République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présentée par :

Boussam Nessrine

Pour l'obtention du diplôme de :

Master

Filière : Mathématique .
Spécialité : Système dynamique .

Thème :

Les hypergroupes

Soutenu publiquement **le ..... 2023** devant le jury composé de

Mme. Adimi Hadjer	M.C.B.	Président
M. Chbel Zohir	M.C.A.	Encadrant
M. Belkacem Nazih eddine	M.A.A.	Examinateur

Promotion 2022/2023

Table des matières

INTRODUCTION **3**

1 Généralités sur les groupes **6**

1.1 Généralités 6
1.2 Exemples 6
1.3 Règles de calcul 7
1.3.1 En notation « multiplicative » 7
1.3.2 En notation « additive » (réservée aux groupes commutatifs) 7
1.4 Tables de multiplication 8
1.5 Autres exemples de groupe 8
1.5.1 Groupes de nombres 8
1.5.2 Groupes de permutation 8
1.6 Sous-groupes (notation multiplicative) 10
1.6.1 Exemples 10
1.6.2 Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ 11
1.6.3 Une caractérisation condensée des sous-groupes 11
1.6.4 Intersections de sous-groupes 12
1.6.5 Sous-groupe engendré par une partie 12
1.6.6 Groupe monogène 12
1.7 Morphismes de groupes 13
1.8 Propriétés (notation multiplicative) 14
1.9 Noyau et image d'un morphisme 14

2 Sur les hypergroupes des hypergroupes cycliques **16**

2.1 Notions de base sur les hypergroupes 16

2.1.1 Sous hypergroupe 18

3 Hyper I-algèbres et polygroupes **25**

3.1 Hyper I-algèbre 26

3.1.1 Catégorie des polygroupes commutatifs : $\mathcal{CPG}$ 29

3.1.2 Catégorie des hyper I-algèbres $\mathcal{IALG}$ 30

Conclusion générale **34**

INTRODUCTION

En 1934, Marty a introduit les superstructures en tant qu'extension des structures algébriques [15]. Depuis lors, d'importants progrès ont été réalisés dans ce domaine, comme en témoignent divers chercheurs. Le concept de cyclicité détient un grand pouvoir dans l'étude des groupes, et Wall a été un pionnier dans l'investigation des hypergroupes cycliques. Plusieurs approches ont été développées et étudiées par différents chercheurs suite à l'exploration de la périodicité des hypergroupes. Une approche a été largement examinée par De Salvo, Freni et Corsini [6, 9, 10, 11], tandis qu'une autre a été étudiée par Vougioknis, Cougetsoff, Kessoglide et Spartalis [13, 17, 18, 19]. Novak et al. ont réalisé une étude approfondie sur les hypergroupes périodiques [6, 9, 10, 11], examinant les deux définitions de la périodicité. Gu a introduit le concept de l'indice d'un générateur dans le domaine cyclique, et des chercheurs ultérieurs se sont plongés dans le sujet en détail. Malgré l'importance et les progrès réalisés, l'étude des hypergroupes cycliques pose encore de nombreuses questions sans réponse.

À la fin de l'année 1966, Imai et Iseki [7] ont proposé le concept d'algèbre BCK. Plus récemment, Barzuei, Jun, Zadi et d'autres [19] ont appliqué les superstructures à leur algèbre BCK, introduisant la notion de super K-algèbre étendue aux (quasi) groupes. L'idée des hypergroupes quasi-standard, désignés comme polygroupes par Comer [3], a également été introduite en 1982 par Bonansiniga et Corsini [1].

L'objectif de l'étude des hypergroupes est de comprendre les structures mathématiques abstraites qui généralisent les propriétés des groupes. Les hypergroupes permettent de modéliser des opérations binaires non nécessairement associatives, ce qui les rend utiles pour représenter des phénomènes complexes dans divers domaines mathématiques et appliqués. L'analyse des hypergroupes aide à explorer des concepts mathématiques avancés et à résoudre des problèmes qui dépassent les limites des groupes traditionnels. En résumé, l'étude des hypergroupes vise à étendre et à approfondir notre compréhension des structures algébriques.

L'organisation de ce mémoire est la suivante : Nous commençons par fournir des définitions fondamentales et des résultats relatifs aux superstructures et aux supergroupes cycliques qui sont utilisés dans cette étude. Dans la Section 2, nous approfondissons les questions non résolues concernant les sous-hypergroupes des hypergroupes circulaires. Nous donnons un aperçu concis des concepts de base des hypergroupes et des hypergroupes circulaires, avec des informations complémentaires disponibles dans les références citées [5], [7] et [8]. Nous passerons également en revue les travaux antérieurs sur les hyperalgèbres et introduirons de nouvelles idées. En plus de présenter de nouveaux résultats, comme mentionné dans le résumé.

1 Généralités sur les groupes

1.1 Généralités

Définition 1.1 *(Groupe) Un groupe est un couple $(G, *)$ constitué d'un ensemble G et d'une loi de composition interne $*$ sur G de sorte que :*

- *$*$ est associative,*
- *il y a dans G un élément neutre pour $*$,*
- *tout élément de G admet un symétrique pour la loi $*$.*

C'est-à-dire :

- $\forall\, x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z),$
- $e \in G, \forall\, x \in G, x * e = e * x = x,$
- $\forall\, x \in G, \exists\, y \in G, x * y = y * x = e.$

Remarque 1.1 *Si $(G, *)$ est un groupe, il y a unicité du neutre (déjà vu en cas plus général).*
Si de plus $*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

1.2 Exemples

• $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.
• $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.
• $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe.
• $(\mathbb{Q}, \times)$ n'est pas un groupe, mais $(\mathbb{Q}^*, \times)$ en est un.
• Créons un groupe à trois éléments $G = \{a, b, c\}$, de loi $\heartsuit$ définie par la table de Pythagore donnant $x \heartsuit y$:

$$\begin{array}{c|ccc} x^y & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & c & a \\ c & c & a & b \end{array} \qquad (1.1)$$

On pose a comme élément neutre, et on choisit $b\heartsuit c = c\heartsuit b = a$.

1.3 Règles de calcul

1.3.1 En notation « multiplicative »

Dans le groupe $(G, \times)$ avec les notations suivantes :
• Le neutre 1_G appelé aussi élément unité.
• Le symétrique de $x \in G$ est noté x^{-1}, appelé aussi inverse de x.
• L'itéré n fois est noté x^n.
• Le symbole $\times$ est souvent omis : $x \times y$ est noté aussi xy.
Les règles précédentes donnent, avec ces notations :
• $(x^{-1})^{-1} = x$,
• $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$,
• $xy = z \Longleftrightarrow x = zy^{-1}$,
$yx = z \Longleftrightarrow x = y^{-1}z$,
• $xz = yz \Longrightarrow x = y$,
$zx = zy \Longrightarrow x = y$,
• $x^0 = 1_G, x^1 = x$,
$\forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = x^n x, \forall\, n \in \mathbb{N}, x^{-1} = (x^{-1})n = (xn)^{-1}$,
$\forall\, n, p \in \mathbb{Z}, x^n x^p = x^{(n+p)}, \forall n, p \in \mathbb{Z}, (x^n)^p = x^{n\times p}$.

1.3.2 En notation « additive » (réservée aux groupes commutatifs)

Dans le groupe $(G, +)$, avec les notations suivantes :
• Le neutre 0_G est appelé l'élément nul de G.
• Le symétrique de $x \in G$ est noté $-x$, appelé aussi opposé de x.
• L'itéré n fois est noté $n.x$ ou nx.
• On suppose de plus que le groupe $(G, +)$ est commutatif, c'est-à-dire que $\forall x, y \in G, x + y = y + x$.
Les règles donnent alors : • $-(-x) = x$,
• $-(x + y) = (-y) + (-x) = (-x) + (-y)$,

• $(y+x=)x+y=z \Longleftrightarrow x=z+(-y)$,
$z+(-y)$ est noté aussi $z-y$,
• $x+z=y+z \Longrightarrow x=y$,
• $0.x=0_G, 1.x=x$,
$\forall\, n \in \mathbb{N}, (n+1).x=n.x+x,\ \ \forall\, n \in N, (-n).x=n.(-x)=-(n.x)$, noté aussi $-n.x$
$n, p \in \mathbb{Z}, n.x+p.x=(n+p).x, p.(n.x)=(p\times n).x$.

1.4 Tables de multiplication

Si $(G,*)$ est un groupe et si G a un nombre fini, $n, \in \mathbb{N}$), d'éléments, $(G,*)$ est dit groupe fini, d'ordre n.
Pour un groupe fini, d'ordre n suffisamment petit, on peut dresser la Table de composition.

Par exemple, soit l'ensemble $E=\{e,x,y,z\}$ muni de la loi de composition $*$, déterminée par le tableau ci-contre, dans lequel le composé $x*y$ est l'élément situé à l'intersection de la ligne de x et de la colonne de y. On vérifiera que $(E,*)$ est un groupe commutatif. C'est le groupe de Klein. Une représentation en est donnée en géométrie par ensemble (muni de la loi $\circ$) ayant pour éléments : la transformation identique e, et les symétries x, y, z par rapport à trois axes concourants, orthogonaux deux à deux, OX, OY, OZ.

$*$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

1.5 Autres exemples de groupe

1.5.1 Groupes de nombres

$(\mathbb{C},+), (\mathbb{R},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{Z},+), (\mathbb{C}^*,\times), (\mathbb{R}^*,\times), (\mathbb{Q}^*,\times)$ sont des groupes.

1.5.2 Groupes de permutation

Soit E un ensemble non vide quelconque. On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations sur E (ensemble des bijections de E dans E). Alors $\circ$ constitue une loi de composition interne sur $\mathfrak{S}(E)$, et $(\mathfrak{S}(E),\circ)$ est un groupe, appelé groupe des permutations de E. Ce groupe est non commutatif dès que E a au moins trois éléments.

