2(n-k)} = 0 \quad \text{ si } 2(n-k) < n, \text{ i.e., si } k > \frac{n}{2}.$$

On peut donc remplacer $\sum\limits_{k=0}^{n}$ par $\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}$.
Si $k \leq \frac{n}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} x^{2(n-k)} &= [2(n-k)][2(n-k)-1][2(n-k)-2]\cdots[2(n-k)-n+1]x^{2(n-k)-n} \\ &= \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n n!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \\ &= p_n(x). \end{aligned}$$

■

Les premiers polynômes de Legendre sont

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 1,\\
p_1(x) &= x,\\
p_2(x) &= \frac{1}{2}\Big(3x^2-1\Big),\\
p_3(x) &= \frac{1}{2}\Big(5x^3-3x\Big),\\
p_4(x) &= \frac{1}{8}\Big(35x^4-30x^2+3\Big),\\
p_5(x) &= \frac{1}{8}\Big(63x^5-70x^3+15x\Big).
\end{aligned}$$

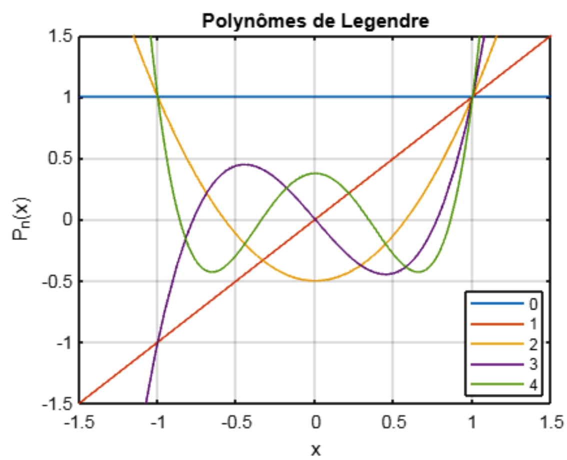


FIGURE 2.1 – Polynômes de Legendre de degré 0 à 4

Exemple 2.2. *On détermine le polynôme $p_2(x)$ à partir de la formule de Rodrigue*

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}(x^4-2x^2+1)\\
&= \frac{1}{8}\frac{d}{dx}(4x^3-4x) = \frac{1}{8}(12x^2-4)\\
&= \frac{1}{2}(3x^2-1).
\end{aligned}$$

2.2.2 Fonction génératrice

Proposition 2.3. [9]
La fonction génératrice des polynômes de Legendre est donnée par

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)t^n, \quad |x| \leq 1,\ |t| < 1. \tag{2.13}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(1-(2xt-t^2)\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= (1-u)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Avec $u = 2xt - t^2 = t(2x-t)$.
La formule du binôme de Newton négatif est donnée par

$$(1-u)^{-n} = 1 + nu + \frac{n(n+1)}{2!}u^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}u^3 + \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}{n!}u^n + \cdots.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(1-u)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}u^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}u^3 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{(2n-1)}{2})}{n!}u^n + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}u^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}u^3 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}u^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}u^n. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de l'équation (2.14) par $(2^n n!)$, on obtient

$$\begin{aligned}
(1-u)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!} \times \frac{2^n n!}{2^n n!} \times u^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n)}{2^n n! \times 2^n n!}u^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}u^n.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left(1-(2xt-t^2)\right)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(2xt-t^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n(2x-t)^n. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient

$$(2x-t)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(2x)^{n-k}(-t)^k. \qquad (2.16)$$

En remplaçant (2.16) dans l'équation (2.15), on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}(2x)^{n-k}(t)^{n+k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(2n)!}{2^{n+k}k!(n-k)!n!}x^{n-k}t^{n+k}. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

On pose $m = n+k \Longleftrightarrow n = m-k$ si $k=0$ alors $m=n$. Le série dans l'expression (2.17) est donnée à partir de $k=0$ par

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2m-2k)}{2^m k!(m-k)!(m-2k)!}x^{m-2k}t^m.$$

- Si $m-2k<0$ alors $(m-2k)! = \infty$,
- Si $m-2k \geq 0$ alors $(m-2k)! \neq \infty$.

$$\begin{aligned} m-2k\geq 0 &\Longleftrightarrow k\leq \frac{m}{2} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} k=0,1,2,\cdots,\frac{m}{2}, & \text{si } m \text{ est pair,} \\ k=0,1,2,\cdots,\frac{m-1}{2}, & \text{si } m \text{ est impair.}\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]}\frac{(-1)^k(2m-2k)!}{2^m k!(m-k)!(m-2k)!}x^{m-2k}t^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}p_m(x)t^m. \end{aligned}$$

■

Exemple 2.4. *On détermine $p_n(0)$ en utilisant la fonction génératrice. On pose $x=0$ dans l'équation (2.13), on obtient*

$$\begin{aligned} G(0,t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}p_n(0)t^n \\ &= p_0(0)+p_1(0)t+p_2(0)t^2+p_3(0)t^3+\cdots. \end{aligned}$$

Et comme on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n \\ &= 1-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{8}t^4+\cdots. \end{aligned}$$

Alors

$$p_n(0) = \begin{cases} 0, & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, & \textit{si } n \textit{ est pair.}\end{cases}$$

Exemple 2.5. *On détermine $p_n(-1)$ en utilisant la fonction génératrice. On pose $x=-1$ dans l'équation (2.13), on obtient*

$$\begin{aligned} G(-1,t) &= \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{1+t} \\ &= 1-t+t^2-t^3+t^4+\cdots. \end{aligned}$$

Donc, $p_n(-1) = (-1)^n$.

2.2.3 Relation de récurrence

Proposition 2.6. [8]
Les polynômes de la Legendre satisfont la relation de récurrence suivante

$$(n+1)p_{n+1}(x) = (2n+1)xp_n(x) - np_{n-1}(x). \tag{2.18}$$

Preuve. On a

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)t^n. \tag{2.19}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (2.19) par rapport à t, on obtient

$$-\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)nt^{n-1}. \tag{2.20}$$

En multipliant les deux côtés de l'équation (2.20) par $(1-2xt+t^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(-2x+2t)(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}+1} &= (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)nt^{n-1}, \\ (x-t)(1-2x+t^2)^{-\frac{1}{2}} &= (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)nt^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

En substituant l'équation (2.19) dans l'équation précédente (2.21), on obtient

$$\begin{aligned} (x-t)\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)t^n &= (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{+\infty} np_n(x)t^{n-1}, \\ x\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)t^{n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} np_n(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{+\infty} np_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} np_n(x)t^{n+1}. \end{aligned}$$

Par les changements d'indice suivants

$$\begin{aligned} p_n(x)t^{n+1} &= p_{n-1}(x)t^n, \\ np_n(x)t^{n-1} &= (n+1)p_{n+1}(x)t^n, \\ np_n(x)t^{n+1} &= (n-1)p_{n-1}(x)t^n, \end{aligned}$$

alors, on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big[xp_n(x) - p_{n-1}(x)\Big]t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[(n+1)p_{n+1}(x) - 2xnp_n(x) + (n-1)p_{n-1}(x)\Big]t^n.$$

