

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

*Université de Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi - Bordj Bou Arreridj*

*Faculté des Sciences et de la technologie*

*Département d'Electronique*

# *Mémoire*

*Présenté pour obtenir*

LE DIPLOME DE MASTER

**FILIERE : Electronique**

**Spécialité : Electronique Des Systèmes Embarqués**

Par

**Tiaiba Hichame**

*Intitulé*

**Modélisation et commande d'un robot bipède**

*Soutenu le : 07/09/2019*

*Devant Le Jury :*

<i>Dr. Talbi Mohammed Lamine</i>	<i>Président</i>	<i>MCA, Université de BBA</i>
<i>Dr. Latoui Abd El Hakim</i>	<i>Examineur</i>	<i>MCA, Université de BBA</i>
<i>Dr. DAACHI Mohamed El Hossine</i>	<i>Encadreur</i>	<i>MCA, Université de BBA</i>

*Année Universitaire 2018/2019*

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا ﴿١١٤﴾

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ - سُوْرَةُ طه

# *Dédicaces*

*Je dédie ce travail à:*

*Ma mère*

*Mon père*

*Mes frères*

*Mes amis*

# *Remerciement*

Louange à Dieu le tout puissant, qui nous favorise par la science et qui nous a fourni force, patience et courage pour accomplir ce travail.

Un merci spécial à mon encadreur Dr. Mohammed El Hossine Daachi, et à mon ami Oussama Boutalebi, pour leurs efforts de direction et de conseils.

Je voudrais étendre mes sincères remerciements à tous les professeurs du département d'électronique et à tous ceux qui sont sincères dans leur travail et à tous ceux qui nous ont souhaité du succès dans ce travail, de près ou de loin.

Que Dieu vous bénisse et qu'Allah vous récompense.

# Sommaire

Liste des figures.....	I
Acronymes.....	III
Symboles.....	III
Abstract : .....	VI
Keywords : .....	VI
Résumé :.....	VI
Mots clé : .....	VII
Introduction Générale.....	1
Chapitre 01: .....	4
Etat de l'Art sur les Robots Marcheurs .....	4
1.1 Introduction : .....	4
1.2 Les Robots Marchants : .....	4
1.2.1 Les Robots Monopodes : .....	5
1.2.2 Les Robots Bipèdes : .....	6
1.2.3 Les Robots Quadrupèdes : .....	7
1.2.4 Les Robots Hexapodes : .....	9
1.2.5 Les Robots à huit-pattes : .....	10
1.3 Les Avantages des jamba : .....	11
1.4 La limitation des véhicules à pattes : .....	11
1.5 Les Applications des machines Marchants/robots : .....	11
1.6 Conclusion : .....	13
Chapitre 02: .....	15
Les Différentes Commandes des Robots.....	15
2.1 Introduction:.....	15
2.2 Commande Proportionnelle Intégrale et Dérivée (PID) [13][14] : .....	17
2.2.1 Commande PID dans l'espace articulaire [13] [14] : .....	17
2.2.2 Commande PID dans l'espace opérationnel [13] [14] : .....	18
2.3 Lois de Commandes Dynamiques [13] [14] : .....	19
2.3.1 Commande Linéarisante : .....	19
2.3.2 Commande linéarisante prédictive [13] [14] : .....	21
2.3.3 Commande linéarisante robuste [13] [14] : .....	21
2.4 Commande en effort [13] [14] [21] [23] : .....	22

2.4.1	Commande en impédance [13] [14] [21] : .....	23
2.4.2	Commande hybride force/position [13] [14] [22] [23] : .....	24
2.4.3	Commande hybride externe [13] [14] [22] [23] : .....	24
2.5	Conclusion: .....	25
Chapitre 03:	.....	27
Modélisation et commande de robots bipèdes	.....	27
3.1	Introduction:.....	27
3.2	Intérêt du modèle dynamique d'un robot : .....	27
3.3	Modélisation dynamique et résultats de pour la commande : .....	28
3.3.1	Le robot bipède de type compas CBR (Compas-Bipède Robot) : .....	28
3.3.1.1	Le modèle anthropométrique : .....	28
3.3.1.2	La modélisation dynamique du CBR en tant que robot manipulateur (coordonnées relatives) : .....	29
3.3.1.3	Simulation : .....	33
3.3.1.4	Signification des scénarios considérés : .....	33
3.3.1.5	Trajectoire de la marche : .....	34
3.3.1.6	Schéma bloc utilisé pour la simulation : .....	35
3.3.1.7	Résultats de simulation : .....	35
3.3.1.8	Comparaison des résultats : .....	39
3.3.2	Le robot Bipède à cinq degrés de liberté : .....	40
3.3.2.1	Le Modèle anthropométrique : .....	41
3.3.2.2	Le modèle dynamique du robot bipède à 5 DDL : .....	42
3.3.2.3	Simulation : .....	54
3.3.2.4	Signification du scénario considéré : .....	54
3.3.2.5	Trajectoires relatives aux scénarios de la marche : .....	55
3.3.2.6	Schéma de la commande du robot bipède à 5 DDL : .....	57
3.3.2.7	Résultats de simulation: .....	57
3.4	Conclusion: .....	64
Conclusion générale	.....	65
Références bibliographiques:	.....	68
Annexe A:	.....	70

# Liste des figures

Figure 1. 1: Monopode Robot "Bowleg Hopper" .....	6
Figure 1. 2 : Honda bipède robot "ASIMO Dernière version", JAPAN 2011 .....	7
Figure 1. 3 : DARPA Quadrupède "Big Dog" robot, USA 2010 .....	8
Figure 1. 4 FZI Robot Marcheur Hexapodes "LAURON V", GERMANY 2013.....	10
Figure 1. 5 FRC Robot Marcheur à Huit Pattes "DANT II" 1994 .....	10
Figure 1. 6 : Exemple de robot Hexapode Marcheur Moissonneuse .....	12
Figure 2. 1 : Commande PID dans l'espace articulaire.....	18
Figure 2. 2 : Commande PID dans l'espace opérationnel .....	19
Figure 2. 3 : Commande linéarisante a paramètre connus .....	20
Figure 2. 4 : Commande linéarisante prédictive .....	21
Figure 2. 5 : Commande linéarisante robuste.....	22
Figure 2. 6 : Schéma de commande en impédance sans retour de force .....	23
Figure 2. 7 : Schéma de commande en impédance avec retour de force .....	23
Figure 2. 8 : Schéma de commande hybride force/ position .....	24
Figure 2. 9 : Schéma de commande hybride externe .....	25
Figure 3. 1: CBR avec des coordonnées généralisées comme pour le cas d'un robot sériel.....	30
Figure 3. 2: Les différents scénarios pour évaluer les couples du modèle dynamique .....	33
Figure 3. 3 :Commande linéarisante appliqué au robot CRB.....	35
Figure 3. 4:Trajectoires articulaires $q_1$ et $q_2$ (scénario a) .....	35
Figure 3. 5: Erreur de poursuite de trajectoire en position pour les scénarios a .....	36
Figure 3. 6: Les couples appliqués aux actionneurs 1&2 en considérant le modèle dynamique sans modification [3] et après ajout du terme d'inertie (scénario a) .....	36
Figure 3. 7: Trajectoires articulaires $q_1$ et $q_2$ ( scénario b) .....	37
Figure 3. 8 : Erreur de poursuite de trajectoire en position pour les scénarios b .....	37
Figure 3. 9: Les couples appliqués aux actionneurs 1&2 en considérant le modèle dynamique sans modification [3] et après ajout du terme d'inertie (scénario b) .....	38
Figure 3. 10: Trajectoires articulaires $q_1$ et $q_2$ relatives au scénario C.....	38

