

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj  
Faculté des Mathématiques et de l'informatique  
Département des Mathématiques



## Mémoire

Présenté par

DJENANE BESMA

Pour l'obtention du diplôme de

## Master

Filière : *Mathématiques*

Spécialité : *Analyse Mathématique et Applications*

---

## Sujet :

**Résolution numérique des équations différentielles  
fractionnaires**

---

*Soutenu publiquement, le 21/06/2023, devant le jury composé de :*

<b>S.MECHERI</b>	Prof.	Président
<b>A.GUECHI</b>	MCB	Encadreur
<b>D.ABBAS</b>	MCB	Examineur

Promotion 2022/2023

## Remerciements

*Au nom d'Allah le clément et le miséricordieux louange à Allah le tout puissant, et mes remerciements Tout d'abord, nous remercions Allah notre créateur pour son aide et sa conciliation pour achever ce travail. Celui qui n'a pas remercié les gens n'a pas remercié Dieu.*

*Grand merci au joyau de la connaissance, le superviseur de mon travail du début à la fin Dr. GUECHI Ahmed , qui n'a pas lésiné sur avec ses conseils et ses directives, ce qui m'a beaucoup aidé dans l'accomplissement de mon travail. Salutation appréciation et respect à vous.*

*Nous exprimons aussi nos vifs remerciements aux membres du jury : Pr.M'ECHERI Salah et Dr.ABBAS Djouahar pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre mémoire en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs remarques.*

*Un grand merci à ma famille, pour m'avoir soutenu tout au long de mon parcours scolaire*

*Nous remercions également les enseignants qui nous ont prodigué conseils et encouragements au cours de ces années d'étude.*

*Sans oublier de remercier tous mes amis et collègues qui nous ont encouragés, en particulier, les étudiants du Master 2 Analyse Mathématique et Application*

*merci à tout le personnel de la Faculté de Mathématiques et d'informatique*

*Merci à toutes et à tous.*

---

# Table des matières

---

Liste des tableaux	iv
Table des figures	v
Introduction	vii
<b>1 Rappels et notions fondamentales</b>	<b>1</b>
1.1 Fonctions spéciales . . . . .	1
1.1.1 Fonction Gamma d'Euler . . . . .	1
1.1.2 Fonction Bêta d'Euler . . . . .	3
1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler . . . . .	3
1.2 Dérivées et intégrales fractionnaire . . . . .	4
1.2.1 Dérivée fractionnaire au sens Grunwarld-Letnikov . . . . .	4
1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	5
1.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	7
1.2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	8
1.2.5 Relation entre les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo	9
<b>2 Méthodes numériques pour résoudre les EDFs</b>	<b>11</b>
2.1 Méthode des différence finies fractionnaires . . . . .	11
2.1.1 Séries de Taylor et approximation par différence finies . . . . .	11
2.1.2 Application MDF sur un problème d'une équation différen- tielle fractionnaire . . . . .	15
2.2 Méthode spectrale de Legendre . . . . .	16
2.2.1 Notions sur les polynômes de Legendre . . . . .	16
2.2.2 Polynômes de Legendre décalés et leurs propriétés . . . . .	17
2.2.3 Approximation d'une fonction . . . . .	18
2.2.4 Matrice opérationnelle de l'intégration d'ordre fractionnaire . .	18
2.2.5 Application de la matrice opérationnelle de Legendre . . . . .	20

<b>3 Résultats numériques</b>	<b>22</b>
Exemple 1 . . . . .	22
Exemple 2 . . . . .	23
Exemple 3 . . . . .	26
Exemple 4 . . . . .	27
Exemple 5 . . . . .	28
<b>Conclusion</b>	<b>30</b>
<b>Bibliography</b>	<b>31</b>

---

## Liste des tableaux

---

3.1	Comparaison entre les deux méthodes à différence $n$ et $N$ , pour l'exemple 3.1. . . . .	23
3.2	Comparaison entre les deux méthodes à différence $\alpha$ , pour l'exemple 3.1. . . . .	24
3.3	Comparaison entre les deux méthodes à différence $n$ et $N$ , pour l'exemple 3.2. . . . .	25
3.4	Erreur absolue pour différentes valeurs de $N$ par MSL pour l'exemple 3.3. . . . .	26
3.5	Erreur absolue a déferent valeurs de $N$ par MSL pour l'exemple 3.5. . . . .	29
3.6	Coefficients de la solution approchée à déferent valeurs de $N$ par MSL pour l'exemple 3.5 . . . . .	29

---

## Table des figures

---

1.1	Trace de la fonction Gamma. . . . .	1
1.2	Trace de la fonction Bêta. . . . .	3
1.3	Fonction de Mittag-Leffler a un seul paramètre. . . . .	3
1.4	Fonction de Mittag-Leffler a deux paramètre. . . . .	4
2.1	Premiers polynômes de Legendre. . . . .	16
2.2	Premiers polynômes de Legendre décalés. . . . .	17
3.1	Résultats numériques pour l'exemple 3.1, par les deux méthodes. . . .	23
3.2	Comparaison de la solution $u(x)$ par différence $\alpha$ par les deux méthodes où $n = 100$ et $N = 10$ , pour l'exemple 3.1 . . . . .	24
3.3	Résultats numériques pour l'exemple 3.2, par les deux méthodes. . . .	25
3.4	Comparisons de $u(x)$ pour différent $0 < \alpha \leq 2$ avec $N = 6$ , pour l'exemple 3.3. . . . .	27

---

## Liste des symboles et abréviations

---

- ▷  $\Gamma(x)$  : Fonction Gamma d'Euler.
- ▷  $B(u, v)$  : Fonction Bêta d'Euler.
- ▷  $E_\alpha(x)$  : Fonction de Mittag-Leffler pour un seul paramètre.
- ▷  $E_{\alpha, \beta}(x)$  : Fonction de Mittag-Leffler pour deux paramètres.
- ▷  $\operatorname{erfc}(x)$  : La complémentaire de la fonction d'erreur.
- ▷  $I^\alpha f(x)$  : Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.
- ▷  ${}^{RL}D^\alpha, D^\alpha$  : Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.
- ▷  ${}^C D^\alpha$  : Dérivée fractionnaire au sens de Caputo.
- ▷  ${}^{GL}D^\alpha$  : Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov.
- ▷  $L_n(x)$  : Polynômes de Legendre.
- ▷  $P_n(x)$  : Polynômes de Legendre décalés.
- ▷  $A^\alpha$  : Matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire.
- ▷ EDOs : Équations différentielles ordinaires
- ▷ EDFs : Équations différentielles fractionnaires.
- ▷ MDFs : Méthode différences finies.
- ▷ MSL : Méthode spectrale de Legendre.

---

## Introduction

---

L'analyse mathématique est un domaine des mathématiques qui comporte plusieurs sous-domaines, parmi eux le calcul intégral et les dérivées d'ordre entier, ainsi que les dérivées d'ordre non entier (fractionnaire), ce dernier n'est pas récemment apparu, mais plutôt ancien, datant du 17ème siècle. De nombreux problèmes ont été formulés dans divers domaines en utilisant des équations différentielles fractionnaires, notamment dans la partie théorique de physique théorique, en biologie, en électrochimie, et autres [7, 15]. Par conséquent, la recherche de méthodes précises pour résoudre les équations différentielles fractionnaires (EDF) est difficile jusqu'à nos jours.

Il existe plusieurs méthodes analytiques pour résoudre les EDFs qui ont été introduites dans la littérature. Parmi elles, on trouve la méthode de décomposition d'Adomian [16], la méthode d'itération variationnelle [20] et la méthode de perturbation d'homotopie [10].

En plus de ces méthodes analytiques, de nombreuses méthodes numériques ont été développées pour résoudre les EDFs. Podlubny a introduit une méthode numérique basée sur la relation entre la dérivée de Grünwald-Letnikov et la dérivée de Riemann-Liouville pour les dérivées d'ordre arbitraire [15]. Récemment, l'utilisation de polynômes orthogonaux a également suscité un intérêt considérable pour la résolution des EDFs. Cette approche permet de réduire l'équation différentielle à un système des équations algébriques. La matrice opérationnelle pour la dérivée fractionnaire a été déterminée pour certains types de polynômes orthogonaux, les polynômes de Tchebychev [5] et les polynômes de Legendre [17]. Paraskevopoulos a proposé une matrice opérationnelle d'intégration en utilisant ces polynômes comme base pour les EDOs [13, 14]. Récemment, Bhrawy et Alofi [3] ont dérivé la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire pour les polynômes de Tchebychev décalés.

Dans ce travail, nous présentons deux méthodes pour résoudre ce type d'équation. La première est la méthode des différences finies fractionnaires (MDFFF), et elle dépend méthode repose sur l'utilisation de formules de différences finies pour approximer les dérivées premières et deuxièmes plusieurs fois, nous utilisons la règle



trapézoïdale composé pour approximer le terme intégral dans la définition de Caputo. Ensuite, nous utilisons des formules de différences finies de trois types (avant, centre et arrière) pour obtenir des approximations des première et deuxième dérivées [2].

La deuxième méthode que nous utilisons est basée sur l'application des polynômes de Legendre pour résoudre l'EDF dans le sens de Riemann-Liouville. Pour cela, nous formulons d'abord les EDF sous une forme intégrale. Ensuite, nous convertissons cette équation intégrale en un système des équations algébriques en utilisant les polynômes de Legendre décalés, sous la forme d'une matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire [1].

Notre travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre, nous avons rappelé certaines définitions des fonctions spéciales (Gamma, Bêta et Mittag-Leffler) ainsi que leurs propriétés, présenté quelques définitions et théorèmes concernant les intégrales et les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et de Caputo.