Ce qui implique

$$xp_n(x) - p_{n-1}(x) = (n+1)p_{n+1}(x) - 2xnp_n(x) + (n-1)p_{n-1}(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} (n+1)p_{n+1}(x) - 2xnp_n(x) + (n-1)p_{n-1}(x) - xp_n(x) + p_{n-1}(x) &= 0, \\ (n+1)p_{n+1}(x) - (2n+1)xp_n(x) + np_{n-1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$(n+1)p_{n+1}(x) = (2n+1)xp_n(x) - np_{n-1}(x).$$

■

Exemple 2.7. *En utilisant la relation de récurrence pour déterminer $p_2(x)$ et $p_3(x)$ tels que $p_0(x)=1$ et $p_1(x)=x$.*
On prend $n=1$ dans la formule (2.18), on obtient

$$2p_2(x) = 3xp_1(x) - p_0(x) = 3x^2 - 1.$$

Donc, $p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$.
On prend $n=2$, on trouve

$$3p_3(x) = 5xp_2(x) - 2p_1(x) = \frac{5}{2}x(3x^2-1) - 2x = \frac{1}{2}(15x^3 - 9x).$$

Donc, $p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2-3x)$.

2.2.4 Orthogonalité des polynômes de Legendre

Théorème 2.8. [9]
Les polynômes de Legendre sont orthogonaux sur l'intervalle $[-1,1]$ avec un poids uniforme. Si $m,n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\langle p_m(x), p_n(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx = \begin{cases} 0, & si\ m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & si\ m = n. \end{cases}$$

Preuve.

1. Si $m \neq n$.
   Considérons les équations de Legendre

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + m(m+1)y = 0,\ m \in \mathbb{R}, \tag{2.22}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0,\ n \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

   Celles-ci sont respectivement satisfaites par $p_m(x)$ et $p_n(x)$

$$(1-x^2)p_m''(x) - 2xp_m'(x) + m(m+1)p_m(x) = 0, \tag{2.24}$$
$$(1-x^2)p_n''(x) - 2xp_n'(x) + n(n+1)p_n(x) = 0. \tag{2.25}$$

   En multipliant l'équation (2.24) par $p_n(x)$ et l'équation (2.25) par $p_m(x)$ et on soustrait les deux équations, on obtient

$$(1-x^2)\left[p_n(x)p_m''(x) - p_m(x)p_n''(x)\right] - 2x\left[p_n(x)p_m'(x) - p_m(x)p_n'(x)\right]$$
$$+\left[m(m+1) - n(n+1)\right]p_m(x)p_n(x) = 0,$$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}\left[p_n(x)p_m'(x) - p_n'(x)p_m(x)\right] - 2x\left[p_n(x)p_m'(x) - p_n'(x)p_m(x)\right]$$
$$+\left[(m^2-n^2) - (m-n)\right]p_m(x)p_n(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\left[p_n(x)p_m'(x) - p_n'(x)p_m(x)\right] = (n-m)[n+m+1]p_m(x)p_n(x).$$

En intégrant les deux côtés par rapport à x entre -1 et 1, on obtient

$$\begin{aligned}\left[(1-x^2)(p_n(x)p'_m(x)-p'_n(x)p_m(x))\right]_{-1}^{1} &= \int_{-1}^{1}(n-m)(m+n+1)p_m(x)p_n(x)dx,\\ 0 &= (n-m)(m+n+1)\int_{-1}^{1}p_m(x)p_n(x)dx.\end{aligned}$$

Comme $m \neq n$, alors $\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx = 0$.

2. Si $m = n$.
   En utilisant la fonction génératrice, on a

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)t^n, \tag{2.26}$$

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{+\infty} p_m(x)t^m. \tag{2.27}$$

En multipliant l'équation (2.26) par l'équation (2.27), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-2xt+t^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)t^n \sum_{m=0}^{+\infty} p_m(x)t^m\\ &= \sum_{n,m=0}^{+\infty} p_n(x)p_m(x)t^{n+m}. \end{aligned}\tag{2.28}$$

En intégrant les deux côtés de l'équation (2.28) par rapport à x de -1 à 1, on obtient

$$\sum_{n,m=0}^{+\infty}\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)t^{n+m}dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{1-2xt+t^2}dx.$$

On a $n = m$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-1}^{1} t^{2n}[p_n(x)]^2dx &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2-2xt}dx\\ &= \left[\frac{1}{-2t}\ln(1+t^2-2xt)\right]_{-1}^{1}\\ &= \frac{1}{-2t}\ln(1+t^2-2t) - \frac{1}{-2t}\ln(1+t^2+2t)\\ &= -\frac{1}{2t}\left[\ln(1-t)^2 - \ln(1+t)^2\right]\\ &= -\frac{1}{2t}2\left[\ln(1-t)-\ln(1+t)\right]\\ &= \frac{1}{t}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right].\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-1}^{1} t^{2n}[p_n(x)]^2 dx &= \frac{1}{t}\left[\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots\right)-\left(-t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+\cdots\right)\right]\\ &= \frac{2}{t}\left[t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\cdots\right]\\ &= 2\left[1+\frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{5}+\cdots+\frac{t^{2n}}{2n+1}+\cdots\right]\\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}.\end{aligned}$$

Donc, $\|p_n(x)\|_2^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

■

Exemple 2.9. *Dans cet exemple, on calcule l'intégral suivant*

$$\int_{-1}^{1} xp_n(x)p_{n-1}(x)\,dx = \frac{2n}{4n^2-1}.$$

En utilisant la relation de récurrence $xp_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}p_{n+1}(x)+\frac{n}{2n+1}p_{n-1}(x)$*, on obtient*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} xp_n(x)p_{n-1}(x)\,dx &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{n+1}{2n+1}p_{n+1}(x)+\frac{n}{2n+1}p_{n-1}(x)\right]p_{n-1}(x)\,dx\\ &= \frac{n+1}{2n+1}\int_{-1}^{1}p_{n+1}(x)p_{n-1}(x)\,dx+\frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1}p_{n-1}^2(x)\,dx\\ &= \frac{n}{2n+1}\,\frac{2}{2(n-1)+1} = \frac{2n}{4n^2-1}.\end{aligned}$$

Propriété 2.10. *On présente quelques propriétés supplémentaires des polynômes de Legendre*

1. $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$.
2. $p_n(1) = 1$.
3. $p_n(-1) = (-1)^n$.
4. $xp'_{n+1}(x) - p'_n(x) = (n+1)p_{n+1}(x)$.
5. $(n+1)p'_{n+1}(x) - (2n+1)p_n(x) - (2n+1)xp'_n(x) + np'_{n-1}(x) = 0$.
6. $p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x)$.
7. $p'_{n+1}(x) - xp'_n(x) = (n+1)p_n(x)$.