Figure 3. 11 : Erreur de poursuite de trajectoire en position pour les scénarios c.....	39
Figure 3. 12: Les couples appliqués aux actionneurs 1&2 en considérant le modèle dynamique sans modification [3] et après ajout du terme d'inertie (scénario c) .....	39
Figure 3. 13: Robot bipède Bip-ITLagen pris (coordonnés relatives).....	41
Figure 3.14: Scénarios de la marche considéré pour le robot bipède [20] .....	54
Figure 3. 15 : Organigramme de simulation des scénarios de la marche .....	56
Figure 3. 16: Schéma de commande du robot bipède à 5 DDL.....	57
Figure 3. 17 : Poursuite de trajectoire pour l'articulation 1 .....	57
Figure 3. 18: Erreur de poursuite de trajectoire pour l'articulation 1 .....	58
Figure 3. 19: Poursuite de trajectoire pour l'articulation 2 .....	58
Figure 3. 20: Erreur de poursuite de trajectoire pour l'articulation2 .....	59
Figure 3. 21: Poursuite de trajectoire pour l'articulation 4 .....	59
Figure 3. 22: Erreur de poursuite de trajectoire pour l'articulation 4 .....	60
Figure 3. 23: Poursuite de trajectoire pour l'articulation 5 .....	60
Figure 3. 24: Erreur de poursuite de trajectoire pour l'articulation 5 .....	61
Figure 3. 25: Poursuite de Trajectoire pour l'articulation prismatique r .....	61
Figure 3. 26: Erreur de poursuite de trajectoire pour l'articulation r.....	62
Figure 3. 27:Couple appliqués aux l'articulations 1, 2. ....	63
Figure 3. 28:Couples appliqués aux articulations 4, 5 .....	63
Figure 3. 29: Couple appliqué à l'articulation 5 (articulation prismatique).....	64



## Acronymes

CBR: Compas **B**ipède **R**obot

DDL: Degré De Liberté

COM: Center Of **M**ass

SSP: **S**ingle **S**upport **P**hase

DSP: **D**ouble **S**upport **P**hase

FP: Flying **P**hase

DARPA: **D**efense **A**dvanced **R**esearch **P**rojects **A**gency

FZI: Forschungs **Z**entrum **I**nformatik (*Research Center for Information Technology*)

FRC: Field **R**obotics Center

PCL :Loi de Commande en **P**osition (Position Control Law)

FCL :Loi de Commande en **F**orce (Force Control Law)

MD : **M**odèle **D**ynamique

## Symboles

$K_p$ :Gain proportionnel

$K_i$ : Gain intégral

$K_v$ :Gain dérivé

$q_d$ :Position articulaire désiré

$\dot{q}_d$ :Vitesse articulaire désiré

$q$ : Position articulaire mesuré

$\dot{q}$ :Vitesse articulaire mesuré

$x_d$ : Position opérationnel désiré

$\dot{x}_d$ : Vitesse opérationnel désiré

$x$ : Position opérationnel mesuré

$\dot{x}$ : Vitesse opérationnel mesuré

$\ddot{q}_d$ : Accélération articulaire désiré

$J$ : La matrice Jacobienne  
 $L$ : Lagrangien du système  
 $T$ : L'énergie cinétique totale du système  
 $U$ : L'énergie potentielle totale du système  
 $\tau$ : Le couple appliqué aux articulations  
 $T_{l_i}$ : L'énergie cinétique totale de liaison  $i$   
 $T_{Tr_i}$ : L'énergie cinétique translationnelle de la liaison  $i$   
 $T_{Ro_i}$ : L'énergie cinétique rotationnelle de la liaison  $i$   
 $m_{l_i}$ : La masse de la liaison  $i$   
 $\dot{q}_{l_i}$ : La vitesse de centre de masse de la liaison  $i$   
 $I_{l_i}$ : La matrice d'inertie de centre de masse de liaison  $i$   
 $\omega_{l_i}$ : La vitesse angulaire de la liaison  $i$   
 $I_{l_{i}xx}$ : L'inertie par rapport l'axe  $x$   
 $I_{l_{i}yy}$ : L'inertie par rapport l'axe  $y$   
 $I_{l_{i}zz}$ : L'inertie par rapport l'axe  $z$   
 $a_{l_i}^2$ : Le diamètre extérieur  
 $b_{l_i}^2$ : Le diamètre intérieur  
 $h_{l_i}$ : La longueur du corps  
 $g$ : L'accélération gravitationnelle  
 $M(q, \dot{q})$ : La matrice d'inertie  $n \times n$  du système  
 $C(q, \dot{q})$ : La matrice  $n \times n$  de coriolice et centrifuge  
 $G(q)$ : Vecteur des forces gravitationnelles  
 $\dot{q}_{1,2,4,5}$ : Vitesse articulaire  
 $\ddot{q}_{1,2,4,5}$ : Accélération articulaire  
 $\dot{r}$ : Vitesse de la liaison prismatique  
 $\ddot{r}$ : Accélération de la liaison prismatique

## ملخص:

يعد الروبوت ذو القدمين أحد أكثر أنواع الروبوتات جاذبية بسبب تشابهه مع حركة الإنسان وقدرته على مساعدة الناس. تركز هذه المذكرة على النمذجة الديناميكية و التحكم في نوعين من الروبوتات ذات الرجلين: روبوت ذات ساقين يشبه المدور و روبوت ذات رجلين بخمس (5) درجات من الحرية. اما بالنسبة للنمذجة, تتم نمذجة الروبوت ذو الرجلين على انه روبوت عملي (احداثيات نسبية). تعتمد النمذجة الديناميكية على شكلية لاقرانج. فيما يتعلق بالتحكم, تم استوحاء سيناريوهات مختلفة من طريقة مشي الانسان. لهذا, تم اجراء اختبارات في المحاكات على نوعين من الروبوتات ذات القدمين الممثلة بنماذجها, في برنامج "ماتلاب" باخذ النظر بعين الاعتبار الى ارضية مسطحة او سطح مستوي.النتائج التي تحصلنا عليها جيدة و جد مرضية.

## الكلمات المفتاحية:

الروبوت بالقدمين ، النمذجة ، التحكم ، شكلية لاقرانج

## **Abstract :**

The biped robot is one of the most attractive types of robots because of its similarity with the locomotion of the human being and his ability to assist people. This thesis focuses on dynamic modeling and command / control of two types of biped robots: compass-like biped robot and biped robot with five (05) degrees of freedom. As for modeling, the biped robot is modeled as a manipulator robot (relative coordinates). The dynamic modeling is based on Lagrange's formalism. Regarding the command, different scenarios inspired by the human being gait were considered. For this, tests in simulation, on the two types of biped robots represented by their models, were made in Matlab environment while considering a flat surface. The results that we have obtained are very good and very satisfactory results.

## **Keywords :**

Biped robot, modeling, command / control, Lagrange formalism.