Le deuxième chapitre nous avons étudié deux méthodes numériques, à savoir la méthode des différences finies (MDF) et la méthode spectrale de Legendre (MSL), pour résoudre les EDFs [2, 1].

Et le troisième chapitre, nous avons abordé l'étude numérique en appliquant les deux méthodes à quelques exemples afin d'obtenir des solutions approchées.

# CHAPITRE 1

---

## Rappels et notions fondamentales

---

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques définitions et propriétés sur une fonctions spéciales (Gamma, Bêta, Mittag-Leffler), et les dérivées fractionnaire.

### 1.1 Fonctions spéciales

La compréhension des définitions et l'utilisation du calcul fractionnaire sera plus simple et claire en faisant un tour de quelques définitions mathématiques nécessaires qui sont liées ce concept. Parmi ces définitions, la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler, qui seront brièvement abordées dans cette section.

#### 1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est sans aucun doute la fonction Gamma d'Euler, qui généralise la factorielle  $n!$  et permet à  $n$  de prendre des valeurs non entières, voire complexes. Nous rappellerons dans cette section quelques résultats sur la fonction Gamma qui sont importants pour d'autres parties de ce travail.

**Définition 1.1** [15] *On considérer la fonction Gamma, ou intégrale d'Euler du second ordre, notée par  $\Gamma(\cdot)$ , représentée graphiquement dans la figure correspondante. La fonction Gamma définie par l'intégrale suivant :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (1.1)$$

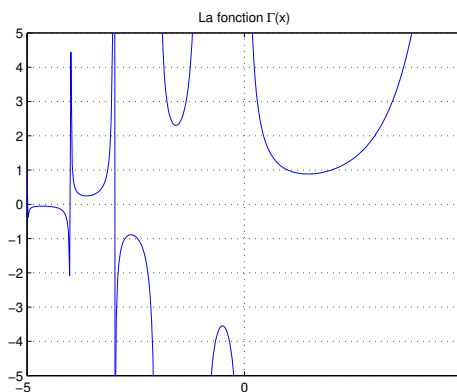


FIGURE 1.1 – Tracé de la fonction  $\Gamma$ .

**Propriétés 1.1** [9] Les propriétés de base de la fonction Gamma sont :

1. La fonction  $\Gamma(x)$  est continue pour  $x > 0$ .
2. L'une des propriétés fondamentales de la fonction Gamma est qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \quad (1.2)$$

qui peut être facilement prouvée en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= \left[ -e^{-t} t^x \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

3. De toute évidence,  $\Gamma(1) = 1$ , et en utilisant (1.2) nous obtenons pour  $x = 1, 2, 3, \dots$  :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1 = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ &\vdots \\ \Gamma(n + 1) &= n.\Gamma(n) = n.(n - 1)! = n!. \end{aligned}$$

4.  $\Gamma(0) = \infty$ .

5. Pour  $x = -1, -2, -3, \dots$  il en résulte :

$$\begin{aligned} \Gamma(-n) &= \frac{\Gamma(-n + 1)}{(-n)} \\ &= \frac{\Gamma(-n + 2)}{(-n)(-n + 1)} = \frac{\Gamma(-n + 3)}{(-n)(-n + 1)(-n + 2)} = \dots = \frac{\Gamma(0)}{(-1)^n.n!} = (-1)^n.\infty. \end{aligned}$$

6.  $\frac{\Gamma(x + 1)}{\Gamma(y + 1)\Gamma(x - y + 1)} = \binom{x}{y}$ .

7. Les valeurs particulières suivantes pour la fonction Gamma peuvent être utiles à des fins de calcul :

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .
- $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$ .
- $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ .
- $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{4!}{2!2^2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ .

8. La propriété de réflexion de la fonction Gamma est donnée par :

$$\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

### 1.1.2 Fonction Bêta d'Euler

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction dite Bêta plutôt qu'une certaine combinaison de valeurs de la fonction Gamma.

**Définition 1.2** [15]

La fonction Bêta est type d'intégrale d'Euler définie pour des nombres complexes  $u$  et  $v$  par :

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt; \quad (1.3)$$

avec  $Re(u) > 0, Re(v) > 0$ .

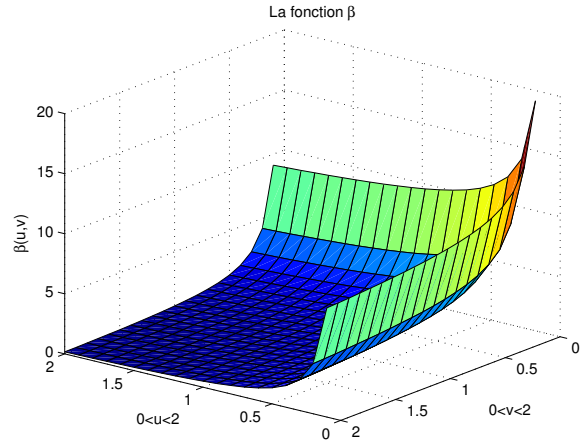


FIGURE 1.2 – Trace de la fonction Bêta.

**Propriétés 1.2** Pour tout  $x, y \in \mathbb{C}$  avec  $Re(x) > 0, Re(y) > 0$  :

1. La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

2.  $B(u, v) = B(v, u)$  (symétrique).

3.  $B(u, 1) = \frac{1}{u}$ .

### 1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équation différentielles d'ordre entier. Elle est aussi largement utilisé dans la recherche des solution des équation différentielle d'ordre fractionnaire.

**Définition 1.3** [6] La fonction de Mittag-Leffler  $E_\alpha(x)$  est définie comme suit :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0 \quad (1.4)$$

En particulier

$$E_1(x) = e^x, \quad E_2(x) = \cosh(\sqrt{x}),$$

$$E_2(-x^2) = \cos(x).$$

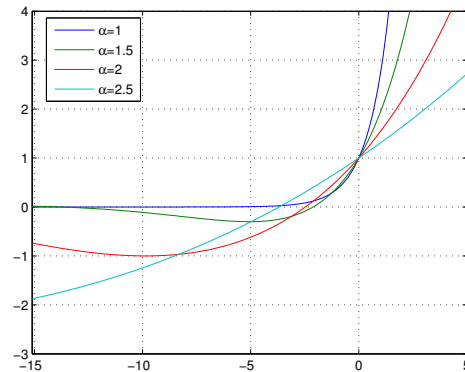


FIGURE 1.3 – Fonction de Mittag-Leffler a un seul paramètre.

Cette fonction peut être généralisée par deux paramètres :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.5)$$

En particulier

$$E_{1,2}(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad E_{2,2}(x^2) = \frac{\sinh(x)}{x}$$

$$E_{1/2,1}(x) = e^{x^2} \operatorname{erfc}(-x).$$

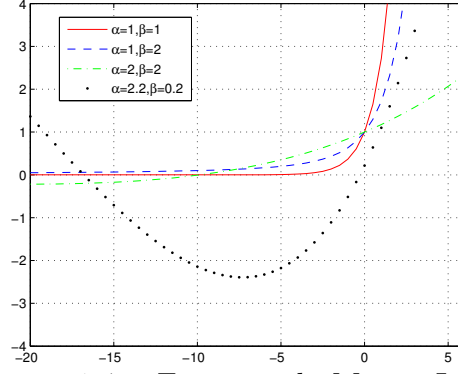


FIGURE 1.4 – Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

## 1.2 Dérivées et intégrales fractionnaire

Dans cette partie, nous avons donné quelques définitions, propriétés et exemples pour la dérivée et l'intégral fractionnaire.

### 1.2.1 Dérivée fractionnaire au sens Grünwald-Letnikov

La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres entiers. La dérivée première (d'ordre 1) d'une fonction  $f$  au point  $t$  est donnée par :

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (1.6)$$

Par dérivation successive de la fonction  $f$ , on obtient une généralisation de la formule (1.6) à l'ordre  $n$  ( $n$  est un entier positif ou nul) de la forme :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \quad (1.7)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

On a  $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$  la propriété fondamentale, on peut arriver à une expression plus générale dans le cas où  $n$  est négatif ou nul

$$(-1)^k \binom{n}{k} = \frac{-n(1-n) \cdots (k-n-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)}.$$

**Définition 1.4** La dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'ordre  $\alpha$  et  $(-\alpha)$  d'une fonction  $f$ , où  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[a, x]$  est :

$$\begin{aligned} {}^{GL}D^\alpha f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(x-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt. \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} {}^{GL}D^{-\alpha} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(x-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Si  $f$  est de classe  $C^m$ , des intégrations par parties de (1.8) et (1.9) nous permet d'écrire :

pour  $\alpha > 0$

$${}_a^{GL}D_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt$$

pour  $\alpha < 0$

$${}_a^{GL}D_x^{-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(t) dt$$

**Exemple 1.1** La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'une fonction constante est en général ni nulle ni constante, en effet :

Si  $f(x) = c$  et  $\alpha$  non entier, on a  $f^{(k)}(x) = 0$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$  et donc,

$$\begin{aligned} {}_a^{GL}D_x^\alpha f(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \\ &= \frac{c(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

## 1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $Re(\alpha) > 0$ ), Suivant l'approche de Riemann-Liouville, il généralise la fameuse formule d'intégrale (attribuée à Cauchy) à répété  $n$ -fois.