Preuve.

1. $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$.

   D'après la fonction génératrice (2.13), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(-x)t^n &= \frac{1}{\sqrt{1-2(-x)t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2x(-t)+(-t)^2}}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)(-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)(-1)^n t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n p_n(x)t^n.\end{aligned}$$

   Donc, $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$.

2. $p_n(1) = 1$.
   On prend $x = 1$ dans la fonction génératrice (2.13), on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

   Donc, $p_n(1) = 1$.
3. $p_n(-1) = (-1)^n$.
   On prend $x = -1$ dans la fonction génératrice (2.13), on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(-1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+t)^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n.$$

   Donc, $p_n(-1) = (-1)^n$.
4. $xp'_{n+1}(x) - p'_n(x) = (n+1)p_{n+1}(x)$.
   En utilisant la fonction génératrice, en dérivant les deux côtés de l'équation (2.13) par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p'_n(x)t^n, \\ t(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} p'_n(x)t^n, \qquad (2.29) \end{aligned}$$

   en dérivant les deux côtés de l'équation (2.13) par rapport à t, on trouve

$$(x-t)(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} np_n(x)t^{n-1}. \qquad (2.30)$$

   En multipliant l'équation (2.29) par $(x-t)$ et l'équation (2.30) par t, on obtient

$$\begin{aligned} t(x-t)(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}} &= (x-t)\sum_{n=0}^{+\infty} p'_n(x)t^n, \qquad (2.31) \\ t(x-t)(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}} &= t \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} np_n(x)t^{n-1}. \qquad (2.32) \end{aligned}$$

   Par comparaison entre (2.31) et (2.32), on trouve

$$\begin{aligned} (x-t)\sum_{n=0}^{+\infty} p'_n(x)t^n &= t\sum_{n=0}^{+\infty} np_n(x)t^{n-1}, \\ x\sum_{n=0}^{+\infty} p'_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p'_n(x)t^{n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} np_n(x)t^n, \\ x\sum_{n=0}^{+\infty} p'_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p'_{n-1}(x)t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} np_n(x)t^n, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} [xp'_n(x) - p'_{n-1}(x)]t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} np_n(x)t^n. \end{aligned}$$

En comparant le coefficient de t^n, on obtient

$$xp'_n(x) - p'_{n-1}(x) = np_n(x). \tag{2.33}$$

En remplaçant n par $n+1$ dans l' équation (2.33), on trouve

$$xp'_{n+1}(x) - p'_n(x) = (n+1)p_{n+1}(x).$$

5. $(n+1)p'_{n+1}(x) - (2n+1)p_n(x) - (2n+1)xp'_n(x) + np'_{n-1}(x) = 0.$
   D'après la relation de récurrence

$$(n+1)p_{n+1}(x) = (2n+1)xp_n(x) - np_{n-1}(x). \tag{2.34}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (2.34) par rapport à x, on trouve

$$(n+1)p'_{n+1}(x) - (2n+1)p_n(x) - (2n+1)xp'_n(x) + np'_{n-1}(x) = 0. \tag{2.35}$$

6. $p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x).$
   En substituant l'équation (2.33) dans l'équation (2.35), on obtient

$$\begin{aligned}
&(n+1)p'_{n+1}(x) - (2n+1)p_n(x) - (2n+1)(np_n(x) + p'_{n-1}(x)) + np'_{n-1}(x) = 0,\\
&(n+1)p'_{n+1}(x) - (2n+1)p_n(x) - (2n+1)np_n(x) - (2n+1)p'_{n-1}(x) + np'_{n-1}(x) = 0,\\
&(n+1)p'_{n+1}(x) - (2n+1)(1+n)p_n(x) - (2n+1-n)p'_{n-1}(x) = 0,\\
&(n+1)p'_{n+1}(x) - (2n+1)(n+1)p_n(x) - (n+1)p'_{n-1}(x) = 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x). \tag{2.36}$$

7. $p'_{n+1}(x) - xp'_n(x) = (n+1)p_n(x).$
   D'après l'équation (2.33), on a

$$-p'_{n-1}(x) = np_n(x) - xp'_n(x). \tag{2.37}$$

En substituant l'équation (2.37) dans l'équation (2.36), on trouve

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(x) + np_n(x) - xp'_n(x) &= (2n+1)p_n(x),\\
p'_{n+1}(x) - xp'_n(x) &= (2n+1)p_n(x) - np_n(x),\\
&= (n+1)p_n(x).
\end{aligned}$$

■

2.3 Polynômes de Legendre décalés

Pour utiliser les polynômes de Legendre sur l'intervalle $[0,1]$, on définit les polynômes de Legendre dits décalés en introduisant le changement de variable suivant

$$s = 2x - 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2}(s+1).$$

Dans ce cas, les polynômes de Legendre décalés $p_n^*(x)$ d'ordre n en x sont définis sur $[0,1]$ par

$$p_n^*(x) = p_n(s) = p_n(2x-1).$$

Les premiers polynômes de Legendre décalés sont

$$\begin{aligned} p_0^*(x) &= 1, \\ p_1^*(x) &= 2x-1, \\ p_2^*(x) &= 6x^2-6x+1, \\ p_3^*(x) &= 20x^3-30x^2+12x-1, \\ p_4^*(x) &= 70x^4-140x^3+90x^2-20x+1, \\ p_5^*(x) &= 252x^5-630x^4+560x^3-210x^2+30x-1. \end{aligned}$$

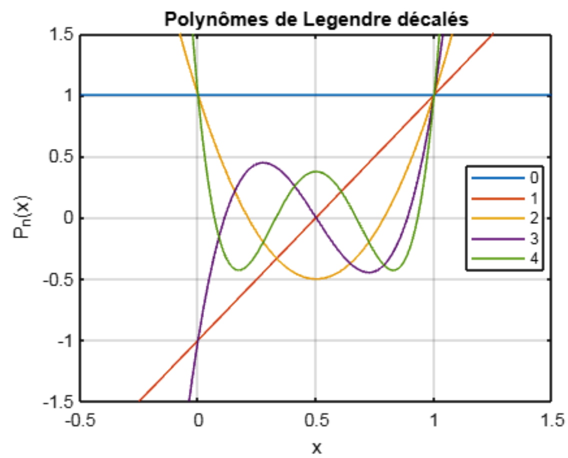


FIGURE 2.2 – Polynômes de Legendre décalés de degré 0 à 4

- **Relation de récurrence**
  Les polynômes de Legendre décalés $p_n^*(x)$ vérifiant la formule de récurrence suivante

$$\begin{aligned} p_0^*(x) &= 1, \\ p_1^*(x) &= 2x-1, \\ p_{n+1}^*(x) &= \frac{2n+1}{n+1}(2x-1)p_n^*(x) - \frac{n}{n+1}p_{n-1}^*(x),\ n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