Démonstration :
• On peut composer deux bijections de E dans E, et on obtient une bijection de E dans E.
• La loi $\circ$ est associative : $\forall\ f, g, h \in \mathfrak{S}(E), f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (c'est vrai dans un cas plus général et pas seulement pour les bijections).
• Neutre : $Id_E \in \mathfrak{S}(E)$.
• Tout $f \in \mathfrak{S}(E)$ a un symétrique pour $\circ$, à savoir f^-1.
Donc $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un groupe.
Montrons que, pour un ensemble E de plus de trois éléments, $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ n'est pas commutatif :
Soient a, b, c trois éléments de E distincts, et soient $f, g : E \longrightarrow E$ définies ainsi :

$$\left\{\begin{array}{c} f(a) = b \\ f(b) = a \\ \forall\ x \in E\backslash\{a, b\}, f(x) = x, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} g(b) = c \\ g(c) = b \\ \forall x \in E\backslash\{b, c\}, g(x) = x \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Alors f et g sont dans $\mathfrak{S}(E)$, puisque ce sont des applications de E dans E et inversibles d'inverse elles-mêmes (elles sont involutives). Et on a alors $f \circ g \neq g \circ f$:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(a) = b, \tag{1.3}$$
$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c. \tag{1.4}$$

Exemple 1.1 *On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ lorsque $E = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Ainsi, $\mathfrak{S}_n$ est un groupe fini de cardinal $n\,!$.*
Table de Pythagore de $\mathfrak{S}_2$: $\mathfrak{S}_2 = \{Id, \tau\}$, où $Id : \{1, 2\}_{x \longmapsto x} \longrightarrow \{1, 2\}$, et $\tau : \{1, 2\} \longrightarrow \{1, 2\}$ est définie par $\tau(1) = 2, \tau(2) = 1$.
Tableau donnant $x \circ y$:

x^y	Id	τ
Id	Id	τ
τ	τ	Id

(1.5)

Table de Pythagore de $\mathfrak{S}_3$: $\mathfrak{S}_3 = \{Id_E, \tau_{1,2}, \tau_{2,3}, \tau_{3,1}, s, s'\}$, où :
$Id : \{1, 2, 3\}_{x \longmapsto x} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$,
$\tau_{a,b} : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ *défini par* $\tau_{a,b}(a) = b, \tau_{a,b}(b) = a, \tau_{a,b}(x) = x$ *sinon,*
$s : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ *définie par* $s(1) = 2, s(2) = 3, s(3) = 1$,
$s' : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ *définie par* $s'(1) = 3, s'(2) = 1, s'(3) = 2$.
Tableau donnant $x \circ y$:

x^y	Id	$\tau_{1,2}$	$\tau_{1,3}$	$\tau_{2,3}$	s	s'
Id	Id	$\tau_{1,2}$	$\tau_{1,3}$	$\tau_{2,3}$	s	s'
$\tau_{1,2}$	$\tau_{1,2}$	Id	s'	s	$\tau_{2,3}$	$\tau_{1,3}$
$\tau_{1,3}$	$\tau_{1,3}$	s	Id	s'	$\tau_{1,2}$	$\tau_{2,3}$
$\tau_{2,3}$	$\tau_{2,3}$	s'	s	Id	$\tau_{1,3}$	$\tau_{1,2}$
s	s	$\tau_{1,3}$	$\tau_{2,3}$	$\tau_{1,2}$	s'	Id
s'	s'	$\tau_{2,3}$	$\tau_{1,2}$	$\tau_{1,3}$	Id	s

(1.6)

1.6 Sous-groupes (notation multiplicative)

Définition 1.2 *Soit $(G, \times)$ un groupe, et soit H une partie de G. On dit que H constitue un sous-groupe de $(G, \times)$ lorsque :*

1. $1_G \in H$
2. *H est stable par $\times$: $\forall x, y \in H, x \times y \in H$*
3. *H est stable par passage à l'inverse : $\forall x \in H, x^{-1} \in H$*

Proposition 1.1
Si H est un sous-groupe de $(G, \times)$, alors $\times$ constitue une loi de composition interne sur H, et $(H, \times)$ est un groupe.

Démonstration :

- $\times$ est bien une loi de composition interne sur H d'après 2.
- L'associativité n'est pas perdue par restriction.
- Neutre : c'est 1_G, qui est dans H d'après 1.
- Existence d'un inverse pour tout x de H d'après 3.

1.6.1 Exemples

• $\mathbb{R}^*$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times), \mathbb{Q}^*$ de $(\mathbb{R}^*, \times)$ (et aussi de $(\mathbb{C}^*, \times)$); $\{2^n, n \in \mathbb{Z}\}, \{-1, 1\}, \mathbb{Q}^*_+$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{Q}^*, \times)$.
• U est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)(\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}), \mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)(\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\})$.
• Des sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$ sont : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C}^*, arg(z) = \alpha[\pi]\}$. (Le dernier est une droite du plan complexe passant par 0).
• Pour $n \in \mathbb{N}, n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
• Si $(G, \times)$ est un groupe, alors $\{1_G\}$ et G sont des sous-groupes de G (les autres sous-groupes sont appelés les sous-groupes propres de G).

• $\{Id, s, s'\}$ est un sous-groupe (commutatif) de $\mathfrak{S}_3$ qui n'est pas commutatif.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une partie de $\{1, 2, ..., n\}$ non vide. Soit $H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma(A) \subset A\}$, c'est-à-dire que H est l'ensemble des permutations qui laissent stable A (remarque : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, comme σ est bijective, $\sigma(A)$ a le même cardinal que A, donc $\sigma(A) \subset A \Longrightarrow \sigma(A) = A$). Alors H est un sous-groupe de $(S_n, \circ)$

1.6.2 Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Les $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$, sont des sous-groupes de mbZ. Y en a-t-il d'autres ?
Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ autre que $\{0\}$. Il contient donc un élément non nul de $\mathbb{Z}$, et son opposé (l'un d'eux étant alors dans $\mathbb{N}^*$). Donc l'ensemble $G \cap \mathbb{N}^*$ est non vide et est une partie de $\mathbb{N}$. il admet donc un plus petit élément, disons $n \geq 1$. Alors $G = n\mathbb{Z}$.
Démonstration :
Déjà, une récurrence rapide montre que $\forall\, k \in \mathbb{N}, kn \in G$, puis comme G est stable par passage à l'inverse, $\forall\, k \in \mathbb{Z}, kn \in G$, donc $n\mathbb{Z} \subset G$. L'autre inclusion maintenant :
Soit $x \in G$. La division euclidienne de x par n donne $x = nq + r$, où $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, n-1]$. Donc $r = x - nq = \underbrace{x}_{\in G} + \underbrace{(-nq)}_{\in G}$. Donc $r \in G$. Comme n est le plus petit élément de $G \cap \mathbb{N}^*$, on a nécessairement $r = 0$ (car $r < n$). Donc $x \in n\mathbb{Z}$. Ainsi, les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont exactement les $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.

1.6.3 Une caractérisation condensée des sous-groupes

Proposition 1.2
Soit $(G, \times)$ un groupe, H une partie de G. Alors H est un sous-groupe de $(G, \times)$, si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{c} 1_G \in H \\ \forall x, y \in H, xy^{-1} \in H \end{array} \right. \tag{1.15}$$

Démonstration :
La première implication est évidente. Pour l'autre : supposons que $\left\{ \begin{array}{c} 1_G \in H \\ \forall x, y \in H, xy^{-1} \in H \end{array} \right.$
Alors déjà $1_G \in H$...
En prenant $x = 1_G$, on a, pour tout $y \in H, y^{-1} \in H$.
Pour tout $x, y \in H, y^{-1} \in H$, donc $x(y^{-1})^{-1} \in H$ c'est-à-dire $xy \in H$.

1.6.4 Intersections de sous-groupes

Théorème 1.1
Soit $(G, \times)$ un groupe. Alors toute intersection de sous-groupes de G est un sous-groupe de G.

Démonstration :
Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G indexée par I. Notons $H = \cap_{i \in I} H_i$.
Alors $1_G \in H$, puisque $\forall i \in I, 1_G \in H_i$.
Soient $x, y \in H$. Alors, pour tout $i \in I, x \in H_i, y \in H_i$ donc $xy^{-1} \in H_i$. Donc $xy^{-1} \in H$.
Donc H est un sous-groupe de $(G, \times)$.

1.6.5 Sous-groupe engendré par une partie

Soit $(G, \times)$ un groupe, A une partie de G. On appelle sous-groupe engendré par A le plus petit sous-groupe de G contenant A. Il y en a bien un, puisque déjà G contient A. Donc l'ensemble ε des sous-groupes de G contenant A n'est pas vide.
Considérons alors $\cap_{H \in \varepsilon} H$. C'est un sous-groupe de G, il contient A et est contenu dans tout sousgroupe de G contenant A. On note alors $\langle A \rangle = \cap_{H \in \varepsilon} H$.
Cas particulier :
Un sous-groupe engendré par un singleton $\{a\}$ est noté $\langle a \rangle$, et on parle du sous-groupe engendré par l'élément a.

Exemple 1.2
- *Dans* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *:* $\langle \dot{2} \rangle = \{\dot{0}, \dot{2}, \dot{4}\}$, $\langle \dot{3} \rangle = \{\dot{0}, \dot{3}\}$, $\langle \dot{5} \rangle = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *(on dit que* $\dot{5}$ *est un générateur de* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$*),* $\langle \{\dot{2}, \dot{3}\} \rangle = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}(\{\dot{2}, \dot{3}\}$ *est une partie génératrice de* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$*).*
- *Dans* $(\mathbb{R}, +)$ *:* $\langle 2\pi \rangle = 2\pi\mathbb{Z}$.
- *Dans* $\mathfrak{S}_3$: $\langle s \rangle = \{Id, s, s'\}, \langle s' \rangle = \{Id, s, s'\}, \langle \tau_{1,2} = \{Id, \tau_{1,2}\}, \langle s, \tau_{a,b} \rangle = \mathfrak{S}_3$

1.6.6 Groupe monogène

Définition 1.3
Soit $(G, \times)$ un groupe. On dit que G est monogène lorsqu'il admet un générateur, c'est-à-dire lorsqu'il existe $a \in G$ tel que $\langle a \rangle = G$, c'est-à-dire : $\exists a \in G, \langle a \rangle = G$.