## **Résumé :**

Le robot bipède est l'un des types de robots les plus attrayants du fait de sa similarité avec la locomotion de l'être humain et de sa capacité à assister les personnes. Ce mémoire porte sur la modélisation dynamique et la commande/contrôle de deux types de robots bipèdes : robot bipède de type compas et robot bipède à cinq (05) degrés de liberté. Quant à la modélisation, le robot bipède est modélisé tel qu'un robot manipulateur (coordonnées relatives). La modélisation dynamique réalisée est issue du formalisme de Lagrange. S'agissant de la commande, différents scénarios s'inspirant de la marche de l'être humain ont été considérés. Pour cela, des tests en simulation, sur les deux types de robots bipèdes représentés par leurs modèles, ont été réalisés dans l'environnement Matlab tout en considérant une surface plane. Les résultats qui nous avons obtenue sont de très bonne et très satisfaisant résultats.

## **Mots clé :**

Robot bipède, modélisation, commande/contrôle, formalisme de Lagrange.

## **Introduction Générale**

---

L'homme a toujours rêvé de concevoir des machines capables de le remplacer dans ses activités. Il s'agit notamment des robots, qui sont en général des imitations de la morphologie humaine. Il a commencé par inventer le bras manipulateur en premier temps, puis il s'est intéressé par la suite, entre autres, au développement des robots marcheurs tels que les robots humanoïdes. Ces derniers sont choisis pour leur capacité et dextérité de se déplacer dans des locaux (maisons). A titre d'exemple et pour ne citer que cela, ces robots sont capables de monter ou descendre des escaliers, faire le ménage, assister des personnes à mobilité réduite ou handicapées [4]. D'une façon générale, l'utilisation des robots marcheurs s'étale à plusieurs domaines à savoir l'exploration de l'espace et le domaine nucléaire là où l'intervention directe de l'homme sera dangereuse.

Le terme humanoïde a été attribué à ce genre de robots du fait de leur ressemblance morphologique à l'humain. Il évoque la bipédie, la présence de deux bras et d'une tête. Le développement de systèmes de locomotion à jambe, qui concernent le corps inférieur, a reçu récemment une attention particulière de la part des chercheurs en raison de leur plus haute mobilité par rapport aux véhicules conventionnels à roues. Comme une classe de machines marchantes, les robots bipèdes imitent la locomotion humaine pour l'utilisation dans les environnements hostiles et quelques champs industriels. Plusieurs travaux de recherche ont été réalisés autour de la locomotion bipède à savoir la modélisation dynamique et la commande/contrôle [2].

Dans ce projet de fin d'étude, nous nous sommes limités à la partie bipédie assurant le déplacement de l'humanoïde. En effet, deux aspects relatifs aux robots bipèdes ont été étudiés : la modélisation et la commande/contrôle. Cependant, la commande/contrôle des robots bipèdes, qui se base sur l'établissement des modèles précis, s'avère difficile puisqu'il s'agit de maintenir l'équilibre et la stabilité du

ystème en permanence lors de son évolution en l'exécution de la tâche qui lui est assignée.

Le travail réalisé dans ce mémoire se base sur des travaux de recherche récents réalisés dans le contexte des robots bipèdes [3]. Il s'agit donc de deux types de robots bipèdes : robot de type compas et robots bipède à cinq (05) degrés de liberté. La modélisation dynamique a été établie en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange. S'agissant de la commande, nous avons proposé des scénarios qui consistent en l'imitation de la marche de l'être humain. Pour cela, des simulations ont été réalisées dans l'environnement MATLAB tout en considérant une surface plane.

Par ailleurs, notre manuscrit est organisé autour de trois chapitres suivis d'une conclusion.

Le premier chapitre dresse un état de l'art sur les robots marcheurs. Nous nous intéressons plus particulièrement aux robots monopodes, bipèdes, quadrupèdes, hexapodes et robots à huit pattes.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons les différentes commandes dédiées aux robots manipulateurs exprimées dans les différents espaces, opérationnel et articulaire.

Le troisième chapitre, qui représente le cœur de notre travail, est réservé la modélisation et à la commande de robots bipèdes. Les deux robots bipèdes dont il s'agit sont le robot de type compas et le robot bipède à cinq (05) degrés de liberté. La modélisation dynamique réalisée est issue du développement de Lagrange. La commande à appliquer, pour plusieurs scénarios issus du comportement humain lors de la marche, est la commande linéarisante. Pour les différents tests de simulation nous considérons une surface plane.

Nous terminons notre manuscrit par une conclusion générale et nous formulons quelques perspectives.

# CHAPITRE 01:

Etat de l'Art sur les Robots Marcheurs



## Chapitre 01:

### Etat de l'Art sur les Robots Marcheurs

---

#### 1.1 Introduction :

Les robots marcheurs ou à pattes sont un type de robots mobiles qui utilisent des membres mécaniques pour se déplacer. Ils sont plus polyvalents que les robots à roues et peuvent traverser de nombreux terrains différents, bien que ces avantages exigent une complexité et une consommation d'énergie accrues. Ils offrent une mobilité supérieure sur les terrains naturels, car ces véhicules peuvent utiliser des repose-pieds discrets pour chaque pied, contrairement aux véhicules à roues, qui nécessitent une surface de support continue. Par conséquent, ces véhicules peuvent se déplacer sur des terrains irréguliers, en modifiant la configuration de leurs jambes afin de s'adapter aux irrégularités de la surface. En revanche, les pieds peuvent établir un contact avec le sol en des points choisis en fonction des conditions du terrain. Les robots à jambes imitent souvent les créatures à jambes, tels que les humains les animaux ou les insectes [7-8].

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue les différents robots marcheurs à pattes commençant par le robot monopode (une seule patte) jusqu'au robot multi-pattes.

#### 1.2 Les Robots Marchants :

Les robots à pattes peuvent être classés en fonction du nombre de membres qu'ils utilisent, ce qui détermine l'allure disponible. De nombreux robots à jambes ont tendance à être plus stables, alors que moins de jambes se prêtent à une plus grande maniabilité [5].

La description suivante est organisée en fonction du nombre de jambes des systèmes de locomotion, en commençant par les systèmes monopodes, puis par les

systemes bipèdes et par les systemes quadrupèdes et multi-pattes, les robots à six et huit pattes [6].

### 1.2.1 Les Robots Monopodes :

Les robots monopodes sont des véhicules à une jambe, leur locomotion se faisant par sauts. Ces machines sont donc également connues sous le nom de robots à sauts. Bien que le kangourou soit l'exemple naturel le plus approximatif de la locomotion par sauts, ce modèle peut également être appliqué aux bipèdes en marche, qui alternent entre un pied ou pas du tout en contact avec le sol. Ces machines gardent un équilibre actif tout en bougeant, obtenant une stabilité dynamique en modifiant leur son centre de gravité et en appliquant des forces correctives pour éviter les chutes en cas de perturbation, permettant ainsi une meilleure compréhension des échanges énergétiques intervenant au cours d'un cycle de locomotion, et en mettant l'accent sur les problèmes de stabilité active et dynamique, sans nécessiter de schémas de coordination des pattes.

L'avantage d'une seule jambe est qu'ils peuvent sauter par-dessus et se déplacer sur n'importe quel type de terrain lorsqu'ils prennent un bon départ et sautent par-dessus tous les obstacles.

**Matsuokaa** [24] été le premier à construire une machine selon ces concepts. Son objectif était de modéliser les sauts cycliques dans la locomotion humaine. Pour atteindre cet objectif, Matsuoka a formulé un modèle comprenant un corps et une jambe de faible poids et a estimé que la durée de la phase de soutien était plus courte que celle de la phase de vol balistique.