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[0, T]$ ,  $T > 0$ . Une primitive de  $f$  est donnée par l'expression :

$$I^1 f(x) = \int_0^x f(t) dt. \quad (1.10)$$

Pour l'intégrale seconde et d'après le théorème de Fubini on obtient :

$$\begin{aligned} I^2 f(x) &= \int_0^x I^1 f(s) ds = \int_0^x \left( \int_0^s f(t) dt \right) ds = \int_0^x \left( \int_t^x ds \right) f(t) dt \\ &= \int_0^x (x-t) f(t) dt. \end{aligned}$$

En général, on a

$$I^n f(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-x_1)^{n-1} f(x_1) dx_1. \quad (1.11)$$

**Définition 1.5** [6] Soit  $f \in L^1([0, T])$ ,  $T > 0$ . L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction  $f$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\text{Re}(\alpha) > 0$ ) notée  $I^\alpha$  est définie par :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > 0, \quad (1.12)$$

on prend la notation,  $I^0 f(x) := f(x)$ .

**Exemple 1.2** Soit  $f(x) = x^k$ , on calcule l'intégral d'ordre  $\alpha$ ,

$$I^\alpha x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} x^{\alpha+k}. \quad (1.13)$$

**Théorème 1.1** [15] Si  $f \in L^1([0, T])$ ,  $T > 0$ , alors  $I^\alpha f$  existe pour presque tout  $t \in [0, T]$  et de plus  $I^\alpha f \in L^1([0, T])$ .

**Preuve 1.1** En introduisant (1.12) puis en utilisant le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^T |I^\alpha f(x)| dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |f(t)| \left( \int_t^T (x-t)^{\alpha-1} dx \right) dt \\ &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T |f(t)| (T-t)^\alpha dt \\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^T |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Puisque  $f \in L^1([0, T])$ , la dernière quantité est fini, ce qui établit le résultat.

**Proposition 1.1** [6] Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ( $\text{Re}(\alpha) > 0$ ,  $\text{Re}(\beta) > 0$ ), pour toute fonction  $f \in L^1([0, T])$ ,  $T > 0$  on a :

$$I^\alpha (I^\beta f(x)) = I^{\alpha+\beta} f(x) = I^\beta (I^\alpha f(x)).$$

pour presque tout  $t \in [0, T]$ . Si de plus  $f \in C([0, T])$ , alors cette identité est vraie  $\forall t \in [0, T]$ .

### 1.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 1.6** [6]

Sur l'intervalle  $[0, T]$ ,  $T > 0$  la fonction  $f \in L^1([0, T])$ ,  $T > 0$ , tel que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\text{Re}(\alpha) > 0$ ) notée  ${}^{RL}D^\alpha f$  est définie par :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha f(x) &= D^n I^{n-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad x > 0. \end{aligned}$$

**Propriétés 1.3** [6] Soient  $\alpha, \beta > 0$  tel que  $n-1 < \alpha \leq n$ ,  $m-1 < \beta \leq m$  tel que  $n, m \in \mathbb{N}$  :

1. Si  $\alpha > \beta > 0$ , alors pour  $f \in L^1([0, T])$ ,  $T > 0$ , la relation :

$$D^\beta(I^\alpha f(x)) = I^{\alpha-\beta} f(x)$$

est vrai presque partout sur  $t \in [0, T]$ .

2. Si  $\beta > \alpha > 0$  et la dérivée fractionnaire  $D^{\beta-\alpha} f$  existe, alors on a :

$$D^\beta(I^\alpha f(x)) = D^{\beta-\alpha} f(x).$$

3. Pour  $\alpha > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Si les dérivées fractionnaires  $D^\alpha f$  et  $D^{k+\alpha} f$  existent, alors :

$$D^k(D^\alpha f(x)) = D^{k+\alpha} f(x).$$

**Propriétés 1.4** Pour  $n-1 \leq \alpha \leq n$ ,  $m-1 \leq \beta \leq m$ , on a :

1. L'opérateur de Riemann-Liouville est linéaire

$$D^\alpha(\lambda f + g)(x) = \lambda(D^\alpha f)(x) + (D^\alpha g)(x), \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. En générale

$$D^\alpha(D^\beta f(x)) \neq D^\beta(D^\alpha f(x)).$$

**Lemme 1.1** [1] Si  $m-1 < \alpha \leq m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  alors,

$$- \quad D^\alpha(I^\alpha f)(x) = f(x), \tag{1.14}$$

$$- \quad I^\alpha(D^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(0^+) \frac{x^i}{i!}, \quad x > 0. \tag{1.15}$$



**Remarque 1.1** On remarque que  $D^\alpha (I^\alpha f) = I^\alpha (D^\alpha f)$  pour tout fonction vérifiée :  $f^{(i)}(0) = 0, 0 \leq i \leq [\alpha]$ .

**Exemple 1.3** Soit  $f(x) = x^2$  on calcule la dérivée d'ordre  $3/2$  de  $f$  :

On a la définition :

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

Pour  $\alpha = \frac{3}{2}$  donc  $n = 2$  on trouve :

$$D^{\frac{3}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x (x - t)^{\frac{-1}{2}} t^2 dt,$$

on pose  $I = \int_0^x (x - t)^{\frac{-1}{2}} t^2 dt$ , et d'après l'intégrale par partie deux fois, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \left[ (-2)t^2(x - t)^{\frac{1}{2}} \right]_0^x + \int_0^x 4t(x - t)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 4 \int_0^x t(x - t)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[ 4 \cdot \left( \frac{-2}{3} \right) \cdot t(x - t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x + \frac{8}{3} \int_0^x (x - t)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{8}{3} \int_0^x (x - t)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \left[ \frac{8-2}{3 \cdot 5} (x - t)^{\frac{5}{2}} \right]_0^x \\ &= \frac{16}{15} x^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} D^{\frac{3}{2}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{16}{15} x^{\frac{5}{2}} \right) \\ &= 4 \sqrt{\frac{x}{\pi}}. \end{aligned}$$

### 1.2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

**Définition 1.7** [8]

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction  $f$  donnée sur l'intervalle  $[a, b]$  et  $n \in \mathbb{N}$  est définie par la relation suivante :

$${}^c D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x - t)^{\alpha+1-n}} dt, \quad [\alpha] = n - 1. \quad (1.16)$$

**Remarque 1.2** L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des equation différentielles fractionnaire prennent la même forme que dans le cas des equation différentielle d'ordre entier.

**Exemple 1.4** La dérivée fractionnaire de Caputo pour la fonction constante est égale à zéro :

$${}^C D^\alpha c = 0. \quad \forall \alpha > 0. \quad (1.17)$$

En effet, soit  $\alpha > 0$  et  $\alpha \in ]n - 1, n[$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , on applique la définition de la dérivée de Caputo,

$${}^C D^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, \quad t > 0,$$

et car la  $n$ -ième dérivée d'une constante est égale à 0 avec  $n \in \mathbb{N}$  :

$${}^C D^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{(c)^{(n)}}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt = 0.$$

**Exemple 1.5** On calcule la dérivée d'ordre  $3/2$  de  $g$  au sens de Caputo, tel que  $g(x) = x^2$  : On a la définition :

$${}^C D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt$$

Pour  $\alpha = \frac{3}{2}$  donc  $n = 2$  on trouve :

$${}^C D^{\frac{3}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{2}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt$$

D'après l'intégrale par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^C D^{\frac{3}{2}}(x^2) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} 2 \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left[ -4 \left[ (x-t)^{\frac{1}{2}} \right]_0^x \right] \\ &= 4 \sqrt{\frac{x}{\pi}}. \end{aligned}$$

**Question** : Pourquoi  ${}^C D^{\frac{3}{2}}(x^2) = {}^{RL} D^{\frac{3}{2}}(x^2)$  ?

### 1.2.5 Relation entre les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

**Théorème 1.2** [15] Soit  $Re(\alpha) > 0$  avec  $n - 1 < Re(\alpha) < n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), et soit  $f$  une fonction telle que les dérivées fractionnaires  ${}^C D^\alpha f(x)$  et  ${}^{RL} D^\alpha f(x)$  existent alors :

$${}^C D^\alpha f(x) = {}^{RL} D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}. \quad (1.18)$$

**Preuve 1.2** On considère le développement limité en série de Taylor de la fonction  $f$  en  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{n-1}x^{n-1} + R_{n-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}x^k + R_{n-1}(x); \end{aligned}$$

où

$$R_{n-1}(x) = \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)dt.$$

On utilisant les propriétés d'intégration d'ordre  $n$ , on a ;

$$R_{n-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt = I^n f^{(n)}(x)$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville et la relation de la fonction  $f(x) = x^\beta$  est donnée par :

$${}^{RL}D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha},$$

Alors

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha f(x) &= {}^{RL}D^\alpha \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}x^k + R_{n-1}(x) \right) \\ &= {}^{RL}D^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}x^k + {}^{RL}D^\alpha R_{n-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} {}^{RL}D^\alpha x^k + {}^{RL}D^\alpha R_{n-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\alpha+1)}x^{k-\alpha} + {}^{RL}D^\alpha I^n f^{(n)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}x^{k-\alpha} + I^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}x^{k-\alpha} + {}^C D^\alpha f(x). \end{aligned}$$

Donc

$${}^C D^\alpha f(x) = {}^{RL}D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}x^{k-\alpha},$$

qui est requis.

**Remarque 1.3** Si  $f^{(k)}(0) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, m-1$ , alors

$${}^C D^\alpha f(x) = {}^{RL}D^\alpha f(x). \quad (1.19)$$

Donc, la question précédente a été répondu.

# CHAPITRE 2

---

## Méthodes numériques pour résoudre les EDFs

---

Dans ce chapitre, on présente deux méthodes numériques pour résoudre les problèmes de valeur initiale des équations différentielles fractionnaires de Caputo ou de Riemann-Liouville [2, 1]. De manière générale un problème fractionnaire continu prend la forme suivante pour  $m - 1 < \alpha < m$ ,

$$\begin{cases} {}^*D_t^\alpha u(t) + g(t)u(t) = f(t), & t \in ]a, b], \\ u^{(j)}(a) = u_0^j, & j = 0, \dots, m - 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  ${}^*D$  est la dérivée d'ordre  $\alpha$  au sens Caputo ou Riemann-Liouville,  $g$  et  $f$  deux fonctions connues continues sur  $[a, b]$ ,  $u$  est une fonction inconnue de la variable indépendante  $t$ .