Remarque 1.2

$$\langle a \rangle = \{a^k, k \in \mathbb{Z}\} \tag{1.16}$$

Démonstration :

• Soit H un sous-groupe de G contenant a. Alors, comme H est stable par $\times$ et passage à l'inverse, une récurrence évidente montre qu'alors H contient $\{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$.

• L'ensemble $\{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$ est effectivement un sous-groupe de G contenant a :

Il contient $1_G = a^0$.

Il est stable par $\times$, puisque pour tous $x, y \in \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$, x s'écrit $x = a^k$, y s'écrit $y = a^{k'}$ (où $k, k' \in \mathbb{Z}$) et $xy = a^k a^{k'} = a^{k+k'} \in \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Il est stable par passage à l'inverse puisque pour tout $x \in \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$, x s'écrit $x = a^k$ où $k \in \mathbb{Z}$, et $x^{-1} = (a^k)^{-1} = a^{-k} \in \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$.

C'est donc un sous-groupe de G.

• Enfin il contient a puisque $a = a^1$.

Donc $\{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G qui contient a, et c'est le plus petit.

Remarque 1.3

Plus généralement, $\langle A \rangle$ est l'ensemble des produits de puissances d'éléments de A.

Définition 1.4

Un groupe G est dit cyclique lorsqu'il est monogène et fini.

Exemple 1.3

$(\mathbb{Z}, +)$ *est monogène infini :* $\mathbb{Z} = \{k.1, k \in \mathbb{Z}\} = \langle 1 \rangle$ *(Attention, notation additive).*

Tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ *sont monogènes (infinis) :* $n\mathbb{Z} = \{k.n, k \in \mathbb{Z}\} = \langle n \rangle$.

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ *est cyclique, engendré par* $\dot{1}$ *(qui n'est généralement pas le seul).*

$(\mathbb{U}_n, \times)$ *est aussi cyclique :* $\mathbb{U}_n = \{\omega^k, k \in \mathbb{Z}\} = \langle \omega \rangle$ *où* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1.7 Morphismes de groupes

Définition 1.5

Soient $(G, \sharp)$ *et* $(H, \heartsuit)$ *deux groupes. Un morphisme de* $(G, \sharp)$ *vers* $(H, \heartsuit)$ *est une application* $\varphi : G \longrightarrow H$ *telle que* $\forall x, y \in G, \varphi(x \sharp y) = \varphi(x) \heartsuit \varphi(y)$.

Exemple 1.4

• *exp est un morphisme de* $(\mathbb{R}, +)$ *vers* $(\mathbb{R}^*, \times)$.

• $x \mapsto \sqrt{x}$ *vers* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *(ou vers* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *aussi).*

• $x \mapsto ax$ *de* $(\mathbb{R}, +)$ *vers* $(\mathbb{R}, +)$.

• $\theta \mapsto e^{i\theta}$ *de* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *vers* $(\mathbb{C}^*, \times)$.

• *L'ensemble* $\mathcal{S}_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *des suites réelles convergentes est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$*, et l'application* $u \mapsto lim(u)$ *est un morphisme de* $\mathcal{S}_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *vers* $(\mathbb{R}, +)$.

1.8 Propriétés (notation multiplicative)

Proposition 1.3 *Soit φ un morphisme d'un groupe $(G, \times)$ vers un groupe $(H, \times)$. Alors :*

1. $\forall x, y \in G, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
2. $\varphi(1_G) = 1_H$
3. $\forall x \in G, \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$
4. $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, \varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$

Démonstration :
Le point 1 vient de la définition.
Pour 2 : $\varphi(1_G) = \varphi(1_G \times 1_G) = \varphi(1_G) \times \varphi(1_G)$. L'élément $a = \varphi(1_G)$ de H vérifie donc $a \times a = a$. Donc $a = a \times a^{-1} = 1_H$.
Pour 3 : soit $x \in G$. Alors $\varphi(x^{-1})\varphi(x) = \varphi(x^{-1}x) = \varphi(1_G) = 1_H$. De même, $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = 1_H$. Donc $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.
Pour 4 : soit $x \in G$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$:
Pour $n = 0, \varphi(x^0) = \varphi(1_G) = 1_H = (\varphi(x))^0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$. Alors $\varphi(x^{n+1}) = \varphi(x^n x) = \varphi(x^n)\varphi(x) = (\varphi(x))^n\varphi(x) = (\varphi(x))^{n+1}$.
On passe aux n négatifs avec le point précédent.

1.9 Noyau et image d'un morphisme

Définition, proposition :
Soit φ un morphisme d'un groupe $(G, \times)$ vers un groupe $(H, \times)$. L'image de φ, notée Im φ, c'est $\varphi(G)$,
c'est-à-dire $\{\varphi(x), x \in G\}$. Alors Im φ est un sous-groupe de H.
Démonstration :
• Im φ contient 1_H car $1_H = \varphi(1_G)$.
• Im φ est stable par $\times$:
Soient $u, v \in Im\varphi$. Alors u s'écrit $\varphi(x)$ où $x \in G$, v s'écrit $\varphi(y)$ où $y \in G$. Donc $u \times v = \varphi(x) \times \varphi(y) = \varphi(xy) \in Im\phi$.
• Im φ est stable par passage à l'inverse :
Soit $u \in Im\varphi$. Alors u s'écrit $\varphi(x)$ où $x \in G$, et $u^{-1} = (\varphi(x))^{-1} = \varphi(x^{-1}) \in Im\varphi$

Définition 1.6 *Soit φ un morphisme d'un groupe $(G, \times)$ vers un groupe $(H, \times)$. Le noyau de φ, noté ker φ est par définition :*

$$ker\varphi = \{x \in G, \varphi(x) = 1_H\} \tag{1.17}$$

Proposition 1.4 *ker φ est un sous-groupe de G.*

Démonstration :

- $1_G \in ker\varphi$ car $\varphi(1_G) = 1_H$.
- Pour tous $x, y \in ker\varphi$, on a $\varphi(xy) = \varphi(x) \times \varphi(y) = 1_H \times 1_H = 1_H$, donc $xy \in ker\varphi$.
- Pour tout $x \in ker\varphi, \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1} = (1_H)^{-1} = 1_H$, donc $x^{-1} \in ker\varphi$.

Théorème 1.2
Soit φ un morphisme d'un groupe $(G, \times)$ vers un groupe $(H, \times)$. Alors :

1. *Pour tous $x, y \in G, \varphi(x) = \varphi(y) \Longleftrightarrow xy^{-1} \in ker\varphi$*
2. *φ est injective si et seulement si $ker\varphi = \{1_G\}$.*

Démonstration :
On a les équivalences :

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Longleftrightarrow \varphi(x)(\varphi(y))^{-1} = 1_H \Longleftrightarrow \varphi(x)\varphi(y^{-1}) = 1_H \quad \Longleftrightarrow \varphi(xy^{-1}) = 1_H \Longleftrightarrow xy^{-1} \in ker\varphi \tag{1.18}$$

Supposons φ injective :
Soit $x \in ker\varphi$. Alors $\varphi(x) = 1_H = \varphi(1_G)$. Donc, comme φ est injective, $x = 1_G$. Donc ker $\varphi \subset \{1_G\}$. De plus, ker φ est un sous-groupe de G, donc $1_G \in ker\varphi$, donc $\{1_G\} \subset ker\varphi$, d'où l'égalité.
Réciproquement, supposons que ker $\varphi = \{1_G\}$:
Soient alors $x, y \in G$. Supposons que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors $xy^{-1} \in ker\varphi$. Donc $xy^{-1} = 1_G$.
Donc $x = y$.
Donc φ est injective.

Exemple 1.5
L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \theta &\longmapsto e^{i\theta} \end{aligned} \tag{1.19}$$

est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$ et d'image $\mathbb{U}$.

2

Sur les hypergroupes des hypergroupes cycliques

Dans ce chapitre, je commence par présenter les définitions essentielles ainsi que les résultats associés aux hyperstructures et aux hypergroupe cycliques, dont nous besoin. Ensuite, dans la 2éme partie, j'explose les questions en sufens concernant les sous-hypergroupes des hypergroupes cycliques. Je propose également une vue d'ensemble concise des concepts fondamentaux velatifs aux hypergroupes et aux hypergroupes cycliques.

2.1 Notions de base sur les hypergroupes

Définition 2.1
Un hypèregroupe est une structure mathématiques qui généralisent les groupes en introduisant des opérations non commutatives.

Définition 2.2 ***(Opération Hyper)***
Un hyperegroupe est défini par une opération binaire appelée opération hyper ou opération de multiplication non commutative. Cette opération est notée généralement comme $*(a{*}b)$.

Définition 2.3 ***(Hypergroupe)***
(F.Marty[18]) $\langle H, .\rangle$ *est un hypergroupe si* $(.) : H \times H \longrightarrow (H)$ *est une hyperopération associative pour laquelle l'axiome de reproduction* $hH = Hh = H$ *est valide pour tout* h *de* H.

Définition 2.4 ***(définition de filtre)***
Un filtre F *de* L *est défini comme un sous-ensemble de* L *qui satisfait les conditions suivantes :*

i) $a, b \in F \Rightarrow a \bigwedge b \in F$,

ii) Si $a \in F$ *et* $b \in L$ *tels que* $a \leq b$, *alors* $b \in F$.