- **Forme explicite**
  Un expression explicite pour les polynômes de Legendre décalés p_n^* de degré n en x est donnée par

$$p_n^*(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-x)^k.$$

On note que

$$\begin{aligned} p_n^*(0) &= (-1)^n, \\ p_n^*(1) &= 1, \\ (p_n^*)'(0) &= (-1)^{n-1} n(n+1), \\ (p_n^*)'(1) &= n(n+1). \end{aligned}$$

- **Formule de Rodrigue**
  L'analogue de la formule de Rodrigue pour les polynômes de Legendre décalés est

$$p_n^*(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx}(x^2 - x)^n.$$

- **Orthogonalité**
  Les polynômes $p_n^*(x)$ sont orthogonaux sur l'intervalle $[0,1]$ c'est à dire

$$\langle p_n^*(x), p_m^*(x)\rangle = \int_0^1 p_n^*(x)p_m^*(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Une fonction $\phi \in \mathbb{L}^2(0,1)$ qui peut être exprimé en termes de polynômes de Legendre décalés telle que

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i p_i^*(x),$$

où les coefficients $c_i, i \in \mathbb{N}$ sont donnés par

$$c_i = (2i+1)\int_0^1 \phi(x)p_i^*(x)dx.$$

En pratique, seuls les premiers polynômes de Legendre décalés $(m+1)$ termes sont considérés. Alors, on a

$$\phi_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i p_i^*(x).$$

2.4 Quadrature de Gauss-Legendre

La quadrature de Gausse-Legendre est une méthode numérique très précise et efficace pour effectuer l'intégration numérique d'une fonction sur un intervalle donné [11]. Cependant, elle est limitée aux cas où les bornes d'intégration sont finies et les fonctions à intégrer sont continues. Elle est basée sur l'utilisation de points de quadrature et poids spécifiquement choisis pour intégrer avec un précision élevée les polynômes de degré inférieur ou égal à un certain seuil, le principe de la méthode consiste à approximer l'intégrale d'une fonction par intégration d'un polynôme de degré n

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx. \tag{2.38}$$

$R_n(x)$ étant le terme d'erreur.
On utilise le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)f(x_i) + \left[\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right]\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad a < \xi < b.$$

Avec

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right).$$

On transforme l'intervalle d'intégration $[a,b]$ en $[-1,1]$ par changement de variable

$$z = \frac{2x-(a+b)}{b-a} \iff x = \frac{(b-a)z+(a+b)}{2}, \tag{2.39}$$

et on définit : $F(z) = f(x)$ d'où

$$F(z) = \sum_{i=0}^{n} L_i(z)F(z_i) + \left[\prod_{i=0}^{n}(z-z_i)\right] \frac{F^{(n+1)}(\varsigma)}{(n+1)!}, \quad -1 < \varsigma < 1.$$

Avec

$$L_i(z) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{z-z_j}{z_i-z_j}\right).$$

En supposant que $f(x)$ soit un polynôme de degré $2n+1$

$$\frac{F^{(n+1)}(\varsigma)}{(n+1)!} = q_n(\varsigma).$$

Alors le polynôme est de degré n. ς appartenant à l'intervalle $[-1,1]$, mais n'ayant pas une valeur connue dans cet intervalle, afin de pouvoir poursuivre les calculs, $q_n(\varsigma)$ est transformé en tant que polynôme $q_n(z)$ sur lequel on pourra travailler.

Une estimation de l'intégrale est alors donnée par

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} F(z)dz &\simeq \sum_{i=0}^{n} F(z_i)\int_{-1}^{1} L_i(z)dz \\ &= \sum_{i=0}^{n} w_i F(z_i),\end{aligned} \tag{2.40}$$

avec les poids

$$w_i = \int_{-1}^{1} L_i(z)dz = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{z-z_j}{z_i-z_j}\right) dz. \tag{2.41}$$

L'intégrale à calculer sur $[a,b]$ est liée à l'intégrale calculée après changement de variable par

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} F(z)dz \\ &\simeq \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} w_i F(z_i).\end{aligned}$$

En tenant compte de la remarque précédente à propos de ς et $q_n(\varsigma)$, le terme d'erreur de la formule de quadrature prend la forme

$$\int_{-1}^{1} \left[\prod_{i=0}^{n}(z-z_i)\right] q_n(z)dz.$$

Les abscisses z_i doivent être choisies de manière à minimiser le terme d'erreur.

Considérons le cas particulier de la quadrature de Gauss-Legendre. On exprime les polynômes $\prod_{i=0}^{n}(z-z_i)$ et $q_n(z)$ à l'aide des polynômes de Legendre $p_i(z)$

$$\prod_{i=0}^{n}(z-z_i) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i p_i(z). \tag{2.42}$$

$$q_n(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i p_i(z).$$

L'intégrale à minimiser devient

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left[\prod_{i=0}^{n}(z-z_i)\right] q_n(z)dz &= \int_{-1}^{1}\left[\left[\sum_{i=0}^{n+1} b_i p_i(z)\right]\times\left[\sum_{j=0}^{n} c_j p_j(z)\right]\right]dz \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\left[\sum_{i=0}^{n} b_i p_i(z) + b_{n+1}p_{n+1}(z)\right]\times\left[\sum_{j=0}^{n} c_j p_j(z)\right]\right]dz \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_i c_j p_i(z)p_j(z) + b_{n+1}\sum_{j=0}^{n} c_j p_j(z)p_{n+1}(z)\right]dz \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_i c_j \int_{-1}^{1} p_i(z)p_j(z)dz + b_{n+1}\sum_{j=0}^{n} c_j \int_{-1}^{1} p_j(z)p_{n+1}(z)dz \\
&= \sum_{i=0}^{n} b_i c_i \int_{-1}^{1}[p_i(z)]^2 dz \\
&= \sum_{i=0}^{n} b_i c_i \|p_i(z)\|_2^2.
\end{aligned}$$

On peut rendre le terme d'erreur nul en imposant que les $n+1$ premiers coefficients b_i soient nuls il reste un seul coefficient non nul b_{n+1} tel que, d'après l'équation (2.42).

$$\prod_{i=0}^{n}(z-z_i) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i p_i(z) = b_0 p_0(z) + \cdots + b_n p_n(z) + b_{n+1}p_{n+1}(z) = b_{n+1}p_{n+1}(z).$$

Comme le coefficient du terme de degré n du polynôme de gauche est égal à 1, on en déduit que b_{n+1} est égal à l'inverse du coefficient du terme de plus haut degré de p_{n+1}.

D'après l'égalité précédente, il est clair que les $n+1$ points de base z_i utilisés dans la formule d'intégration sont les $n+1$ racines du polynômes de Legendre de degré $n+1$. Les points de base sont déterminés, les poids w_i peuvent être calculés par la formule (2.41).