Pour tester le système de contrôle, Matsuoka a construit une machine à sauts de jambe plane [8-9].

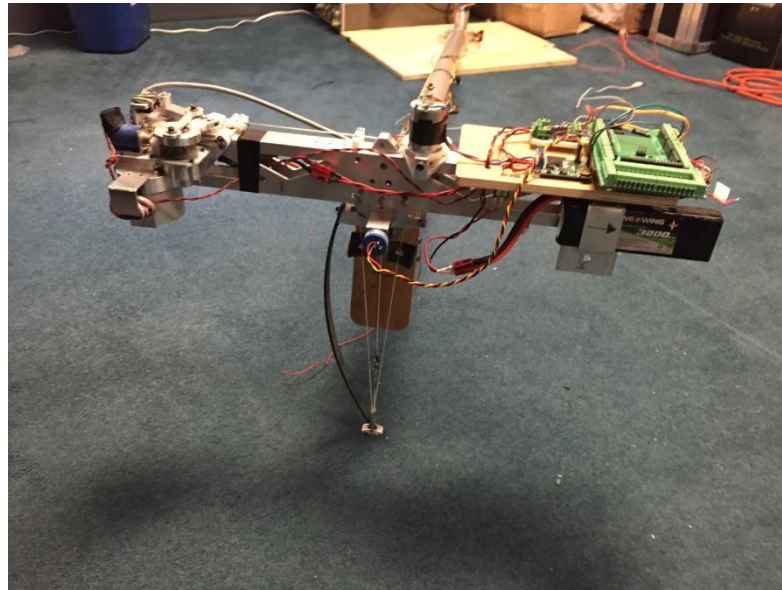


Figure 1. 1: Monopode Robot "Bowleg Hopper"

### 1.2.2 Les Robots Bipèdes :

Dans le cas de robots à deux jambes, la recherche sur la locomotion bipède, comparée au cas à plusieurs jambes, a progressé plus lentement en raison de la difficulté d'établir un contrôle stable, car les robots bipèdes sont plus exigeants en ce qui concerne sa dynamique équilibre. La principale limite initiale de ces machines était sa faible vitesse, nécessitant 90 secondes pour effectuer une étape. Ces dernières avancées ont permis d'atteindre des vitesses proches de celles atteintes par l'être humain [6].

Les robots bipèdes peuvent effectuer des marches statiques et dynamiques.

- **Marche statique:** L'équilibre statique ou marche statique fait référence à un système qui reste équilibré en gardant toujours le centre de masse (COM) du système projeté verticalement sur le polygone de support formé par les pieds pendant le mouvement.
- **Marche dynamique:** La marche dynamique ou équilibre dynamique fait référence à un système selon lequel le (COM) peut quitter la zone de soutien formée par les pieds pendant un certain temps [8].

De nos jours, il existe une grande variété de robots bipèdes présentant une forme humanoïde et ayant de bonnes capacités de locomotion. L'un des robots

bipèdes présentant de meilleures capacités de locomotion est le robot humanoïde ASIMO crée par Honda [6] (Figure 1.2).



**Figure 1. 2 : Honda bipède robot “ASIMO Dernière version”, JAPAN 2011**

### **1.2.3 Les Robots Quadrupèdes :**

Les robots à quadrupède ou à quatre pattes présentent un mouvement de quadrupède. Ils bénéficient d'une stabilité accrue par rapport aux robots bipèdes, surtout lors des mouvements. À basse vitesse, un robot quadrupède ne peut se déplacer qu'une jambe à la fois, assurant ainsi la stabilité du trépied. Les robots à quatre pieds bénéficient d'un centre de gravité plus bas que les systèmes à deux pieds [5] et peuvent supporter beaucoup plus de charge utile de manière efficace. Les robots quadrupèdes avec actionneurs articulaires ont une bonne vitesse de marche et une bonne puissance de transport, ainsi qu'une bonne mobilité et une bonne stabilité de locomotion. Les robots à quatre pattes sont plus polyvalents que les robots à roues et à chenilles et plus stables que les robots bipèdes [9].

La marche à quatre pattes est courante chez la plupart des animaux et il y a de bonnes raisons de la reproduire chez les robots. En général, les robots à quatre jambes sont statiquement stables et, pour améliorer la stabilité dynamique et

augmenter la vitesse de marche ainsi que la puissance de transport des robots quadrupèdes, des actionneurs hydrauliques à large bande passante et à puissance de sortie élevée sont nécessaires [9].

Le modèle de marche d'un robot à quatre pattes peut être conçu de différentes manières, une jambe à la fois, comme nous l'avons déjà mentionné, et une paire en alternance.

- **Une jambe à la fois:** à tout moment, il y a trois points de contact avec la surface et le robot maintient sa stabilité statique en position debout ou en mouvement. Déplacer une jambe à la fois rend votre robot plus lent et coûteux en ressources, mais reste stable.
- **Paire alternée:** Dans cette approche, les jambes alternées sont déplacées comme si deux robots bipèdes étaient connectés ensemble. A tout moment, le robot a deux points de contact en surface, créant un robot à la stabilité dynamique. Plus rapide et efficace, mais moins stable par rapport à la première approche [7].

L'un des célèbres robots quadrupèdes est le robot DARPA «Big Dog» du ministère de la Défense des États-Unis (figure 1.3).



Figure 1. 3 : DARPA Quadrupède "Big Dog" robot, USA 2010

### 1.2.4 Les Robots Hexapodes :

Les robots hexapodes à pattes sont des robots programmables avec six pattes attachées au corps du robot. Les jambes sont contrôlées avec un degré d'autonomie afin que le robot puisse se déplacer dans ses environnements pour effectuer les tâches prévues [10]. Ils sont motivés par le désir d'une stabilité encore plus grande que celle des robots bipèdes et quadrupèdes. Ces robots sont biologiquement inspirés pour imiter la mécanique des insectes [7] et leurs allures peuvent être classées de la même façon. Ceux-ci incluent la démarche des vagues et la démarche du trépied [5].

- **Démarche des vagues:** démarche la plus lente, dans laquelle les paires de jambes se déplacent en une «vague» de l'arrière vers l'avant [5]. Dans cette approche, les deux jambes avant sont déplacées en premier, suivies des deux jambes du milieu, puis des deux dernières. Une fois que les trois paires de jambes sont déplacées, le corps est avancé pour effectuer un mouvement. À tout moment, quatre jambes touchent le sol.

La démarche ondulatoire nécessite quatre étapes pour un mouvement complet [7].

- **Démarche du trépied:** étape légèrement plus rapide dans laquelle trois jambes bougent en même temps. Les trois jambes restantes fournissent un trépied stable au robot [5]. Les jambes alternées avancent de chaque côté, les jambes avant et arrière d'un côté et la jambe du milieu de l'autre côté sont déplacées en premier. Ensuite, les trois jambes restantes sont déplacées. Le corps est avancé et l'ensemble du processus ne nécessite que trois étapes. La démarche du trépied nécessite plus de coordination des jambes, ce qui augmente la complexité [7].





**Figure 1. 4 FZI Robot Marcheur Hexapodes "LAURON V", GERMANY 2013**

### **1.2.5 Les Robots à huit-pattes :**

Les robots à huit pattes sont inspirés par les araignées et autres arachnides, ainsi que des marcheurs sous-marins. Ils offrent la plus grande stabilité permettant des premiers succès avec des robots à pattes, des robots à huit pattes tels que DANTE II, un projet de l'université Carnegie Mellon conçu pour explorer le mont Erebus [11].