Définition 2.5 *Le filtre principal de L généré par a est noté F(a), pour chaque* $a \in L$. *C'est-à-dire*

$$F(a) = \{x \in L \mid a \leq x\}.$$

Soit H *un ensemble non vide et* $\mathcal{P}^*(H)$ *l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides de H. Alors une hyperopération sur* H *est une application* $\circ : H \times H \longrightarrow \mathcal{P}^*(H)$ *et le couple* $(H, \circ)$ *est appelé un hypergroupoïde.*

Remarque 2.1 *Pour tout deux sous-ensembles non vides* A *et* B *de* H *et* $x \in H$*, les ensembles* $A \circ B$*,* $A \circ x$ *et* $x \circ A$ *sont définis comme suit :*

$$A \circ B = \bigcup \{a \circ b \mid a \in A,\ b \in B\},$$
$$A \circ x = A \circ \{x\},$$
$$x \circ A = \{x\} \circ A.$$

Le produit hyper de ensembles A et B est désigné par l'ensemble $A \circ B$.

Définition 2.6 ***(Semi-hypergroupe)***
Un semi-hypergroupe est un type d'hypergroupoïde $(H, \circ)$ *qui satisfait la propriété suivante pour tous les éléments a, b et c de H :*

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Preuve

$$\begin{aligned} a \circ H &\Rightarrow \{a, H\} \subset a \circ H \\ H \circ a &\Rightarrow \{H, a\} \subset H \circ a \\ &\Rightarrow \{a, H\} \subset \circ H \cap a \\ &\Rightarrow a \circ H = H \end{aligned}$$

Un semi-hypergroupe est un autre type d'hypergroupoïde $(H, \circ)$ *qui satisfait la propriété suivante pour tout élément a de H :*

$$a \circ H = H \circ a = H.$$

Remarque 2.2 *Un hypergroupe est un hypergroupoïde qui est à la fois un semi-hypergroupe et un quasi-hypergroupe.*

Définition 2.7 *$(H, \circ)$ est appelé un hypergroupe commutatif de H si $x \circ y = y \circ x$ pour tous $x, y \in H$.*

2.1.1 Sous hypergroupe

Définition 2.8 *Un sous-ensemble non vide K d'un hypergroupe $(H, \circ)$ est appelé un sous-hypergroupe de H si $K \circ K \subseteq K$ et K est un hypergroupe selon l'hyperopération $\circ$. Autrement dit, il est un hypergroupe selon l'hyperopération sur H. K satisfait les conditions suivantes :*

1. $a \circ b \subseteq K$ *pour tous* $a, b \in K$.
2. $a \circ K = K \circ a = K$, *pour tous* $a \in K$.

Définition 2.9 *Un sous-hypergroupe K d'un hypergroupe $(H, \circ)$ est appelé fermé si pour tout $a, b \in K$ et $x \in H$, À partir de $a \in x \circ b$ et $a \in b \circ x$, il en découle que $x \in K$.*

Définition 2.10 *Un semi-hypergroupe est une structure mathématique définie sur un ensemble avec une loi de composition interne qui satisfait l'associativité partielle, c'est-à-dire que pour tous éléments a,b, et c de l'ensemble, l'équation $(a * b) * c = a * (b * c)$ est vérifiée pour au moins un triplet (a, b, c).*

Définition 2.11 *Un quasi-hypergroupe est une structure mathématique définie sur un ensemble muni-d'une loi de composition interne qui satisfait l'associativité partielle généralisée, Cela signifie que pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de l'ensemble, il existe au moins un élément x tel que $(a*x)*b = c*b$. En d'autres termes, l'opération $*$ ne nécessite pas d'être totalement associative, mais il existe une certaine souplesse dans la manière dont elle peut être associée.*

Définition 2.12 *Un morphisme d'hypergroupe est une application entre deux hypergroupes qui préserve la structure hypergroupe. Plus formellement, soit $(H, *)$ et $(K, \bullet)$ deux hypergroupes. Un morphisme de hypergroupe est une application $\phi : H \longrightarrow K$ telle que, pour tout $a, b \in H$, l'équation suivante est satisfaite :*

$$\phi(a * b) = \phi(a) \bullet \phi(b)$$

Cela signifie que l'image de la composition dans l'hypergroupe H est équivalente à l, ↓ composition dans l'ypergroupe K appliquée à l'image des.

Définition 2.13 *En mathématiques, un bon homomorphisme, souvent appelé "homomorphisme de groupes", est un morphisme de groupes qui est surjectif, c'est-à-dire que l'application couvre tout l'ensemble d'arrivée. Formellement, soit $\phi : G \longrightarrow H$ un homomorphisme de groupes entre les groupes G et H. On dit que ϕ est un bon homomorphisme si, pour tout $h \in H$, il existe au moins un élément $g \in G$ tel que $\phi(g) = h$.*

Lemme 2.1 [7] *Soit $f : (H_1, \circ) \to (H_2, *)$ un bon homomorphisme et K le sous-hypergroupe de H_1. Dans ce cas, $f(K)$ est le sous-hypergroupe de H_2.*

Pour commencer, dans le travail de Wall [20], les hypergroupes cycliques ont été introduits et définis. Un hypergroupe H est dit cyclique s'il est engendré par un seul élément a appartenant à H. Cette notion de cyclicité, telle que décrite par Vougiouklis, permet d'englober divers types de cyclicité de manière complet.

Définition 2.14 [18] *Un hypergroupe $(H, \circ)$ est appelé cyclique si pour certains $h \in H$, on a*

$$H = h^1 \cup h^2 \cup h^3 \cup ... \cup h^n \cup ...(infini) \tag{2.1}$$

où $h^1 = h$ et $\underbrace{h^m = h \circ h \circ ... \circ h}_{m}$.

S'il existe un entier $n > 0$, le plus petit avec la propriété suivante

$$H = h^1 \cup h^2 \cup h^3 \cup ... \cup h^n, \quad (finie) \tag{2.2}$$

Dans le cas où la condition (2.1) est vraie, nous désignons H comme un hypergroupe cyclique avec une période finie, et nous désignons h comme le générateur de H avec une période de n. Cependant, s'il n'existe aucune valeur de n qui satisfait (2.1) mais que (2.2) est toujours vraie, nous classifions H comme ayant une période infinie pour h. Dans le scénario où tous les générateurs de H ont la même période, nous désignons H comme cyclique avec une période. Dans le cas où il existe un entier positif n, le plus petit avec la propriété suivante :

$$H = h^n, \tag{2.3}$$

Dans un tel cas, nous désignons H comme un hypergroupe cyclique à puissance unique, tandis que h est désigné comme le générateur de H avec une période de n. Si (2.1) est valable et aussi pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $n \geq n_0$, pour une constante $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la condition suivante est valable

$$H = h^1 \cup h^2 \cup ... \cup h^{n-1} \subsetneq h^n, \tag{2.4}$$

alors nous appelons H un hypergroupe cyclique à puissance unique avec période infinie pour h.
Nous définissons l'ensemble généré par un élément a comme étant $< a >= \{a\} \cup a^2 \cup ... \cup a^n \cup ...$, pour tout $a \in H$.

Exemple 2.1 *Supposons* $(Z, +, \leq)$*, avec l'addition et l'ordre habituels des entiers. Puisque* $(Z, +, \leq)$ *est un groupe partiellement ordonné,* $(Z, *)$*, où* $a * b = \{x \in Z | a + b \leq x\}$ *est un hypergroupe.*
L'hypergroupe $(Z, *)$ *est classé comme un hypergroupe cyclique à puissance unique, où il présente des périodes infinies pour un nombre non borné de générateurs (à l'exception de tous les entiers non négatifs).*
Par exemple, nous pouvons voir que :

$$< 5 >= \{5\} \cup \{x \in Z | 10 \leq x\}.$$

$10 \in < 5 >$ *et* $10* < 5 >= \{x \in Z | 15 \leq x\}$. *Puisque* $5 \notin 10* < 5 >$*, nous obtenons* $10* < 5 > \neq < 5 >$.
Ainsi $< 5 >$ *n'est pas un sous-hypergroupe.*

Définition 2.15 [16] *Une hyperopération* $\circ$ *sur* H *est appelée étendue si pour tout* $a, b \in H$ *on a* $\{a, b\} \subseteq a \circ b$*. Un hypergroupoïde étendu est noté* $(H, \circ)$*, où* H *représente le hypergroupoïde, et il est caractérisé par une hyperopération étendue.*

Lemme 2.2 *D'après* [16]*, tout semi-hypergroupe qui présente une hyperopération étendue peut être considéré comme un hypergroupe.*

Théorème 2.1 *Considérons un semi-hypergroupe étendu noté* $(H, \circ)$*. Sous cette condition, l'ensemble formé par les éléments engendrés par un seul élément est classé comme un sous-hypergroupe.*

Preuve

L'ensemble des éléments engendrés par un seul élément a forme un semi-hypergroupe. Puisque H est étendu, il découle du Lemme (2.2) que $\langle a \rangle$ est un sous-hypergroupe pour chaque $a \in H$.

Il est important de noter, comme mentionné dans le théorème mentionné précédemment, qu'une caractérisation complète n'est pas fournie. Cela implique que dans un hypergroupe, même dans le cas d'un hypergroupe cyclique, H n'a pas nécessairement besoin d'être un hypergroupe étendu pour que $\langle a \rangle$ soit un sous-hypergroupe pour tout $a \in H$. Un exemple illustrant ce scénario est fourni ci-dessous.

Exemple 2.2 *Soit* $(H, \circ)$ *d'ordre 6 comme suit :*

$\circ$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	3	4	5	6
3	3	3	{1,2}	4	5	6
4	4	4	4	6	{1,2,3}	5
5	5	5	5	{1,2,3}	6	4
6	6	6	6	5	4	{1,2,3}

Il y a $< 4 >=< 5 >= H$*. Donc,* $(H, \circ)$ *est un hypergroupe cyclique. Bien que H ne soit pas un extensif hypergroupe, chaque ensemble d'éléments générés par un seul élément est un sous-hypergroupe .*

$< 1 >= \{1\}$.

