Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

Mahbous Amel

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et applications

Thème

Inéquations variationnelles elliptiques et problèmes aux limites

---

Soutenu publiquement le 21 juin 2023 devant le jury composé de

F. Bensaid	MAA	Président
H. Debbiche	MCB	Encadrant
Dj. Benterki	MCA	Examinateur

Promotion 2022/2023

Dédicace

Tout d'abord, je tiens à remercier DIEU de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

A ma tendre mère Fatiha et mon très cher père Abderazak, aucune dédicace ne peut exprimer ce que je dois pour leurs efforts et leurs sacrifices. Que Dieu les protège et leurs préserve bonheur et santé.

A mes aimables frères : Ali, Fares, Rachid, et leurs petites familles (leurs femmes Hafida, Karima et Manel, et je n'oublie pas mon neveu Youssef).

A mes douces soeurs : Zoulikha, Rahma, et leurs petites familles (leurs maris Yazid et Yacine, et leurs enfants, Chaima, Islam, Mohammed, Ritadj, Iyad, Ibrahim).

A tout ma famille.

A mes meilleurs amis : Hanane, Fatima, Tassnim, Ilhem, Salwa, Sameh, à toutes les filles de Master 2 de mathématiques appliquées.

A touts les étudiants de mathématiques.

A tous ce qui m'aiment et que je l'aime.

Remerciements

Je remercie mon Dieu tout puissant pour m'avoir donné la santé, le courage, la force pour finir ce travail.

C'est avec un grand plaisir que je réserve cette page en signe de gratitude et de profonde reconnaissance à mon encadreur Dr.Debbiche Hanene, que sans leur je ne sera pas arrivé là aujourd'hui par ces conseils, encouragements, orientations et leurs soutiens durant toute l'année.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui ont participé, de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également aux membres de jury qu'ils nous font d'avoir évolués ce travail.

Enfin je vous adresser mes vifs remerciements à tous mes enseignants (surtout S. Addoun, Dj. Benterki, R. Zeghdan, A. Mani, N. Belkacem, H. Debbiche, A. Rahmoune, H. Adimi, S. Benaissa), et de département de mathématiques pour les connaissances que me fournit durant ces cinq années.

Table des matières

LISTE DES NOTATIONS

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$	Domaine lipschitzien borné.
$\partial\Omega$	Frontière de Ω.
E'	Espace dual de E.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E',E}$	Crochet de dualité.
$L_c(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires continues de E dans F.
$C(U, E)$	L'espace des fonctions continues de U dans E.
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$\to$	La convergence forte .
n	La normale unitaire extérieure de $\partial\Omega$.
p.p.	Presque partout.
s.c.i	Semi-continue inférieurement.
s.c.s	Semi-continue supérieurement
H^1, H_0^1	Espaces de Sobolev.
$Supp(f)$	Support de la fonction f.
$A : B = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} b_{ij}$	Le produit de deux matrices.
$x \cdot y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$	Le produit scalaire de x et y.
$\nabla v = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq d}$	Le jacobien de $v = (v_1, \cdots, v_d) = (v_1(x), \cdots, v_d(x))$.
$\operatorname{div}(v) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$	Divergence de v.
$(v \cdot \nabla)v = (\sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i})_{1 \leq j \leq d}$	Le terme non linéaire.
$D(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^t)$	Le tenseur des déformations où v est la vitesse du fluide.
$\sigma = 2\mu D(v) - PI$	Le tenseur des contraintes où μ, P sont la viscosité et la pression du fluide.
$(\operatorname{div}(\sigma))_i = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},\ i = 1, \cdots, d$	Divergence de σ.

Introduction

Les inéquations variationnelles représentent une classe importante de problèmes non-linéaires d'origine physique, mécanique ou autre [11]. Cette théorie a été faite à partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par A. Signorini en 1933 [22] où il a formulé un problème de contact sans frottement entre un solide élastique et un obstacle rigide. Ce n'est qui en 1964 que G. Fichera [12] a pu résoudre ce problème en utilisant quelques propriétés des inéquations variationnelles elliptiques. Les fondement mathématiques de la théorie ont été élargis par les contributions précieuse de Stampacchia [23] Lions et Stampacchia [18], et puis développer par l'école française et italienne Brézis [4], [5] Stampacchia [24], Lions [19],$\cdots$ ect.

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes et de Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides. Ces équations ont été nommées ainsi en référence à leurs découvreurs Claude Lions-Marie-Henri Navier mathématicien et ingénieur français et George Gabriel Stokes mathématicien et physicien britannique. Pour la résolution de ce genre d'équations, on doit ajouter les conditions aux limites dans le cas stationnaire (toute grandeur ne dépend pas explicitement du temps) et on rajoute de plus la condition initiale dans le cas instationnaire (ie, tous les variables qui décrivent le mouvement sont dépend du temps). Pour les conditions aux limites de type frottement, on obtient une inéquation variationnelle soit de type elliptique ou parabolique.

L'objectif de ce travail est de présenter des résultats d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles linéaires et non linéaires de première et deuxième espèce et d'appliquer ces résultats sur deux problèmes aux limites : le problème de Signorini scalaire [1] (mécanique des solides) et le problème de Stokes avec des conditions aux limites non linéaires de type Tresca en régime stationnaire. Ce problème est motivé par lubrification et aussi par injection/extrusion.

Ce travail se compose de trois chapitres

Le premier chapitre contient les définitions et les notions fondamentales qui seront essentiels

dans la suite.
Dans le deuxième chapitre, on présente des théorèmes d'existence et d'unicité de quelques classes d'inéquations variationnelles linéaires et non linéaires.
Le troisième chapitre porte sur l'application des résultats présentés dans le chapitre 2 où on prend deux problèmes aux limites, le problème de Signorini scalaire et le problème de Stokes. La formulation variationnelle du problème de Signorini est donnée par une inéquation variationnelle de première espèce où on utilise le théorème de Stampacchia et le théorème de point fixe de Schauder.
Pour le problème de Stokes en régime stationnaire, on prend deux cas selon la viscosité du fluide (elle traduit la résistance d'un fluide à l'écoulement, on la note μ) :

- Viscosité constante $\mu = cst > 0$: on obtient une inéquation variationnelle elliptique linéaire de deuxième espèce qui admet une unique solution par le théorème de Stampacchia.

- Viscosité qui dépend de la vitesse et le tenseur des déformations ($\mu = \mu(v, |D(v)|)$).
Ce choix permet également de trouver la viscosité appropriée qui répond à quelques besoins industriels tels que par exemple la fabrication de gilet pare-balles contenant un fluide qui a la capacité de se concentrer sur l'impact du projectile lors d'un contact avec le gilet pare-balles ([2] [9]). Dans ce cas on obtient une inéquation variationnelle elliptique non linéaire de deuxième espèce. Lorsque $\mu = \mu(\tilde{v}, |D(v)|)$ le problème admet au moins une solution par le théorème de monotonie. De plus, cette solution est unique. Ensuite par le théorème de point fixe de Schauder, le problème avec la viscosité dépend de plus de la vitesse admet au moins une solution. Finalement, on construit le terme pression par le théorème de De Rham ([9]).

On termine notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Généralités

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et des résultats utilisés tout au long de ce travail.

1.1 Fonction convexe et semi continue inférieurement

Définition 1.1. (Ensemble convexe) *Un sous ensemble S de $\mathbb{R}^d$ est dit convexe si*

$$\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0,1] : \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in S.$$

Remarque 1.1. *L'image d'un ensemble convexe par une application linéaire est convexe et l'adhérence d'une partie convexe est convexe.*

Exemple 1.1. *Les boules ouvertes ou fermées sont des convexes.*

Définition 1.2. *Soit S une partie non vide de $\mathbb{R}^d$. On appelle enveloppe convexe (resp. enveloppe convexe fermé) de S et on le note $conv(S)$ (resp. $\overline{conv(S)}$), le plus petit convexe (resp. convexe fermé) contenant S.*
L'enveloppe convexe est défini par

$$conv(S) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1, \quad x_i \in S \right\}.$$

Remarque 1.2. *Si S est borné (resp. compact) alors $conv(S)$ est borné (resp. compact). En général, l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas fermé.*

Définition 1.3. (Fonction convexe) *Soient S un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^d$ et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe si et seulement si*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),\ \forall x, y \in S,\ \forall \lambda \in [0,1].$$

Définition 1.4. *Pour une fonction f définie sur S de $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'épigraphe est définie par*

$$epi(f) = \{(x,y) \in S \times \mathbb{R},\ f(x) \leq y\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}.$$

On note par

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^d \quad | \quad f(x) < +\infty\},$$

le domaine de la fonction f. Si $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ alors la fonction f est dite propre. La fonction f est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) dans $\mathbb{R}^d$ si et seulement si

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^d, \quad f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \inf f(x).$$

Autrement dit, la fonction f est s.c.i. si et seulement si son épigraphe est un fermé de $\mathbb{R}^d$. De plus, la fonction f est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) si la fonction $-f$ est (s.c.i.) ie,

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Remarque 1.3.

- *Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe.*
- *Une fonction est continue en un point si et seulement si elle est semi-continue supérieurement et inférieurement en ce point.*

1.2 Notions sur les opérateurs linéaires

Dans toute la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.2.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.5. *Soit E et F, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, un opérateur T défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes. Pour tout u, v dans E et a, b dans $\mathbb{K}$ on a $Tu \in F$ et $T(au + bv) = aTu + bTv$.*

Définition 1.6. *Un opérateur linéaire de $E \longrightarrow F$, $(T \in L(E,F))$ est dit continu au point*

$x_0 \in E$ si pour toute suite $(x_n)_n$ de E converge vers x_0, la suite $T(x_n)$ converge vers $T(x_0)$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = T(x_0)$.

Notation. L'ensemble de tous les opérateurs linéaires et continus de E dans F est noté par $L_c(E, F)$.

Définition 1.7. *Un opérateur linéaire T défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive C, telle que :*

$$\|Tu\|_F \leq C\|u\|_E, \quad \forall u \in E.$$

Remarque 1.4. *Le plus petit de nombres C vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur T et se note $\|T\|$,*

$$\|T\| = inf\{C > 0, \forall x \in E, \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E\}.$$

Théorème 1.1. [20] *Soit $T \in L(E, F)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *T est borné.*

(2) *T est continu sur E.*

(3) *T est continu en 0.*

Exemple 1.2. *L'opérateur $T : (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ défini par*

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

est un opérateur linéaire et borné. Il est clair que T est linéaire. Montrons que T est borné. En effet, on a

$$|Tf(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\, dt \leq x\|f\|_\infty$$

d'où

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

donc T est borné.

1.2.2 Opérateurs compacts

Définition 1.8. (Partie compact) *Soit U un ensemble de E, U est dit compact de tout recouvrement de U par des ouverts de U, on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e.*

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouvert)}, U \subset \cup_{j\in J} V_j\,,\ \exists V_{j(k)}\,,\ j(k) = 1, 2, ..., n \text{ tel que } U \subset \cup_{k=0}^{n} V_j(k).$$

Définition 1.9. *Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.*

Définition 1.10. *Une famille $(f_i)_i$ de fonctions continues sur le compact U est dite équi-continue si*

$$\forall x, y \in U, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall i : |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leq \epsilon.$$

Théorème 1.2. (d'Ascoli) [20] *Soient U un espace compact et $\mathcal{A} \subset C(U,E)$. Alors $\mathcal{A}$ est relativement compact si, et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites*

(1) *$\mathcal{A}$ est borné.*

(2) *$\mathcal{A}$ est équicontinue.*

Théorème 1.3. (Heine) [15] *Soit deux espaces métriques X et Y, tel que X soit également compact. Alors toute application continue de X dans Y est uniformément continue. Cela implique notamment que toute fonction continue de $I = [a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur I.*

Définition 1.11. *Une application $T \in L(E,F)$ est un opérateur compact si $\overline{T(\bar{B_E})}$ est un compact de F, où $\bar{B_E}$ est la boule unité fermée de E.*

Remarque 1.5. *Un opérateur $T : E \longrightarrow F$ compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse. En effet, soit la boule unité fermée*

$$\bar{B}(0,1) = \{x \in E, \|x\|_E \leq 1\},$$

alors, $T(\bar{B}(0,1))$ est relativement compact d'où

$$\|Tx\|_F \leq C, \quad \forall x \in \bar{B}(0,1).$$

Alors T est borné. Réciproquement, l'opérateur identique Id_E de E dans E est borné, mais il n'est pas compact car $Id_E(\bar{B}(0,1)) = \bar{B}(0,1)$, n'est pas relativement compacte sauf si E est de dimension finie.

1.3 Espace fonctionnels

1.3.1 Espace réflexif et séparable

Dans toute la suite E sera un espace de Banach (même si la complétude sera souvent inutile).

Définition 1.12. (Espace dual) *Le dual topologique de E est l'ensemble des applications linéaires continues sur $\mathbb{K}$ ($E' = L_c(E, \mathbb{K})$). L'espace E'' est le bidual de E c-à-d est le dual de E'.*

L'espace E' muni de cette norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \frac{|\langle f, x \rangle_{E',E}|}{\|x\|_E},$$

est un espace normé et l'action de $f \in E'$ sur un élément $x \in E$ est notée par $f(x)$ ou $\langle f, x \rangle_{E',E}$. De même pour l'espace E'', muni de la norme

$$\|\phi\|_{E''} = \sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |\langle \phi, f \rangle_{E'',E'}|.$$

On considère l'injection canonique J de E dans E'' par

$$\begin{aligned} J : E &\to E'' \\ x &\mapsto J(x) = J_x, \end{aligned}$$

où J_x est définie par

$$\begin{aligned} J_x : E' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto J_x(f) = \langle J_x, f \rangle_{E'',E'} = \langle f, x \rangle_{E',E}. \end{aligned}$$

L'application J est une isométrie injective de E dans E''.

Définition 1.13. (Espace réflexif) *Soit J l'injection canonique de E dans E'' on dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.*

Proposition 1.1. [6] *Soit M un sous espace vectoriel fermé de E, alors M muni de la norme induite par E est réflexif.*

Définition 1.14. (Partie dense) *On dit qu'une partie $\mathcal{A} \subset E$ est dense si pour tout $y \in E$, il existe une suite $(x_n)_n \subset \mathcal{A}$ telle que $x_n \longrightarrow y$ dans E autrement dit $\bar{\mathcal{A}} = E$.*

Définition 1.15. (Espace séparable) *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient une partie dense et dénombrable.*

Théorème 1.4. [6] *Soit E un espace de Banach telle que E' soit séparable. Alors E est séparable.*

Définition 1.16. (Convergence faible) *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E. On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement dans E vers $x \in E$ si*

$$\langle f, x_n \rangle_{E',E} \longrightarrow \langle f, x \rangle_{E',E} \quad \forall f \in E',$$

on utilise alors la notation : $x_n \rightharpoonup x$.

Remarque 1.6.

- *Si la limite faible d'une suite existe, elle est unique.*
- *On appelle convergence forte, la convergence au sens de la norme* $\|x_n - x\|_E \longrightarrow 0$ *ce qu'on écrit* $x_n \longrightarrow x$.

Proposition 1.2. [6]

1. $x_n \to x \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$.
2. $x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow (x_n)_n$ *est borné.*
3. $(x_n \rightharpoonup x$ *et* $f_n \longrightarrow f$ *dans* $E')$ $\Longrightarrow \langle f_n, x_n\rangle_{E',E} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{E',E}$, *(convergence forte-faible).*

Proposition 1.3. *Soit* $\mathcal{A} \subset E$ *une partie de* E *faiblement fermée. Alors* $\mathcal{A}$ *est aussi fortement fermée.*

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $x_n \to x$. Montrons que $x \in \mathcal{A}$. En effet, comme la convergence forte implique la convergence faible, $x_n \rightharpoonup x$ et puisque $\mathcal{A}$ est faiblement fermée, $x \in \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est fortement fermée. □

La réciproque de la proposition ci dessus est vraie si $\mathcal{A}$ est convexe (voire [17]).