### 2.1 Méthode des différence finies fractionnaires

On applique cette méthode sur les dérivées fractionnaires au sens de Caputo. Notre méthode était basée sur l'approximation des dérivées par la développement de Taylor, et approche le terme intégrale dans la définition de Caputo par la règle trapézoïdale composite [2].

#### 2.1.1 Séries de Taylor et approximation par différence finies

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1712, permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point, cette formule au voisinage de  $a$  définie par :

$$u(x) = u(a) + \frac{(x-a)}{1!}u'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}u''(a) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!}u^{(k)}(a).$$

Dans ce contexte, nous remplaçons  $x$  et  $a$  par  $x_j + h$  et  $x_j$ , respectivement. Nous nous référons à  $h$  comme étant l'incrément de  $x$ . Par conséquent, nous pouvons maintenant écrire la série de Taylor sous la forme :

$$u(x_j + h) = u(x_j) + \frac{h}{1!}u'(x_j) + \frac{h^2}{2!}u''(x_j) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}u^{(k)}(x_j), \quad (2.2)$$

et

$$u(x_j - h) = u(x_j) - \frac{h}{1!}u'(x_j) + \frac{h^2}{2!}u''(x_j) - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{h^k}{k!}u^{(k)}(x_j). \quad (2.3)$$

La définition de la dérivée dans le continuum peut être utilisée pour obtenir une approximation de la dérivée dans le cas discret. Pour le traitement de nombreux problèmes, il est beaucoup plus pratique de ne prendre que les deux premiers termes du côté droit de (2.2). Nous avons maintenant,

$$u(x_j + h) = u(x_j) + hu'(x_j) + O(h), \quad (2.4)$$

où l'expression  $O(h)$  désigne l'erreur de troncature résultant de la troncature de l'approximation de la série de Taylor qui est proportionnelle à  $x$ . En utilisant la relation (2.4), nous pouvons obtenir l'approximation de la différence directe du premier ordre pour  $u'(x)$  comme suit :

$$u'(x_j) = \frac{u(x_j + h) - u(x_j)}{h} + O(h), \quad (2.5)$$

et en remplaçant  $h$  par  $-h$ , on a

$$u'(x_j) = \frac{u(x_j) - u(x_j - h)}{h} + O(h), \quad (2.6)$$

que l'on appelle l'approximation de la différence inverse du premier ordre de  $u'(x)$ . En soustrayant l'équation (2.3) de l'équation (2.2), on obtient :

$$u(x_j + h) - u(x_j - h) = 2hu'(x_j) + O(h^3),$$

ce qui, après réarrangement, donne

$$u'(x_j) = \frac{u(x_j + h) - u(x_j - h)}{2h} + O(h^2), \quad (2.7)$$

cette formule est appelée approximation de la différence centrée du second ordre pour  $u'(x)$  au point  $x = x_j$ .

De nouveau, par l'addition a (2.3) de (2.2) on obtient,

$$u(x_j + h) + u(x_j - h) = 2u(x_j) + h^2u''(x_j) + O(h^4), \quad (2.8)$$

$$u''(x_j) = \frac{u(x_j + h) - 2u(x_j) + u(x_j - h)}{h^2} + O(h^2). \quad (2.9)$$

**Théorème 2.1** [2] Supposons que l'intervalle  $[a, b]$  est subdivisé en  $n$  sous-intervalles  $[x_j, x_{j+1}]$  de longueur  $h = \frac{b-a}{n}$  en utilisant les noeuds également espacés  $x_j = a + jh$  pour  $j = 0, 1, \dots, n$ . La règle trapézoïdale composite pour  $n$  sous-intervalles peut être exprimée comme :

$$T(u, h) = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n [u(x_{j-1}) + u(x_j)]. \quad (2.10)$$

On a l'approximation de l'intégrale de  $u(x)$  sur  $[a, b]$  donnée par :

$$\int_a^b u(x) dx = T(u, h), \quad (2.11)$$

et on a :

$${}^C D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad 0 < \alpha < 1, t > 0.$$

D'après la formule d'intégration par partie on déduit que :

$${}^C D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left[ u'(0)t^{1-\alpha} + \int_0^t u''(s)(t-s)^{1-\alpha} ds \right].$$

Pour estimer l'intégrale on utilisant la règle trapézoïdale composite (2.10-2.11) :

On pose  $u(x) = (t-x)^{1-\alpha} u''(x)$ . Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^t u''(x)(t-x)^{1-\alpha} dx &= \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n [(t-x_{j-1})^{1-\alpha} u''(x_{j-1}) + (t-x_j)^{1-\alpha} u''(x_j)] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n (t-x_{j-1})^{1-\alpha} u''(x_{j-1}) + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n (t-x_j)^{1-\alpha} u''(x_j) \\ &= \frac{h}{2} [(t-x_0)^{1-\alpha} u''(x_0) + (t-x_n)^{1-\alpha} u''(x_n) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (t-x_j)^{1-\alpha} u''(x_j)]. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha u(t) &= \frac{h[(t-x_0)^{1-\alpha} u''(x_0) + (t-x_n)^{1-\alpha} u''(x_n) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (t-x_j)^{1-\alpha} u''(x_j)]}{2(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \\ &\quad + \frac{u'(0)(t-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}, \end{aligned}$$

on pose  $u(x_j) = u_j$ ,

$$\begin{aligned} u'_j &= \frac{-3u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2}}{2h}, \\ u''_j &= \frac{u_j - 2u_{j+1} + u_{j+2}}{h^2}, \\ u''_j &= \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2}, \\ u''_j &= \frac{u_{j-2} - 2u_{j-1} + u_j}{h^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h}, \\ u''_0 &= \frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2}, \\ u''_n &= \frac{u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n}{h^2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha u(t) &= \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{2h} (t-x_0)^{1-\alpha} + \frac{u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n}{2h} (t-x_n)^{1-\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h} (t-x_j)^{1-\alpha} + \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} (t-x_0)^{1-\alpha} \right], \quad (2.12) \end{aligned}$$

et on a  $x_j \in [0, t_i]$ , c'est à dire,  $t_i - x_j = 0, \forall j \geq i$ .

$$\text{Maintenant on pose } a_{ij} = \begin{cases} \frac{(t_i - x_j)^{1-\alpha}}{2h(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i \leq j \end{cases},$$

$${}^C D_0^\alpha u(t_i) = (-2u_0 + 2u_1)a_{i0} + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

On écrit cette relation sous forme matricielle,

- Pour  $i = 1$  on a :  ${}^C D_0^\alpha u(t_1) = -2a_{10}u_0 + 2a_{10}u_1$ .
- Pour  $i = 2$  on a :

$$\begin{aligned} {}^C D_0^\alpha u(t_2) &= -2a_{20}u_0 + 2a_{20}u_1 + 2(u_0 - 2u_1 + u_2)a_{21} \\ &= (-2a_{20} + 2a_{21})u_0 + (2a_{20} - 4a_{21})u_1 + (2a_{21})u_2. \end{aligned}$$

- Pour  $i = 3$  on obtient :

$$\begin{aligned} {}^C D_0^\alpha u(t_3) &= -2a_{30}u_0 + 2a_{30}u_1 + 2(u_0 - 2u_1 + u_2)a_{31} + 2(u_1 - 2u_2 + u_3)a_{32}, \\ &= (-2a_{30} + 2a_{31})u_0 + (2a_{30} - 4a_{31} + 2a_{32})u_1 + (2a_{31} - 4a_{32})u_2 + (2a_{32})u_3, \end{aligned}$$

- Pour  $i = 4$  on trouve :

$$\begin{aligned} {}^C D_0^\alpha u(t_4) &= -2a_{40}u_0 + 2a_{40}u_1 + 2(u_0 - 2u_1 + u_2)a_{41} + 2(u_1 - 2u_2 + u_3)a_{42} + 2(u_2 - 2u_3 + u_4)a_{43}, \\ &= (-2a_{40} + 2a_{41})u_0 + 2(a_{40} - 2a_{41} + a_{42})u_1 + 2(a_{41} - 4a_{42} + a_{43})u_2 + 2(a_{42} - 2a_{43})u_3 + 2a_{43}u_4 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

donc la matrice correspondant a ce système est :

$$[{}^C D_0^\alpha u(t_1), \dots, {}^C D_0^\alpha u(t_n)]^t = \mathcal{D}U + U_0; \quad (2.13)$$





## 2.2 Méthode spectrale de Legendre

Dans cette partie on donne quelques définitions et propriétés sur les polynômes de Legendre, et on définit la matrice opérationnelle correspondant ces polynômes.

### 2.2.1 Notions sur les polynômes de Legendre

On appelle polynôme de Legendre de degré  $n$  le polynôme définie par la relation de récurrence [19],

$$(n + 1)L_{n+1}(x) = (2n + 1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad (2.18)$$

initialisé par

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x,$$

Les premiers polynômes de Legendre sont,

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = x,$$

$$L_2(x) = (3x^2 - 1)/2,$$

$$L_3(x) = (5x^3 - 3x)/2,$$

$$L_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8,$$

$$L_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8,$$

$$L_6(x) = (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16.$$

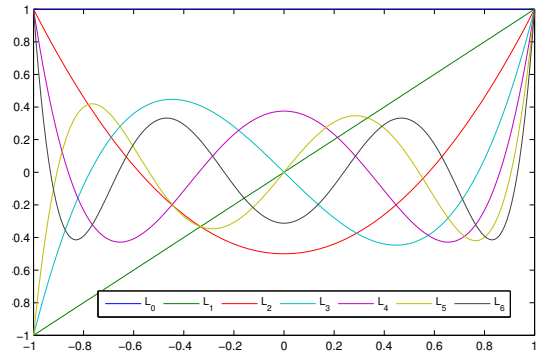


FIGURE 2.1 – Premiers polynômes de Legendre.