$< 2 >= \{1, 2\}$.

$< 3 >= \{1, 2, 3\}$.

$< 6 >= \{1, 2, 3, 6\}$.

Dans un hypergroupe extensif, il est important de noter que si tout ensemble formé par les éléments générés par un seul élément est un sous-hypergroupe, il n'est pas nécessairement lifier comme un hypergroupe cyclique. Cette observation peut être démontrée par les éléments suivants :

Exemple 2.3 *Définissons l'hyperopération suivante sur* $H = \{a, b, c, d, e\}$*.*

$\oplus$	a	b	c	d	e
a	a	b,c	b,c	d	e
b	b,c	d	d	e	a
c	b,c	d	d	e	a
d	d	e	e	a	b,c
e	e	a	a	b,c	d

Donc, $(H, \oplus)$ *est un hypergroupe commutatif.*

$$H =< b >=< c >=< d >=< e > .$$

Par conséquent, l'hypergroupe $(H, \oplus)$ peut être identifié comme un hypergroupe cyclique avec un nombre infini période ; cependant, il ne présente pas la propriété d'être extensif.

Remarque 2.3 *Si H est un hypergroupe extensif, alors le set* $< a >$, *pour tout* $a \in H$ *est sous-hypergroupe. Mais, l'inverse peut ne pas être vrai, en général. Bien que* $L \setminus \{0\}$ *soit un sous-hypergroupe du vaste hypergroupe cyclique* $(L, \circ)$, *il n'est pas cyclique.*

Bien que chaque groupe d'ordre premier soit cyclique, il est important de noter qu'un hypergroupe d'ordre premier n'est pas nécessairement cyclique. Un exemple illustratif mettant en évidence ce fait est présenté ci-dessous.

Exemple 2.4 *L'hyperopération* $\circ$ *sur* $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *est définie par :*

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	{6,7}	{6,7}
2	2	1	5	{6,7}	3	4	4
3	3	{6,7}	1	5	4	2	2
4	4	5	{6,7}	1	2	3	3
5	5	4	2	3	{6,7}	1	1
6	{6,7}	3	4	2	1	5	5
7	{6,7}	3	4	2	1	5	5

$(H, \circ)$ *est l'hypergroupe [1]. Nous pouvons obtenir,*

$$< 1 > = \{1\},$$
$$< 2 > = \{1, 2\},$$
$$< 3 > = \{1, 3\},$$
$$< 4 > = \{1, 4\},$$
$$< 5 >=< 6 >= < 7 >= \{1, 5, 6, 7\},$$

Par conséquent, on peut observer que H n'est engendré par aucun de ses éléments. Par conséquent, malgré un ordre premier, H n'est pas considéré comme un hypergroupe cyclique.

Soit, $\emptyset \neq K \subseteq G.$. L'intersection de tous les sous-groupes de G contenant K est appelé le sous-groupe produit par K et noté $< K >$.

$$< K >= \bigcap_{\substack{K \subseteq L \\ L \leq G}} L.$$

Comme le montre la définition, le sous-groupe $< K >$ est le plus petit sous-groupe qui contient K. Si $K = \{a\}$ est singleton, $< K >=< a >= \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ et cette définition est la même comme la définition du sous-groupe généré par un élément.

Dans un groupe, les ensembles $< a >= \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ et $< a >= \bigcap\{L | a \in L, L \leq G\}$ coïncident.
Or, dans un hypergroupe H, l'ensemble $< a >= \{a\} \cup a^2 \cup ... \cup a^n$ ne coïncide pas avec le ensemble $\bigcap\{L | a \in L, L \in Sub(H)\}$. Un exemple de cette situation peut être vu dans ce qui suit.

Lemme 2.3 *Soient $(H, \circ)$ et $(K, *)$ des hypergroupes et $f : H \to K$ une bonne homomorphie. Dans ce cas, $f(< s >) =< f(s) >$ pour chaque $s \in H$.*

Preuve
Soit $x \in f(< s >)$. Alors il existe $y \in< s >$ tel que $x = f(y)$. Ici, il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y \in s^n$. Puisque $x \in f(s^n)$ et f f est une bonne homomorphie, on obtient, $x \in f(s)^n$ Ainsi, $x \in< f(s) >$. On obtient que $f(< s >) \subseteq< f(s) >$ et de même $< f(s) >\subseteq f(< s >)$.
Le lemme mentionné ci-dessus n'est pas valable pour les homomorphismes non-bons f. Pour illustrer cela, un exemple peut être fourni comme suit.

Exemple 2.5 *L'hyperopération définie sur $\mathbb{Z}$ est la suivante : $x \circ y = \{x + y, |x - y|\}$. Cet hypergroupe est désigné par $(H(\mathbb{Z}), \circ)$. L'homomorphisme*

$$f : (H(\mathbb{Z}), \circ) \to (H(\mathbb{Z}), \circ), \qquad f(n) = \begin{cases} 0, & 2|n, \\ 1, & 2 \nmid n \end{cases}$$

est un homomorphisme non-bon [8].
Dans l'hypergroupe $(H(\mathbb{Z}), \circ)$, nous obtenons $< 3 >= 3\mathbb{N}$ donc $f(< 3 >) = \{0, 1\}$. D'autre part,

$$< f(3) >=< 1 >= \mathbb{N}.$$

Étant donné que f n'est pas un bon homomorphisme, $f(< 3 >) \neq< f(3) >$.

Théorème 2.2 *Considérons deux hypergroupes notés $(H, \circ)$ et $(K, *)$, ainsi qu'un bon homomorphisme $f : H \to K$. Dans ces conditions, l'image homomorphique bonne du sous-hypergroupe cyclique dans H est équivalente au sous-hypergroupe cyclique dans K.*

Preuve
Soit $< a >$ représente un sous-hypergroupe dans H, où a est un élément de H. Puisque f est un bon homomorphisme, il découle du lemme 2.1 que $f(< a >)$ est également un sous-hypergroupe. De plus, selon le lemme 2.3 $f(< a >)$ est égal à $< f(a) >$, l'établissant comme un sous-hypergroupe cyclique.

Corollaire 2.1 *En considérant les hypergroupes* $(H, \circ)$ *et* $(K, *)$*, et en supposant que* $H =< h >$ *est un hypergroupe cyclique, l'énoncé suivant est vrai : S'il existe un épimorphisme* $f : H \to K$*, alors* K *peut être classifié comme un hypergroupe cyclique.*

3

Hyper I-algèbres et polygroupes

Dans cet chapitre, nous allons présenter quelque théorie des structures hyperalgébriques. Tout d'abord, nous introctierons le concept d'algèbre, ensuite expheresons l'application des hypercttructures aux Algèbre super-K, qui seront étendues aux (quasi) grouper, en fin nous discuterons de la notion d'hypergroupe à jonge de quasi, que l'on appelle le polygroupe par comer.

Définition 3.1 *Une hyperstructure* $(H, \circ)$ *est appelée hypergroupe si :*

(i) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ *pour tout* $x, y, z \in H$,

(ii) $a \circ H = H \circ a = H$ *pour tout* $a \in H$,

(c'est-à-dire pour tout $a, b \in H$ *il existe* $c, d \in H$ *tels que* $b \in c \circ a$ *et* $b \in a \circ d$*).*

Définition 3.2 *Une hyperstructure* $(H, \circ)$ *est appelée quasi-canonical hypergroupe ou polygroupe si elle satisfait les conditions suivantes :*

(i) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ *pour tout* $x, y, z \in H$ *(loi associative),*

(ii) il existe $e \in H$ *tel que* $e \circ x = \{x\} = x \circ e$ *pour tout* $x \in H$ *(élément neutre),*

(iii) pour tout $x \in H$ *il existe un élément unique* $x' \in H$ *tel que* $e \in (x \circ x') \cap (x' \circ x)$, *nous notons* x' *par* x^1 *(élément inverse),*

(iv)) pour tout $x, y, z \in H$ *nous avons* $z \in x \circ y \Longrightarrow x \in z \circ y^{-1} \Longrightarrow y \in x^{-1} \circ z$ *(propriété de réversibilité).*

Si $(H, \circ)$ *est un polygroupe et que* $x \circ y = y \circ x$ *pour tout* $x, y \in H$, *alors nous disons que* H *est un polygroupe commutatif.*

Si $A \subseteq H$, *alors par* A^{-1} *nous entendons l'ensemble* $\{a^{-1} : a \in A\}$.

Proposition 3.1 *Dans un polygroupe laissez* $(H, \circ)$ *être un hypergroupe. Alors, pour tout* $x, y \in H$, *nous avons :*

(i) $(x^{-1})^{-1} = x$,

(ii) $e = e^{-1}$,

(iii) *e est unique,*

(iv) $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.

Proposition 3.2 *Considérez un polygroupe $(H, \circ)$. Dans ce cas, la propriété d'associativité $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$ est vraie pour tous les sous-ensembles non vides A, B et C de H.*

3.1 Hyper I-algèbre

Définition 3.3 *Une hyperstructure $(H, \circ)$ est classée comme une hyper I-algèbre si elle comprend une constante $o \in H$ et adhère à l'ensemble d'axiomes suivant :*

(HK1) $(x \circ z) \circ (y \circ z) < x \circ y$,

(HK2) $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y$,

(HK3) $x < x$,

(HK4) $x < y, y < x \Longrightarrow x = y$,

(HI5) $x < 0 \Longrightarrow x = 0$,

pour tous $x, y, z \in H$, où $x < y$ est défini par $0 \in x \circ y$ et pour chaque $A, B \subseteq H, A < B$ est défini par $\exists a \in A, \exists b \in B$ tels que $a < b$.

Un exemple illustratif d'une hyper L-algèbre peut être trouvé dans une BCI-algèbre $(H, *, \circ)$, où l'hyperopération $\circ$ est définie comme $x \circ y = \{x * y\}$. On peut facilement observer qu'une hyper I-algèbre sert de concept plus large, englobant les hyper K-algèbres discutées dans [2] et [9]. De plus, l'exemple suivant sert de preuve que certaines hyper I-algèbres ne relèvent pas de la catégorie des hyper K-algèbres mentionnées.