Théorème 1.5. [6] *Soit* E *un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée* $(x_n)_n$ *dans* E *on peut extraire une sous suite faiblement convergente.*

1.3.2 Espace de Hilbert

Dans cette partie, on présente un type particulier d'espace normé, le quel la norme est définie d'une manière spéciale.

Définition 1.17. (Produit scalaire) *Soit* H *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$. *Un produit scalaire sur* H *est une application* $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$, *telle que, pour tous* $x, y, z \in H$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

(1) $\langle x, x\rangle \geq 0$.
(2) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
(4) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

Définition 1.18. (Espace préhilbertien). *Un espace préhilbertien est défini comme un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire.*

Définition 1.19. (Espace de Hilbert). *Un espace de Hilbert H est un espace préhilbertien complet pour la norme hilbertienne $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. C'est donc un cas particulier d'espace de Banach.*

Exemple 1.3. *L'espace $l^2(\mathbb{N})$ des suites complexes (ou réelles) $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ muni de*

$$\langle (x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.20. (Orthogonalité) *On dit que deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien H sont orthogonaux, si $\langle x, y\rangle = 0$ on note $x \perp y$.*

Théorème 1.6. (Projection sur un convexe fermé) [6] *Soit H un espace de Hilbert, et soit S une partie convexe et fermée, non vide de H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in S$ tel que*

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, S) = \inf_{z\in S} \|x - z\|.$$

D'autre part y est caractérisé par

1). $y \in S$. On dit que $y = P_S(x)$ est la projection de x sur S.

2). Pour tout $z \in S$, $\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$. De plus pour tous $x_1, x_2 \in S$

$$\|P_S x_1 - P_S x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Théorème 1.7. (Représentation de Fréchet-Riesz) [6] *Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $\Phi \in H'$, il existe un (unique) $y \in H$ tel que*

$$\Phi(x) = \langle x, y\rangle, \quad \forall x \in H.$$

1.3.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Dans toute la suite, Ω sera un domaine (ouvert et connexe), borné et lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue dx, et $\partial\Omega = \Gamma$ est la frontière de Ω.

Définition 1.21. (Domaine lipschitzien). *Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit lipschitzien s'il existe une famille de boules ouvertes $(B_i)_{i=1,2,\cdots,k}$ telle que $\Gamma \subset \cup_{i=1}^k B_i$, de plus sur chaque B_i, il existe un système de cordonnées $(x_1, \cdots, x_d)$ et une fonction Ψ_i lipschitzienne telle que*

$$\Omega \cup B_i = \{(x_1, \cdots, x_d) \in B_i, \quad x_d < \Psi_i (x_1, \cdots, x_{d-1})\}.$$

Cela signifie que la frontière de Ω peut-être vue comme le graphe d'une fonction lipschitzienne. La plupart des domaines classiques (en particulier les polygones en dimension 2 et presque tous les polyèdres en dimension 3) sont lipschitziens. Des exemples de domaines non-lipschitziens sont ceux dont la frontière présente des points de rebroussement, ou une fissure rentrant dans le domaine.

Définition 1.22. *Soit $1 \leq p < +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$), l'espace $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\int_\Omega |f(x)|^p\,dx < \infty$.On note*

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $L^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|f(x)| \leq c$ p.p sur Ω. On note :

$$\| f \|_\infty = inf\{ c, |f(x)| \leq c \quad p.p. \quad \text{sur} \quad \Omega\}.$$

Théorème 1.8. [6] *L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$, un espace réflexif pour tout $1 < p < \infty$ et un espace séparable pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Théorème 1.9. (Convergence dominée de Lebesgue). [6] *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que*

a. $f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω.

b. Il existe une fonction g de $L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω. Alors, $f \in L^1(\Omega)$, $\quad \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Définition 1.23. *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés. La notation $X \hookrightarrow Y$ signifie $X \subset Y$ avec l'injection continue, c'est-à-dire il existe une constante C telle que*

$$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X \quad \forall u \in X.$$

En outre, on écrit $X \hookrightarrow_{compacte} Y$ si de toute suite bornée dans X on peut extraire une sous suite qui converge fortement dans Y. On note par $X \hookrightarrow_{dense} Y$ si X est dense dans Y.

Définition 1.24. *Soit $1 < p < +\infty$, on dit que q est l'exposant conjugué de p si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'exposant conjugué de 1 est ∞.*

Proposition 1.4. (Inégalité de Hölder) [6] *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Alors, $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Remarque 1.7. *Le cas particulier où $p = q = 2$ dans l'inégalité de Hölder, donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Théorème 1.10. [6] *Supposons que* $|\Omega| = \int_\Omega dx < \infty$. *Alors* $L^r(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *pour tout* $1 \leq p \leq r \leq \infty$, *i.e., il existe une constante* C *(dans notre cas,* $C = (|\Omega|)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$*) telle que*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|v\|_{L^r(\Omega)}, \quad \forall v \in L^r(\Omega).$$

1.3.4 Dérivation au sens faible et espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

On note $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$: l'espace des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact, avec le support d'une fonction $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ est défini par : *supp*$(v) = \overline{\{x \in \Omega, v(x) \neq 0\}}$.

Définition 1.25. *Une distribution est une forme linéaire continue sur* $\mathcal{D}(\Omega)$, *l'ensemble des distributions est donc le dual topologique de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *on la note* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 1.26. *On dit qu'une fonction* $u \in L^2(\Omega)$ *admet une dérivée au sens faible dans* $L^2(\Omega)$ *par rapport à la variable* x_j *si il existe* $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ *telle que*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\phi \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \, dx \ , \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Définition 1.27. *On définit l'espace de Sobolev d'ordre* 1 *sur* Ω *comme suit*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \ldots, d \right\},$$

où les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, 2, \ldots, d$ *sont prises au sens des distributions.*

L'espace $H^1(\Omega)$ muni de produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx + \sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx.$$

La norme associée est définie par

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\langle u, u\rangle_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |u|^2 dx + \sum_{i=1}^d \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 1.4. *Soit* $\Omega =]-1, 1[$, *la fonction* $u(x) = |x|$ *est dans* $H^1(\Omega)$. *En effet, la fonction* *valeur absolue u est continue sur Ω. De plus, $u \in L^2(\Omega)$ ie,*

$$\int_\Omega u(x)^2\,dx = \int_{-1}^1 x^2\,dx = \frac{2}{3} < \infty.$$

Prenons une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_{-1}^0 -x\varphi'(x)\,dx + \int_0^1 x\varphi'(x)\,dx \\
&= [-x\varphi(x)]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \varphi(x)\,dx + [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^0 \varphi(x)\,dx - \int_0^1 \varphi(x)\,dx \\
&= -\int_\Omega sign(x)\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

La fonction signe est dans $L^2(\Omega)$. On en déduit que sign est la dérivée faible de u et donc que $u \in H^1(\Omega)$.

Théorème 1.11. [10] *L'espace $\left(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\right)$ est un espace de Hilbert séparable et réflexif.*

Remarque 1.8. [10] *On a toujours l'injection suivante $H^1(\Omega) \hookrightarrow_{compacte} L^2(\Omega)$.*

Théorème 1.12. (de trace) [17] *On peut définir de façon unique la trace $\gamma_0(v)$ de $v \in H^1(\Omega)$ sur Γ de façon que $\gamma_0(v)$ coïncide avec la définition usuelle*

$$\gamma_0(v(x)) = v(x), \quad x \in \Gamma,$$

si $v \in C^1(\bar{\Omega})$. De plus l'application $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$, est linéaire et continue.

L'image de γ_0 est notée $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (c-à-d $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \gamma_0(H^1(\Omega))$) est un espace de Sobolev d'ordre fractionnaire.

Théorème 1.13. [13] *Pour $g \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^d$ avec $\int_\Gamma g \cdot n\,ds = 0$, il existe une fonction $u \in (H^1(\Omega))^d$ tel que $\operatorname{div}(u) = 0$ dans Ω et $u = g$ sur Γ.*

Proposition 1.5. (Formule de Green) *Pour tous $u, v \in H^1(\Omega)$* [13]

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Gamma \gamma_0(u)\gamma_0(v) \cdot n_i\,ds, \tag{1.1}$$

où $(n_i)_{i=1}^d$ sont les composantes de n avec n est le vecteur unitaire de la normale extérieur à Γ.
De plus, pour tout $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in (H^1(\Omega))^d$ on a (voir [3])

$$\int_\Omega u\ \operatorname{div}(v)\,dx = -\int_\Omega v \cdot \nabla u\,dx + \int_\Gamma \gamma_0(u)\left(\gamma_0(v) \cdot n\right)\,ds,$$

où $\mathrm{div}(v) = \sum_i^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, *qui désigne la divergence de* v *et* $v \cdot n = \sum_i^d v_i n_i$. *Pour simplifier, on écrit* u *et* v *au lieu* $\gamma_0(u)$ *et* $\gamma_0(v)$.

Définition 1.28. *L'espace* $H_0^1(\Omega)$ *est l'adhérence de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $\left(H^1(\Omega)), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\right)$ *(l'adhérence dans* $H^1(\Omega)$ *muni de sa norme* $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\big)$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}\right\}.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini aussi par

$$H_0^1(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega) : v_\Gamma = 0\right\}.$$

Théorème 1.14. (Inégalité de Poincaré) [6] *Il existe une constante* $C_p > 0$ *telle que pour toute fonction* $v \in H_0^1(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C_p \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx,$$

où C_p *ne dépend que de* Ω. *Cette inégalité est fausse dans l'espace* $H^1(\Omega)$, *prendre par exemple* $v = 1$.

Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$

avec injections continues et denses.

Remarque 1.9. [8] *Soit l'espace de Sobolev des fonctions nulles sur une partie de bord*

$$H_{\Gamma_1}^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega), u = 0 \ \textit{sur}\ \Gamma_1\right\},$$

où Γ_1 *est une partie de* Γ. *On suppose que* Γ_1 *de mesure non nulle (* $\textit{mes}\ (\Gamma_1) = |\Gamma_1| \neq 0)$ *l'espace* $H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$ *est fermé dans* $H^1(\Omega)$. *De plus, si mes* $(\Gamma_1) > 0$, *alors l'inégalité de Poincaré reste valable dans cet espace.*

1.4 Formes bilinéaires

Définition 1.29. *Soit* F *et* G *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$, *une forme bilinéaire sur* $F \times G$ *est une application* $a : F \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que*

1. *Pour tout $u \in F$ fixé, l'application $v \mapsto a(u,v)$ est une forme linéaire sur G, c'est-à-dire une application linéaire de G dans $\mathbb{R}$.*
2. *Pour tout $v \in G$ fixé, l'application $u \mapsto a(u,v)$ est une forme linéaire sur F, c'est-à-dire une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.30. *Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, une forme bilinéaire $a : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite symétrique si*

$$\forall (u,v) \in F^2, \ \ a(u,v) = a(v,u).$$

Définition 1.31. *Soient $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ deux espaces normés. Une forme bilinéaire $a : F \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue sur $F \times G$, s'il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$\forall (u,v) \in F \times G, \ |a(u,v)| \leq C\|u\|_F\|v\|_G.$$

Définition 1.32. *Soit $(F, \|.\|_F)$ un espace normé. On dit qu'une forme bilinéaire $a : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ est coercive (ou F-elliptique), s'il existe une constante $\alpha > 0$, telle que*

$$\forall u \in F, \ \ a(u,u) \geq \alpha\|u\|_F^2.$$

Exemple 1.5. *Soit*

$$\begin{aligned} a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto a(u,v) = \int_\Omega b(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx, \end{aligned}$$

où

$$0 < b_0 \leq b(x) \leq b_1. \tag{1.2}$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{1.2} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3}$$

(car d'après l'inégalité de Poincaré on obtient que $\|\cdot\|_{1.2}$ c'est une norme dans $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $H^1(\Omega)$ avec $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$).
La forme a est bilinéaire continue et coercive. En effet, il est facile de vérifier que a est bilinéaire.
- Pour la continuité, en utilisant (1.2) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$|a(u,v)| = \left|\int_\Omega b(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx\right| \leq b_1\|u\|_{1.2}\|v\|_{1.2}.$$

Maintenant, on montre la coercivité, en effet

$$a(u,u) = \int_\Omega b(x)\nabla u \cdot \nabla u \, dx \geq b_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq b_0\|u\|_{1.2}^2,$$

d'où le résultat.

1.5 Opérateur monotone et pseudo-monotone d'un espace de Banach dans son dual topologique

Soient V un espace de Banach réflexif séparable, V' son dual topologique, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V',V}$ le crochet de dualité entre V et V' et $A : V \to V'$ un opérateur (en général non linéaire)

Définition 1.33. *On dit que*

1. *A est monotone si*

$$\forall u, v \in V, \langle A(u) - A(v), u - v \rangle_{V',V} \geq 0.$$

2. *A est strictement monotone si de plus $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle_{V',V} = 0$ implique $u = v$.*
3. *A est hémicontinue si pour tous $u, v, w \in V$, l'application $\lambda \mapsto \langle A(u + \lambda v), w \rangle_{V',V}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.34. *Un opérateur A est dit pseudo-monotone si*

1. *A et borné s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\|Au\|_{V'} \leq C\|u\|_V, \quad \forall u \in V.$$

2. *lorsque $u_j \rightharpoonup u$ dans V (faible) pour $j \longrightarrow +\infty$, et*

$$\lim_{j \to +\infty} \sup \langle Au_j, u_j - u \rangle_{V',V} \leq 0,$$

alors

$$\liminf_{j \to +\infty} \langle Au_j, u_j - v \rangle_{V',V} \geq \langle Au, u - v \rangle_{V',V}, \forall v \in V.$$

Proposition 1.6. *Soit $A : V \to V'$ un opérateur. Alors*
A est monotone, borné et hémiocontinu implique que A est pseudo-monotone.

Preuve. Soit A monotone, borné est hémiocontinu et soit $(u_n)_n \subset V$ une suite vérifiant :

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad V,$$

$$\limsup_{n \to \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle_{V',V} \leq 0. \tag{1.4}$$

Par monotonie de A, on a

$$\langle Au_n, u_n - u\rangle_{V',V} \geq \langle Au, u_n - u\rangle_{V',V}.$$

La convergence faible de $(u_n)_n$ donne

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_{V',V} \geq 0. \tag{1.5}$$

De (1.4) et (1.5), on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_{V',V} = 0. \tag{1.6}$$

Soit $v \in V$ et on définit $w := \lambda v + (1-\lambda)u$, $(\lambda \in]0,1[)$. Par monotonie,

$$\begin{aligned}
\langle Au_n, u_n - w\rangle_{V',V} &= \langle Au_n, u_n - u\rangle_{V',V} + \langle Au_n, u - w\rangle_{V',V} \\
&= \langle Au_n, u_n - u\rangle_{V',V} + \lambda\langle Au_n, u - v\rangle_{V',V} \\
&\geq \langle Aw, u_n - w\rangle_{V',V} \\
&= \langle Aw, u_n - u\rangle_{V',V} + \lambda\langle Aw, u - v\rangle_{V',V}.
\end{aligned}$$

Puisque $u_n \rightharpoonup u$ et en utilisant (1.6), on obtient

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u - v\rangle_{V',V} \geq \langle A(\lambda v + (1-\lambda)u), u - v\rangle_{V',V}.$$

Pour $\lambda \longrightarrow 0$, en utilisant l'hémicontinuité de A, on obtient,

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u - v\rangle_{V',V} \geq \langle A(u), u - v\rangle_{V',V}.$$

Donc, A est pseudo-monotone. □

Dans toute la suite de ce travail, on utilise la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés (par exemple, on écrit $a_i b_i$ au lieu $\sum_{i=1}^d a_i b_i$).