Plusieurs méthodes différentes ont été mises au point pour calculer efficacement les poids. Dans le cas particulier des polynômes de Legendre [1], on peut utiliser

$$w_i = \frac{2}{(1-z_i^2)[p'_{n+1}(z_i)]^2}.$$

Cette procédure constitue la quadrature de Gauss-Legendre. La quadrature de Gauss-Legendre fournit un résultat d'intégration exact lorsque la fonction f intégrée est un polynôme de degré

$2n+1$ au maximum.

Les valeurs des racines z_i et des poids w_i correspondants pour une famille de polynômes orthogonaux (Tableau 2.3).

Remararque 2.11. *Le calcule de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ est ramené au calcul de l'intégrale approximée par la somme*

$$I = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} F(z)dz \simeq \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} w_i F(z_i).$$

On fait le changement de variable $x \longrightarrow z$ afin de déterminer la fonction $F(z)$ à partir de $f(x)$, il est plus simple de calculer les racines x_i sur $[a,b]$ correspondant aux racines z_i sur $[-1,1]$ et d'utiliser l'égalité $f(x_i) = f(z_i)$. On obtient ainsi

$$I \simeq \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i). \tag{2.43}$$

Exemple 2.12. *Calculons numériquement l'intégrale suivante*

$$I = \int_{-2}^{3} x^4\, dx.$$

— *Si on intègre analytiquement, la valeur exacte de cette intégrale est*

$$I = \int_{-2}^{3} x^4\, dx = \left[\frac{1}{5}x^4\right]_{-2}^{3} = \frac{1}{5}\left[3^5 - (-2)^5\right] = \frac{275}{5} = 55.$$

— *Réalisons une intégration selon la quadrature de Gauss-Legendre à 3 points ($n = 2$). On procède de la manière suivante :*
  - *Calcul des abscisses x_i de l'intervalle $[-2,3]$ correspondant aux zéros z_i tabulés qui appartiennent à $[-1,1]$ selon l'équation (2.39).*
  - *Calcule des valeurs de la fonction $f(x_i)$.*
  - *Évaluation de l'intégrale selon la formule (2.43).*

  On obtient ainsi le tableau 2.1

z_i	x_i	$f(x_i)$	w_i	$w_i f(x_i)$
−0.7746	−1.4365	4.2580	5/9	2.3656
0.0000	0.5000	0.0625	8/9	0.0556
0.7746	2.4365	35.2419	5/9	19.5789

TABLE 2.1 – Quadrature de Gauss-Legendre $n = 2$, Exemple 2.12

Finalement

$$I = \frac{5}{2}\sum_{i=0}^{3} w_i f(x_i) \simeq \frac{5}{2}(2.3656 + 0.0556 + 19.5789) \simeq 55.$$

On remarque que, comme la fonction polynôme à intégrer avait un ordre inférieur à $(2n+1)$ avec $n = 2$, l'intégration est exacte.

Exemple 2.13. *Soit l'intégrale suivante*

$$I = \int_0^4 x\, e^{2x}\, dx \simeq 5216,9265.$$

Réalisons une intégration selon la quadrature de Gauss-Legendre à 3 points $(n = 2)$*. On utilise le changement de variable*

$$x = \frac{(b-a)z + (a+b)}{2} = \frac{4-0}{2}z + \frac{4+0}{2} = 2z + 2.$$

Alors

$$I = \int_0^4 x\, e^{2x} dx = \int_{-1}^{1} (2z+2)\, e^{2(2z+2)} 2dz = \int_{-1}^{1} (4z+4) e^{4z+4} dz.$$

z_i	x_i	$f(x_i)$	w_i	$w_i f(x_i)$
-0.7746	0.4508	2.2212	5/9	1.2340
0.0000	2.0000	218,3926	8/9	194.1268
0.7746	3.5492	8589.1427	5/9	4771.7460

TABLE 2.2 – Quadrature de Gauss-Legendre $n = 2$, Exemple 2.13

Donc

$$I = 2\sum_{i=0}^{3} w_i f(x_i) \simeq 2\Big(1.2340 + 194.1268 + 4771.7460\Big) \simeq 4967,1067.$$

De même manière pour $n = 3$*, on obtient* $I \simeq 5197.5437$*.*

Quadrature de Gauss-Legendre			
n	Points d'intégration z_i	Poids d'intégration w_i	Degré d'exactitude
0	0	2	1
1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	3
	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	
2	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$	5
	0	$\frac{8}{9}$	
	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$	
3	$-\frac{\sqrt{525+70\sqrt{30}}}{35}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	7
	$-\frac{\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{35}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	
	$\frac{\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{35}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	
	$\frac{\sqrt{525+70\sqrt{30}}}{35}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	
4	$-\frac{\sqrt{245+14\sqrt{70}}}{35}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$	9
	$-\frac{\sqrt{245-14\sqrt{70}}}{35}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$	
	0	$\frac{128}{225}$	
	$\frac{\sqrt{245-14\sqrt{70}}}{35}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$	
	$\frac{\sqrt{245+14\sqrt{70}}}{35}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$	

TABLE 2.3 – Points et poids d'intégration de quadrature de Gauss-Legendre

Chapitre

3 Application des polynômes de Legendre dans la méthode de décomposition d'Adomian

Ce chapitre est consacré à la résolution des équations différentielles ordinaires par la méthode de décomposition d'Adomian en utilisant les polynômes de Legendre. Cette méthode est semi analytique. Le principe de cette méthode est simple et basée sur la décomposition de l'opérateur non linéaire en une série polynomiale dont les éléments sont calculés récursivement. La méthode présentée est validée par un exemple.

3.1 Série d'Adomian

Définition 3.1. (Série d'Adomian [2])
Les termes de la série d'Adomian (A_n) pour $n \geq 0$ sont définis par la formule suivante

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0), \\ A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n) = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0, \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel introduit par convenance et on a

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0), \\ A_1(u_0,u_1) &= u_1\frac{\partial}{\partial u_0}N(u_0), \\ A_2(u_0,u_1,u_2) &= u_2\frac{\partial}{\partial u_0}N(u_0)+\frac{1}{2!}u_1^2\frac{\partial^2}{\partial u_0^2}N(u_0), \\ A_3(u_0,u_1,u_2,u_3) &= u_3\frac{\partial}{\partial u_0}N(u_0)+u_1u_2\frac{\partial^2}{\partial u_0^2}N(u_0)+\frac{1}{3!}u_1^3\frac{\partial^3}{\partial u_0^3}N(u_0), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tout d'abord, A_0 dépend que de u_0, A_1 dépend que de u_0 et u_1, et etc. Cette formule s'écrit sous la forme

$$A_n = \sum_{v=0}^{n} c(v,n)N^{(v)}(u_0), \quad n \geq 1. \tag{3.1}$$

Où $c(v,n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par $m!$) des v termes u_i dont la somme des indices i est égales à n, m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit. La relation (3.1) permet de trouver les termes A_n, mais en pratique, il est difficile de les déterminer quand n devient grand ($n > 5$).