Exemple 3.1 *Soit $H = \{0, 1, 2\}$. Les tableaux suivants montrent les structures d'hyper I-algèbre sur H.*

$\circ$	*0*	*1*	*2*
0	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0\}$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{0, 2\}$

$\circ$	*0*	*1*	*2*
0	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0\}$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{0\}$	$\{0, 1, 2\}$

Remarquez que aucune des hyper I-algèbres ci-dessus n'est une hyper K-algèbre, car $0 \not< 2$.

Théorème 3.1 *Soit* $(H, \circ, 0)$ *une hyper I-algèbre. Alors, pour tous* $x, y, z \in H$ *et pour tous les sous-ensembles non vides A, B et C de H, les affirmations suivantes sont vraies :*

(i) $x \circ y < z \Longleftrightarrow x \circ z < y$,

(ii) $(x \circ z) \circ (x \circ y) < y \circ z$,

(iii) $x \circ (x \circ y) < y$,

(iv) $(A \circ B) \circ C = (A \circ C) \circ B$,

(v) $A \subseteq B \Rightarrow A < B$,

(vi) $A < A$,

(vii) $(A \circ C) \circ (A \circ B) < B \circ C$,

(viii) $(A \circ C) \circ (B \circ C) < A \circ B$,

(ix) $A \circ B < C \Longleftrightarrow A \circ C < B$.

Exemple 3.2 *Soit* $H = \{0, 1, 2\}$. *Le tableau suivant montre une structure d'hyper I-algèbre sur H telle que* $x \circ y \not< x$, *car* $1 \circ 2 = 2 \not< 1$.

$\circ$	*0*	*1*	*2*
0	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1\}$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{0\}$

Lemme 3.1 *énonce que dans une hyper I-algèbre H, pour n'importe quel élément x de H, les affirmations suivantes sont vraies :*

(i) $x \circ 0 < x$,

(ii) $x \in x \circ 0$.

Preuve

(i) Nous avons $0 \in 0 \circ 0 \subseteq (x \circ x) \circ 0 = (x \circ 0) \circ x$. Donc il existe $t \in x \circ 0$ tel que $0 \in t \circ x$. Ainsi $t < x$, et donc $x \circ 0 < x$.
(ii) Par (i) $x \circ 0 < x$. Il existe donc $t \in x \circ 0$ tel que $t < x$. Comme $t \in x \circ 0$, alors $x \circ 0 < t$ et donc $x \circ t < 0$, selon le Théorème 3.1(i). Il existe donc $h \in x \circ t$ tel que h < 0, et par (HI5) nous avons h $= 0$. Par conséquent $0 \in x \circ t$ et donc x $<$ t. Comme t $<$ x, alors par (HK4), nous obtenons t $=$ x. Donc, $x \in x \circ 0$.

Définition 3.4 *Dans le contexte d'une hyper I-algèbre* $(H, \circ, 0)$, *nous établissons la définition suivante :*

$$H^+ = \{x \in H | 0 \in 0 \circ x\}.$$

Remarquez que $H^+ \neq \emptyset$ *car* $0 \in 0 \circ 0$.

Proposition 3.3 *Soit $(H, \circ, 0)$ une hyper I-algèbre. Alors, $(H^+, \circ, 0)$) est une hyper K-algèbre si et seulement si $x \circ y \subseteq H^+$, pour tous x, y dans H^+.*

Exemple 3.3 *(i) Soit $H = \{0, 1, 2\}$. Dans le contexte d'une hyper I-algèbre $(H, \circ, 0)$, nous établissons la définition suivante :*

$\circ$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$

$\circ$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$
2	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$

Nous pouvons voir que $H^+ = \{0, 1\}$ et c'est une hyper K-algèbre.
(ii) Le tableau suivant montre une structure d'hyper I-algèbre sur $H = \{0, 1, 2\}$, où $H^+ = \{0, 1\}$ et ce n'est pas une hyper K-algèbre, car $1 \in H^+$ mais $1 \circ 1 \nsubseteq H^+$ car elle est vérifie par le théorème 3.1.

$\circ$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{0,2\}$
2	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{0,2\}$

Théorème 3.2 *Soit $(H, \circ, e)$ un polygroupe commutatif. Alors $(H, \diamond, e)$ est une hyper I-algèbre, où l'hyperopération $\diamond$ est définie par $x \diamond y = x \circ y^{-1}$.*
De plus, nous avons :

(i) $H^+ = \{e\}$,

(ii) $e \diamond (e \diamond x) = x$ pour tout x dans H.

Preuve
$(HK1)$ Soit $A = (x \diamond y) \diamond (z \diamond y)$. En utilisant le Lemme 2.3, nous avons

$$A = (x \diamond y) \diamond (z \diamond y) = \bigcup_{\substack{a \in x \diamond y \\ b \in z \diamond y}} a \diamond b = \bigcup_{\substack{a \in x \diamond y^{-1} \\ b \in z \diamond y^{-1}}} a \diamond b^{-1} = \bigcup_{\substack{a \in x \diamond y^{-1} \\ b^{-1} \in y \diamond z^{-1}}} a \diamond b^{-1}$$

En utilisant le Lemme 2.4, nous pouvons en déduire que.

$$A = (x \circ y^{-1}) \circ (y \circ z^{-1}) = x \circ (y^{-1} \circ (y \circ z^{-1})) = x \circ ((y^{-1} \circ y) \circ z^{-1}).$$

En appliquant le Lemme 2.3, il en découle que

$$A \diamond (x \diamond z) = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in x \diamond z}} a \diamond b = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in x \circ z^{-1}}} a \circ b^{-1} = A \circ (z \circ x^{-1}).$$

Puisque $e \in y^{-1} \circ y$, donc $e \circ z^{-1} \subseteq (y^{-1} \circ y) \circ z^{-1}$, donc

$$x \circ (e \circ z^{-1}) \subseteq x \circ ((y^{-1} \circ y) \circ z^{-1}) = A.$$

Par conséquent, le résultat obtenu est que

$$(x \circ z^{-1}) \circ (z \circ x^{-1}) = (x \circ (e \circ z^{-1})) \circ (z \circ x^{-1}) \subseteq A \circ (z \circ x^{-1}) = A \diamond (x \diamond z).$$

En se basant sur la Définition 2.2 et le Lemme 2.4, nous pouvons conclure que

$$x \circ ((z^{-1} \circ z) \circ x^{-1}) = x \circ (z^{-1} \circ (z \circ x^{-1})) = (x \circ z^{-1}) \circ (z \circ x^{-1}) \subseteq A \diamond (x \diamond z).$$

Puisque $e \in z^{-1} \circ z$ et $e \in x \circ x^{-1}$, alors $e \in A \diamond (x \diamond z)$, et $A < x \diamond z$. Par conséquent, $(x \diamond y) \diamond (z \diamond y) < x \diamond z$.
(HK2) Selon la Définition 2.2 et l'hypothèse, nous avons

$$(x\diamond y)\diamond z = (x\circ y^{-1})\diamond z = (x\circ y^{-1})\circ z^{-1} = x\circ(y^{-1}\circ z^{-1}) = x\circ(z^{-1}\circ y^{-1}) = (x\circ z-1)\circ y^{-1} = (x\diamond z)\diamond y.$$

Ainsi, (HK2) est vérifié.
(HK3) Puisque $e \in x \circ x^{-1} = x \diamond x$, nous en concluons que $x < x$ et donc (HK3) est vérifié.
(HK4) Pour montrer que (HK4) est vérifié, nous prouvons que $x < y$ implique $x = y$. Supposons que $x < y$. Alors $e \in x \diamond y = x \circ y^{-1}$. Selon la Définition 2.2 (vi), nous avons $y \in e^{-1} \circ x = e \circ x = \{x\}$, donc $y = x$.
(HI5) Soit $x < e$. Alors selon la preuve de (HK4), nous obtenons que $e = x$, et donc (HI5) est vérifié.

Par conséquent $(H, \diamond, e)$ est un hyper I-algèbre.

Les démonstrations pour les énoncés (i) et (ii) sont simples.

3.1.1 Catégorie des polygroupes commutatifs : $\mathcal{CPG}$

Considérons la classe de tous les polygroupes. Pour tout deux polygroupes $(H_1, \circ_1, e_1)$ et $(H_2, \circ_2, e_2)$ nous définissons un morphisme $f : H_1 \longrightarrow H_2$ comme un homomorphisme fort entre H_1 et H_2 (c'est-à-dire $f(x \circ_1 y) = f(x) \circ_2 f(y) \forall x, y \in H$), qui satisfait $f(e_1) = e_2$. Alors il peut être facilement vérifié que la classe de tous les polygroupes et les morphismes ci-dessus construisent une catégorie qui est désignée par $\mathcal{CPG}$.

Remarque 3.1 *Il est bien connu que si $f \in \mathcal{CPG}(H_1, H_2)$, alors $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ pour tout $x \in H_1$.*

3.1.2 Catégorie des hyper I-algèbres $\mathcal{IALG}$

Considérons la classe de toutes les hyper I-algèbres. Pour tout deux hyper I-algèbres $(H_1, \circ_1, 0_1)$ et $(H_2, \circ_2, 0_2)$ nous définissons un morphisme $f : H1 \longrightarrow H2$ comme un homomorphisme fort entre H_1 and H_2, qui satisfait la condition $f(0_1) = 0_2$. Alors il peut être facilement vérifié que la classe de toutes les hyper I-algèbres et les morphismes ci-dessus construisent une catégorie qui est désignée par $\mathcal{IALG}$.