Exemple 1.6. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $V = H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{1.2}$ et $b \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On pose*

$$A(u) = -\Delta u + b\cdot\nabla u.$$

L'opérateur linéaire A envoie bien $V = H_0^1(\Omega)$ dans son dual $V' = H^{-1}(\Omega)$. Il est pseudo-monotone. En effet, on a

$$\langle A(u), v\rangle_{V',V} = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx + \int_\Omega (b\cdot\nabla u)v\, dx,$$

pour tous $u, v \in V$

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle_{V',V} = \int_\Omega \nabla(u-v)\cdot\nabla(u-v)\,dx + \int_\Omega (b\cdot\nabla(u-v))(u-v)\,dx.$$

On pose $w = u - v$, *alors l'équation précédente devient*

$$\langle A(w), w\rangle_{V',V} = \int_\Omega |\nabla w|^2\,dx + \int_\Omega (b\cdot\nabla w)w\,dx, \tag{1.7}$$

et on a d'après la formule de Green (1.1)

$$\int_\Omega (b\cdot\nabla w)w\,dx = \int_\Omega (b_i\frac{\partial w}{\partial x_i})w\,dx = -b_i\int_\Omega w\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx = 0,$$

donc l'équation (1.7) *devient*

$$\langle A(w), w\rangle_{V',V} = \int_\Omega |\nabla w|^2\,dx \geq 0.$$

Donc, A *est monotone. De plus, on a*

$$|\langle Au, v\rangle_{V',V}| = |\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega (b\cdot\nabla u)v\,dx|.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de Poincaré, on obtient

$$|\langle Au, v\rangle_{V',V}| \leq \|u\|_{1.2}\|v\|_{1.2} + \|b\cdot\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C_p}\|b\cdot\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{1.2}.$$

D'autre part, on a

$$\|b\cdot\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |b\cdot\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega |b|^2|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = |b|\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

où $|b|$ *est la norme euclidienne de* $b \in \mathbb{R}^d$. *Donc,*

$$|\langle Au, v\rangle_{V',V}| \leq (\|u\|_{1.2} + \sqrt{C_p}|b|\,\|u\|_{1.2})\|v\|_{1.2},$$

$$\sup_{v\neq 0}\frac{|\langle Au, v\rangle_{V',V}|}{\|v\|_{1,2}} \leq (1 + \sqrt{C_p}|b|)\|u\|_{1.2}.$$

Alors, $\|Au\|_{V'} \leq C\|u\|_{1.2}$, *tel que* $C = 1 + \sqrt{C_p}|b|$ *d'où* A *est borné.*
D'autre part, l'opérateur A *est hémicontinu, on montre que pour tous* $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$

$$\beta(\lambda) = \langle A(u+\lambda w), v\rangle_{V',V} \text{ est continue.}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\beta(\lambda) &= \int_\Omega \nabla(u+\lambda w)\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega b\cdot\nabla(u+\lambda w)v\,dx\\ &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \lambda\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega (b\cdot\nabla u)v\,dx + \lambda\int_\Omega ((b\cdot\nabla w)v\,dx.\end{aligned}$$

Donc, la fonction β est continue (car si $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ alors $\beta(\lambda_n) \longrightarrow \beta(\lambda)$). D'après la Proposition 1.6 on déduit que A est pseudo-monotone.

1.6 Théorème de point fixe de Banach, Brouwer et Schauder

La notion de point fixe est d'une importance triviale dans presque tous les domaines des mathématiques. Nous présentons le théorème de point fixe de Banach, Brouwer et Schauder. Le théorème de Banach donne l'existence et l'unicité d'un point fixe mais le théorème de type Brouwer donne seulement l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie. Le théorème de point fixe de Schauder est une généralisation du théorème de Brouwer.

Définition 1.35. *Soit T une application d'un ensemble X dans lui même, on appelle point fixe tout point x tel que $T(x) = x$.*

Exemple 1.7.

- *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 1 + 2x$. Alors, la fonction g admet un point fixe en $x = -1$ et on a $g(-1) = -1$.*

- *Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $h(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. Alors h n'admet pas un point fixe car $h(x) = x \Longleftrightarrow \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui est impossible puisque la fonction tangente n'est pas définie au point $\frac{\pi}{2}$.*

Théorème 1.15. (de point fixe de Banach) [6] *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach. Soit K un sous-ensemble non vide fermé de E. Supposons que $T : K \to K$ est une contraction, c'est-à-dire il existe une constant $C \in [0, 1)$ telle que*

$$\|Tu - Tv\|_E \leq C\|u - v\|_E \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe unique point fixe.

On considère les théorèmes de point fixe de type Brouwer suivants [17]

Théorème 1.16. *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$ dans elle même admet un point fixe.*

Théorème 1.17. *Soit K un compact, convexe non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie E et $T : K \longrightarrow K$ une application continue. Alors T admet un point fixe dans K.*

Théorème 1.18. (de point fixe de Schauder) [17] *Soit K un sous ensemble fermé non vide et convexe d'un espace vectoriel normé E et $T : K \longrightarrow K$ une application continue telle que $T(K)$ est relativement compact. Alors T possède un point fixe.*
Plus généralement, si K est un compact convexe alors toute fonction continue de K sur K possède un point fixe.

Exemple 1.8. ***(Solution de l'équation intégrale)*** *On applique le théorème de point fixe de Schauder pour montrer l'existence de la solution de l'équation intégrale (c'est une équation où la fonction inconnue est à l'intérieur d'une intégrale).*
Soit X un espace compact (et séparé) muni de la mesure fini, et $\mathcal{K} : X \times X \to X$ continue. Alors, l'équation

$$f(x) = \int_X \mathcal{K}(x, y) f(y)\, d\mu(y),$$

admet toujours une solution dans $C(X)$. En effet, on définit l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned} T : C(X) &\to C(X) \\ f &\mapsto T(f). \end{aligned}$$

Avec,

$$\begin{aligned} T(f) : X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto T(f)(x) = \int_X \mathcal{K}(x, y) f(y)\, d\mu(y). \end{aligned}$$

On voit facilement grâce aux hypothèses que T est bien définie. On montre que T admet un point fixe. Soient $f \in C(X)$ et $x \in X$,

$$|T(f)(x)| = \left| \int_X \mathcal{K}(x, y) f(y)\, d\mu(y) \right| \leq \|\mathcal{K}\| \|f\|_\infty \mu(X).$$

Pour simplifier, on choisit $\mu(X)$ pour que $\|\mathcal{K}\|\mu(X) = 1$. Alors $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et T est une application linéaire continue. On note B la boule unité de $C(X)$. Montrons que $\overline{T(B)}$ vérifie les hypothèses du théorème de Schauder.
La boule unité B est convexe et T est linéaire donc $T(B)$ est également convexe. De plus, $\overline{T(B)}$ est convexe. (Voir la Remarque 1.1)
Pour montrer sa compacité nous allons utiliser le théorème d'Ascoli 1.2. L'espace X est compact et $\mathcal{K}$ est continue donc, par théorème de Heine 1.3, elle est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$*, il existe donc* $\delta > 0$ *tel que*

$$\forall x, x' \in X, \forall y \in X, \quad \|x - x'\|_X \leq \delta \Longrightarrow |\mathcal{K}(x,y) - \mathcal{K}(x',y)| \leq \varepsilon.$$

Soient alors $x', x \in X$ *tels que* $\|x - x'\|_X \leq \delta$*. On a*

$$|T(f)(x) - T(f)(x')| \leq \int_X |\mathcal{K}(x,y) - \mathcal{K}(x',y)||f(y)|\, d\mu(y) \leq \varepsilon \|f\|_\infty,$$

ce qui montre que $T(B)$ *est équicontinue et* $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ *assure qu'il est uniformément borné, d'où la compacité de* $T(B)$ *par théorème d'Ascoli et aussi que* $T(B) \subset B$*, or* B *est fermé donc* $\overline{T(B)} \subset B$ *d'où*

$$T(\overline{T(B)}) \subset T(B) \subset \overline{T(B)},$$

et $\overline{T(B)}$ *est* T*-stable donc le théorème de Schauder donne l'existence d'un point fixe*

$$f \in \overline{T(B)} \subset B \subset C(X),$$

d'où le résultat.

1.7 Théorème de De Rham

On pose

$$\mathcal{W} = \{u \in (\mathcal{D}(\Omega))^d, \quad \operatorname{div}(u) = 0\},$$

et

$$H^1_{0 \cdot \operatorname{div}} = \{u \in (H^1_0(\Omega))^d, \quad \operatorname{div}(u) = 0\}.$$

Théorème 1.19. (de De Rham) [13] *Soit* $\mathcal{L} \in (\mathcal{D}'(\Omega))^d$ *satisfait*

$$\forall \phi \in \mathcal{W} \quad \langle \mathcal{L}, \phi \rangle_{((\mathcal{D}'(\Omega))^d, (\mathcal{D}(\Omega))^d)} = 0.$$

Alors, il existe une distribution $P \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *telle que* $\mathcal{L} = \nabla P$*.*

Lemme 1.1. [13] *Soit* $\mathcal{L} \in (H^{-1}(\Omega))^d$ *telle que*

$$\forall \phi \in H^1_{0 \cdot \operatorname{div}}, \quad \langle \mathcal{L}, \phi \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^d, (H^1_0(\Omega)^d)} = 0,$$

si et seulement si, il existe un unique $P \in L^2(\Omega)$ *(à une constante près car* Ω *connexe) tel que* $\mathcal{L} = \nabla P$*.*

Corollaire 1.1. ([25], [13]) *L'opérateur gradient* ∇ *est un isomorphisme de* $L^2_0(\Omega)$ *dans* $H^{-1}(\Omega)$*.*

Chapitre 2

Inéquations variationnelles elliptiques

Le but de ce chapitre est de présenter quelques résultats d'existence et d'unicité pour des inéquations variationnelles elliptiques linéaires et non linéaires du première et deuxième espèce. Ces résultats seront nécessaires dans la suite de ce travail.

2.1 Théorèmes d'existence pour les inéquations variationnelles elliptiques

2.1.1 Inéquations variationnelles elliptiques linéaires

Dans cette partie, on donne quelques théorèmes d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles linéaires (voir [14], [6]).
Soit H un espace de Hilbert (sur le corps $\mathbb{R}$ des réels) avec H' son dual. Le produit scalaire dans H est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|_H$. Soit K un ensemble non vide, convexe et fermé de H.

Inéquation variationnelle elliptique de première espèce :

Définition 2.1. *On appelle inéquation variationnelle elliptique de première espèce linéaire toute inéquation de la forme*

$$a(u, v-u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in K, \tag{2.1}$$

où $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$.

On considère le théorème d'existence et d'unicité de Stampacchia pour cette inéquation, ce théorème est le point de départ de la théorie des inéquations variationnelles.

Théorème 2.1. ***(Stampacchia)*** *Soit a une forme bilinéaire, continue et coercive, soit $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, le problème : trouver $u \in K$ vérifiant (2.1) a une unique solution $u \in K$.*

Preuve.

- On commence par l'existence de solution u. On transforme le problème (2.1) à un problème de point fixe, pour cela on utilise le théorème de représentation de Riesz 1.7 pour les espaces de Hilbert, il existe un opérateur différentiel $T \in L_c(H, H)$ et un élément $f \in H'$ tels que

$$\begin{cases} a(u,v) = \langle Tu, v\rangle \quad \forall u, v \in H, \\ L(v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H, \end{cases} \tag{2.2}$$

ainsi, le problème (2.1) est équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ telle que} \\ \langle Tu - f, v - u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in K. \end{cases}$$

Soit $t > 0$, alors

$$\langle -t(Tu - f), v - u\rangle \leq 0, \quad v \in K,$$

d'où

$$\langle u - t(Tu - f) - u, v - u\rangle \leq 0, \quad v \in K.$$

On définit $P_K : H \longrightarrow K$ comme la projection orthogonale de H sur K. Alors, d'après le Théorème 1.6 le problème (2.1) est équivalent à un problème de point fixe

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ telle que} \\ u = P_K(u - t(Tu - f)), \text{ pour } t > 0. \end{cases}$$

Alors, il suffit de montrer que P_K est une contraction sur H. Soit $v, w \in H$, d'après le Théorème 1.6, on a

$$\begin{aligned} &\|P_K(v - t(Tv - f)) - P_K(w - t(Tw - f))\|^2 \leq \|(v - t(Tv - f)) - (w - t(Tw - f))\|^2 \\ &= \|(v - w) - tT(v - w)\|^2 = \|v - w\|^2 - 2t\, a(v - w, v - w) + t^2\|T(v - w)\|^2. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $a(\cdot, \cdot)$ est coercive et continue on obtient

$$\|P_K(v - t(Tv - f)) - P_K(w - t(Tw - f))\|^2 \leq \left(1 - 2t\alpha + t^2C^2\right)\|v - w\|^2.$$

On pose $0 < t < \dfrac{2\alpha}{C^2}$, alors P_K est une contraction, et par le théorème du point fixe de Banach 1.15, il existe donc une solution $u \in K$.
Montrons l'unicité. En effet, soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (2.1), alors

$$a(u_1, v - u_1) \geq L(v - u_1), \quad \forall v \in K, \forall u_1 \in K, \tag{2.3}$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq L(v - u_2), \quad \forall v \in K, \forall u_2 \in K, \tag{2.4}$$

posons $v = u_2$ dans (2.3) et $v = u_1$ dans (2.4) et en additionnant les deux inéquations, on obtient

$$a(u_1, u_2 - u_1) - a(u_2, u_2 - u_1) \geq L(u_2 - u_1) - L(u_2 - u_1),$$

d'où

$$a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0.$$

En utilisant la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$, on obtient

$$\alpha \|u_2 - u_1\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0,$$

d'où $u_1 = u_2$.

□

Si de plus, $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique alors u est caractérisé par la propriété suivante ([14], [6]).

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ telle que} \\ J(u) = \min\limits_{v \in K} J(v), \end{cases} \tag{2.5}$$

où $J : H \to \mathbb{R}$, définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v), \quad v \in K,$$

vérifiant les propriétés suivantes

1. $$\lim_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty,$$

   en effet, $J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \geq \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 - \|L\| \|v\| \to \infty$.

2. J est strictement convexe. En effet, comme L est linéaire, il suffit de prouver que $v \to a(v, v)$ est strictement convexe. Soit $0 < \lambda < 1$ et $u, v \in H$, alors

$$0 < a(v - u, v - u) = a(u, u) + a(v, v) - 2a(u, v),$$

ainsi on a

$$2a(u,v) < a(u,u) + a(v,v). \tag{2.6}$$

En utilisant (2.6) on a

$$\begin{aligned} a(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda u + (1-\lambda)v) &= \lambda^2 a(u,u) + 2\lambda(1-\lambda)a(u,v) + (1-\lambda)^2 a(v,v) \\ &< \lambda a(u,u) + (1-\lambda)a(v,v), \end{aligned}$$

alors $v \to a(v,v)$ est strictement convexe.

3. J est continue car L et $a(\cdot,\cdot)$ sont continues.
4. Supposons $J(\cdot)$ est Gâteaux différentiable en u, i.e différentiable dans toutes les directions $v \in H$, c.à.d.

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \langle J'(u), v\rangle, \quad \forall v \in H.$$

Inéquation variationnelle elliptique linéaire de deuxième espèce

Définition 2.2. *On appelle inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce linéaire toute inéquation de la forme*

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in H, \tag{2.7}$$

où $j : H \to \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 2.2. *Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue coercive, $L(.)$ une forme linéaire continue, j une fonctionnelle convexe semi continue inférieurement (s.c.i) et propre. Alors le problème (2.7) a une unique solution.*

Preuve.

1. Existence : Considérons le cas où $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique, alors le problème (2.7) est équivalent à un problème de minimisation ([14]).

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v), \forall v \in H, \end{cases} \tag{2.8}$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) + j(v) - L(v).$$

Comme $j(.)$ est propre, convexe, s.c.i, donc (voir [14])

$$j(v) \geq \Lambda(v) + c_0, \quad \forall v \in H,$$

où Λ est une forme linéaire continue sur H et $c_0 \in \mathbb{R}$. Donc,

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) + j(v) - L(v) \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 - \|\Lambda\|\|v\| - \|L\|\|v\| + c_0 \to \infty,$$

d'où $J(v) \to \infty$ quand $\|v\| \to \infty$. De plus, d'après les hypothèses sur $a(\cdot,\cdot)$, $j(\cdot)$ et $L(\cdot)$, on voit que $J(\cdot)$ est propre, strictement convexe, s.c.i, Gâteaux différentiable. Donc (cf. [7]) le problème (2.8) possède une solution.