Exemple 3.1. *Soit l'opérateur non linéaire défini par*

$$N(u) = sin(u).$$

Par définition on a :

$$\begin{aligned}
A_0(u_0) &= N(u_0) = \sin u_0, \\
A_1(u_0,u_1) &= \frac{1}{1!}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}N\left(\lambda^0 u_0 + \lambda^1 u_1\right)\right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\sin(u_0+\lambda^1 u_1)\right]_{\lambda=0} = \left[u_1\cos(u_0+\lambda u_1)\right]_{\lambda=0} = u_1\cos(u_0). \\
A_2(u_0,u_1,u_2) &= \frac{1}{2!}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}N\left(\lambda^0 u_0 + \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2\right)\right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}[\sin(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2)]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[(u_1+2\lambda u_2)\cos(u_0+\lambda^1 u_1+\lambda^2 u_2)]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2}[2u_2\cos(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2)-(u_1+2\lambda u_2)(u_1+2\lambda u_2)\sin(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2)]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2}(2u_2\cos(u_0)-u_1^2\sin u_0) = u_2\cos(u_0)-\frac{1}{2!}u_1^2\sin(u_0).
\end{aligned}$$

3.2 Méthode de décomposition d'Adomian

Soit l'équation différentielle suivante

$$A(u) = g, \tag{3.2}$$

où A est un opérateur différentiel non linéaire contenant des termes linéaires et non linéaires d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ dans lui-même, et g est une fonction donnée.

On cherche la solution $u \in \mathbb{H}$ de l'équation (3.2). Le terme linéaire de l'opérateur A est décomposé en $L+R$ où L est la dérivée d'ordre supérieur qui est supposée être inversible et R est un opérateur linéaire d'ordre inférieur à L. Le terme non linéaire de A est noté N (opérateur non linéaire). On a

$$A = L+R+N.$$

Soit l'équation différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n} + R(u) + N(u) = g,$$

où les valeurs $x_0, u'(x_0), u''(x_0), \cdots, u^{(n-1)}(x_0)$ sont données.
Si on considère l'opérateur linéaire définit par $L(u) = \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}$, l'équation (3.2) s'écrit alors

$$L(u)+R(u)+N(u) = g. \tag{3.3}$$

En multipliant l'équation (3.3) par l'opérateur inverse L^{-1}, on obtient

$$L^{-1}(L(u))+L^{-1}(R(u))+L^{-1}(N(u))=L^{-1}(g).$$

Comme L est un opérateur différentiel d'ordre n, alors on a

$$L^{-1}(L(u(x)))=u(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}u^{(k)}(x_0),$$

où $u(x_0),u'(x_0),u''(x_0),\cdots,u^{(n-1)}(x_0)$ sont données. Alors

$$u(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}u^{(k)}(x_0)+L^{-1}(g(x))-L^{-1}(R(u(x)))-L^{-1}(N(u(x))).$$

La méthode de décomposition d'Adomian consiste à calculer la solution sous forme d'une série convergente

$$u=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n.$$

Les termes non linéaires $N(u)$ peuvent être décomposés en un série infinie des polynômes donnés comme suit

$$N(u)=F(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n(u_0,u_1,u_2,\cdots,u_n)=A_0+A_1+\cdots.$$

La composante u_n sera déterminée de manière récursive et les termes A_n sont obtenus par la relation 3.1.

Wazwaz [14, 15] a proposé différents algorithmes pour formuler les termes d'Adomian, par exemple, A_i peut être formulé comme suit

$$\begin{array}{rcl}
A_0 &=& F(u_0),\\
A_1 &=& u_1F'(u_0),\\
A_2 &=& u_2F'(u_0)+\dfrac{1}{2}u_1^2F''(u_0),\\
A_3 &=& u_3F'(u_0)+u_1u_2F''(u_0)+\dfrac{1}{3!}u_1^3F'''(u_0).\\
&\vdots&
\end{array}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}u^{(k)}(x_0)+L^{-1}(g(x))-L^{-1}\left(R\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\right)\right)-L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}A_n(x)\right).\tag{3.4}$$

En comparant les deux côtés de l'équation (3.4), nous avons conclu que

$$\begin{cases}
u_0(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}u^{(k)}(x_0)+L^{-1}(g(x)),\\
u_1(x)=-L^{-1}(R(u_0(x)))-L^{-1}(A_0(x)),\\
u_2(x)=-L^{-1}(R(u_1(x)))-L^{-1}(A_1(x)).\\
\vdots
\end{cases}$$

En général

$$\begin{cases} u_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} u^{(k)}(x_0) + L^{-1}(g(x)), \\ u_{n+1}(x) = -L^{-1}(R(u_n(x))) - L^{-1}(A_n(x)), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Alors, la solution de l'équation (3.3) est déterminée. Mais, en pratique, les termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ ne peuvent être tous calculés, on utilise alors l'approximation

$$\begin{aligned} u &= \lim_{n\to+\infty} w_n, \\ w_n &= \sum_{n=0}^{N-1} u_n, \quad N \geq 1. \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que nous obtenons la solution en série en utilisant uniquement la condition initiale.

Exemple 3.2. *Soit l'équation*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u^2 = -1, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Que l'on écrit sous la forme

$$L(u) + N(u) = g.$$

Avec

$$L(.) = \frac{\mathrm{d}(.)}{\mathrm{d}x}, \quad L^{-1} = \int_0^x (.)\mathrm{d}x, \quad N(u) = u^2, \quad g(x) = -1.$$

On a alors

$$L^{-1}(L(u)) = L^{-1}(g) - L^{-1}N(u).$$

Où

$$L^{-1}(L(u)) = u - u(0).$$

On cherche la solution sous la forme $u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$*, alors on a*

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u(0) + L^{-1}(g) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} u_0(x) = u(0) + L^{-1}(g(x)), \\ u_{n+1}(x) = -L^{-1}(A_n(x)), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} u_0(x) = u(0) + L^{-1}(g) = -x, \\ u_1(x) = -L^{-1}(A_0) = -L^{-1}(x^2) = -\frac{x^3}{3}, \\ u_2(x) = -L^{-1}(A_1) = -L^{-1}(2u_0u_1) = -\frac{2x^5}{15}, \\ u_3(x) = -L^{-1}(A_2) = -L^{-1}(u_1^2 + 2u_0u_2) = -\frac{17x^7}{315}. \\ \vdots \end{cases}$$

La solution est donc

$$u(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=-\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots\right].$$

On remarque que l'expression

$$-\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots\right],$$

est le développement limité, au point 0 *de la fonction* $x\mapsto-\tan(x)$. *Donc* $u(x)=-\tan(x)$, *ce qui donne la solution exacte.*