Théorème 3.3 *$F : \mathcal{CPG} \longrightarrow \mathcal{IALG}$ est un foncteur fidèle, où $F(H, \circ, e) = (H, \diamond, e)$ et $F(f) = f$ pour tout $H \in \mathcal{CPG}$ et $f \in \mathcal{CPG}(H_1, H_2)$.*

Preuve
Soit $(H, \circ, e)$) un polygroupe. Alors, d'après le Théorème 3.9, $(H, \diamond, e)$ est une hyper I-algèbre, donc $F(H)$ est un objet dans $\mathcal{IALG}$. Maintenant, soit $f \in \mathcal{CPG}(H_1, H_2)$, nous prouvons que $Ff \in \mathcal{IALG}(F(H_1), F(H_2))$. D'après le Théorème 3.9, nous avons :

$$Ff(x \diamond_1 y) = f(x \diamond_1 y) = f(x \diamond_1 y^{-1}) = f(x) \circ_2 f(y^{-1}) = f(x) \circ_2 (f(y))^{-1} = f(x) \diamond_2 f(y) = (Ff)(x) \diamond_2 (Ff)$$

Il est maintenant facile de voir que F satisfait aux autres conditions d'un foncteur. Étant donné que F mappe $\mathcal{CPG}(H_1, H_2)$ de manière injective vers $\mathcal{IALG}(FH_1, FH_2)$, donc F est fidèle.

Définition 3.5 *Un semi-polygroupe $(H, \circ)$ est un type d'hyperstructure qui adhère à un ensemble de principes ou d'axiomes spécifiques :*

(i) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ pour tout $x, y, z \in H$,

(ii) il existe $e \in H$ tel que $e \circ x = \{x\} = x \circ e$ pour tout $x \in H$,

(iii) pour tout $x \in H$ il existe un élément unique $x' \in H$ tel que $e \in (x \circ x') \cap (x' \circ x)$, nous notons x' par x^{-1}.

Exemple 3.4 *Soit $H = \{0, 1, 2\}$ et l'hyperopération $\circ$ sur H est donnée par le tableau suivant :*

$\circ$	*0*	*1*	*2*
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1\}$	$\{1,2\}$

Alors H est un semi-polygroupe, mais ce n'est pas un polygroupe car la réversibilité n'est pas vérifiée. En effet, $1 \in 1 \circ 2 = \{0, 1\}$ but $1 \notin 1 \circ 2^{-1} = 1 \circ 1 = \{2\}$.

Lemme 3.2 *Indique qu'il est possible de considérer tout groupe comme un semi-polygroupe.*

Lemme 3.3 *Soit $(H, \circ, 0)$ une hyper I-algèbre. Si $H^+ \neq \{0\}$, alors $0 \circ (0 \circ x) \neq x$ pour tous les éléments non nuls $x \in H^+$.*

Preuve

Soit $x \neq 0$ dans H^+. Alors $0 \in (0 \circ x)$. Ainsi, $0 \in (0 \circ 0) \subseteq 0 \circ (0 \circ x)$, d'où $0 \in 0 \circ (0 \circ x)$. Puisque $x \neq 0$, alors $0 \circ (0 \circ x) \neq x$. Notez que l'exemple suivant montre que si $H^+ = \{0\}$, alors il peut être vrai ou faux que l'égalité $0 \circ (0 \circ x) = x$ tien ou ne tient pas.

Exemple 3.5 *(i) Soit $H = \{0, 1, 2\}$. Le tableau ci-dessous présente une structure d'hyper I-algèbre sur H de manière à ce que $H^+ = \{0\}$, tandis que $0 \circ (0 \circ 2) = 0 \circ 1 = 1 \neq 2$.*

$\circ$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
2	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{0, 1, 2\}$

(ii) Le tableau suivant montre une structure d'hyper I-algèbre sur $H = \{0, 1, 2\}$. Alors $H^+ = \{0\}$ et $0 \circ (0 \circ x) = x$ pour tout $x \in H$.

$\circ$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{2\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1\}$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{1, 2\}$	$\{0, 1\}$

Théorème 3.4 *Soit $(H, \circ, 0)$ une hyper I-algèbre. Si $H+ = \{0\}$ et $0 \circ (0 \circ x) = x$ pour tout $x \in H$, alors $(H, \odot, 0)$ est un semi-polygroupe commutatif, où l'hyperopération $\odot$ est définie par $x \odot y = x \circ (0 \circ y)$.*

Preuve

D'après le Théorème 3.2 (iv), nous avons $x \odot y = x \circ (0 \circ y) = (0 \circ (0 \circ x)) \circ (0 \circ y) = (0 \circ (0 \circ y)) \circ (0 \circ x) = y \circ (0 \circ x) = y \odot x$, ce qui signifie que $(H, \odot)$ est commutatif. Maintenant, nous montrons que $(H, \odot)$ est associatif. Nous avons :

$$
\begin{aligned}
(x \odot y) \odot z &= (x \circ (0 \circ y)) \circ (0 \circ z) \\
&= (x \circ (0 \circ z)) \circ (0 \circ y) && d'après\ leThéorème\ 3.2\ (iv) \\
&= ((0 \circ (0 \circ x)) \circ (0 \circ z)) \circ (0 \circ y) && d'après\ l'hypothèse \\
&= ((0 \circ (0 \circ z)) \circ (0 \circ x)) \circ (0 \circ y) && d'après\ leThéorème\ 3.2\ (iv) \\
&= (z \circ (0 \circ y)) \circ (0 \circ x) && d'après\ leThéorème\ 3.2\ (iv) \\
&= (z \odot y) \odot x \\
&= x \odot (z \odot y) && d'après\ lacommutativité \\
&= x \odot (y \odot z) && d'après\ lacommutativité.
\end{aligned}
$$

En conséquence, l'hyperstructure $(H.\odot)$ *satisfait la propriété associative bien définie* $\odot$.
Ensuite, nous démontrons que l'opération n'a qu'un seul élément pour chaque x dans H. Supposons le contraire et supposons que $x_1, x_2 \in 0 \circ x$ *and* $x_1 \neq x_2$. *Alors, selon l'hypothèse, nous avons* $0 \circ x1 \subseteq 0 \circ (0 \circ x) = x$, *donc* $0 \circ x_1 = x$, *et de même* $0 \circ x_2 = x$. *Ainsi* $0 \circ (0 \circ x_1) = x_1$ *et* $0 \circ x_1 = x$ *impliquent que* $0 \circ x = x_1$. *Puisque* $x_2 \in 0 \circ x$, *alors* $x_1 = x_2$ *ce qui est une contradiction.*
Puisque $0 \circ x$ *n'a qu'un seul élément pour tout* $x \in H$, *alors* $0 \in 0 \circ 0$, *donc nous concluons que* $0 \circ 0 = 0$. *Par le Théorème 3.2 (iv) et l'hypothèse, nous obtenons que* $x \circ 0 = (0 \circ (0 \circ x)) \circ 0 = (0 \circ 0) \circ (0 \circ x) = 0 \circ (0 \circ x) = x$. *Ainsi* $x \circ 0 = x$. *Par conséquent* $0 \odot x = x \odot 0 = x \circ (0 \circ 0) = x \circ 0 = x$. *donc* $(H, \odot)$ *satisfait à la condition (ii) de la Définition 3.5.*
Puisque $H^+ = \{0\}$ *alors* $0 \notin 0 \circ x$ *pour tous* $x \neq 0$. *Par conséquent, pour tout* $0 \neq x \in H$ *il existe* $0 \neq x' \in H$ *tel que* $0 \circ x = x'$. *Selon le Théorème 3.2 (vi), nous avons* $0 \in (0 \circ x) \circ (0 \circ \circ x) = x' \circ (0 \circ x) = x' \odot x = x \odot x'$. *Ainsi, la condition (iii) de la Définition 3.12 est vérifiée. Par conséquent,* $(H, \odot)$ *est un semi-polygroupe commutatif.*

Corollaire 3.1 *Soit* $(H, \circ, 0)$ *une hyper I-algèbre telle que* $H^+ = \{0\}$.
Si $0 \circ (0 \circ x) = x$ *et commutatif si* $x \circ x = 0$ *sont vraies pour tout* $x \in H$, *alors* $(H, \odot, 0)$ *est un groupe abélien.*

Exemple 3.6 *Soit* $H = \{0, 1, 2\}$ *une hyper I-algèbre, où l'hyperopération* $\circ$ *est donnée par le tableau suivant :*

$\circ$	*0*	*1*	*2*
0	$\{0\}$	$\{2\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1\}$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{1, 2\}$	$\{0, 1\}$

Alors $H^+ = \{0\}$, $0 \circ (0 \circ x) = x$ *pour tout* $x \in H$ *et* $1 \circ 1 \neq 0$. *Cependant* $(H, \odot, 0)$ *n'est pas un groupe car* $1 \odot 2 = \{0, 1\}$.
Notez que l'exemple ci-dessus montre également que si nous supprimons la condition $x \circ x = 0$, *alors* $(H, \odot)$ *n'est pas nécessairement un polygroupe.*
car la propriété de réversibilité ne tient pas. En effet, dans cet exemple, nous avons $1 \in 1 \odot 2 = 1 \circ (0 \circ 2) = 1 \circ 1 = \{0, 1\}$, *but* $1 \notin 1 \odot 2^{-1} = 1 \circ (0 \circ 2^{-1}) = 1 \circ (0 \circ 1) = 1 \circ 2 = 2$.

Théorème 3.5 *Soit* $(H, \circ, 0)$ *une hyper I-algèbre. Si* $H^+ = \{0\}$ *et* $0 \circ (0 \circ x) = x$ *pour tout* $x \in H$, *alors* $(H, \odot, 0)$ *est un hypergroupe commutatif.* ***Preuve***
montre que $(H, \odot, 0)$ *est commutatif et associatif. Soient* $a, b \in H$ *arbitraires. Là existe* $a' \in H$ *tel que* $0 \in a' \odot a$ *et* $b \odot 0 = b$.
Ainsi $b \in b \odot 0 \subseteq b \odot (a' \odot a) = (b \odot a') \odot a$. *Donc il existe* $t \in b \odot a'$ *tel que* $b \in t \odot a = a \odot t$, *à savoir* $a \odot H = H \odot a = H$.