**Figure 1. 5 FRC Robot Marcheur à Huit Pattes "DANT II" 1994**

### **1.3 Les Avantages des jambs :**

Quel est le cas pour construire des véhicules à jambes plutôt que des véhicules à roues ou à chenilles? Une raison est un intérêt pour la locomotion à jambes en lui-même, mais il faut démontrer que les jambes de transport sont supérieures aux roues ou aux pistes. Les avantages des jambes peuvent être résumés comme suit [12]:

1. Les jambes peuvent franchir les obstacles et monter et descendre les escaliers.
2. La locomotion à jambes peut, en principe, même transporter un véhicule sur de larges gouffres ou un sol extrêmement accidenté (par exemple, les kangourous et les chèvres de montagne).
3. Un véhicule à jambes peut rouler en douceur sur un terrain accidenté en modifiant la longueur de ses jambes pour l'adapter aux ondulations du sol
4. Sur un sol meuble, une roue sort toujours d'une ornière; cette puissance perdue. Dans des cas extrêmes, la roue peut s'enfoncer plus profondément jusqu'à ce que le véhicule s'arrête.
5. Les jambes font moins de dégâts au sol que les chenilles et beaucoup de roues.

### **1.4 La limitation des véhicules à pattes :**

Bien que les aspects cités indiquent que la locomotion à jambes est avantageuse par rapport aux véhicules de locomotion traditionnels, il convient de garder à l'esprit que, dans leur état de développement actuel, ces véhicules souffrent encore d'énormes limitations, car ils présentent des faibles vitesses et sont difficiles à construire et nécessitent des algorithmes de contrôle complexes. De plus, les mécanismes d'aujourd'hui sont lourds, car ils nécessitent un grand nombre d'actionneurs pour déplacer plusieurs pieds de DDL, auxquels il faut ajouter une grande consommation d'énergie [6].

### **1.5 Les Applications des machines Marchants/robots :**

Les applications de ce type de robots sont diverses et variées [12]. Ces applications peuvent être résumées dans les points suivants :

- ✓ Transport sur terrain accidenté ;



- ✓ Transport dans les bâtiments (en particulier les escaliers) ;
- ✓ Transport dans des environnements inhabituels tels que des tuyaux ou des structures en orbite ;
- ✓ Modélisation animale ;
- ✓ Transport militaire ;
- ✓ L'exploitation minière ;
- ✓ Ingénierie nucléaire et autres cas de télémanipulation ;
- ✓ Prothèses et orthèses: fauteuils de marche ;
- ✓ Exploration planétaire ;
- ✓ Construction et activités connexes ;
- ✓ Agriculture et foresterie ;
- ✓ Robots de lutte contre l'incendie et de sauvetage ;
- ✓ Education, art et divertissement.

La figure 1.6 suivante illustre une application parmi d'autres d'un robot marcheur ayant la forme de scorpion.



**Figure 1. 6 : Exemple de robot Hexapode Marcheur Moissonneuse**

**NB :** Certains robots utilisent une combinaison hybride, c'est-à-dire une association de jambes et de roues. Cela confère à une machine la vitesse et l'efficacité énergétique de la locomotion sur roues ainsi que la mobilité de la navigation avec jambes.

## **1.6 Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents types de robots marcheurs à pattes (à jambes). Nous avons commencé par présenter le robot dont l'architecture la plus simple (monopode) jusqu'à l'architecture la plus complexe (robot multi-pattes). La complexité de la commande et de la modélisation d'un robot marcheur a un rapport direct avec la complexité de son architecture. Aussi, nous avons introduit les avantages des robots à jambes (pattes) par rapport à leurs homologues à roues ou à chenilles. Pour notre application (chapitre 3), nous avons choisi le robot bipède qui est largement étudié dans la littérature. Dans le deuxième chapitre, nous allons nous intéresser aux différents schémas de commande utilisés dans la littérature.

# CHAPITRE 02:

Les Différents types de Commande  
des Robots

## Chapitre 02:

### Les Différentes Commandes des Robots

#### 2.1 Introduction:

D'une façon générale, la modélisation des robots bipèdes se fait pareillement aux robots manipulateurs. De même, les commandes des systèmes robotisés proposées dans la littérature sont valables pour la plus part des robots. Dans ce chapitre, nous décrivons les différentes commandes de base dédiées aux robots manipulateurs. En effet, plusieurs techniques de commande ont été proposées dans la littérature et donne des résultats satisfaisants selon la situation. Ces commandes sont applicables aussi bien pour les robots manipulateurs que pour les robots bipèdes. Pour les commandes classiques, entre autres, la commande PID, elle donne de bons résultats dans le cas d'un mouvement lent. Leur principal avantage est que leur implémentation ne nécessite aucune connaissance à priori ni de la structure du modèle du robot ni de ses fonctions ce qui en fait des commandes largement utilisées. L'inconvénient, c'est qu'elles ne sont pas robustes et sont inefficaces quand il s'agit des mouvements rapides. Dans ce genre de situations, on fait appel à d'autres types de commandes telles que les commandes dynamiques. Ces commandes s'appellent ainsi car elles intègrent, dans leur conception, la dynamique du système. Elles donnent de bons résultats en termes de poursuite de trajectoire. Parmi ces commandes, on trouve la commande linéarisante. L'implémentation de cette dernière nécessite la connaissance parfaite de la dynamique du système. En général, on associe des compensateurs pour compenser les erreurs de modélisation, car une modélisation n'est jamais à l'abri des erreurs.

A la différence des robots manipulateurs qui peuvent être en mouvement libre comme ils peuvent être en contact avec leur environnement par leurs effecteurs, les robots bipèdes se trouvent en permanence en contact avec le sol ce qui nécessite la prise en charge des forces d'interaction pour un meilleur contrôle du robot. Dans ce contexte, deux types de commande ont été proposées dans la littérature : la

commande en impédance et la commande hybride force/position. Pour la rédaction de ce chapitre, nous nous inspirés des références [15,16, 24, 25, 26].

Avant d'aborder les différents schémas de commande, nous avons préféré de rappeler tout d'abord les modèles géométriques et cinématiques d'un robot.

**Rappel :**

- L'équation exprimant les positions opérationnelles en fonction des positions articulaires est appelée modèle géométrique direct. Ce modèle est donné par l'expression :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) \quad (2.1)$$

Avec  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{q}(t)$  représentent respectivement les vecteurs des positions cartésiennes (opérationnelles) et articulaires.

- L'équation exprimant les positions (variables) articulaires en fonction des positions (variables) opérationnelles est appelée modèle géométrique inverse. Ce modèle est donné par l'expression :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) \quad (2.2)$$

- L'équation exprimant les vitesses opérationnelles en fonction des vitesses articulaires est appelée modèle cinématique direct d'ordre 1. Ce modèle est donné par l'expression :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}).\mathbf{q}(t) \quad (2.3)$$

$\mathbf{J}$  est une matrice de dimension  $(m, n)$ , appelée matrice jacobienne du robot. Elle est définie comme suit :

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{q})}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Avec  $f_1(\mathbf{q})$  est le vecteur de position cartésienne (opérationnel).