3.3 Méthode de décomposition d'Adomian modifiée

En général, pour effectuer la méthode de décomposition d'Adomian, $g(x)$ est développé en série de Legendre pour un nombre naturel arbitraire m au voisinage de 0. L'auteur dans [18] a modifié cette méthode en développant $g(x)$ en termes de polynôme de Legendre $p_n(x)$, où la fonction de poids $w(x)=1$ et $x\in[-1,1]$, c'est à dire

$$g(x)\simeq\sum_{n=0}^{m}c_np_n(x), \tag{3.6}$$

telle que

$$c_n=(2n+1)\int_{-1}^{1}g(x)p_n(x)dx,\quad n=0,1,\cdots.$$

En substituant l'équation (3.6) dans l'équation (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}u_0&=L^{-1}(c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_mp_m(x))+Q(x),\\ u_1&=-L^{-1}(Ru_0)-L^{-1}(Nu_0),\\ u_2&=-L^{-1}(Ru_1)-L^{-1}(Nu_1).\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\vdots \tag{3.8}$$

Alternativement, l'auteur dans [15] a modifié les formules (3.7) par

$$\begin{aligned}u_0(x)&=L^{-1}(c_0p_0(x))+Q(x),\\ u_1(x)&=L^{-1}(c_1p_1(x))-L^{-1}(Ru_0(x))-L^{-1}(Nu_0(x)),\\ u_2(x)&=L^{-1}(c_2p_2(x))-L^{-1}(Ru_1(x))-L^{-1}(Nu_1(x)).\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\vdots \tag{3.10}$$

On définit les polynômes de Legendre par la formule explicite suivante

$$p_n(x)=2^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{\frac{n+k-1}{2}}{n}x^k.$$

Alors, on a

$$g(x)\simeq\sum_{n=0}^{m}d_nx^n.$$

Et

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 & 0 & -5/16 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & 15/8 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & -30/8 & 0 & 105/16 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 & -70/8 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35/8 & 0 & -315/16 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 63/8 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 231/16 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Par conséquent, l'équation (3.9) devient

$$\begin{aligned} u_0 &= L^{-1}(d_0)+Q(x), \\ u_1 &= L^{-1}(d_1)-L^{-1}(Ru_0)-L^{-1}(Nu_0), \qquad (3.11) \\ u_2 &= L^{-1}(d_2)-(Ru_1)-L^{-1}(Nu_1). \\ &\vdots \qquad (3.12) \end{aligned}$$

Les équations (3.7) et (3.11) sont les équations directrices de la méthode de décomposition d'Adomian modifiée en utilisant les polynômes de Legendre. L'approximation $u(x)$ est obtenue à partir de ces équations sous la forme $u(x)=\sum_{n=0}^{m} u_n(x)$, qui peut être très proche de l'expansion de Legendre de la solution exacte $u(x)$ pour des m appropriés.

Exemple 3.3. *On considère l'équation différentielle suivante*

$$\begin{cases} u''(x)+u(x)u'(x)=x\sin(2x^2)-4x^2\sin(x^2)+2\cos(x^2), \quad 0\le x\le 1, \\ u(0)=u'(0)=0. \end{cases} \qquad (3.13)$$

La solution exacte est $u(x)=\sin(x^2)$.

L'équation 3.13 s'écrit en termes d'opérateurs comme suit

$$Lu+Nu=g(x). \qquad (3.14)$$

Ce qui implique que

$$L=\frac{d^2}{dx^2},\ R=0, \quad F(u)=N(u)=u(x)u'(x)\,et\,g(x)=x\sin(2x^2)-4x^2\sin(x^2)+2\cos(x^2),$$

et on a

$$L^{-1}(\cdot)=\int_0^x\int_0^x(\cdot)\mathrm{d}x\mathrm{d}x.$$

Puis

$$L^{-1}(Lu)+L^{-1}(Nu)=L^{-1}(g(x)).$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient

$$u(x)=L^{-1}(g(x))-L^{-1}(N(u(x))). \qquad (3.15)$$

Donc, la solution est sous la forme $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ *et on compare avec l'équation (3.15), on obtient*

$$\begin{aligned} u_0(x) &= L^{-1}(g(x)), \\ u_1(x) &= -L^{-1}(A_0(x)), \\ u_2(x) &= -L^{-1}(A_1(x)), \\ &\vdots \\ u_{k+1}(x) &= -L^{-1}(A_k(x)). \end{aligned}$$

On écrit $F(u) = u(x)u'(x)$ *sous la forme de polynômes d'Adomian*

$$F(u) = N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

Les termes de la seérie d'Adomian sont donnés par

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0 u_0', \\ A_1 &= u_1 u_0' + u_0 u_1', \\ A_2 &= u_2 u_0' + u_1 u_1' + u_0 u_2', \\ A_3 &= u_3 u_0' + u_2 u_1' + u_1 u_2' + u_0 u_3'. \\ &\vdots \end{aligned}$$

De même, on développe $g(x)$ *en utilisant les polynômes de Legendre pour* $m = 10$*. D'après l'équation (3.6), on trouve*

$$g(x) \approx \sum_{n=0}^{10} c_n p_n(2x-1), \quad 0 \le x \le 1,$$

où

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} g\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) p_n(x) \mathrm{d}x, \quad n = 0, ..., 10.$$

Alors, la solution approchée $u_{app}(x)$ *est donnée par*

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \sum_{n=0}^{10} u_n(x) \\ &= x^2 + 0.00004x^3 - 0.0007x^4 - 0.0175x^5 - 0.0220x^6 - 0.1538x^7 + 0.0777x^8 \\ &\quad -0.0121x^9 - 0.0620x^{10}. \end{aligned}$$

Dans les figures 3.1, 3.2, 3.3 et le Tableau 3.1, on présente la fonction $g(x)$ *et la fonction modifiée* $g_m(x)$*, la solution exacte* $u(x)$ *et la solution approchée* $u_p(x)$ *et l'erreur absolue de la méthode proposée.*

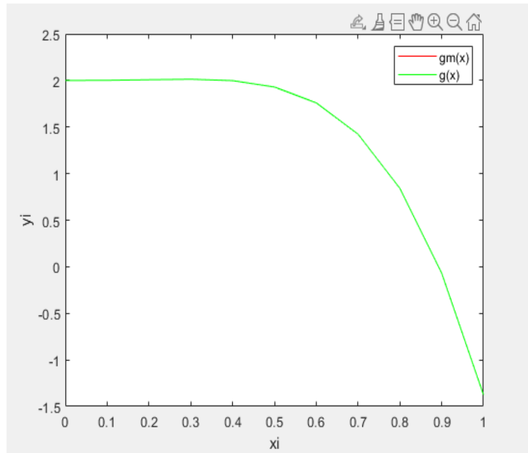


FIGURE 3.1 – Méthode de décomposition d'Adomian modifiée, Fonction $g(x)$ et fonction modifiée $g_m(x)$, Exemple 3.3