Par conséquent $(H, \odot, 0)$ est un hypergroupe commutatif.
Notation : Soit $\mathcal{I}^+\mathcal{ALG}$ ALG une sous-catégorie de $\mathcal{IALG}$ dans laquelle, pour chaque objet H, nous avons $H^+ = \{0\}$ et $0 \circ (0 \circ x) = 0$ pour tout $x \in H$. De même $\mathcal{CHG}$ est la catégorie des hypergroupes commutatifs avec des morphismes forts.

Théorème 3.6 *$G : \mathcal{I}^+\mathcal{ALG} \longrightarrow \mathcal{CHG}$ est un foncteur fidèle, où $G(H, \circ, 0) = (H, \odot, 0)$ pour $H \in \mathcal{I}^+\mathcal{ALG}$ et $G(f) = f$ pour $f \in \mathcal{I}^+\mathcal{ALG}(H_1, H_2)$.* ***Preuve***
Soit $(H, \circ, 0)$ un objet dans $\mathcal{I}^+\mathcal{ALG}$. Nous avons $G(H) = (H, \odot, 0)$ qui est un objet dans $\mathcal{CHG}$.
Soit $f \in \mathcal{I}^+\mathcal{ALG}(H_1, H_2)$. Nous prouvons que $Gf = f \in \mathcal{CHG}(G(H_1), G(H_2))$.
Nous avons

$$\begin{aligned}
Gf(x \odot_1 y) = f(x \odot_1 y) &= f(x \circ_1 (0_1 \circ_1 y)) = f(x) \circ_2 (f(0_1) \circ_2 f(y)) \\
&= f(x) \circ_2 (0_2 \circ_2 f(y)) = f(x) \odot_2 f(y) = (Gf)(x) \odot 2(Gf)(y).
\end{aligned}$$

Ainsi, il est facile de voir que G satisfait aux autres conditions d'un foncteur.
Comme G mappe $\mathcal{I}^+\mathcal{ALG}(H_1, H_2)$ injectivement vers $\mathcal{CHG}(GH_1, GH_2)$, est donc fidèle

Proposition 3.4 *$K : \mathcal{I}^+\mathcal{ALG} \longrightarrow \mathcal{CSPG}$ est un foncteur d'incorporation complet, où $K(H, \circ, 0) = (H, \odot, 0)$ pour tout $H \in \mathcal{I}^+\mathcal{ALG}$ et $K(f) = f$ pour tout $f \in \mathcal{I}^+\mathcal{ALG}(H1; H2)$.*

Conclusion générale

Les hypergroupes ont des applications potentielles dans divers domaines scientifiques, pas seulement en mathématiques, y compris la physique, la chimie, et d'autres sciences naturelles.

Bibliographie

[1] K. Abbasi. , R. Ameri, Y. Talebi-Rostami, Computation of fundamental group of a finite hypergroup, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 9(1) (2018), 107–125.

[2] M. Al-Tahan, B. Davvaz, On some properties of single power cyclic hypergroups and regular relations, Journal of Algebra and Its Applications, 16(11) (2017), 14 pages.

[3] D. Bayrak, Subhypergroups of Cartesian product of hypergroups, Universal Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 10 (2017) 145–153.

[4] D. Bayrak, The lattice of subhypergroups of a hypergroup, Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology B-Theoretical Sciences, 7 (2019), 159–165.

[5] G. Birhoff, Lattice theory, American Mathematical Society Colloquium Publications, 1967.

[6] P. Bonansinga, P. Corsini : Su gli omomorfismi di semi-ipergruppi, e di ipergruppi, Bol. U.M.I. 6 1-B, (1982), 717 ¡ 727 :.

[7] R. A. Borzooei, A. Hasankhani, M. M. Zahedi and Y. B. Jun : On hyper K-algebras, Math. Japon. 52 (2000), 113 ¡ 121 :

[8] S. Comer : Polygroups derived from cogroup : J. Algebra 89 (1984), 397¡405 :

[9] P. Corsini : Prolegomena of hypergroup theory, Aviani Editore, Italy 1993 :

[10] P. Corsini, V. Leoreanu, Applications of hyperstructure theory, Kluwer Academic Publishers : Dodrecht, The Netherlands ; Boston, MA, USA ; London, UK, 2003.

[11] B. Davvaz. V. Leoreanu, Hyperring theory and applications, International Academic Press, 2007.

[12] W. Dudek A : On group-like BCI-algebras, Demonstratio Math. 23 (1988), 369 ¡ 376 :

[13] D. Freni, Ipergruppi ciclici e torsione negli ipergruppi, Matematiche (Catania), 35 (1980), 270–286.

[14] D. Freni, Una nota su gli ipergruppoidi ciclici, Ratio Mathematica, 9 (1995), 101–111.

[15] Z. Gu. On cyclic hypergroups, Journal of Algebra and Its Applications, 18(11) (2019), DOI : 10.1142/S021949881950213X.

[16] A. Hassankhani. : F-hyperalgebraic structures, Ph.D. Thesis, Shahid Bahonar University of Kerman, Iran 1997 :

[17] Y. Imai and K. Iséki : On axiom systems of propositional calcul, XIV, Proc. Japan Academy 42 (1966), 19 ¡ 22 :

[18] L. Konguetsof, T. Vougiouklis, M. Kessoglides, S. Spartalis, On cyclic hypergroups with period, Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, 28 (1987), 3–7.

[19] V. Leoreanu , About the simplifiable cyclic semihypergroups, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 7 (2000), 69–76.

[20] F. Marty, Sur une generalisation de la notion de group, 8th Congress of Scandinavian Mathematicians, (1934), 45–49.

[21] F. Marty : Sur une generalization de la notion de groups, 8th Congress Math. Scandinaves, Stockholm 1934, 45 ¡ 49 :

[22] M. Novák, S. Krehlik, I. Cristea, Cyclicity in EL-hypergroups, Symmetry, 10(11) (2018), 611.

[23] M.De Salvo, D. Freni, Sugli ipergruppi ciclici e completi, Matematiche (Catania), 35 (1980), 211–226.

[24] T. Vougiouklis , Cyclicity in a special class of hypergroups, Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, 22 (1981), 3–6.

[25] T. Vougiouklis, Hyperstructures and their representations, Hadronic Press : Palm Harbor, USA., 1994.

[26] T Vougioulis , Isomorphisms on P-hypergroups and cyclicity, Ars Combinatoria, 29A (1990), 241–245.

[27] H.S. Wall, Hypergroups, American Journal of Mathematics, 59 (1934), 77–98.

[28] M. M. Zahedi, R. A. Borzooei, Y. B. Jun and A. Hasankhani : Some results on hyper K-algebra, Scientiae Math. 3 (2000), 53 ¡ 59 :

• ملخص

المجموعات المفرطة هي هياكل رياضية تعمم خصائص المجموعات. في حين أن المجموعات لديها عملية ثنائية ترابطية ، فإن المجموعات الفائقة تسمح بعمليات ارتباطية تسمى العمليات المفرطة ، مع إرضاء الحالة الأضعف من الترابط المفرط. تعرف المجموعات المفرطة بأنها مجموعات غير فارغة مزودة بعملية مفرطة يجب أن تحترم الترابط المفرط ووجود عنصر محايد.

تجد المجموعات الفائقة تطبيقات في مجالات مختلفة من الرياضيات والفيزياء ، بما في ذلك نظرية المجموعات الغامضة ، ونظرية الاحتمالات ، ونظرية الرسم البياني ، وفيزياء الجسيمات. أنها توفر وسيلة لتوسيع وتعميق فهم المجموعات ، مما يسمح بمزيد من المرونة في العمليات الثنائية. هذا يؤدي إلى استكشاف هياكل رياضية جديدة ومقاربات جديدة لحل المشكلات.

باختصار ، تعمل المجموعات الفائقة على تعميم المجموعات من خلال السماح بالعمليات الترابطية. لديهم تطبيقات في مختلف المجالات ويقدمون هياكل ووجهات نظر رياضية جديدة لحل المشكلات.

• Résumé

Les hypergroupes sont des structures mathématiques qui généralisent les propriétés des groupes. Alors que les groupes ont une opération binaire associative, les hypergroupes permettent des opérations associatives appelées hyperopérations, tout en satisfaisant la condition plus faible d'hyper-associativité. Les hypergroupes sont définis comme des ensembles non vides munis d'une hyperopération qui doit respecter l'hyper-associativité et l'existence d'un élément neutre.

Les hypergroupes trouvent des applications dans divers domaines des mathématiques et de la physique, notamment la théorie des ensembles flous, la théorie des probabilités, la théorie des graphes et la physique des particules. Ils offrent un moyen d'étendre et d'approfondir la compréhension des groupes, en permettant plus de flexibilité dans les opérations binaires. Cela conduit à l'exploration de nouvelles structures mathématiques et de nouvelles approches de résolution de problèmes.
En résumé, les hypergroupes généralisent les groupes en permettant des opérations associatives. Ils ont des applications dans divers domaines et offrent de nouvelles structures mathématiques et perspectives pour la résolution de problèmes.

• Abstract

Hypergroups are mathematical structures that generalize the properties of groups. While groups have an associative binary operation, hypergroups allow for associative operations called hyperoperations, while still satisfying the weaker condition of hyperassociativity. Hypergroups are defined as non-empty sets equipped with a hyperoperation that must adhere to hyperassociativity and the existence of a neutral element.

Hypergroups find applications in various areas of mathematics and physics, including fuzzy set theory, probability theory, graph theory, and particle physics. They provide a way to extend and deepen the understanding of groups, allowing for more flexibility in binary operations. This leads to the exploration of new mathematical structures and approaches to problem-solving.

In summary, hypergroups generalize groups by allowing non-associative operations. They have applications in diverse fields and offer new mathematical structures and perspectives for problem-solving.