- L'équation exprimant les vitesses articulaires en fonction des vitesses opérationnelles est appelée modèle cinématique inverse d'ordre 1. Ce modèle est donné par l'expression :

$$\dot{q}(t) = J(q)^{-1} \dot{x}(t) \quad (2.5)$$

## 2.2 Commande Proportionnelle Intégrale et Dérivée (PID) [13][14] :

Le modèle dynamique d'un robot décrit un système de  $n$  équations différentielles du second ordre non linéaires et couplées,  $n$  étant le nombre d'articulations. Pourtant, dans une commande classique, qui est celle de la plupart des robots industriels, le système robotique est considéré comme un système linéaire et chacune de ses articulations est asservie par une commande décentralisée de type PID à gains constants. Ses avantages sont la facilité d'implantation et le faible coût de calcul. En contrepartie, la réponse temporelle du robot variant selon sa configuration, on constate des dépassements de consigne et une mauvaise précision suivi dans les mouvements rapides. Dans beaucoup d'applications, ces inconvénients ne représentent pas un gros handicap.

### 2.2.1 Commande PID dans l'espace articulaire [13] [14] :

La commande PID dans l'espace articulaire est établie dans l'espace articulaire. Elle est schématisée par la (figure 2.1). En effet, dans le cas où l'on veut connaître les variables opérationnelles (coordonnées de l'effecteur), le calcul se fera or ligne. Cette commande est facile à implémenter et ne nécessite aucune connaissance a priori ni de la structure du modèle ni de ses fonctions. Elle est exprimée par la relation suivante :

$$\tau = K_P(q_d - q) + K_V(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_I \int_{t_0}^t (q_d - q) dt \quad (2.6)$$

Avec  $\tau$  est le vecteur des couples appliqué aux actionneurs.

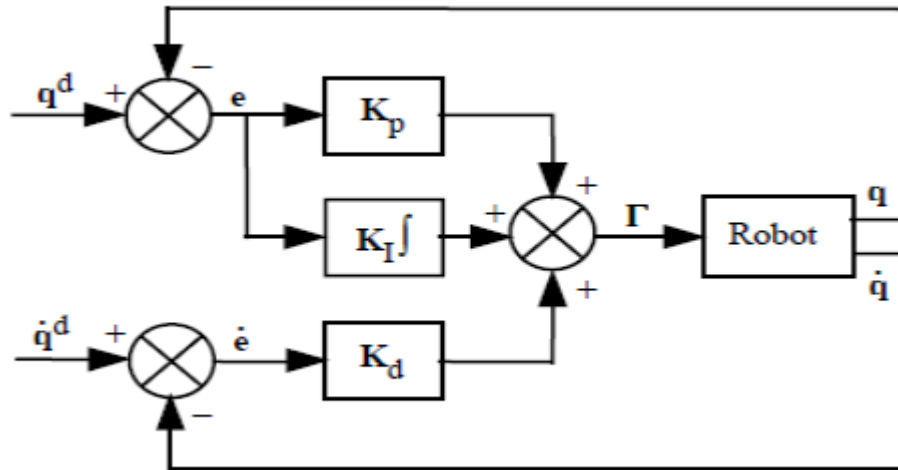


Figure 2. 1 : Commande PID dans l'espace articulaire

Avec :  $e = q_d - q$  est l'erreur de poursuite en position dans l'espace articulaire,

$\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q}$  est l'erreur de poursuite en vitesse dans l'espace articulaire,

$q_d$  et  $q$  représentent respectivement le vecteur des positions articulaires désirées et réelles.

### 2.2.2 Commande PID dans l'espace opérationnel [13] [14] :

Lorsque le mouvement est défini dans l'espace opérationnel, une des deux solutions suivantes peut être choisie pour réaliser la commande du système :

1. On transforme le mouvement défini dans l'espace opérationnel en un mouvement dans l'espace articulaire, puis on met en œuvre la commande dans l'espace articulaire. Le signal d'erreur minimisé est alors exprimé dans l'espace articulaire.
2. On spécifie directement la commande dans l'espace opérationnel.

**NB :** Pour les robots bipèdes, la commande dans l'espace opérationnel se base sur la détermination a priori du pas qui, entre autres, dépend de la géométrie du robot.

La commande PID dans l'espace opérationnelle (Figure 2.2) est donnée par :

$$\tau = J^T (K_P(x_d - x) + K_V(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_I \int (x_d - x) dt) \quad (2.7)$$

Avec :

$e = x_d - x$  est l'erreur de poursuite en position dans l'espace opérationnel,

$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x}$  est l'erreur de poursuite en vitesse dans l'espace opérationnel,

La commande établie directement dans l'espace opérationnel permet de décrire la marche réelle étant donné que la trajectoire à suivre est spécifiée dans cet espace.

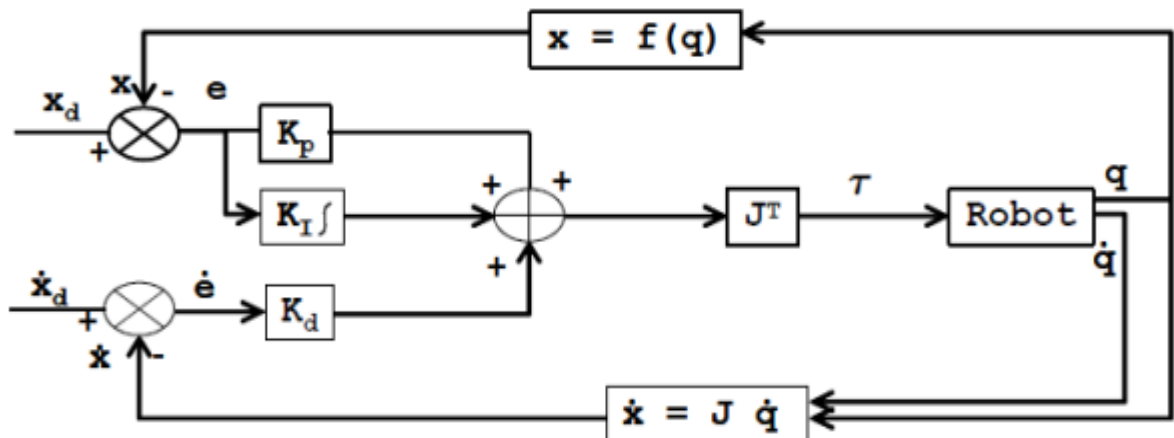


Figure 2. 2 : Commande PID dans l'espace opérationnel

### 2.3 Lois de Commandes Dynamiques [13] [14] :

Ces commandes sont appelées dynamiques du fait qu'elles intègrent, dans leur conception, la dynamique du système.