2. Unicité : Soient u_1 et u_2 deux solutions de (2.7), alors

$$a\left(u_1, v - u_1\right) + j(v) - j\left(u_1\right) \geq L\left(v - u_1\right) \quad \forall v \in H, u_1 \in H, \tag{2.9}$$

$$a(u_2, v - u_2) + j(v) - j\left(u_2\right) \geq L\left(v - u_2\right) \quad \forall v \in H, u_2 \in H. \tag{2.10}$$

Comme $j(.)$ est une fonctionnelle propre, on obtient que $j\left(u_i\right)$ est finie pour $i = 1, 2$. Posons $v = u_2$ dans (2.9) et $v = u_1$ dans (2.10) et en additionnant les deux inéquations, on obtient

$$\alpha \left\|u_1 - u_2\right\|^2 \leq a\left(u_2 - u_1, u_2 - u_1\right) \leq 0.$$

D'où $u_1 = u_2$.

□

2.1.2 Inéquations variationnelles elliptiques non linéaires

Dans cette partie, on présente des théorèmes d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles d'opérateur pas forcément linéaire, les opérateurs monotones, hémicontinus et pseudo-monotones (voir [19], [17]).

Inéquations variationnelles non linéaires de première espèce

Soit V un espace de Banach séparable et réflexif et soit K un ensemble convexe fermé de V. On se donne un opérateur A défini seulement sur K, donc

$$A : K \to V'. \tag{2.11}$$

On va distinguer deux cas, selon que K est borné ou non.

Cas 1 : K borné :

Lemme 2.1. *Il existe une famille dénombrable de convexe fermés $\left(K_m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ croissante, telle* *que chaque K_m est de dimension finie inclus dans K et $\bigcup_{m=0}^{+\infty} K_m$ dense dans K.*

Preuve. Comme V est métrique et séparable, de même pour K. Alors, il existe une famille dénombrable $(w_m)_m$ dense dans K. On pose $K_m = \overline{\text{conv}}\,\{w_0, w_1, \ldots, w_m\}$, de cette façon K_m est un convexe fermé de dimension inférieur ou égale à m. Il est bien clair que

$$\cdots \subset K_m \subset K_{m+1} \subset \cdots \subset K.$$

On a trivialement que $\bigcup_{m=0}^{+\infty} K_m$ est dense dans K, puisque cet ensemble contient chaque w_m. □

Théorème 2.3. *On suppose que K est un ensemble convexe fermé borné non vide. Soit A un opérateur pseudo-monotone de $K \longrightarrow V'$. Alors, pour f donné dans V', il existe u dans K, vérifiant*

$$\langle Au, v-u\rangle_{V',V} \geq \langle f, v-u\rangle_{V',V} \quad \forall v \in K. \tag{2.12}$$

Preuve. On décompose cette démonstration en deux étapes

Étape 1 : D'après le lemme 2.1, il existe une suite croissante d'ensembles K_m avec

$$\begin{cases} \cdots \subset K_m \subset K_{m+1} \subset \cdots \subset K, \\ K_m \text{ convexe fermé contenu dans un espace de dimention finie } \leq m, \\ \bigcup_{m=0}^{+\infty} K_m \text{ dense dans } K. \end{cases}$$

On commence par résoudre le problème approché suivant : Trouver $u_m \in K_m$ tel que

$$\langle A(u_m), v-u_m\rangle_{V',V} \geq \langle f, v-u_m\rangle_{V',V} \quad v \in K_m. \tag{2.13}$$

Soit V_m l'espace de dimension $\leq m$ contenant K_m, espace que l'on munit a une structure hilbertienne notée $[\cdot,\cdot]$ (produit scalaire dépendent de m). Si $g \in V'$, la forme $w \to \langle g, w\rangle_{V',V}$ est continue sur V_m, d'après le théorème de Riesz dans V_m on a,

$$\langle g, w\rangle_{V',V} = [\mathcal{J}g, w], \quad \mathcal{J}g \in V_m, \quad \mathcal{J} \in \mathsf{L}_c(V', V_m).$$

Avec ces notations, on a

$$\langle Au_m, v-u_m\rangle_{V',V} = [\mathcal{J}Au_m, v-u_m], \quad \langle f, v-u_m\rangle_{V',V} = [\mathcal{J}f, v-u_m],$$

donc (2.13) équivaut à

$$[\mathcal{J}A(u_m), v-u_m] \geq [\mathcal{J}f, v-u_m] \quad \forall v \in K_m\,, \tag{2.14}$$

ou encore à

$$\left[u_m - u_m - \mathcal{J}f + \mathcal{J}A\left(u_m\right), v - u_m\right] \geq 0, \quad \forall v \in K_m. \tag{2.15}$$

Par définition K_m est un convexe fermé borné non vide de V_m pour tout m. La projection orthogonale sur K_m pour le produit scalaire $[\cdot,\cdot]$ notée P_m est caractérisée par $P_m(v) \in K_m$ et

$$\forall w \in K_m, \quad [v - P_m(v), w - P_m(v)] \leq 0.$$

L'équation (2.15) équivaut encore à

$$u_m = P_m\left(u_m + \mathcal{J}f - \mathcal{J}A\left(u_m\right)\right), \tag{2.16}$$

et l'existence de u_m vérifiant (2.16) résulte alors du théorème de point fixe de Brouwer 1.17. En effet, on définit alors une application $T_m : K_m \longrightarrow K_m$ par

$$\forall v \in K_m, \quad T_m(v) = P_m(v + \mathcal{J}f - \mathcal{J}A(v)),$$

et on montre la continuité de T_m. Pour cela, il n'y a plus qu'à montrer la continuité de cette application de $K_m \to V'$ faible. Or soit $u_n \to u$ dans K_m, alors $A(u_n)$ est borné dans V' et on peut donc supposer par extraction éventuelle que $A\left(u_n\right) \rightharpoonup \chi$ dans V' faible. Alors

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle_{V',V} \leq 0,$$

d'après la pseudo-monotonie, on a

$$\langle A(u), u - v\rangle_{V',V} \leq \liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - v\rangle_{V',V} = \langle \chi, u - v\rangle_{V',V},$$

donc

$$\langle \chi - A(u), u - v\rangle_{V',V} \geq 0 \quad \forall v \in V,$$

on prend $v = u \pm w$ avec $w \in V$, on obtient

$$\langle \chi - Au, w\rangle_{V',V} = 0 \quad \forall w \in V,$$

d'où $\chi = A(u)$, et la continuité est établie. D'après le théorème de Brouwer, T_m admet au moins un point fixe $u_m \in K_m$.

Étape 2 : Puisque K est borné et $K_m \subset K$, (u_m) demeure dans un borné de K. De plus, (Au_m) demeure dans un borné de V'. On peut donc extraire une suite $u_{n'}$ telle que

$$u_{n'} \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ faible .} \tag{2.17}$$

D'autre part, on a K est convexe et fermé donc K est faiblement fermé. On en déduit que $u \in K$. On va montrer que

$$\limsup_{n' \longrightarrow +\infty} \langle A(u_{n'}), u_{n'} - u \rangle_{V',V} \leq 0. \tag{2.18}$$

En effet, comme $\bigcup_{m=0}^{+\infty} K_m$ est dense dans K, on peut trouver u_0 dans $\bigcup_{m=0}^{+\infty} K_m$ tel que

$$\|u - u_0\|_V \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0 \text{ donné arbitrairement.} \tag{2.19}$$

D'après (2.13), alors

$$\langle A(u_{n'}), u_{n'} - u_0 \rangle_{V',V} \leq \langle f, u_{n'} - u_0 \rangle_{V',V},$$

pour n' assez grand et de (2.19), on obtient

$$\langle A(u_{n'}), u_0 - u \rangle_{V',V} \leq c\epsilon, \quad \text{où } c = \|f\|_{V'}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n' \longrightarrow +\infty} \langle A(u_{n'}), u_{n'} - u \rangle_{V',V} \\
&= \limsup_{n' \longrightarrow +\infty} [\langle A(u_{n'}), u_{n'} - u_0 \rangle_{V',V} + \langle A(u_{n'}), u_0 - u \rangle_{V',V}] \\
&\leq c\epsilon + \langle f, u - u_0 \rangle_{V',V} \leq c_1 \epsilon,
\end{aligned}$$

d'où (2.18).
D'après la pseudo-monotonie,

$$\liminf_{n' \longrightarrow +\infty} \langle A(u_{n'}), u_{n'} - v \rangle_{V',V} \geq \langle A(u), u - v \rangle_{V',V}, \quad \forall v \in V. \tag{2.20}$$

Si $v \in \bigcup_{m=0}^{+\infty} K_m$ et d'après (2.13), on a, pour n' assez grand

$$\langle A(u_{n'}), u_{n'} - v \rangle_{V',V} \leq \langle f, u_{n'} - v \rangle_{V',V},$$

d'où

$$\liminf_{n' \longrightarrow +\infty} \langle A(u_{n'}), u_{n'} - v \rangle_{V',V} \leq \langle f, u - v \rangle_{V',V},$$

et donc

$$\langle A(u), u-v\rangle_{V',V} \leq \langle f, u-v\rangle_{V',V} \quad \forall v \in \bigcup_{m=0}^{+\infty} K_m,$$

et comme $\bigcup_{m=0}^{+\infty} K_m$ est dense dans K, on en déduit (2.12).

□

Cas 2 : K est non borné et A est coercif :

Théorème 2.4. *Soit K un ensemble convexe fermé non borné de V. Soit A un opérateur pseudo-monotone de $K \to V'$, et coercif au sens suivant*

$$\begin{cases} \textit{il existe } v_0 \in K \textit{ tel que} \\ \dfrac{\langle A(v), v-v_0\rangle_{V',V}}{\|v\|_V} \to +\infty \textit{ si } \|v\|_V \to \infty, v \in K. \end{cases} \tag{2.21}$$

Alors, pour f donné dans V', il existe $u \in K$ vérifie (2.12).

Preuve. Soit $B_R = \{v \mid v \in V, \|v\|_V \leq R\}, \quad K_R = K \cap B_R$. Comme K_R est convexe fermé borné, il existe, d'après le Théorème 2.3, $u_R \in K_R$ tel que

$$\langle A\left(u_R\right), v-u_R\rangle_{V',V} \geq \langle f, v-u_R\rangle_{V',V} \quad \forall v \in K_R. \tag{2.22}$$

On choisit $R \geq R_0$, R_0 tel que $\|v_0\| \leq R_0$. Alors, on peut prendre $v = v_0$ dans (2.22) d'où l'on déduit, grâce à (2.21), que

$$\|u_R\| \leq C. \tag{2.23}$$

En effet, on a

$$\langle A(u_R), u_R - v_0\rangle_{V',V} \leq \langle f, u_R - v_0\rangle_{V',V} \leq \|f\|_{V'}(\|u_R\|_V + \|v_0\|_V).$$

En divisant l'inégalité par $\|u_R\|_V$ (que l'on suppose non nul), on obtient

$$\frac{\langle Au_R, u_R - v_0\rangle_{V',V}}{\|u_R\|_V} \leq \|f\|_{V'}\left(1 + \frac{\|v_0\|_V}{\|u_R\|_V}\right),$$

supposons qu'il existe une suite $R_n \longrightarrow +\infty$ telle que $\|u_{R_n}\|_V \longrightarrow +\infty$. Alors, on a $\dfrac{\|v_0\|_V}{\|u_{R_n}\|_V} \longrightarrow 0$ et l'inégalité ci-dessus contredit la coercivité de A, il existe donc une constante C vérifiant (2.23). Alors, $A\left(u_R\right)$ demeure dans un borné de V' et l'on peut donc extraire une suite $R \to \infty$ telle que $u_R \rightharpoonup u$ dans V faible, $A\left(u_R\right) \rightharpoonup \chi$ dans V' faible. Puisque K est faiblement fermé, $u \in K$.

D'autre part,

$$\langle A\left(u_R\right), u_R - u\rangle_{V',V} \leq \langle f, u_R - u\rangle_{V',V},$$

dès que $R \geq \|u\|_V$, et donc

$$\limsup_{R \longrightarrow +\infty} \langle A\left(u_R\right), u_R - u\rangle_{V',V}, \leq 0,$$

et donc, d'après la pseudo-monotonie,

$$\liminf_{R \longrightarrow +\infty} \langle A\left(u_R\right), u_R - v\rangle_{V',V} \geq \langle A(u), u - v\rangle_{V',V}, \tag{2.24}$$

et comme

$$\liminf_{R \longrightarrow +\infty} \langle A\left(u_R\right), u_R - v\rangle_{V',V} \leq \langle f, u_R - v\rangle_{V',V} \rightarrow \langle f, u - v\rangle_{V',V} \quad \forall v \in K,$$

on déduit de (2.24) que

$$\langle A(u), u - v\rangle_{V',V} \leq \langle f, u - v\rangle_{V',V} \quad \forall v \in K,$$

d'où (2.12).
On peut donner une autre démonstration, soit u_R une solution de (2.22), on a $\|u_R\|_V \leqslant C$ et si l'on choisit $R > C$ alors u_R est solution de (2.12). En effet, si w est pris quelconque dans K, on a (grâce au fait que $\|u_R\|_V < R$)

$$v = (1-\lambda)u_R + \lambda w \in K_R \text{ pour } \lambda > 0 \text{ assez petit,}$$

avec ce choix de v, (2.22) donne

$$\lambda\langle A(u_R), w - u_R\rangle_{V',V} \geq \lambda\langle f, w - u_R\rangle_{V',V},$$

en divisant par $\lambda > 0$, on obtient

$$\langle A\left(u_R\right), w - u_R\rangle_{V',V} \geq \langle f, w - u_R\rangle_{V',V} \quad \forall w \in K.$$

D'où le résultat. □

Théorème 2.5. *On suppose que l'opérateur A est strictement monotone (voir Définition 1.33), alors (2.12) admet au plus une solution.*

Preuve. Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions de

$$\begin{aligned} &\langle A(u_1), v - u_1\rangle_{V',V} \geq \langle f, v - u_1\rangle_{V',V} \quad \forall v \in K, \\ &\langle A\left(u_2\right), v - u_2\rangle_{V',V} \geq \langle f, v - u_2\rangle_{V',V} \quad \forall v \in K, \end{aligned}$$

on prend $v = u_2$ (resp. $v = u_1$) dans la première (resp. deuxième) inéquation, et en additionnant, on obtient

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle_{V',V} \leq 0,$$

comme l'opérateur A est strictement-monotone on obtient $u_1 = u_2$. $\square$

Inéquations variationnelles non linéaires de deuxième espèce

Soit A un opérateur non linéaire de $V \to V'$ et j une fonction convexe propre, trouver $u \in V$ tel que

$$\langle A(u) - f, v - u \rangle_{V',V} + j(v) - j(u) \geq 0 \quad \forall v \in V. \tag{2.25}$$

Théorème 2.6. *Soit A un opérateur pseudo-monotone de $V \to V'$, j une fonction convexe propre s.c.i. On suppose que*

$$\begin{cases} \textit{il existe } v_0 \textit{ tel que } j(v_0) < \infty \textit{ et} \\ \frac{\langle A(u), u - v_0 \rangle_{V',V} + j(u)}{\|u\|_V} \to \infty \textit{ si } \|u\|_V \to \infty. \end{cases} \tag{2.26}$$

Alors, pour f donné dans V', il existe $u \in V$ solution de (2.25).