#### Propriétés 2.1 [19]

1) Les polynômes de Legendre sont solution de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0,$$

2) Les polynômes de Legendre satisfont la relation de récurrence

$$(1 - x^2)L'_n(x) = -nxL_n(x) + nL_{n-1}(x),$$

3) Formule de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2),$$

4) Majoration

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1], \quad |L_n(x)| &\leq 1, \\ \forall x \in [-1, 1], \quad |L'_n(x)| &\leq \frac{n(n+1)}{2}, \\ \forall x \in [-1, 1], \quad |L_n(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{8\pi n(1-x^2)}}, \\ \frac{1-L_n^2(x)}{(2n-1)(n+1)} &\leq L_n^2(x) - L_{n-1}(x)L_{n+1}(x) \leq \frac{2n+1}{3n(n+1)}, \end{aligned}$$

5) Les polynômes de Legendre sont les polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids  $\omega(x) = 1$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

6) Les polynômes de Legendre vérifiant la formule

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m},$$

en particulier  $L_n(1) = 1$  et  $\|L_n\|_2 = \left(\int_{-1}^1 L_n^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$ .

### 2.2.2 Polynômes de Legendre décalés et leurs propriétés

On note  $P_i(x)$  les polynômes de Legendre décalés définie sur  $[0, 1]$  par la relation suivante :  $P_i(x) = L_i(2x - 1); \quad x \in [0, 1], \quad i = 0, 1, \dots$

C'est à dire, s'écrit la relation (2.18) comme :

$$P_{i+1}(x) = \frac{(2i+1)(2x-1)}{i+1}P_i(x) - \frac{i}{i+1}P_{i-1}(x) \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.19)$$

avec  $P_0(x) = 1$  et  $P_1 = 2x - 1$ .

Les premiers polynômes de Legendre sont,

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= 2x - 1, \\ P_2(x) &= 6x^2 - 6x + 1, \\ P_3(x) &= 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1, \\ P_4(x) &= 70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1, \\ P_5(x) &= 252x^5 - 630x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1, \\ P_6(x) &= 924x^6 - 2772x^5 + 3150x^4 - 1680x^3 \\ &\quad + 420x^2 - 42x + 1. \end{aligned}$$

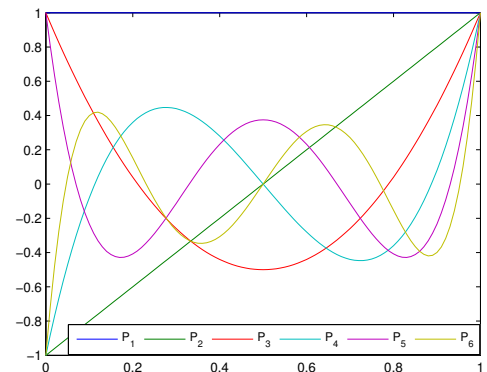


FIGURE 2.2 – Premiers polynômes de Legendre décalés.

Les polynômes de Legendre décalés  $P_i(x)$  peuvent être écrits sous forme analytique de degré  $i$  comme suit :

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} \frac{(i+k)! x^k}{(i-k)! (k!)^2}. \quad (2.20)$$

Alors que  $P_i(0) = (-1)^i$  et  $P_i(1) = 1$ .

Les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux et la condition d'orthogonalité pour les polynômes de Legendre décalés est :

$$\int_0^1 P_i(x) P_j(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2i+1} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

### 2.2.3 Approximation d'une fonction

Soit  $u(x) \in L^2(0, 1)$ , nous l'approximons avec des polynômes Legendre décalés de degré  $i$  comme suivant :

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i P_i(x),$$

tel que les coefficients écrire sous la forme suivante :

$$c_i = (2i + 1) \int_0^1 u(x) P_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

alors,

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^N c_i P_i(x) = C^T \Phi(x), \quad (2.22)$$

tel que  $C$  et  $\Phi(x)$  qui sont donné sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} C^T &= [c_0, c_1, \dots, c_N], \\ \Phi(x) &= [P_0, P_1, \dots, P_N]^T. \end{aligned}$$

### 2.2.4 Matrice opérationnelle de l'intégration d'ordre fractionnaire

Dans cette partie, nous définissons la matrice opérationnelle de l'intégration fractionnaire des polynômes de Legendre décalés, à savoir comme suit :

**Théorème 2.2** [1] *Soit  $\Phi(x)$  la base des polynômes de Legendre, alors :*

$$I^\alpha \Phi(x) = A^\alpha \Phi(x); \quad (2.23)$$

tel que  $A^\alpha$  est la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire des degrés  $(N+1)(N+1)$

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} \xi_{0,0,0} & \xi_{0,1,0} & \cdots & \xi_{0,N,0} \\ \sum_{k=0}^1 \xi_{1,0,k} & \sum_{k=0}^1 \xi_{1,1,k} & \cdots & \sum_{k=0}^1 \xi_{1,N,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^N \xi_{N,0,k} & \sum_{k=0}^N \xi_{N,1,k} & \cdots & \sum_{k=0}^N \xi_{N,N,k} \end{pmatrix}$$

tel que :

$$\xi_{i,j,k} = (2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{i+j+k+l} (i+k)! (l+j)!}{(i-k)! k! (k+\alpha+1) (j-1)! (l!)^2 (k+l+\alpha+1)}. \quad (2.24)$$

**Preuve 2.1** On a la forme analytique des polynômes de Legendre décalés (2.20) et en utilisant les deux équations (1.12) et (1.13) On obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned} I^\alpha P_i(x) &= \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i+k} (i+k)!}{(i-k)! (k!)} I^\alpha (x^k) \\ &= \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i+k} (i+k)!}{(i-k)! (k!)} \frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(k+\alpha+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.25)$$

on arrondit maintenant  $x^{\alpha+k}$  de degré  $(N+1)$  pour les polynômes de Legendre décalés sont les suivants :

$$x^{\alpha+k} = \sum_{j=0}^N a_{kj} P_j(x), \quad (2.26)$$

où :

$$\begin{aligned} a_{kj} &= (2j+1) \int_0^1 x^{\alpha+k} P_j(x) dx \\ &= (2j+1) \int_0^1 x^{\alpha+k} \sum_{l=0}^j (-1)^{j+l} \frac{(j+l)! x^l}{(j-l)! (l!)^2} dx \\ &= (2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j+l} (j+l)!}{(j-l)! (l!)^2} \int_0^1 x^{\alpha+k+l} dx \\ &= (2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j+l} (j+l)!}{(j-l)! (l!)^2 (k+l+\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

En utilisant les équations (2.25)-(2.27), nous obtenons ce qui suit :

$$I^\alpha P_i(x) \approx \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^{(i+k)} (i+k)!}{(i-k)! (k!) \Gamma(k+\alpha+1)} a_{kj} P_j(x) \quad (2.28)$$

$$= \sum_{j=0}^N \left( \sum_{k=0}^i \xi_{i,j,k} \right) P_j(x) \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.29)$$

Nous écrivons l'équation ci-dessus sous forme vectorielle :

$$I^\alpha P_i(x) = \left[ \sum_{k=0}^i \xi_{i,0,k}, \sum_{k=0}^i \xi_{i,1,k}, \dots, \sum_{k=0}^i \xi_{i,N,k} \right] \Phi(x), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.30)$$

### 2.2.5 Application de la matrice opérationnelle de Legendre

Nous présentons maintenant une méthode numérique pour résoudre une équation différentielle d'ordre fractionnaire à l'aide de la matrice opérationnelle de Legendre [1].

Soit l'équation différentielle suivante :

$$D^\alpha u(x) = \sum_{i=1}^k a_i D^{\beta_i} u(x) + a_{k+1} u(x) + v(x), \quad (2.31)$$

avec les conditions

$$u^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.32)$$

tel que  $a_i (i = 1, \dots, k+1)$  sont des nombres réelles et  $m-1 < \alpha \leq m$

$0 < \beta_1 < \beta_2 \dots < \beta_k < \alpha$  et  $D^\alpha$  désigne les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$ . Pour résoudre l'équation (2.31) et (2.32), on applique l'intégration de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} I^\alpha(D^\alpha u)(x) &= \sum_{i=1}^k a_i I^\alpha(D^{\beta_i} u)(x) + a_{k+1} I^\alpha u(x) + I^\alpha v(x), \\ u(x) - \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(0^+) \frac{x^i}{i!} &= \sum_{j=1}^k a_j I^{\alpha-\beta_j} \left( u(x) - \sum_{i=0}^{m_j-1} u^{(i)}(0^+) \frac{x^i}{i!} \right) + a_{k+1} I^\alpha u(x) + I^\alpha v(x), \end{aligned}$$

avec

$$u^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

tel que  $m_j - 1 < \alpha \leq m_j$  donc

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{j=1}^k a_j I^{\alpha-\beta_j} u(x) + a_{k+1} I^\alpha u(x) + f(x), \\ u^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases} \quad (2.33)$$

tel que

$$f(x) = I^\alpha v(x) + \sum_{i=0}^{m-1} d_i \frac{x^i}{i!} - \sum_{j=1}^k a_j I^{\alpha-\beta_j} u(x) \left( \sum_{i=0}^{m_j-1} d_i \frac{x^i}{i!} \right)$$