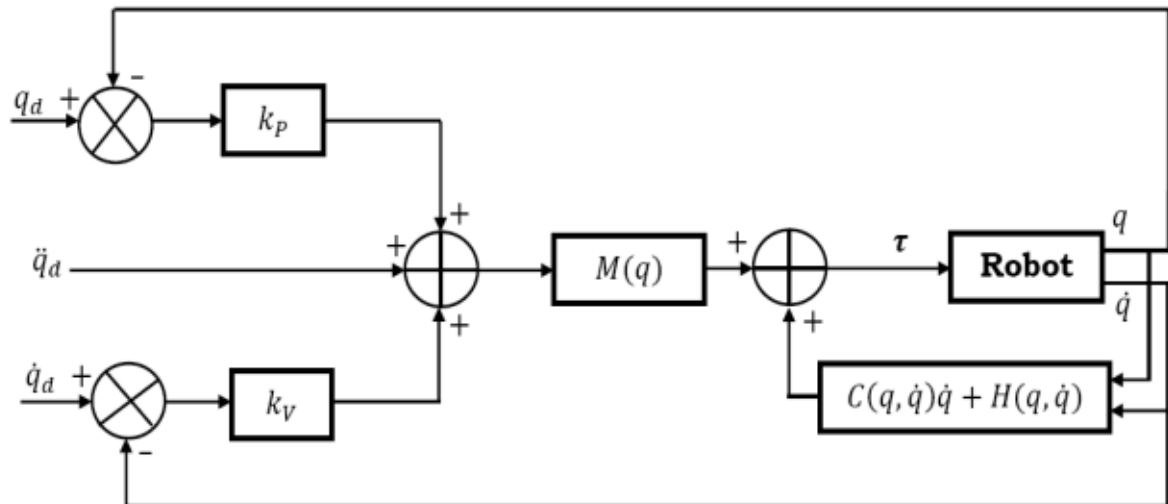
#### 2.3.1 Commande Linéarisante :

Cette commande est composée de trois parties principales (Figure 2.3) :

- La première compense les forces de Gravité, de Coriolis, Centrifuges et de frottements ;
- La deuxième partie est un simple correcteur proportionnel-dérivé ;
- La troisième partie réalise une anticipation sur l'accélération désirée  $\ddot{q}_d$  ;

L'idée de base de cette méthode est de supprimer les non linéarités dans le modèle puis traiter le système comme un système linéaire.





**Figure 2. 3 : Commande linéarisante à paramètres connus**

Le boucle de linéarisation est réalisée par le choix de couple  $\tau$ , à appliquer au système. Il est donné par l'expression suivante:

$$\hat{M}(q)u + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{H}(q, \dot{q}) = \tau \quad (2.8)$$

Avec :  $\hat{M}, \hat{C}, \hat{H}$  sont l'estimation de  $M, C$  et  $H$  respectivement.

Lorsque le modèle est supposé parfait (cas idéal) c'est-à-dire  $\hat{M} = M, \hat{C} = C$ , et  $\hat{H} = H$ , en boucle fermée le système est régi par l'équation :

$$M(q)(\ddot{q} - u) = 0 \quad (2.9)$$

$u$  peut être considéré comme un nouveau vecteur de commande, ce qui réduit le problème de la commande du robot à  $n$  doubles intégrateurs complètement découplés ( $\ddot{q} = u$ ).

Alors, la commande  $u$  est obtenue comme suit :

$$u = \ddot{q}_d + K_V \dot{e} + K_P e \quad (2.10)$$

$$\ddot{q} = u \Rightarrow \ddot{q} = \ddot{q}_d + K_V \dot{e} + K_P e$$

D'où :

$$\ddot{e} + K_V \dot{e} + K_P e = 0 \quad (2.11)$$

La solution de l'équation d'erreur  $e(t)$  est globalement exponentiellement stable.

L'inconvénient de cette commande est que les paramètres et la structure du système doivent être connus afin de calculer l'équation (2.9), toutefois quand les erreurs dans les paramètres ne sont pas aussi larges ; ce schéma de commande donne une grande performance satisfaisante.

### 2.3.2 Commande linéarisante prédictive [13] [14] :

Cette commande cherche la linéarisation exactement comme la précédente (Figure 2.4). Ce qui fait la différence entre les deux commandes est que celle-ci utilise pour le calcul des paramètres  $M$ ,  $C$  et  $H$ , les valeurs des trajectoires désirées  $(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$ , alors que la précédente utilise les trajectoires réelles.

Le schéma bloc de la commande linéarisante prédictive est représenté dans la figure 2.4 suivante :

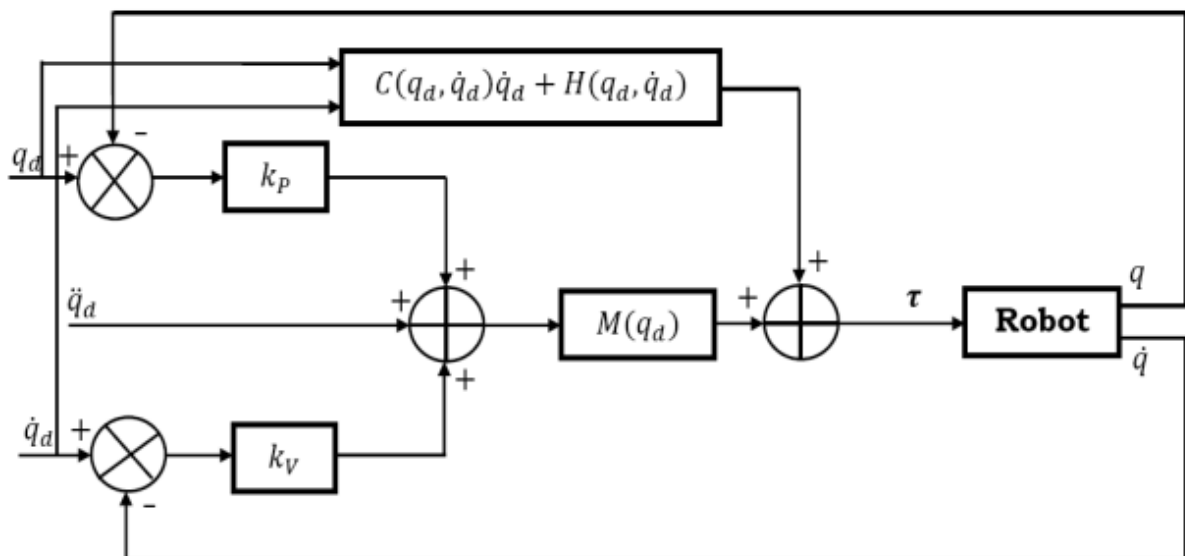


Figure 2. 4 : Commande linéarisante prédictive

### 2.3.3 Commande linéarisante robuste [13] [14] :

Il arrive que pour les commandes précédentes, les fonctions du modèle ne seront pas précises ce qui diminue leurs performances. Cette commande consiste en l'ajout d'un supplément de commande  $\delta u$  dans le but de compenser l'erreur d'estimation du modèle du robot. Elle est définie par :

$$M_0(q)u + C_0(q, \dot{q})\dot{q} + H_0(q, \dot{q}) + \delta u = \tau \quad (2.12)$$

$\delta u$ , peut-être un terme de glissement (modes glissants), un réseau de neurones un système d'inférence flou etc...

Le schéma bloc de cette commande est donné par (figure 2.5).