Preuve. Le Théorème 2.6 se ramène essentiellement au Théorème 2.3, en utilisant l'épigraphe de j comme convexe. On introduit donc :

$$\tilde{V} = V \times \mathbb{R}, \quad \tilde{K} = epi(j),$$
$$\tilde{A}(\tilde{v}) = \{A(v), 0\} \text{ pour } \tilde{v} = \{v, \xi\} \in \tilde{V}.$$

L'opérateur $\tilde{A}$ est pseudo-monotone. Vérifions que (2.25) équivaut à trouver $\tilde{u} \in \tilde{K}$ tel que

$$\langle \tilde{A}(\tilde{u}) - \tilde{f}, \tilde{v} - \tilde{u} \rangle_{V',V} \geq 0, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{K}, \tag{2.27}$$

où $\tilde{f} = \{f, -1\} \in \tilde{V}'$. En effet, en explicitant, (2.27) équivaut à trouver $\tilde{u} = \{u, \alpha\}$ tel que

$$\begin{cases} \langle A(u) - f, v - u \rangle_{V',V} + \xi - \alpha \geq 0 \quad \forall \xi \geq j(v), \\ \tilde{u} \in \tilde{K} \text{ donc } \alpha \geq j(u). \end{cases} \tag{2.28}$$

Mais (2.28) équivaut à

$$\langle A(u) - f, v - u \rangle_{V',V} + j(v) - \alpha \geq 0,$$

et on pose $v = u$, on trouve $\alpha \leq j(u)$ donc $\alpha = j(u)$, d'où (2.25).

Reste à résoudre (2.27). On introduit

$$\tilde{K}_R = \left\{ \tilde{v} \,|\, \tilde{v} = \{v, \xi\} \in \tilde{K}, \|v - v_0\|_V + |\xi - j(v_0)| \leq R \right\},$$

alors $\tilde{K}_R$ est borné dans $\tilde{V}$ et d'après le Théorème 2.3 , il existe $\tilde{u}_R \in \tilde{K}_R$ tel que

$$\langle \tilde{A}(\tilde{u}_R) - \tilde{f}, \tilde{v} - \tilde{u}_R \rangle_{V',V} \geq 0 \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{K}_R. \tag{2.29}$$

D'après la définition de $\tilde{K}_R$, on peut prendre dans (2.29)

$$\tilde{v} = \tilde{v}_0 = \{v_0, j(v_0)\}.$$

Si $\tilde{u}_R = \{u_R, \alpha_R\}$, alors (2.29) donne

$$\langle A(u_R), u_R - v_0 \rangle_{V',V} + \alpha_R \leq \langle f, u_R - v_0 \rangle_{V',V} + j(v_0), \tag{2.30}$$

et comme $\alpha_R \geq j(u_R)$ on en déduit

$$\langle A(u_R), u_R - v_0 \rangle_{V',V} + j(u_R) \leq \langle f, u_R - v_0 \rangle_{V',V} + j(v_0),$$

d'où

$$\langle A(u_R), u_R - v_0 \rangle_{V',V} + j(u_R) \leq c(1 + \|u_R\|_V). \tag{2.31}$$

D'après (2.26) et (2.31), en utilisant le même raisonnement comme dans (2.23) on obtient que $\|u_R\|_V \leq$ constante. Mais alors (2.30) donne $\alpha_R \leq$ constante. En utilisant (2.26), on a

$$\alpha_R \geq j(u_R) \geq -c \|u_R\|_V,$$

on voit que $\|u_R\|_V + |\alpha_R| \leq c_1 =$ constante indépendante de R. On en déduit

$$\|u_R - v_0\|_V + |\alpha_R - j(v_0)| \leq c_2,$$

et on fait comme dans la deuxième démonstration du Théorème 2.4 on obtient que pour $R > c_2$, $\tilde{u}_R$ est solution du problème cherché.

□

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, on présente deux applications pour les inéquations variationnelles linéaires et non linéaires de type premier espèce et deuxième espèce, où on a déjà donné les théorèmes d'existence et d'unicité pour ces inéquations dans le chapitre 2. On commence par le problème de Poisson-Signorini (voir [1]), mais dans ce travail on suppose que le deuxième membre $f = f(x, u)$. Puis, on prend comme une deuxième application le problème de Stokes avec des conditions aux limites non-linéaires dans le cas stationnaire (voir [21], [2], [9]).

3.1 Problème de Signorini scalaire

Ce problème est un problème de contact sans fortement entre un solide élastique et une fondation rigide qui est maintenant très répondue dans la littérature.

3.1.1 Description du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné lipschitzien avec $d = 2$ ou 3 et n la normale extérieure à sa frontière notée $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C$. On suppose que le mesure de Γ_D est non nulle, on impose des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes sur cette partie, sur la partie Γ_N on prend une condition de Neumann et sur Γ_C, on suppose que le solide élastique soit en contact avec un obstacle rigide. Le problème de Poisson–Signorini consiste à trouver le déplacement u solution du système suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), \text{ dans } \Omega \\ u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad \text{sur } \Gamma_N \\ u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \geq 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_C, \end{cases} \tag{3.1}$$

où f est une force volumique sur Ω. La dernière condition sur Γ_C s'appelle la loi de contact de Signorini.

3.1.2 Formulation variationnelle

Le cadre fonctionnel approprié pour le problème (3.1) fait intervenir le convexe fermé de $H^1(\Omega)$

$$K(\Omega) := \left\{ \varphi \in H^1(\Omega), \quad \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_D \quad \varphi \geq 0 \text{ sur } \Gamma_C \right\},$$

muni de la norme suivante $\|u\|_{K(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$.
Supposons que $g \in L^2(\Gamma_N)$ et f est Carathéodory (voir [17]) tel que il existe $b \in L^2(\Omega)$ vérifiant

$$|f(x,u)| \leq b(x), \quad x \in \Omega,\, u(x) \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Proposition 3.1. *La formulation faible du problème de Signorini (3.1) conduit à l'inéquation variationnelle suivante*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, \varphi - u) \geq L_u(\varphi - u), \quad \forall \varphi \in K(\Omega), \end{cases} \tag{3.3}$$

où

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad L_u(\varphi) = \int_\Omega f(x,u)\varphi \, dx + \int_{\Gamma_N} g\varphi \, ds.$$

Preuve. En multipliant la première équation du problème (3.1) par $(\varphi - u)$, on intègre sur Ω et en utilisant la formule de Green on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\varphi - u)\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\varphi - u)\, ds = \int_\Omega f(x,u)(\varphi - u)\, dx, \quad \forall \varphi \in K(\Omega).$$

On peut écrire

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\varphi - u)\, ds = \int_{\Gamma_C} \frac{\partial u}{\partial n}(\varphi - u)\, ds + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n}(\varphi - u)\, ds + \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n}(\varphi - u)\, ds,$$

par ailleurs on a

- Sur Γ_D $\quad u = \varphi = 0, \quad \displaystyle\int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n}(\varphi - u)\, ds = 0.$

- Sur Γ_N $\quad \displaystyle\frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n}(\varphi - u)\, ds = \int_{\Gamma_N} g(\varphi - u)\, ds.$

- Sur Γ_C $\quad \displaystyle\int_{\Gamma_C} \frac{\partial u}{\partial n}(\varphi - u)\, ds \geq 0.$

Ainsi, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\varphi - u)\, dx \geq \int_\Omega f(x,u)(\varphi - u)\, dx + \int_{\Gamma_N} g(\varphi - u)\, ds,$$

donc le résultat. □

3.1.3 Résultat d'existence et d'unicité

Problème auxiliaire

Pour $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$, on considère le problème auxiliaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K(\Omega) \text{ vérifiant} \\ a(u, \varphi - u) \geq L_{\tilde{u}}(\varphi - u), \quad \forall \varphi \in K(\Omega), \end{array} \right. \tag{3.4}$$

où

$$L_{\tilde{u}}(\varphi) = \int_\Omega f(x, \tilde{u})\varphi\, dx + \int_{\Gamma_N} g\varphi\, ds.$$

Théorème 3.1. *Le problème (3.4) admet une unique solution.*

Preuve.

1) $a : K(\Omega) \times K(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire, symétrique. On montre qu'elle est continue. En effet, par l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient

$$|a(u, \varphi)| = |\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{K(\Omega)} \|\varphi\|_{K(\Omega)}.$$

2) a est coercive dans $K(\Omega)$, en effet,

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

d'après l'inégalité de Poincaré on a (voir la Remarque 1.9)

$$\forall u \in K(\Omega), \quad \int_\Omega |u|^2\, dx \leq C_p \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

D'où
$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1+C_p}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

donc
$$a(u,u) \geq \frac{1}{1+C_p}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \alpha\|u\|^2_{K(\Omega)}.$$

D'autre part on a $L_{\tilde{u}}$ est linéaire. De plus elle est continue. D'après (3.2) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
|L_{\tilde{u}}(u)| &= \Big|\int_\Omega f(x,\tilde{u})u\,dx + \int_{\Gamma_N} g\,u\,ds\Big| \\
&\leq \int_\Omega |f(x,\tilde{u})||u|\,dx + \int_{\Gamma_N} |g||u|\,ds \\
&\leq \|b\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)}\|u\|_{L^2(\Gamma_N)}.
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de l'application trace

$$\exists C_0 > 0, \quad \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

on obtient
$$|L_{\tilde{u}}(u)| \leq C'\|u\|_{K(\Omega)}, \quad C' = \|b\|_{L^2(\Omega)} + C_0\|g\|_{L^2(\Gamma_N)}.$$

D'après le théorème de Stampacchia 2.1 le problème (3.4) admet une unique solution. □

Théorème 3.2. [17] *Si f est de Carathéodory tel que pour tout $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}$ et p.p sur Ω, on a*

$$|f(x,\boldsymbol{s})| \leq c|\boldsymbol{s}| + b(x),\ b \in L^2(\Omega),\ c \geq 0,\ b \geq 0,$$

alors $\tilde{f}(u)(.) = f(.,u(.))$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 3.3. *Le problème (3.3) admet au moins une solution.*

Preuve. La preuve est présentée en plusieurs étapes,

- **Étape 1 :** Définition de l'opérateur de point fixe. Soit

$$\mathcal{S} = \left\{\varphi \in L^2(\Omega), \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq R\right\},$$

où $R > 0$ sera fixé plus tard . On définit l'opérateur

$$\begin{cases} T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \\ \qquad \tilde{u} \mapsto T(\tilde{u}) = u, \end{cases}$$

on cherche $R > 0$ tel que $T(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. Soit $u \in L^2(\Omega)$ quelconque, on prend $\varphi = 0$ dans

(3.4) on obtient

$$a(u,u) \leq L_{\tilde{u}}(u),$$

comme a est coercive et $L_{\tilde{u}}$ est continue, on obtient

$$\alpha \|u\|^2_{K(\Omega)} \leq C' \|u\|_{K(\Omega)}.$$

donc

$$\|T(\tilde{u})\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{K(\Omega)} \leq \frac{C'}{\alpha}. \tag{3.5}$$

Pour assurer que $T(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$, il suffit de prendre $R = \frac{C'}{\alpha}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ est un convexe fermé de $L^2(\Omega)$, de plus borné.

- **Étape 2 :** Montrons que $T(\mathcal{S})$ est relativement compact. Pour cela, on doit établir que pour toute suite $(u_n)_n$ de $T(\mathcal{S})$ (c-à-d, il existe $\tilde{u}_n \in \mathcal{S}$ tel que $u_n = T(\tilde{u}_n)$). On peut extraire une sous suite qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$. En effet, pour tout $\varphi \in K(\Omega)$, on a

$$a(u_n, \varphi - u_n) \geq L_{\tilde{u}_n}(\varphi - u_n), \tag{3.6}$$

donc, d'après ce qui précède (c.f (3.5)), on a

$$\|u_n\|_{K(\Omega)} \leq \frac{C'}{\alpha}. \tag{3.7}$$

D'après l'injection compacte de $K(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ notée encore $(u_n)_n$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$. Ce qui montre que $T(\mathcal{S})$ est relativement compact.

- **Étape 3 :** Continuité de l'opérateur T. En effet, soit $(\tilde{u}_n)_n$ une suite dans $L^2(\Omega)$ qui converge fortement vers $\tilde{u}$, on doit donc montrer que $T(\tilde{u}_n) \longrightarrow T(\tilde{u})$ dans $L^2(\Omega)$.
A $\tilde{u_n}$ (resp. $\tilde{u}$), on associe $u_n = T(\tilde{u}_n)$ (resp. $u = T(\tilde{u})$) vérifiant (3.6) (resp.(3.4)). La suite $(u_n)_n$ vérifie (3.7) donc elle possède des sous-suites fortement convergentes dans $L^2(\Omega)$, on considère une telle sous-suite encore notée $(u_n)_n$, on prend $\varphi = u$ dans (3.6) on obtient

$$a(u_n, u - u_n) \geq L_{\tilde{u}_n}(u - u_n), \tag{3.8}$$

et $\varphi = u_n$ dans (3.4), on trouve

$$a(u, u_n - u) \geq L_{\tilde{u}}(u_n - u). \tag{3.9}$$

En additionnant (3.8) et (3.9), on obtient

$$a(u_n - u, u_n - u) \leq L_{\tilde{u}_n}(u_n - u) - L_{\tilde{u}}(u_n - u),$$

d'où
$$a(u_n - u, u_n - u) \leq \int_\Omega (f(x, \tilde{u}_n) - f(x, \tilde{u}))(u_n - u)\, dx.$$
En utilisant la coercivité de a et l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\alpha \|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \alpha \|u_n - u\|^2_{K(\Omega)} \leq \|f(\cdot, \tilde{u}_n) - f(\cdot, \tilde{u})\|_{L^2(\Omega)} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc, on a

$$\|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2\alpha^2} \|f(\cdot, \tilde{u}_n) - f(\cdot, \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Alors,

$$\|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha^2} \|f(\cdot, \tilde{u}_n) - f(\cdot, \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.10}$$

d'après le Théorème 3.2, on choisit $c = 0$ on obtient que $u \mapsto f(., u)$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. En passant à la limite dans (3.10), on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

c-à-d $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$, on a donc obtenu que toutes les sous-suites de $(u_n)_n$ qui sont fortement convergentes dans $L^2(\Omega)$ ont $u = T(\tilde{u})$ pour limite. Donc, avec (3.7) on peut conclure que toute la suite $(u_n)_n$ est convergente vers $u = T(\tilde{u})$ dans $L^2(\Omega)$, ce qui montre la continuité de T.

- **Étape 4** : Existence de point fixe, on voit que toutes les hypothèses nécessaires pour le théorème de point fixe de Schauder sont satisfaites, il existe un point fixe (c-à-d $T(\tilde{u}) = \tilde{u}$). Avec la notation $T(\tilde{u}) = u$ on obtient $\tilde{u} = u$, et

$$a(u, \varphi - u) \geq L_u(\varphi - u),$$

donc le problème (3.3) admet au moins une solution $u \in K(\Omega)$.