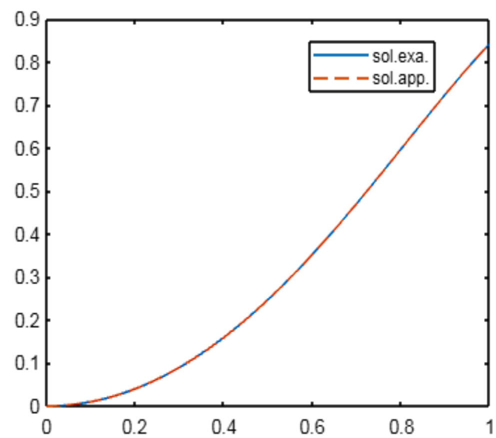


FIGURE 3.2 – Méthode de décomposition d'Adomian modifiée, Solution exacte $u(x)$ et solution approchée $u_p(x)$, Exemple 3.3

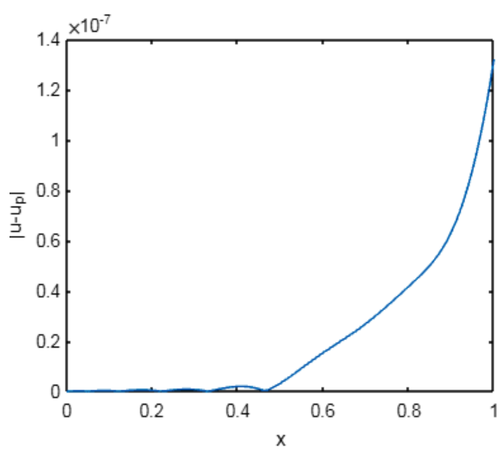


FIGURE 3.3 – Méthode de décomposition d'Adomian modifiée, Erreur absolue, Exemple 3.3

x_i	$g(x)$	$g_m(x)$	$u(x)$	$u_p(x)$	Err abs
0	2.0000	2.0000	0.0000	0.0000	$0.0000e+00$
0.1000	2.0015	2.0015	0.0100	0.0100	$2.7112e-10$
0.2000	2.0080	2.0080	0.0400	0.0400	$3.8229e-10$
0.3000	2.0133	2.0133	0.0899	0.0899	$6.8093e-10$
0.4000	1.9983	1.9983	0.1593	0.1595	$1.9362e-09$
0.5000	1.9301	1.9301	0.2474	0.2482	$3.1780e-09$
0.6000	1.7601	1.7601	0.3523	0.3544	$1.5258e-08$
0.7000	1.4236	1.4236	0.4706	0.4755	$2.6840e-08$
0.8000	0.8418	0.8418	0.5972	0.6068	$4.1561e-08$
0.9000	-0.0688	-0.0688	0.7243	0.7409	$6.3060e-08$
1.0000	-1.3760	-1.3760	0.8415	0.8664	$1.3189e-07$

TABLE 3.1 – Méthode de décomposition d'Adomian modifiée, Erreur absolue, Exemple 3.3

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'exemple le plus simple de polynômes orthogonaux qui sont les polynômes de Legendre. Ces polynômes sont les solutions des équations différentielles linéaires du second ordre. Dans ce travail, nous avons présenté l'équation différentielle de Legendre, la formule de Rodrigue, la fonction génératrice, la relation de récurrence, l'orthogonalité les polynômes de Legendre décalés et la quadrature de Gauss-Legendre. Enfin, nous avons développé la méthode de décomposition d'Adomian pour la résolution des équations différentielles qui est basée sur les polynômes de Legendre.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Hand book of mathematical functions*, Tenth Printing, 1972.

[2] G. Adomian,*Convergent series solutions of nonlinear equations*, Computational and Applied Mathematics, 11 225-230, 1984.

[3] G. Adomian, *Solving frontier problems of physics : The decomposition method*, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[4] R. Askey, *Orthogonal polynomials and special functions*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.

[5] R. Beals et R. Wong, *Special functions and orthogonal polynomials*, Cambridge University Press, 2016.

[6] G. Carrier et C. E. Pearson, *Ordinary Differential Equations*, SIAM, 1968.

[7] P. J. Davis, *Interpolation and approximation*, Dover Publications, New York, 1975.

[8] B. G. S. Doman, *The classical orthogonal polynomials*, World Scientific Publishing, 2016.

[9] R. El Attar, *Special functions and orthogonal polynomials*, Lulu press, USA, 2006.

[10] K. Eugène, *Équations différentielles pour ingénieurs*, Presses internationales Polytechnique, 2013.

[11] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses internationales Polytechnique, 2011.

[12] G. Szego , *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, 1939.

[13] R. Vaillancourt, *Mathématiques de l'ingénieur*, Notes de cours, Université d'Ottawa, Ottawa, Canada, 2014.

[14] A.M. Wazwaz, *A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series method in the series solutions*, Applied Mathematics and Computation, 97 37-44, 1998

[15] A.M. Wazwaz, *A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators*, Applied Mathematics and Computation, 111 53-69, 2000.

[16] Z. X. Wang et D. R. Guo, *Special Functions*, World Scientific Publishing, Singapore, 1989.

[17] L. Yucheng, *Adomian decomposition method with orthogonal polynomials : Legendre polynomials*, Mathematical and Computer Modelling 49 1268-1273, 2009.

[18] L. Yucheng, *Application of Legendre polynomials in Adomian decomposition method*, World Academy of Science, Engineering and Technology 65, 2012.

ملخص

تتناول هذه المذكرة دراسة حول كثيرات حدود ليجندر و أهم خصائصها الأساسية (صيغة رودريغ، دالة التوليد، العلاقة التراجعية، كثيرات حدود ليجندر المعدلة وتربيع ليجندر غاوس) و قد قمنا بتطبق كثيرات حدود ليجندر من أجل حل المعادلات التفاضلية العادية باستخدام طريقة تركيب ادوميان.

كلمات مفتاحية : كثيرات الحدود المتعامدة، كثيرات حدود لجندر، معادلات تفاضلية عادية، طريقة تركيب ادوميان.

Abstract

This thesis deals with the study of Legendre polynomials and their classical properties (Rodrigue's formula, generating function, recurrence relation, orthogonality, shifted Legendre polynomials and Gauss-Legendre quadrature) and the use of these polynomials to solve ordinary differential equations by the Adomain decomposition method.

Keywords : Orthogonal polynomials, Legendre polynomials, ordinary differential equations, Adomian decomposition method.

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude des polynômes de Legendre et ses propriétés classiques (formule de Rodrigue, fonction génératrice, relation de récurrence, orthogonalité, polynômes de Legendre décalés et quadrature de Gauss-Legendre) et l'utilisation de ces polynômes pour résoudre les équations différentielles ordinaires par la méthode de décomposition d'Adomain.

Mots clés : Polynômes orthogonaux, Polynômes de Legendre, équations différentielles ordinaires, Méthode de décomposition d'Adomian.