On approxime  $u$  et  $f$  par les polynômes de Legendre décalés :

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{i=0}^N c_i P_i(x) = C^T \Phi(x), \quad (2.34)$$

$$f(x) \approx f_N(x) = \sum_{i=0}^N f_i P_i(x) = F^T \Phi(x), \quad (2.35)$$

tel que le vecteur  $F^T = [f_0, f_1, \dots, f_N]$  connu et  $C^T = [c_1, c_1, \dots, c_N]$  inconnu

$$I^\alpha u_N(x) = C^T I^\alpha \Phi(x) = C^T A^\alpha \Phi(x) \quad (2.36)$$

tel que  $A^\alpha$  définies dans le Théorème 2.2, en utilisant les équations (2.34)-(2.36) on trouve  $R_N(x)$  :

$$R_N(x) = \left( C^T - C^T \sum_{i=1}^k a_i A^{\alpha-\beta} - a_{k+1} C^T A^\alpha - F^T \right) \Phi(x), \quad (2.37)$$

alors,

$$\langle R_N, P_j \rangle = \int_0^1 R_N(x) P_j(x) dx \quad j = 0, 1, \dots, N - m, \quad (2.38)$$

avec

$$u^{(i)}(0) = C^T \Phi^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^N c_k P_k^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (2.39)$$

tel que  $P_k^{(i)}$  définie par :

$$P_k^{(i)}(0) = \frac{(-1)^{k+i} (k+i)!}{(k-i)!}. \quad (2.40)$$

Maintenant, en résolvant ce système d'équations linéaires et en déterminant les coefficients inconnus du vecteur  $C$ , on peut calculer  $u(x)$  comme dans l'équation (2.34).

# CHAPITRE 3

---

## Résultats numériques

---

Dans ce chapitre, nous appliquons les méthodes proposées à des exemples avec une solution connue, pour démontrer l'applicabilité et précision des méthodes. Le Théorème 1.2 nous permet d'appliquer les deux méthodes au même exemple si  $u^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, m - 1$ .

Dans ces exemples utilisons les notations de l'erreur suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{e}_n(x_i) &= |u(x_i) - u_i|, \\ \hat{e}_N(x_i) &= |u(x_i) - u_N(x_i)|,\end{aligned}$$

où  $u(x_i)$ ,  $u_i$  et  $u_N(x_i)$  sont la solution exacte, la solution approchée par la méthode des différences finies et la solution approchée par la deuxième méthode de spectrale de Legendre en  $x_i$  respectivement. Pour résoudre les systèmes (2.17) et (2.38) en programme avec le langage MATLAB 2009b.

**Exemple 3.1** *Considère l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha u(x) + u(x) = \frac{x^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)}, & 0 < \alpha < 1, x > 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

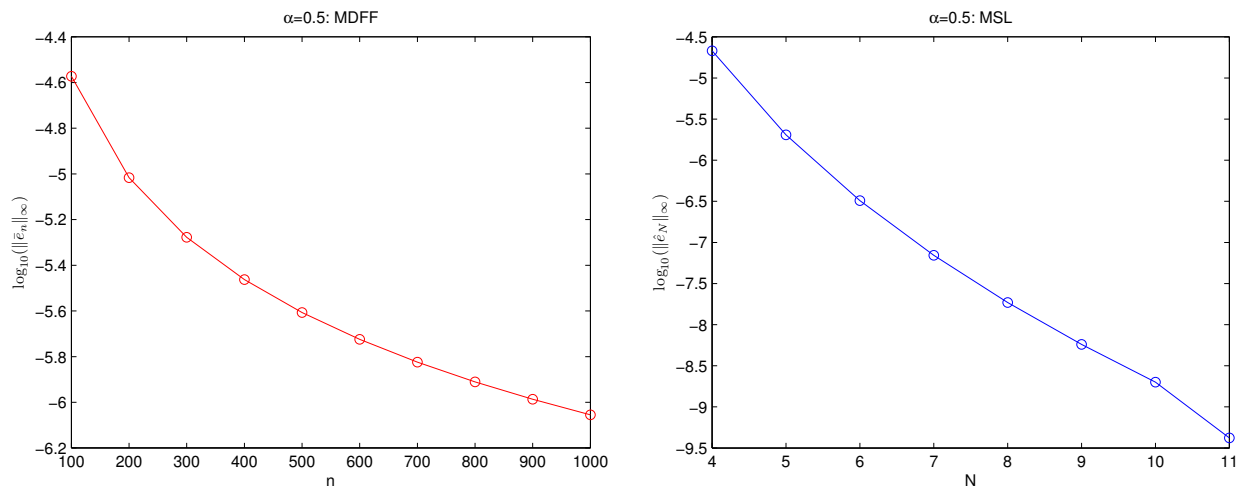
*La solution exacte de cet problème :*

$$u(x) = x^4 E_{\alpha,5}(-x^\alpha); \quad \text{où } E \text{ est la fonction de Mittag-Leffler définie par la formule 1.4.}$$

*Dans cet exemple ( ${}^C D_0^\alpha u(x) = {}^{RL} D_0^\alpha u(x)$ ), nous allons appliquer les deux méthodes, et trouver la solution approchée en différent points sur un intervalle fini à  $n = 100, 400$  pour la différences finies, et  $N = 4, 8$  pour la méthode spectral de Legendre (3.1), avec la représentation graphique dans la figure (3.1) qui données la convergence de les deux méthodes.*

$x_i$	Sol. exact	MDF : $n = 100, 400$		MSL : $N = 4, 8$	
		$\bar{e}_{100}(x_i)$	$\bar{e}_{400}(x_i)$	$\hat{e}_4(x_i)$	$\hat{e}_8(x_i)$
0.1	3.6361e-06	1.2946e-07	1.2946e-07	1.63e-06	3.61e-09
0.2	5.5242e-05	9.3817e-08	6.9445e-07	3.21e-06	4.90e-09
0.3	2.6920e-04	2.3937e-07	1.8011e-06	3.97e-06	2.82e-09
0.4	8.2475e-04	4.6006e-07	3.4946e-06	8.27e-08	3.42e-09
0.5	1.9605e-03	7.5856e-07	5.7985e-06	4.57e-06	4.95e-09
0.6	3.9707e-03	1.1363e-06	8.7255e-06	5.50e-06	1.60e-09
0.7	7.2018e-03	1.5938e-06	1.2282e-05	7.65e-07	6.20e-09
0.8	1.2050e-02	2.1315e-06	1.6470e-05	6.54e-06	2.92e-09
0.9	1.8960e-02	2.7491e-06	2.1291e-05	6.11e-06	1.72e-09
1.0	2.8422e-02	3.4464e-06	2.6743e-05	2.14e-05	1.86e-08

TABLE 3.1 – Comparaison entre les deux méthodes à différence  $n$  et  $N$  avec  $\alpha = 0.85$ , pour l'exemple 3.1.



(a) Méthode différences finies

(b) Méthode spectrale de Legendre.

FIGURE 3.1 – Résultats numériques pour l'exemple 3.1, par les deux méthodes.



$xi$	Méthode différence finies : $n = 100$				Méthode spectrale de Legendre : $N = 10$			
	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$
0.1	1.89e-08	7.69e-08	2.03e-07	4.33e-07	2.18e-10	2.86e-10	1.80e-10	5.54e-11
0.2	8.91e-08	3.90e-07	1.16e-06	2.84e-06	2.31e-10	3.03e-10	1.86e-10	5.42e-11
0.3	2.17e-07	9.80e-07	3.13e-06	8.32e-06	4.90e-11	1.04e-10	1.20e-10	6.27e-11
0.4	4.04e-07	1.86e-06	6.22e-06	1.76e-05	4.09e-10	6.11e-10	4.73e-10	1.84e-10
0.5	6.53e-07	3.05e-06	1.05e-05	3.10e-05	4.85e-10	6.84e-10	4.76e-10	1.63e-10
0.6	9.64e-07	4.54e-06	1.60e-05	4.90e-05	1.36e-10	1.49e-10	4.72e-11	8.81e-12
0.7	1.34e-06	6.35e-06	2.28e-05	7.17e-05	3.30e-10	5.18e-10	4.24e-10	1.70e-10
0.8	1.78e-06	8.46e-06	3.08e-05	9.92e-05	5.88e-10	8.55e-10	6.16e-10	2.15e-10
0.9	2.28e-06	1.09e-05	4.01e-05	1.32e-04	7.05e-10	9.96e-10	6.80e-10	2.22e-10
1.0	2.85e-06	1.36e-05	5.07e-05	1.69e-04	2.18e-09	2.54e-09	1.34e-09	3.70e-10

TABLE 3.2 – Comparaison entre les deux méthodes à différence  $\alpha$  pour  $n = 100$  et  $N = 10$ , pour l'exemple 3.1.