□

Théorème 3.4. *On suppose qu'en autre des hypothèses précédentes, f est décroissante. Alors la solution du problème* (3.3) *est unique.*

Preuve. Soient u_1, u_2 deux solutions satisfont les inéquations suivantes

$$\forall \varphi \in K(\Omega) \quad a(u_1, \varphi - u_1) \geq L_{u_1}(\varphi - u_1), \tag{3.11}$$

$$\forall \varphi \in K(\Omega) \quad a(u_2, \varphi - u_2) \geq L_{u_2}(\varphi - u_2). \tag{3.12}$$

On prend dans (3.11) $\varphi = u_2$ et dans (3.12) $\varphi = u_1$. En additionnant (3.11) et (3.12), on obtient

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq L_{u_1}(u_1 - u_2) - L_{u_2}(u_1 - u_2) = \int_\Omega (f(x,u_1) - f(x,u_2))\,(u_1 - u_2)\,dx.$$

D'après la coercivité de a et comme f est décroissante on a

$$\|u_1 - u_2\|^2_{K(\Omega)} \leq 0,$$

alors $u_1 = u_2$ donc on obtient le résultat. □

3.2 Problème de Stokes

Dans cette partie, on prend la deuxième application qui est le problème de Stokes avec des conditions aux limites non linéaires sur une partie du bord de type Tresca.
Soit ω un sous ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$ avec une frontière lipschitzienne continue. On considère le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ donné par

$$\Omega = \left\{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, x' \in \omega, 0 < x_3 < h\left(x'\right)\right\},$$

où $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3$. La frontière de Ω est $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, où

$$\Gamma_0 = \left\{(x', x_3) \in \bar{\Omega}, x_3 = 0\right\},$$

et

$$\Gamma_1 = \left\{(x', x_3) \in \bar{\Omega}, x_3 = h\left(x'\right)\right\} \cup \Gamma_L,$$

avec Γ_L est la partie latérale. On suppose que h est une fonction lipschitzienne continue et

$$\exists h_{\min}, h_{\max} > 0, h_{\min} < h\left(x'\right) < h_{\max}, \forall x' \in \mathbb{R}^2.$$

Les équations qui gouvernent l'écoulement d'un fluide sont

- La loi de conservation de la quantité du mouvement

$$\rho\frac{dv}{dt} - \operatorname{div}(2\mu D(v)) + \nabla P = \rho f, \quad \text{dans } \Omega\times]0, \tau[.$$

- La loi de conservation de la masse

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad \text{dans } \Omega\times]0, \tau[,$$

où v, ρ, P désignent respectivement la vitesse, la densité et la pression du fluide, f est le vecteur des forces extérieures donné. Le terme μ est la viscosité du fluide peut être constante où non constante.
Le tenseur des déformations $D(v)$ est donné par

$$D(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^t).$$

La loi de comportement s'écrit

$$\sigma = 2\mu D(v) - PI,$$

où I est le tenseur identité et σ est le tenseur des contraintes. On peut écrire aussi

$$\sigma_{ij} = 2\mu d_{ij}(v) - P\delta_{ij} \,,$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

D'autre part, on a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\rho.$$

Notons également qu'un mouvement est stationnaire si , $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. On néglige $(v \cdot \nabla)\, v$ et avec $\rho = 1$ dans l'équation du mouvement, on obtient le système de Stokes stationnaire suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu D(v)) + \nabla P = f \quad \text{dans}\, \Omega, \\ \operatorname{div}(v) = 0 \quad \text{dans}\, \Omega, \\ + \text{ conditions aux limites.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Conditions aux limites :

Les conditions aux limites constituent la traduction des interactions physiques avec le milieu extérieur. D'un point de vue mathématique, elles doivent être compatibles avec la nature des équations, de manière à assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème. D'un point de vue mécanique, elles doivent représenter le plus fidèlement possible le phénomène physique que l'on souhaite modéliser. La frontière du domaine Ω peut être soumise à différentes conditions aux limites.
On suppose que la vitesse vérifie la condition de Dirichlet homogène

$$v = 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Sur Γ_0 : on note n le vecteur normal unitaire extérieur à la frontière de Ω et par $u \cdot v$ (resp. $|u|$) le produit scalaire de deux vecteurs (resp. la norme euclidienne). On utilise dans toute la suite la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés.
On définit les vitesses normales et tangentielles sur Γ_0 par

$$v_n = v \cdot n = v_i n_i,\ v_t = (v_{t_i})_{1 \leq i \leq 3} \text{ avec } v_{t_i} = v_i - v_n n_i, 1 \leq i \leq 3,$$

et la composante normale et tangentielle de σ par

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j,\ \sigma_t = (\sigma_{t_i})_{1 \leq i \leq 3} \text{ avec } \sigma_{t_i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i, 1 \leq i \leq 3.$$

Le frottement est l'existence de forces s'exerçant sur une interface entre deux corps, et tendant à s'opposer au mouvement tangentiel relatif entre eux. Cela se traduit par l'existence d'une contrainte tangentielle notée σ_t. On modélise le frottement à l'interface fluide/paroi (sur Γ_0) par une loi de frottement non linéaire de type Tresca. On suppose que la composante tangentielle de la vitesse sur Γ_0 satisfait cette loi. Donc, on a (voir [11])

$$\begin{cases} |\sigma_t| < \ell \Rightarrow v_t = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ |\sigma_t| = \ell \Rightarrow \exists k \geq 0 \text{ tel que } v_t = -k\sigma_t \text{ sur } \Gamma_0, \end{cases}$$

où ℓ est une fonction strictement positive, appelée le seuil limite pour cette contrainte tangentielle.
- Lorsqu'il y a inégalité, il n'y a pas de frottement, donc la vitesse du fluide est nulle. On parle alors d'adhérence.
- Lorsque le seuil est atteint, le fluide et la surface se déplacent tangentiellement l'un par rapport à l'autre, il y a glissement et v_t est opposée à σ_t.
Cette condition représente deux situations physiques qui sont l'adhérence (quand $v_t = 0$) et le glissement (quand $v_t \neq 0$).
La composante normale de la vitesse sur Γ_0 est nulle

$$v_n = v \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \tag{3.14}$$

Finalement, le problème (3.13) complet consiste à trouver le champ de vitesse v et la pression P vérifiant les équations et les conditions aux limites suivantes ([9])

$$\begin{cases} -2\,\mathrm{div}(\mu D(v)) + \nabla P = f \quad \text{ dans } \Omega, \\ \mathrm{div}(v) = 0 \quad \text{ dans } \Omega, \\ v = 0 \quad \text{ sur } \Gamma_1, \\ v \cdot n = 0 \quad \text{ sur } \Gamma_0, \\ |\sigma_t| < \ell \Rightarrow v_t = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ |\sigma_t| = \ell \Rightarrow v_t = -k\sigma_t \text{ sur } \Gamma_0. \end{cases} \tag{3.15}$$

3.2.1 Formulation variationnelle du problème

Afin d'obtenir la formulation variationnelle du problème, on considère le lemme suivant

Lemme 3.1. [21] *La condition aux limites de Tresca est équivalente à la relation suivante.*

$$v_t \cdot \sigma_t + \ell |v_t| = 0, \ \ sur\ \Gamma_0.$$

De plus, on définit les espaces fonctionnels suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \left\{ v \in \mathbf{H}^1(\Omega),\, v = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\, v \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}, \\ \mathcal{V}_{\mathrm{div}} &= \left\{ v \in \mathcal{V},\, \mathrm{div}(v) = 0 \text{ dans } \Omega \right\}, \\ L^2_0(\Omega) &= \left\{ q \in L^2(\Omega),\, \int_\Omega q(x)\,dx = 0 \right\}, \end{aligned}$$

où $X^3 = \mathbf{X}$.
Les espaces $\mathcal{V}, \mathcal{V}_{div}$ sont munis de la norme

$$\|u\|_{1.2} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit

$$D(v) : D(\varphi) = d_{ij}(v) d_{ij}(\varphi),$$

et on note

$$|D(v)| = (d_{ij}(v) d_{ij}(v))^{\frac{1}{2}},$$

la norme euclidienne de $D(v)$.
On va distinguer deux cas

- Cas où la viscosité est constante $\mu =$ constante, $\mu > 0$.
- Cas où la viscosité est non constante dépend de la vitesse et le tenseur des déforma-

tions ($\mu = \mu(v, \mid D(v) \mid)$ est vérifie les hypothèses suivantes (voir [2], [9]) :

$$\exists \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R} \quad , 0 < \mu_0 \leq \mu(y,z) \leq \mu_1, \; \forall (y,z) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \tag{3.16}$$

$$\text{la fonction} \quad z \longmapsto \mu(\cdot, z) \text{ est monotone croissante sur } \mathbb{R}_+ \tag{3.17}$$

$$\text{la fonction} \quad (y,z) \longmapsto \mu(y,z) \text{ est continue sur } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

La formulation variationnelle du problème (3.15) est donnée par la proposition suivante

Proposition 3.2. *Supposons que $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\ell \in \mathbf{L}^2(\Gamma_0)$, soient v et P des solutions du problème (3.15), alors elles vérifient l'inéquation variationnelle elliptique suivante*

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in \mathcal{V}_{\mathrm{div}},\ P{\in}L_0^2(\Omega) \text{ tels que} \\ a(v, \varphi - v) - (P, \operatorname{div}(\varphi)) + j(\varphi) - j(v) \geq L(\varphi - v),\ \forall \varphi \in \mathcal{V}, \end{cases} \tag{3.19}$$

avec $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$,

$$a(v,\varphi) = 2\int_\Omega \mu D(v) : D(\varphi)\, dx,$$

et

$$j(\varphi) = \int_{\Gamma_0} \ell |v|\, dx', \quad L(\varphi) = \int_\Omega f \cdot \varphi\, dx.$$

La forme a est bilinéaire si μ constante et non linéaire si $\mu = \mu(v, |D(v)|)$.

Preuve. La première équation dans le problème (3.15) s'écrit

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \quad i = 1,2,3. \tag{3.20}$$

Pour obtenir l'inéquation variationnelle (3.19), supposons que v et P sont suffisamment régulières. Alors, pour $\varphi \in \mathcal{V}$, on multiplie les deux côtés de l'équation (3.20) par $(\varphi_i - v_i)$ puis en intègre sur Ω en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \partial_j (\varphi_i - v_i)\, dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\varphi_i - v_i) n_j\, ds = \int_\Omega f_i(\varphi_i - v_i)\, dx. \tag{3.21}$$

Comme $\varphi_i - v_i = 0$ sur Γ_1 alors

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\varphi_i - v_i) n_j\, ds = \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij}(\varphi_i - v_i) n_j\, dx'.$$

Observons que $\sigma_{ij} n_j$ est la i-ème composante du vecteur σ_n, qui peut être mis sous la forme $\sigma = \sigma_t + \sigma_n$ avec $\sigma_t = (\sigma_{t_1}, \sigma_{t_2}, \sigma_{t_3})$ et $\sigma_n = \sigma_n \cdot n$, d'où $\sigma_{ij} n_j = \sigma_{t_i} + \sigma_n n_i$. En utilisant cette égalité, on obtient

$$\int_{\Gamma_0} \sigma_{ij}(\varphi_i - v_i)n_j\, dx' = \int_{\Gamma_0} \sigma_{t_i}(\varphi_i - v_i)\, dx' + \int_{\Gamma_0} \sigma_n n_i(\varphi_i - v_i)\, dx'.$$

Puisque $(\varphi_i - v_i)n_i = 0$ sur Γ_0 alors

$$\int_{\Gamma_0} \sigma_{ij}(\varphi_i - v_i)n_j dx' = \int_{\Gamma_0} \sigma_{t_i}(\varphi_i - v_i)\, dx',$$

et (3.21) devient

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\partial_j(\varphi_i - v_i)\, dx = \int_{\Gamma_0} \sigma_{t_i}(\varphi_i - v_i)\, dx' + \int_{\Omega} f_i(\varphi_i - v_i)\, dx. \tag{3.22}$$

Pour utiliser la condition de Tresca on ajoute aux deux membres de (3.22) le terme

$$\int_{\Gamma_0} \ell(|\varphi| - |v|)\, dx',$$

d'où

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\partial_j(\varphi_i - v_i)\, dx + \int_{\Gamma_0} \ell(|\varphi| - |v|)\, dx' = \int_{\Omega} f_i(\varphi_i - v_i)\, dx + \mathcal{A}, \tag{3.23}$$

avec

$$\mathcal{A} = \int_{\Gamma_0} (\sigma_{t_i}(\varphi_i - v_i) + \ell(|\varphi| - |v|))\, dx' = \int_{\Gamma_0} \sigma_{t_i}\varphi_i\, dx' - \int_{\Gamma_0} v_i\sigma_{t_i}\, dx' + \int_{\Gamma_0} \ell|\varphi|\, dx' - \int_{\Gamma_0} \ell|v|\, dx'.$$

Montrons que $\mathcal{A}$ est positif. On déduit de (3.14) que $v = v_t$, sur Γ_0, et d'après le Lemme 3.1 , le terme $\mathcal{A}$ devient

$$\mathcal{A} = \int_{\Gamma_0} (\sigma_t \cdot \varphi + \ell|\varphi|)\, dx'.$$

Or $\sigma_t \cdot \varphi \geq -|\sigma_t||\varphi|$ et $|\sigma_t| \leq \ell$ sur Γ_0, on obtient

$$\sigma_t \cdot \varphi + \ell|\varphi| \geq 0 \text{ sur } \Gamma_0.$$

Donc $\mathcal{A}$ est positif, et (3.23) devient

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\partial_j(\varphi_i - v_i)\, dx + \int_{\Gamma_0} \ell|\varphi|\, dx' \geq \int_{\Omega} f_i(\varphi_i - v_i)\, dx.$$

En remplaçant σ_{ij} par son expression, on trouve l'inéquation variationnelle suivante

$$\int_{\Omega} 2\mu d_{ij}(v)\partial_j(\varphi_i - v_i)\, dx - \int_{\Omega} P \operatorname{div}(\varphi)\, dx + \int_{\Gamma_0} \ell(|\varphi| - |v|)\, dx' \geq \int_{\Omega} f_i(\varphi_i - v_i)\, dx,$$

d'où le résultat. □

3.2.2 Étude du problème dont la viscosité est constante

Problème en vitesse

En prenant $\varphi \in \mathcal{V}_{\text{div}}$ dans l'inéquation variationnelle (3.19), on obtient

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in \mathcal{V}_{\text{div}} \text{ tels que} \\ a(v, \varphi - v) + j(\varphi) - j(v) \geq L(\varphi - v), \ \forall \varphi \in \mathcal{V}_{\text{div}}, \end{cases} \tag{3.24}$$

c'est une inéquation variationnelle elliptique linéaire de deuxième espèce. Pour l'existence et l'unicité de la solution de cette inéquation on a besoin du lemme suivant

Lemme 3.2.
(1). Pour tout $u \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, on a [2]

$$\int_\Omega |D(u)|^2 \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

*(2). **Inégalité de Korn.** Pour tout $u \in \mathcal{V}$, il existe $C_{Korn} > 0$* [16]

$$\left(\int_\Omega |D(u)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq C_{Korn} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De ce lemme, on déduit que

$$\alpha \|u\|_{1.2}^2 \leq 2 \int_\Omega \mu |D(u)|^2 \, dx \leq 2\mu \|u\|_{1.2}^2 \text{ où } \alpha = 2\mu C_{Korn}^2. \tag{3.25}$$

Théorème 3.5. *Le problème* (3.24) *admet une unique solution.*

Preuve. On a $\mathcal{V}_{\text{div}}$ est un espace de Hilbert. Pour appliquer le théorème de Stampacchia 2.2, on doit vérifier les hypothèses suivantes

(1). $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $\mathcal{V}_{\text{div}}$.

(2). $j(\cdot)$ est une fonction convexe, semi continue inférieurement et propre.

(3). $L(\cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{V}_{\text{div}}$.

En effet, on commence par (1). Il est clair que a est bilinéaire. Pour la continuité, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Lemme 3.2, on a

$$|a(u, \varphi)| \leq 2\mu \int_\Omega |D(u)||D(\varphi)| \, dx \leq 2\mu \|u\|_{1.2} \|\varphi\|_{1.2}, \quad \forall u, \varphi \in \mathcal{V}_{\text{div}}, \tag{3.26}$$

d'où a est continue.

- La coercivité, on a

$$a(u, u) = 2\mu \int_\Omega |D(u)|^2 \, dx,$$

en utilisant (3.25), on obtient

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_{1.2}^2, \quad \forall u \in \mathcal{V}_{\text{div}}.$$

Pour la convexité de j, on a pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}_{\text{div}}$

$$\begin{aligned} j(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) &= \int_{\Gamma_0} \ell |\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2| \, dx' \leq \int_{\Gamma_0} \ell |\lambda v_1| \, dx' + \int_{\Gamma_0} \ell |(1-\lambda)v_2| \, dx' \\ &\leq \lambda \int_{\Gamma_0} \ell |v_1| \, dx' + (1-\lambda) \int_{\Gamma_0} \ell |v_2| \, dx' \leq \lambda j(v_1) + (1-\lambda) j(v_2). \end{aligned}$$

Montrons que j est lipschitzienne. En effet, soient $v, u \in \mathcal{V}_{\text{div}}$, on a

$$|j(v) - j(u)| = \left| \int_{\Gamma_0} \ell |v| \, dx' - \int_{\Gamma_0} \ell |u| \, dx' \right| \leq \int_{\Gamma_0} \ell |v-u| \, dx'.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité de l'application trace, on a

$$|j(v) - j(u)| \leq C_0 \|\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_0)} \|v-u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|v-u\|_{1.2}, \text{ où } C = C_0 \sqrt{1 + C_p} \|\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_0)},$$

comme j est lipschitzienne donc continue, on déduit que j et s.c.i. De plus, on a j est propre. La forme L est linéaire et continue. En effet, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré, on obtient

$$|L(v)| = \left| \int_\Omega f \cdot v \, dx \right| \leq \int_\Omega |f||v| \, dx \leq \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \sqrt{C_p} \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|v\|_{1.2}.$$

Toutes les hypothèses du théorème de Stampacchia sont satisfaites, il existe un unique solution $v \in \mathcal{V}_{\text{div}}$ vérifiant le problème (3.24). □

Remarque 3.1. *On remarque que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique alors v est solution du problème de minimisation suivant*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } v \in \mathcal{V}_{\text{div}} \textit{ tels que} \\ J(v) \leq J(\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{V}_{\text{div}} \quad \textit{où } J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) + j(v) - L(v). \end{cases}$$

Recherche de la pression

Théorème 3.6. *Soit $f \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ et $\ell \in \boldsymbol{L}^2(\Gamma_0)$, il existe un unique (à une constante près) $P \in L_0^2(\Omega)$ vérifiant l'inéquation variationnelle (3.19) avec $\mu =$ constante.*

Preuve. Soit v solution du problème (3.24), pour tout $\psi \in H^1_{0\cdot\text{div}}$, on prend $\varphi = v \pm \psi$ dans

(3.24) on a (voir [9])

$$a(v, \psi) = L(\psi), \quad \forall \varphi \in H^1_{0\cdot\mathrm{div}}. \tag{3.27}$$

Considérons la forme linéaire $\mathcal{L}$ définie sur $\mathcal{V}$ par

$$\mathcal{L}(\psi) = \int_\Omega f \cdot \psi \, dx - a(v, \psi). \tag{3.28}$$

On a

$$|\mathcal{L}(\psi)| \leq \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\mu \|v\|_{1.2} \|\psi\|_{1.2} \leq (\sqrt{C_p} \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\mu \|v\|_{1.2}) \|\psi\|_{1.2}. \tag{3.29}$$

Donc $\mathcal{L}$ est continue sur $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ et $\mathcal{L} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. Avec (3.27) on a

$$\mathcal{L}(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in H^1_{0\cdot\mathrm{div}}.$$

En utilisant le Lemme 1.1, on obtient

$$\mathcal{L}(\psi) = \langle \nabla P, \psi \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}^1_0(\Omega)}, \quad \forall \psi \in \mathbf{H}^1_0(\Omega).$$

D'après le Corollaire 1.1 on obtient $P \in L^2_0(\Omega)$.
D'autre part, on a

$$a(v, \varphi) = 2\mu \int_\Omega d_{ij}(u) d_{ij}(\varphi) \, dx = 2\mu \int_\Omega d_{ij}(v) \partial_j \varphi_i \, dx.$$

Pour tout $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$, en utilisant la formule de Green, on obtient

$$a(v, \varphi) = -\langle \mathrm{div}(2\mu D(v)), \varphi \rangle_{\mathbf{D}'(\Omega), \mathbf{D}(\Omega)}.$$

De (3.27) on obtient

$$\int_\Omega f \cdot \varphi \, dx + \langle \mathrm{div}(2\mu D(v), \varphi \rangle_{\mathbf{D}'(\Omega), \mathbf{D}(\Omega)} = \langle \nabla P, \varphi \rangle_{\mathbf{D}'(\Omega), \mathbf{D}(\Omega)},$$

d'où

$$-\langle \mathrm{div}(\sigma), \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathbf{D}(\Omega),$$

donc

$$-\,\mathrm{div}(\sigma) = f \;\text{ dans }\; \mathbf{D}'(\Omega),$$

comme $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$

$$-\,\mathrm{div}(\sigma) = f \;\text{ dans }\; \mathbf{L}^2(\Omega),$$

ie,

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i,$$

on multiplie les deux côtés par $(\varphi_i - v_i) \in \mathcal{V}$, on fait les mêmes calculs comme dans la Proposition 3.2, on a

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\partial_j(\varphi_i - v_i)\,dx = \int_{\Gamma_0} \sigma_{t_i}(\varphi_i - v_i)\,dx' + \int_\Omega f_i(\varphi_i - v_i)\,dx,$$

d'où

$$a(v, \varphi - v) - (P, \mathrm{div}(\varphi)) - \int_\Omega f_i(\varphi_i - v_i)\,dx = \int_{\Gamma_0} \sigma_{t_i}(\varphi_i - v_i)\,dx',$$

on rajoute aux deux membres $(j(\varphi) - j(v))$ on obtient.

$$a(v, \varphi - v) - (P, \mathrm{div}(\varphi)) - \int_\Omega f \cdot (\varphi - v)\,dx + j(\varphi) - j(v) = B(v, \varphi), \tag{3.30}$$

où

$$B(v, \varphi) = \int_{\Gamma_0} \sigma_{t_i}(\varphi_i - v_i)\,dx' + j(\varphi) - j(v).$$

D'autre part, on a

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \cdot n\,ds = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V},$$

donc, d'après le Théorème 1.13, il existe $\hat{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tel que

$$\mathrm{div}(\hat{\varphi}) = 0, \;\text{ dans } \Omega \text{ et } \hat{\varphi} = \varphi \text{ sur } \partial\Omega.$$

Donc $\hat{\varphi} \in \mathcal{V}_{\mathrm{div}}$, avec (3.30)

$$a(v, \hat{\varphi} - v) - \int_\Omega f \cdot (\hat{\varphi} - v)\,dx + j(\hat{\varphi}) - j(v) = B(v, \hat{\varphi}),$$

or v vérifiant le problème (3.24) donc

$$a(v, \hat{\varphi} - v) - L(\hat{\varphi} - v) + j(\hat{\varphi}) - j(v) \geq 0,$$

donc

$$B(v, \hat{\varphi}) \geq 0.$$

Comme $B(v, \hat{\varphi}) = B(v, \varphi)$ car $\hat{\varphi} = \varphi$ sur $\partial\Omega$ on a

$$B(v, \varphi) \geq 0,$$

d'où (3.30) devient

$$a(v, \varphi - v) - (P, \operatorname{div}(\varphi)) + j(\varphi) - j(v) \geq L(\varphi - v),$$

ce qui montre que $(v, P) \in \mathcal{V}_{\text{div}} \times L_0^2(\Omega)$, solution de (3.19). $\square$

3.2.3 Étude du problème lorsque la viscosité dépend de la vitesse et le tenseur des déformations

Problème en vitesse

On définit l'opérateur non linéaire $A : \mathcal{V}_{\text{div}} \longrightarrow \mathcal{V}'_{\text{div}}$ par

$$\langle Av, \varphi \rangle = a(v, \varphi) = 2 \int_\Omega \mu(v, |D(v)|) d_{ij}(v) d_{ij}(\varphi)\, dx,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité entre $\mathcal{V}_{\text{div}}$ et $\mathcal{V}'_{\text{div}}$.
Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in \mathcal{V}_{\text{div}} \text{ tels que} \\ \langle Av, \varphi - u \rangle + j(\varphi) - j(v) \geq L(\varphi - v),\ \forall \varphi \in \mathcal{V}_{\text{div}}, \end{cases} \tag{3.31}$$

c'est une inéquation variationnelle elliptique non-linéaire de deuxième espèce. Pour montrer l'existence de la solution de ce problème, on considère le problème auxiliaire suivant [9]

$$\begin{cases} \text{Pour } \tilde{v} \in L^2(\Omega), \text{ on cherche } v \in \mathcal{V}_{\text{div}} \text{ vérifiant} \\ \langle A_{\tilde{v}} v, \varphi - v \rangle + j(\varphi) - j(v) \geq L(\varphi - v),\ \forall \varphi \in \mathcal{V}_{\text{div}}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Avec

$$\langle A_{\tilde{v}} v, \varphi \rangle = 2 \int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(v)|) d_{ij}(v) d_{ij}(\varphi)\, dx.$$

Théorème 3.7. *L'inéquation variationnelle* (3.32) *admet une unique solution.*

Preuve. On a la fonctionnelle j est convexe s.c.i et propre. De plus $A_{\tilde{v}}$ est coercif c-à-d

$$\begin{gathered} \exists v_0 \in \mathcal{V}_{\text{div}} \text{ tel que } j(v_0) < \infty \\ \lim_{\|v\|_{1.2} \to +\infty} \frac{\langle A_{\tilde{v}}(v), v - v_0 \rangle + j(v)}{\|v\|_{1.2}} = +\infty, \end{gathered}$$

vérifiant que $v_0 = 0$ convient. On fait comme dans la coercivité de a, mais en utilisant (3.16) et comme $j(v) \geq 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}_{\text{div}}$, on a

$$\frac{\langle A_{\tilde{v}} v, v\rangle + j(v)}{\|v\|_{1.2}} \geq \frac{\langle A_{\tilde{v}} v, v\rangle}{\|v\|_{1.2}} \geq 2\mu_0 C^2_{Korn} \|v\|_{1.2}, \tag{3.33}$$

d'où

$$\lim_{\|v\|_{1.2} \to +\infty} \frac{\langle A_{\tilde{v}} v, v\rangle + j(v)}{\|v\|_{1.2}} = +\infty,$$

donc $A_{\tilde{v}}$ est coercif.

-$A_{\tilde{v}}$ **est borné**. De même manière comme dans (3.26) mais avec (3.16) on obtient

$$|\langle A_{\tilde{v}} v, \varphi\rangle| \leq 2\mu_1 \|v\|_{1.2} \|\varphi\|_{1.2},$$

d'où

$$\|A_{\tilde{v}} v\|_{\mathcal{V}'_{\text{div}}} = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{|\langle A_{\tilde{v}} v, \varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{1.2}} \leq C, \quad \text{où } C = 2\mu_1 \|v\|_{1.2}.$$

L'opérateur $A_{\tilde{v}}$ est monotone. En effet, $A_{\tilde{v}}$ monotone c-à-d (voir [2], [9])

$$\langle A_{\tilde{v}}(u_1) - A_{\tilde{v}}(u_2), u_1 - u_2\rangle \geq 0, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{V}_{\text{div}}.$$

$$\begin{aligned}
&\langle A_{\tilde{v}}(u_1) - A_{\tilde{v}}(u_2), u_1 - u_2\rangle \\
=&2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_1)|) D(u_1 - u_2) : D(u_1)\, dx - 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|) D(u_2) D(u_1 - u_2)\, dx \\
=&2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_1)|) |D(u_1)|^2\, dx - 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_1)|) D(u_1) : D(u_2)\, dx \\
+&2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|) |D(u_2)|^2\, dx - 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|) D(u_1) : D(u_2)\, dx.
\end{aligned}$$

Du fait que

$$D(u_1) : D(u_2) \leq |D(u_1)||D(u_2)|,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle A_{\tilde{v}}(u_1) - A_{\tilde{v}}(u_2), u_1 - u_2\rangle \\
&\geq 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_1)|) |D(u_1)|^2\, dx - 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_1)|) |D(u_1)||D(u_2)|\, dx \\
&+ 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|) |D(u_2)|^2\, dx - 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|) |D(u_1)||D(u_2)|\, dx \\
&\geq 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_1)|) |D(u_1)|^2\, dx + 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|) |D(u_2)|^2\, dx \\
&- 2\int_\Omega \Big(\mu(\tilde{v}, |D(u_1)|) + \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|)\Big) |D(u_1)||D(u_2)|\, dx,
\end{aligned}$$

en utilisant

$$2|D(u_1)||D(u_2)| \leq |D(u_1)|^2 + |D(u_2)|^2,$$

on trouve

$$\begin{aligned}\langle A_{\tilde{v}}(u_1) - A_{\tilde{v}}(u_2), u_1 - u_2\rangle \geq{}& 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_1)|)|D(u_1)|^2\,dx + 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|)|D(u_2)|^2\,dx\\ &- \int_\Omega \Big(\mu(\tilde{v}, |D(u_1)|) + \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|)\Big)(|D(u_1)|^2 + |D(u_2)|^2)\,dx\\ &= \int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_1)|)|D(u_1)|^2\,dx - \int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_1)|)|D(u_2)|^2\,dx\\ &+ \int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|)|D(u_2)|^2\,dx - \int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|)|D(u_1)|^2\,dx,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\langle A_{\tilde{v}}(u_1) - A_{\tilde{v}}(u_2), u_1 - u_2\rangle \geq \int_\Omega \Big(\mu(\tilde{v}, |D(u_1)|) - \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|)\Big)(|D(u_1)|^2 - |D(u_2)|^2)\,dx\\ &= \int_\Omega \Big(\mu(\tilde{v}, |D(u_1)|) - \mu(\tilde{v}, |D(u_2)|)\Big)(|D(u_1)| - |D(u_2)|)(|D(u_1)| + |D(u_2)|)\,dx.\end{aligned}$$

D'après (3.17) on a

$$\langle A_{\tilde{v}}(u_1) - A_{\tilde{v}}(u_2), u_1 - u_2\rangle \geq 0.$$

De plus l'opérateur $A_{\tilde{v}}$ est hémicontinu, pour tous $u, v, w \in \mathcal{V}_{\text{div}}$, la fonction

$$\begin{cases} S_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\\ \qquad \lambda \longmapsto S_1(\lambda) = \langle A_{\tilde{v}}(u + \lambda v), w\rangle,\end{cases}$$

est continue, on a

$$S_1(\lambda) = 2\int_\Omega \mu(\tilde{v}, |D(u + \lambda v)|)D(u + \lambda v) : D(w)\,dx.$$

D'après (3.16) et pour presque tout $x \in \Omega$, la fonction

$$\lambda \longmapsto S_2(\lambda) = 2\mu(\tilde{v}, |D(u + \lambda v)|)D(u + \lambda v) : D(w),$$

est continue sur $\mathbb{R}$, soit $(\lambda_n)_n$ une suite convergente vers λ dans $\mathbb{R}$, alors

$$S_n = S_2(\lambda_n) \in L^1(\Omega) \text{ et } S_n \longrightarrow S_2(\lambda) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \text{ dans } L^1(\Omega).$$

En effet, la suite $(\lambda_n)_n$ étant bornée, il existe $N > 0$ tel que $|\lambda_n| < N$ pour $n \geq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}|S_n| \leq 2\mu_1|D(u + \lambda_n v) : D(w)| &\leq 2\mu_1(|D(u)| + |\lambda_n||D(v)|)|D(w)|\\ &\leq 2\mu_1(|D(u)| + N|D(v)|)|D(w)| = G \in L^1(\Omega),\end{aligned}$$

et G positive. Par le théorème de convergence dominée 1.9 $S_2(\lambda) \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega S_n \, dx \longrightarrow \int_\Omega S_2(\lambda) \, dx,$$

c-à-d

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_1(\lambda_n) = S_1(\lambda).$$

De la Proposition 1.6, l'opérateur $A_{\tilde{v}}$ est pseudo-monotone. Alors, d'après le Théorème 2.6, l'inéquation variationnelle (3.32) admet au moins une solution.