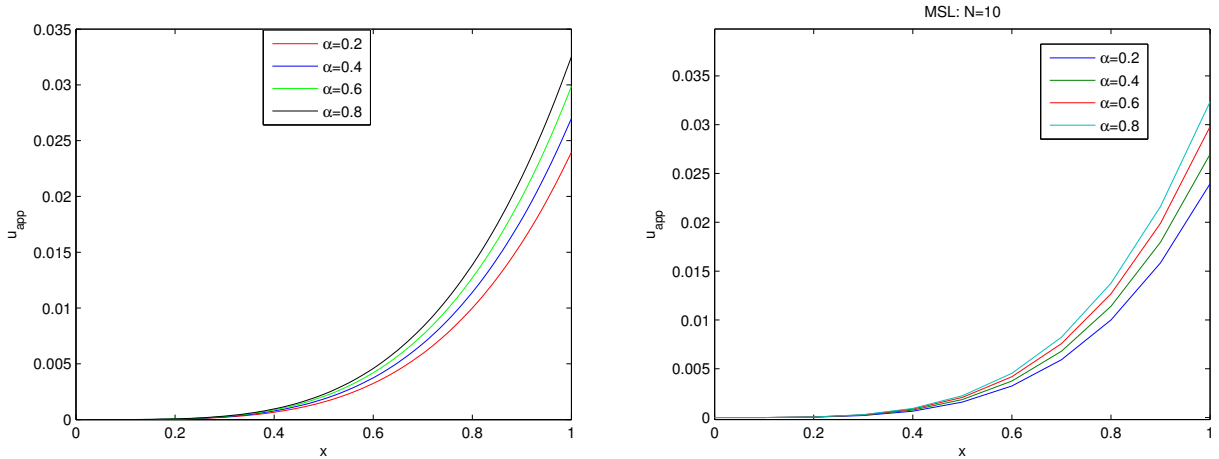


FIGURE 3.2 – Comparaison de la solution  $u(x)$  par différence  $\alpha$  par les deux méthodes où  $n = 100$  et  $N = 10$ , pour l'exemple 3.1

**Exemple 3.2** [2] *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^C D_0^{1/2} u(x) = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{x^3}{\pi}} - 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}, & x > 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

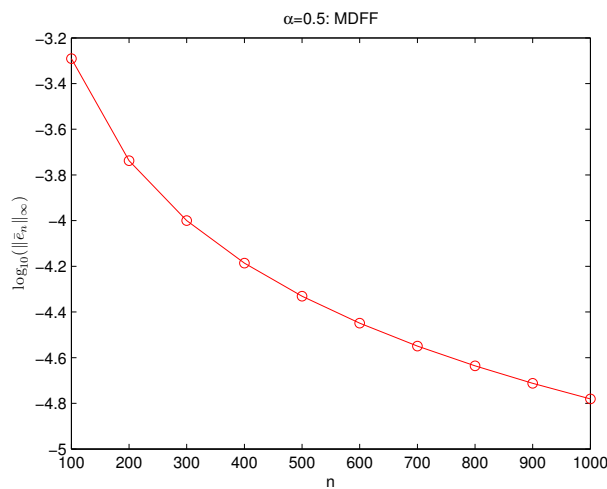
*La solution exacte est  $u(x) = x^2 - x$ .*

*Dans cet exemple ( ${}^C D_0^\alpha u(x) = {}^{RL} D_0^\alpha u(x)$ ), nous allons appliquer les deux méthodes, et calculer l'erreur absolue en différent points sur un intervalle fini à  $n = 100, 400, 1000$  pour la méthode de différences finies, et  $N = 4, 8, 12$  pour la méthode spectral de Legendre (3.3), avec la représentation graphique dans la figure (3.3) qui*

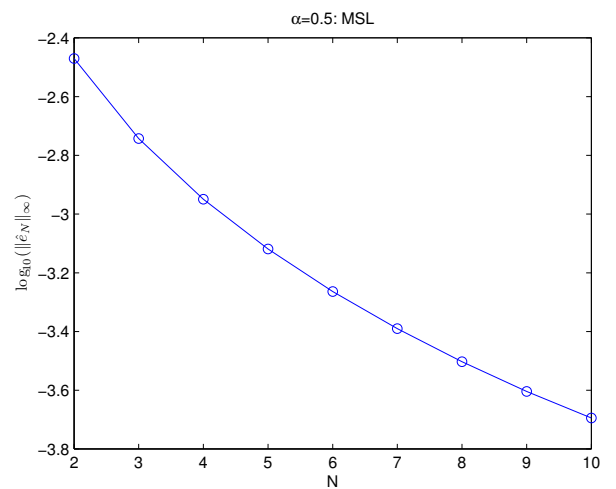
données la convergence de ces méthodes.

$x_i$	MDF			MSL		
	$n = 100$	$n = 400$	$n = 1000$	$N = 4$	$N = 8$	$N = 12$
0.1	1.4909e-04	1.9831e-05	5.1217e-06	3.58e-04	7.03e-05	1.32e-05
0.2	2.1889e-04	2.8514e-05	7.3160e-06	5.61e-04	1.26e-05	1.01e-05
0.3	2.7231e-04	3.5172e-05	8.9993e-06	6.09e-04	1.08e-04	1.12e-05
0.4	3.1729e-04	4.0783e-05	1.0418e-05	5.02e-04	1.31e-04	2.12e-05
0.5	3.5690e-04	4.5725e-05	1.1668e-05	2.41e-04	5.34e-05	9.77e-06
0.6	3.9269e-04	5.0193e-05	1.2798e-05	1.75e-04	9.62e-05	3.10e-05
0.7	4.2560e-04	5.4302e-05	1.3837e-05	7.46e-04	2.33e-04	5.72e-06
0.8	4.5622e-04	5.8126e-05	1.4804e-05	1.47e-03	2.17e-04	4.90e-05
0.9	4.8498e-04	6.1717e-05	1.5713e-05	2.35e-03	1.51e-04	5.50e-05
1.0	5.1217e-04	6.5114e-05	1.6572e-05	3.39e-03	1.12e-03	3.14e-04

TABLE 3.3 – Comparaison entre les deux méthodes à différence  $n$  et  $N$ , pour l'exemple 3.2.



(a) Méthode différences finies



(b) Méthode spectrale de Legendre.

FIGURE 3.3 – Résultats numériques pour l'exemple 3.2, par les deux méthodes.

**Exemple 3.3** [1] *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{RL}D^\alpha u(x) + u(x) = 0, & 0 < \alpha \leq 2, x > 0, \\ u(0) = 1, u'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

*La deuxième condition initial on utilisons uniquement dans le cas  $\alpha > 1$ . La solution exacte de ce problème est :*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

*Dans le cas  $0 < \alpha < 1$ , on prend  $\alpha = 0.85$ , le table(3.4) donne différentes valeurs de  $N$  et calculons l'erreur absolue à chaque fois. Pour  $\alpha = 1$  la solution exacte est  $\exp(-x)$  et pour  $\alpha = 2$  la solution exacte est  $\cos(x)$ , dans les sous-figure (3.4) on trace les solutions approché pour  $N = 6$  et  $\alpha = 0.75, 0.85, 0.95, 1$  dans (a), et dans (b) on prend  $\alpha = 1.25, 1.75, 1.95, 2$ .*

$x_i$	MSL		
	N=6	N=10	N=14
0.1	2.49e-03	7.82e-04	1.98e-04
0.2	7.35e-04	6.67e-04	1.30e-04
0.3	2.13e-03	2.27e-04	1.02e-04
0.4	3.46e-04	4.33e-04	4.20e-05
0.5	2.24e-03	7.58e-04	2.16e-04
0.6	6.98e-04	3.83e-04	3.35e-04
0.7	2.14e-03	3.17e-04	3.63e-04
0.8	1.33e-03	7.77e-04	3.43e-04
0.9	3.02e-03	9.65e-04	2.61e-04
1.0	7.93e-03	3.27e-03	2.00e-04

TABLE 3.4 – Erreur absolue pour différentes valeurs de  $N$  par MSL pour l'exemple 3.3.

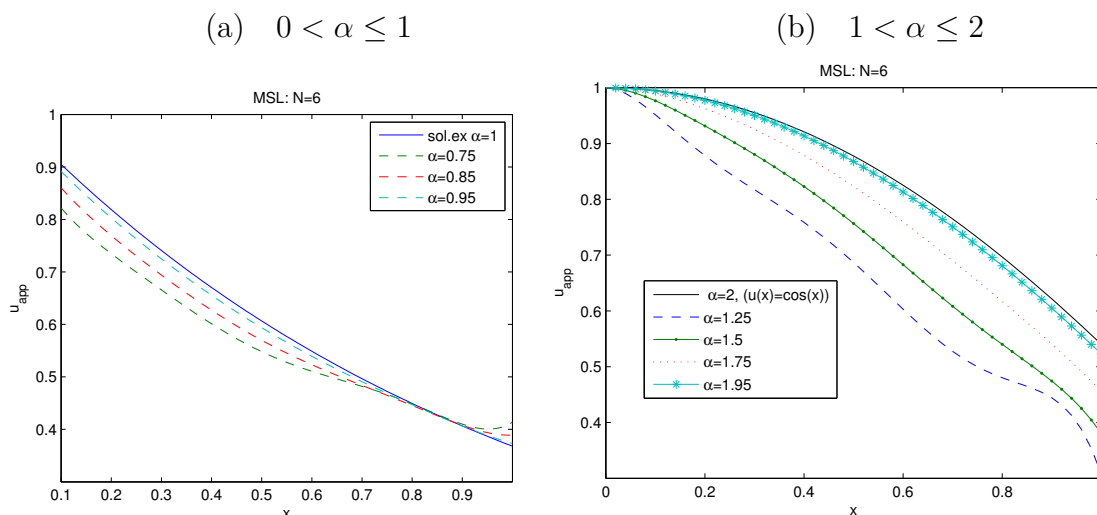


FIGURE 3.4 – Comparisons de  $u(x)$  pour différent  $0 < \alpha \leq 2$  avec  $N = 6$ , pour l'exemple 3.3.

**Exemple 3.4** [1] *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}u(x) + u(x) = x^2 + 4\sqrt{\frac{x}{\pi}}, & x > 0, \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

La solution exacte est donnée par  $u(x) = x^2$ .

Contrairement aux exemples précédents, la valeur de  $\alpha$  est fixe. En appliquant la méthode spectrale de Legendre, pour  $N = 2$ , nous pouvons écrire la solution approchée sous la forme :

$$u_2(x) = \sum_{i=0}^2 c_i P_i(x) = C^T \Phi(x),$$

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^2 g_i P_i(x) = F^T \Phi(x),$$

D'après le théorème (2.2), nous avons :

$$A^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{3}{35} & \frac{1}{63} \\ -\frac{1}{35} & -\frac{1}{45} & \frac{1}{77} \\ \frac{1}{315} & -\frac{3}{385} & -\frac{1}{117} \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3714 \\ 0.5720 \\ 0.2158 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, en utilisant l'équation (2.38), nous obtenons :

$$c_0 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{c_0}{15} - \frac{c_1}{35} + \frac{c_2}{315} \right) - f_0 = 0 \quad (3.5)$$

Maintenant, en appliquant l'équation (2.39), pour les conditions initiales, nous obtenons les résultats suivant :

$$\sum_{i=1}^2 c_i P_i(0) = 0 \Leftrightarrow c_0 - c_1 + c_2 = 0, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^2 c_i P_i'(0) = 0 \Leftrightarrow 2c_1 - 6c_2 = 0. \quad (3.7)$$

Enfin, en résoudre le système d'équations (3.5)-(3.7), on obtient :

$$c_0 = 0.333229213984502 \approx \frac{1}{3}, \quad c_1 = 0.499843820976752 \approx \frac{1}{2} \quad c_2 = 0.166614606992251 \approx \frac{1}{6}$$

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$u_2(x) = \sum_{i=1}^2 c_i P_i(x) = 0.99968764x^2 - (5.55e-17)x - 8.32e-17 \approx x^2 = u(x),$$

et le max d'erreur absolue dans cette cas est égale a :  $\|\hat{e}_2\|_\infty = 3.1236e - 04$ .

**Exemple 3.5** [3] Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}u(x) + 3u(x) = 3x^3 + \frac{8}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}, & x > 0, \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

La solution exacte est donnée par  $u(x) = x^3$ .

Le table 3.5, donne l'erreur entre la solution approchée à différence  $N$ . Dans table 3.6, en change l'ordre d'approximation  $N = 2, \dots, 6$  pour obtenir la solution approchée, dans ce table on remarque que les coefficients  $c_0, c_1, c_2$  et  $c_3$  sont fixés aux valeurs  $\frac{1}{4}, \frac{9}{20}, \frac{1}{4}$ , et  $\frac{1}{20}$  respectivement donc on écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 c_i P_i(x) &= \frac{1}{4} + \frac{9}{20}(2x - 1) + \frac{1}{4}(6x^2 - 6x + 1) + \frac{1}{20}(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1) \\ &= x^3, \end{aligned}$$

cette dernière est la solution exacte de cette équation.

$x_i$	MSL		
	N=2	N=3	N=6
0.1	5.97e-03	8.28e-07	6.71e-08
0.2	1.99e-02	2.69e-06	2.36e-08
0.3	3.58e-02	4.67e-06	1.78e-07
0.4	4.76e-02	5.82e-06	1.26e-07
0.5	4.93e-02	5.23e-06	1.70e-07
0.6	3.51e-02	1.96e-06	4.12e-07
0.7	1.29e-03	4.91e-06	1.74e-07
0.8	6.57e-02	1.63e-05	5.81e-07
0.9	1.64e-01	3.32e-05	6.83e-07
1.0	3.03e-01	5.64e-05	3.38e-06

TABLE 3.5 – Erreur absolue a déférent valeurs de  $N$  par MSL pour l'exemple 3.5.

N	Les coefficients $(c_0, \dots, c_N)$						
2	0.2324573	0.3486860	0.1162286				
3	0.2499940	0.4499795	0.2499777	0.04999226			
4	0.2500006	0.4500025	0.2500064	0.0500071	2.628878e-6		
5	0.2499998	0.4499996	0.2499990	0.04999761	-2.73288e-6	-1.035957e-6	
6	0.2500000	0.4500000	0.2500001	0.05000041	1.017723e-6	1.193456e-6	4.632417e-7

TABLE 3.6 – Coefficients de la solution approchée à déférent valeurs de  $N$  par MSL pour l'exemple 3.5

---

## Conclusion

---

Dans ce mémoire, on a présenté deux méthodes numériques de résolution des équations différentielles fractionnaires linéaires. La première méthode est la méthode des différences finies fractionnaire (MDFF), cette méthode est basée sur les formules de différences finies, utilisée pour les EDFs au sens de Caputo pour calculer une solution approchée en point de discrétisation, et la deuxième méthode est basée sur la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire de Legendre, nous avons l'utilisée cette méthode pour approximer la solution d'une classe des équations différentielles fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.

Pour voir l'efficacité de ces méthodes, on a utilisé plusieurs exemples numériques avec MATLAB2009. l'analyse de l'erreur commise dans cette approche montre l'efficacité de deux méthode. mais la méthode spectrale de Legendre permet d'obtenir une bonne précision de la solution. De plus, un petit nombre de polynômes de Legendre décalés est nécessaire pour obtenir un résultat satisfaisant.

---

## Bibliographie

---

- [1] M. H. Akrami, M. H. Atabakzadeh, G. H. Erjaee, The operational matrix of fractional integration for shifted Legendre polynomials. *IJST*, 37A4,439-444 (2013).
- [2] B.R. Albadarneh, M. I. Batihab, Mohammad Zurigatb. Numerical solutions for linear and non-linear fractional differential equations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 106(3), 859–871, 2016.
- [3] A. H. Bhrawy, A. S. Alofi. The operational matrix of fractional integration for shifted Chebyshev polynomials. *Appl Math Lett.*, 26, 25-31 (2013).
- [4] K. Diethelm, N. J. Ford. Multi-order fractional differential equations and their numerical solutions. *Appl Math Comput.*, 154, 621-640 (2004).
- [5] E. H. Doha, A. H. Bhrawy, S. S. Ezz-Eldien. A Chebyshev spectral method based on operational matrix for initial and boundary value problems of fractional order. *Comput Math Appl.*, 62, 2364-2373 (2011).
- [6] A. Khalouta. Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques : extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire. Thèse de Doctorat. Université Ferhat ABBAS SETIF1 (2019).
- [7] A. Kilbas, H. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies 204. Elsevier, 1 edition, 2006.
- [8] K.S. Miller, B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John Wiley, Sons Inc, New York, 1993.
- [9] C. Milici, G. Draganescu, J. T. Machado, *Introduction to Fractional Differential Equations*, Springer Nature Switzerland AG, 2019.
- [10] Z. Odibat, S. Momani, H. Xu. A reliable algorithm of homotopy analysis method for solving nonlinear fractional differential equations. *Appl Math Model.*, 34, 593-600 (2010).
- [11] K.B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York London, 1974.



- [12] M. K. Owolabi, A. Atangana, Numerical Methods for Fractional, Differentiation, Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2019.
- [13] P. N. Paraskevopoulos. Chebyshev series approach to system identification, analysis and control. *J Franklin Inst.*, 316, 135-157 (1983).
- [14] P. N. Paraskevopoulos. Legendre series approach to identification and analysis of linear systems. *IEEE Trans Automat Control.* 30(6), 585-589 (1985).
- [15] I. Podlubny. Fractional Differential Equation. New York, Academic Press, (1999).
- [16] S. S. Ray, R. K. Bera. Solution of an extraordinary differential equation by Adomian decomposition method. *J. Appl. Math.*, 4, 331-338 (2004).
- [17] A. Saadatmandi, M. Dehghan. A new operational matrix for solving fractional-order differential equation. *comput Math Appl*, 59, 1326-1336 (2010).
- [18] S. Sengupta, U. Ghosh, S. Sarkar, S. Das. Application of Fractional Derivatives in Characterization of ECG graphs of Right Ventricular Hypertrophy Patient, Submitted on 7 Nov 2017.
- [19] J. Shen, T. Tang, L.L. Wang, Spectral methods. Algorithms, Analysis and applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [20] S. Yanga, A. Xiao, H. Su. Convergence of the variational iteration method for solving multi-order fractional differential equations. *Comput Math Appl.*, 60, 2871-2879 (2010).

## ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بتحليل وتطبيق طريقتين محددتين لحل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية، الأولى تعتمد على الفروق المنتهية وقد طبقت على المعادلات ذات مشتقات كوتو، أما الطريقة الثانية فتعتمد على كثيرات حدود ليجنדר المعدلة وتخص المعادلات ذات مشتقات ريمان-ليوفيل. **الكلمات المفتاحية:** المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية، مشتقات كوتو، مشتقات ريمان-ليوفيل، الفروق المنتهية، كثيرات حدود ليجنדר المعدلة.

## Résumé

Dans ce mémoire, nous avons expliqué et appliqué deux méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles fractionnaires linéaire, la première est basée sur les différences finies et a été appliquée aux équations avec les dérivées de Caputo, et la seconde méthode est basée sur les polynômes de Legendre décalés et a été appliquée aux équations avec les dérivés de Riemann-Liouville.

**Mots-clés:** Équations différentielles fractionnaires linéaire, dérivées de Caputo, dérivées de Riemann-Liouville, différences finies, polynômes de Legendre décalés.

## Abstract

In this thesis, we have explained and applied two numerical methods to solve linear fractional differential equations, the first is based on finite differences and has been applied to equations with Caputo derivatives, and the second method is based on shifted Legendre polynomials and has been applied to equations with Riemann-Liouville derivatives.

**Keywords:** Linear fractional differential equation, Caputo derivatives, Riemann-Liouville derivatives, finite differences formulas, shifted Legendre polynomials.