- L'unicité : supposons que l'inéquation variationnelle (3.32) admet deux solutions. Donc, elles vérifient les deux inéquations variationnelles (voir [9])

$$\langle A_{\tilde{v}} v_1, \varphi - v_1 \rangle + j(\varphi) - j(v_1) \geq L(\varphi - v_1), \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_{\text{div}}, \tag{3.34}$$

$$\langle A_{\tilde{v}} v_2, \varphi - v_2 \rangle + j(\varphi) - j(v_2) \geq L(\varphi - v_2), \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_{\text{div}}. \tag{3.35}$$

Prenons $\varphi = v_2$ dans (3.34) et $\varphi = v_1$ dans (3.35) puis en additionnant les deux inéquations variationnelles, on obtient

$$\langle A_{\tilde{v}} v_1 - A_{\tilde{v}} v_2, v_1 - v_2 \rangle \leq 0, \tag{3.36}$$

on pose $\mu(y,z) = \tilde{\mu}(y,z) + \frac{\mu_0}{2}$, où $\tilde{\mu}$ est définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. Avec (3.16), on a

$$0 < \frac{\mu_0}{2} \leq \tilde{\mu}(y,z) \leq \mu_1 - \frac{\mu_0}{2}, \quad \forall (y,z) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+.$$

Avec (3.17) et (3.18) on obtient aussi que $\tilde{\mu}$ vérifie les mêmes hypothèses que μ, donc

$$\begin{aligned}
&\langle A_{\tilde{v}}(v_1) - A_{\tilde{v}}(v_2), v_1 - v_2 \rangle \\
&= \mu_0 \int_\Omega D(v_1) : D(v_1 - v_2) \, dx + 2 \int_\Omega \tilde{\mu}(\tilde{v}, |D(v_1)|) D(v_1) : D(v_1 - v_2) \, dx \\
&- \mu_0 \int_\Omega D(v_2) : D(v_1 - v_2) \, dx - 2 \int_\Omega \tilde{\mu}(\tilde{v}, |D(v_2)|) D(v_2) : D(v_1 - v_2) \, dx.
\end{aligned}$$

En utilisant le même raisonnement comme dans l'étude de la monotonie de $A_{\tilde{v}}$, on a aussi

$$2 \int_\Omega \tilde{\mu}(\tilde{v}, |D(v_1)|) D(v_1) : D(v_1 - v_2) \, dx - 2 \int_\Omega \tilde{\mu}(\tilde{v}, |D(v_2)|) D(v_2) : D(v_1 - v_2) \, dx \geq 0,$$

d'où

$$\langle A_{\tilde{v}}(v_1) - A_{\tilde{v}}(v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq \mu_0 \int_\Omega (D(v_1) - D(v_2)) : D(v_1 - v_2) \, dx \geq \mu_0 \int_\Omega |D(v_1 - v_2)|^2 \, dx,$$

d'après l'inégalité de Korn et (3.36), on obtient

$$\mu_0 C_{Korn}^2 \|v_1 - v_2\|_{1.2}^2 \leq 0, \quad \|v_1 - v_2\|_{1.2}^2 = 0,$$

ce qui montre l'unicité. $\square$

Théorème 3.8. *L'inéquation variationnelle (3.32) admet au moins une solution.*

Preuve. L'existence de la solution de l'inéquation variationnelle (3.32) se démontre par l'application du théorème de point fixe de Schauder (voir [9]). On définit l'application

$$\Lambda : \mathbf{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$$
$$\tilde{v} \longmapsto \Lambda(\tilde{v}) = v.$$

On cherche $R > 0$ tel que $\Lambda(Z) \subset Z$ où

$$Z = \left\{ \varphi \in \mathbf{L}^2(\Omega), \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq R \right\},$$

soit $\tilde{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ quelconque, on prend $\varphi = 0$ dans (3.34) et comme $j(v) \geq 0$, pour tout $v \in \mathcal{V}_{\text{div}}$, on obtient

$$\langle A_{\tilde{v}} v, v \rangle \leq L(v) + j(0).$$

D'après ce qui précède (cf. (3.33)), on a

$$\langle A_{\tilde{v}} v, v \rangle \geq 2\mu_0 C_{Korn}^2 \|v\|_{1.2}^2.$$

D'autre part, on a

$$L(v) \leq \sqrt{C_p} \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|v\|_{1.2}$$

En utilisant l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{2\delta} a^2 + \frac{\delta}{2} b^2, \quad a, b \in \mathbb{R},\ \delta > 0. \tag{3.37}$$

Pour $\delta = 2\mu_0 C_{korn}^2$, on obtient

$$L(v) \leq \frac{1}{4\mu_0 C_{korn}^2} \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \mu_0 C_{korn}^2 \|v\|_{1.2}^2.$$

Donc,

$$\mu_0 C_{korn}^2 \|v\|_{1,2}^2 \leq \frac{1}{4\mu_0 C_{korn}^2} \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + j(0),$$

d'où

$$\|v\|_{1.2} \leq \sqrt{C_1}, \quad \text{où } C_1 = \Big(\frac{1}{4\mu_0 C_{Korn}^2} \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + j(0) \Big) \frac{1}{\mu_0 C_{korn}^2}. \tag{3.38}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \sqrt{C_p C_1},$$

c-à-d,

$$\|\Lambda(\tilde{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \sqrt{C_p C_1}.$$

Pour assurer que $\Lambda(Z) \subset Z$, il suffit de prendre $R = \sqrt{C_p C_1}$. L'ensemble Z est un convexe fermé de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ de plus borné.
Pour montrer que $\Lambda(Z)$ est relativement compact, on doit établir que pour toute suite $(v_n)_n$ de $\Lambda(Z)$ (c-à-d, il existe $\tilde{v}_n \in Z$ tel que $v_n = \Lambda(\tilde{v}_n)$) on peut extraire une sous suite qui converge fortement dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_{\text{div}}$ on a

$$\langle A_{\tilde{v}_n} v_n, \varphi - v_n \rangle + j(\varphi) - j(v_n) \geq L(\varphi - v_n).$$

D'après ce qui précède (cf (3.38))

$$\|v_n\|_{1.2} \leq \sqrt{C_1}. \tag{3.39}$$

D'après l'injection compacte de $\mathcal{V}_{div}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, il existe une sous- suite de $(v_n)_n$ notée encore $(v_n)_n$ converge fortement dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, ce qui montre que $\Lambda(Z)$ est relativement compact.
L'application Λ est continue. En effet, soit $(\tilde{v}_n)_n$ une suite dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ qui converge vers $\tilde{v}$, On doit donc montrer que $\Lambda(\tilde{v}_n) \to \Lambda(\tilde{v})$, dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
La suite $(v_n)_n$ satisfait (3.40) donc elle possède des sous suites fortement convergentes dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on considère une telle sous-suite notée encore $(v_n)_n$.
En utilisant le même raisonnement que dans l'étude de l'unicité de la solution du problème (3.32), on a aussi

$$\langle A_{\tilde{v}_n} v_n - A_{\tilde{v}} v, v_n - v \rangle \leq 0.$$

On a

$$\langle A_{\tilde{v}_n} v_n - A_{\tilde{v}} v, v_n - v \rangle = \langle A_{\tilde{v}_n} v_n - A_{\tilde{v}_n} v, v_n - v \rangle - \langle A_{\tilde{v}} v - A_{\tilde{v}_n} v, v_n - v \rangle.$$

Donc

$$\langle A_{\tilde{v}_n} v_n - A_{\tilde{v}} v, v_n - v \rangle \leq \langle A_{\tilde{v}} v - A_{\tilde{v}_n} v, v_n - v \rangle. \tag{3.40}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \langle A_{\tilde{v}_n} v_n - A_{\tilde{v}_n} v, v_n - v \rangle &= 2 \int_\Omega \mu(\tilde{v}_n, |D(v_n)|) D(v_n) : D(v_n - v)\, dx \qquad (3.41) \\ &- 2 \int_\Omega \mu(\tilde{v}_n, |D(v)|) D(v) : D(v_n - v)\, dx, \end{aligned}$$

on a $\mu(y,z)=\tilde{\mu}(y,z)+\dfrac{\mu_0}{2}$. En remplaçant dans (3.41), On a

$$\begin{aligned}
&\langle A_{\tilde{v}_n}v_n - A_{\tilde{v}_n}v, v_n - v\rangle\\
&= \mu_0\int_\Omega D(v_n):D(v_n-v)\,dx + 2\int_\Omega \tilde{\mu}(\tilde{v}_n,|D(v_n)|)D(v_n):D(v_n-v)\,dx\\
&-\mu_0\int_\Omega D(v):D(v_n-v)\,dx - 2\int_\Omega \tilde{\mu}(\tilde{v}_n,|D(v)|)D(v):D(v_n-v)\,dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\langle A_{\tilde{v}_n}v_n - A_{\tilde{v}_n}v, v_n - v)\rangle = \mu_0\int_\Omega |D(v_n-v)|^2\,dx&\\
+2\int_\Omega \tilde{\mu}(\tilde{v}_n,|D(v_n)|)D(v_n):D(v_n-v)\,dx&\\
-2\int_\Omega \tilde{\mu}(\tilde{v}_n,|D(v)|)D(v):D(v_n-v)\,dx.&
\end{aligned}$$

En utilisant le même raisonnement que dans l'étude de la monotonie de $A_{\tilde{v}}$ on a aussi

$$2\int_\Omega \tilde{\mu}(\tilde{v}_n,|D(v_n)|)D(v_n):D(v_n-v)\,dx - 2\int_\Omega \tilde{\mu}(\tilde{v}_n,|D(v)|)D(v):D(v_n-v)\,dx \geq 0.$$

D'où

$$\langle A_{\tilde{v}_n}v_n - A_{\tilde{v}_n}v, v_n - v\rangle \geq \mu_0\int_\Omega |D(v_n-v)|^2\,dx. \tag{3.42}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\langle A_{\tilde{v}}v - A_{\tilde{v}_n}v, v_n - v\rangle &= 2\int_\Omega [\mu(\tilde{v},|D(v)|)-\mu(\tilde{v}_n,|D(v)|)]D(v):D(v_n-v)\,dx\\
&\leq 2\int_\Omega \Big|\mu(\tilde{v},|D(v)|)-\mu(\tilde{v}_n,|D(v)|)\Big||D(v)||D(v_n-v)|\,dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young (3.37), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle A_{\tilde{v}}v - A_{\tilde{v}_n}v, v_n - v\rangle &\leq \frac{2}{\mu_0}\int_\Omega |\ \mu(\tilde{v},|D(v)|)-\mu(\tilde{v}_n,|D(v)|)\ |^2\ |D(v)|^2\,dx\\
&+\ \frac{\mu_0}{2}\int_\Omega |D(v_n-v)|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

En remplaçant (3.42) et (3.43) dans (3.40), on a

$$\frac{\mu_0}{2}\int_\Omega |D(v_n-v)|^2\,dx \leq \frac{2}{\mu_0}\int_\Omega |\ \mu(\tilde{v},|D(v)|)-\mu(\tilde{v}_n,|D(v)|)\ |^2\ |D(v)|^2\,dx. \tag{3.44}$$

On pose

$$\mathcal{F}_n = |\ \mu(\tilde{v},|D(v)|)-\mu(\tilde{v}_n,|D(v)|)\ |^2\ |D(v)|^2,$$

comme la suite $\tilde{v}_n \longrightarrow \tilde{v}$ fortement dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ lorsque $n\longrightarrow+\infty$ on obtient qu'il existe une sous suite de $(\tilde{v}_n)_n$ qui converge presque partout dans Ω et de (3.18) on a $\mathcal{F}_n \longrightarrow 0$ presque partout dans Ω. De plus, de (3.16), on a

$$|\mathcal{F}_n| \leq 4\mu_1^2 |D(v)|^2 \in L^1(\Omega).$$

Par le théorème de convergence dominée 1.9, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega \mathcal{F}_n \, dx = 0$. En passant à la limite dans (3.44), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n - v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 0,$$

c-à-d $\lim\limits_{n\to+\infty} \|v_n - v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0$ on a donc obtenu que toutes les sous-suites de $(v_n)_n$ qui sont fortement convergentes dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ont v pour limite. Donc avec (3.39) on peut conclure que toute la suite $(v_n)_n$ est convergente vers $v = \Lambda(\tilde{v})$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, ce qui montre la continuité de Λ. Avec le théorème de point fixe de Schauder 1.18, on obtient que Λ admet un point fixe (c-à-d $\Lambda(\tilde{v}) = \tilde{v}$). Avec la notation $\Lambda(\tilde{v}) = v$ on obtient $\tilde{v} = v$ et

$$\langle A_v v, \varphi - v \rangle + j(\varphi) - j(v) \geq L(\varphi - v).$$

Donc le problème (3.32) admet au moins une solution $v \in \mathcal{V}_{\text{div}}$. □

Théorème 3.9. *Le problème* (3.19) *admet au moins une solution avec* $\mu = \mu(v, |D(v)|)$.

Preuve. D'après l'hypothèse (3.16) sur la viscosité, on obtient

$$|\mathcal{L}(\psi)| \leq (\sqrt{C_p} \|f\|_{L^2(\Omega)} + 2\mu_1 \|v\|_{1.2}) \|\psi\|_{1.2}.$$

Donc, en utilisant le même raisonnement que dans le Théorème 3.6, on obtient que $(v, P) \in \mathcal{V}_{\text{div}} \times L_0^2(\Omega)$, solution de (3.19) avec $\mu = \mu(v, |D(v)|)$. □

Conclusion

Dans les dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil pertinent dans l'étude des problèmes linéaires et non linéaires en physique et en mécanique.

Ce mémoire avait pour objectif de présenter de résultats d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles linéaires et non linéaires de première et deuxième espèce dans les espaces de Hilbert et de Banach avec des exemples d'applications.

En premier lieu, on a rappelé les outils mathématiques et les concepts de base liés à ce sujet. Ensuite, on a présenté des différents théorèmes d'existence et d'unicité de solution d'une inéquation variationnelle linéaire et non linéaire.
Finalement, on a donné deux problèmes aux limites comme application de ces résultats : le problème de Signorini et le problème de Stokes.

Bibliographie

[1] Z. Belhachmi, F. Ben Belgacem. Éléments finis d'ordre deux pour l'inéquation variationnelle de Signorini. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, Elsevier, 331 (9), pp.727-732, 2000.

[2] A. Bensedik. Sur quelques problèmes elliptiques de type de Krichhoff et dynamique des fluides, Thèse de doctorat en mathématiques appliquées et applications des mathématiques, université Jean Monnet, Saint-Etienne ,2012.

[3] F. Boyer, P. Fabrie. Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models, Applied Mathematical Sciences, Vol. 183, Springer, New York, 2013.

[4] H. Brézis. Equations et inéquations non linéires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1, 115-175, 1968.

[5] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl, 51, 1, 1-168, 1972.

[6] H. Brézis. Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application, Masson, 1987.

[7] J. Céa, Optimization Theory and Algorithms. Lecture Notes, Vol.53, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.

[8] P.G. Ciarlet. Mathematical elasticity, Volume I : Three-dimensional elasticity, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 20, North Holland, 1988.

[9] H. Debbiche. Sur des problèmes de lubrification stationnaires et instationnaires non isothermes, Thèse. Université Jean Monnet, Saint-Etienne, 2016.

[10] F. Demengel, G. Demengel. Espaces fonctionnels, utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles, EDP Sciences, Paris, 2007.

[11] G. Duvaut, J.L. Lions. Les inéquations en mécanique et physique, Dunod, 1972..

[12] G. Fichera. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali ; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 91-140, 1964.

[13] V. Girault, P.A. Raviart. Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[14] R. Glowinski. Lectures on Numerical Methods For Non-Linear Variational Problems, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980.

[15] H. Gispert-Chambaz. Camille Jordan et les fondements de l'analyse, Université de Paris-Sud, Publications mathématiques d'Orsay, 1982.

[16] N. Kikuchi, J.T. Oden. Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods, Siam, Philadelphia, 1988.

[17] H. Le Dret. Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, Mathématiques et Applications, vol 72. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

[18] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 493-519, 1967.

[19] J.L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris, 1969.

[20] B.P. Rynne, M.A. Youngston. Linear Functional Analysis. Springer, second edition, 2008.

[21] F. Saidi. Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Étude mathématiques et asymptotique. Thèse. Université Jean Monnet, Saint-Etienne, 2004.

[22] A. Signorini. Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti Societa Italiana per il Progresso della Scienze, 1933.

[23] G. Stampacchia. Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[24] G. Stampacchia. Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[25] R. Temam. Navier-Stokes Equations. North-Holland, Publishing Company-Amesterdam, New-York, OXFORD, 1977.