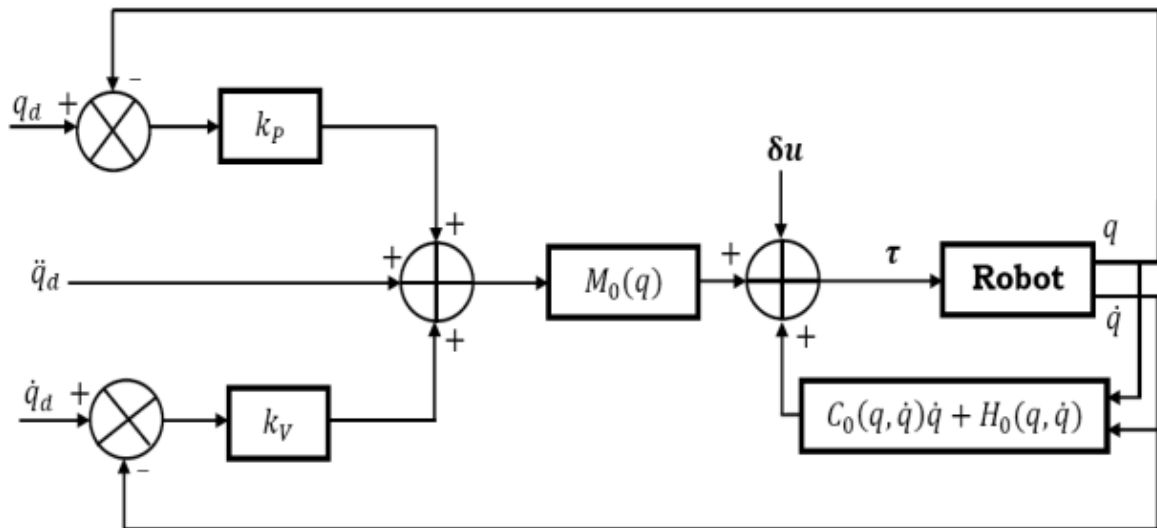


Figure 2. 5 : Commande linéarisante robuste

#### 2.4 Commande en effort [13] [14] [21] [23] :

Lorsque le robot devient en contact avec son environnement au cours de la réalisation de la tâche qui lui est assigné, il serait nécessaire de prendre en compte les forces d'interaction. Parmi les commandes développées dans la littérature les plus utilisées pour cette situation, on distingue :

1. Commande en impédance,
2. Commande hybride force/ position.

Les forces de contacts vont être modélisées et par conséquent, le modèle dynamique d'un robot manipulateur, en contact avec son environnement, exprimé dans l'espace articulaire est donné par :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + H(q, \dot{q}) + J^T F_e = \tau \quad (2.13)$$

$F_e$  Représente le vecteur d'effort extérieur (forces et moments) exercé par le robot sur l'environnement.

**2.4.1 Commande en impédance [13] [14] [21] :**

Pour cette commande, la position ou la vitesse de l'effecteur et la force appliquée sont liées par une impédance mécanique qui se traduit dans le domaine de Laplace par :

$$F(p) = Z(p)\dot{X}(p) \tag{2.14}$$

Où :

$$F(p) = pZ(p)X(p)$$

$$pZ(p) = Ap^2 + Bp + K$$

- A : La matrice d'inertie désirée
- B : La matrice de raideur désirée
- K : La matrice désirée d'amortissement

On distingue deux types de schéma de commande en impédance sans et avec retour de force (Figure 2.6, 2.7) :

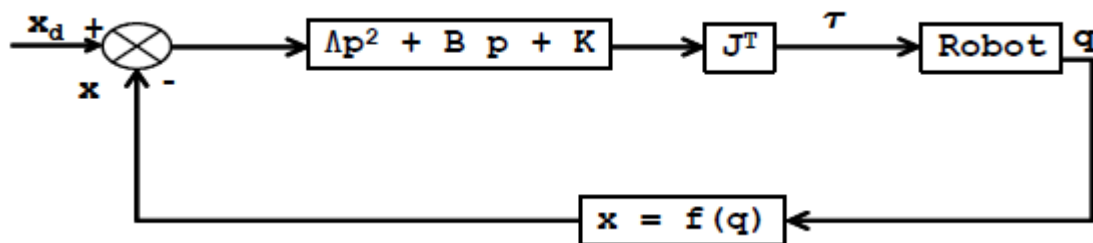


Figure 2. 6 : Schéma de commande en impédance sans retour de force

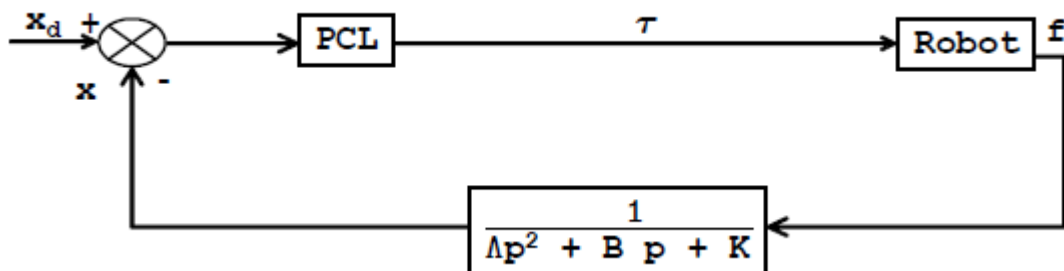


Figure 2. 7 : Schéma de commande en impédance avec retour de force

### 2.4.2 Commande hybride force/position [13] [14] [22] [23] :

Il s'agit d'introduire une matrice diagonale de sélection notée  $S$  (Figure 2.8) permettant le choix de la direction qui doit être commandée en force et celle qui doit être commandée en position. Un élément de la matrice  $S$  est soit  $1$  ou  $0$  selon que la direction est commandée en position ou bien en force. Le schéma de commande hybride force/position de base est donnée par (Figure 2.9)

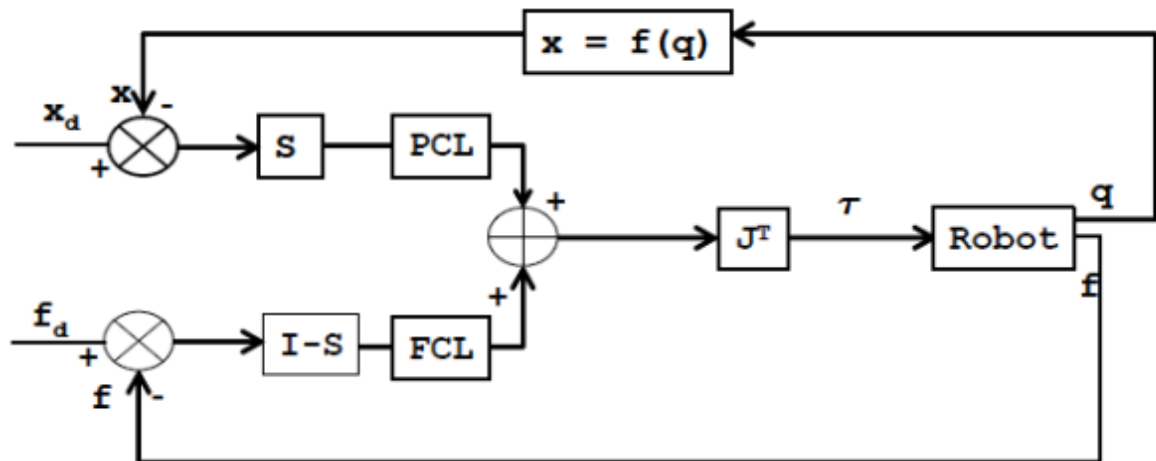


Figure 2. 8 : Schéma de commande hybride force/position

### 2.4.3 Commande hybride externe [13] [14] [22] [23] :

La commande hybride externe, donnée par (figure 2.9), permet d'asservir à la fois des déplacements et des efforts, elle se caractérise par la présence des deux boucles de commande imbriquées (Perdreau). La boucle externe correspond à un asservissement externe en effort, la boucle interne correspond à un asservissement de position. La sortie de la boucle externe est transformée en consigne de position pour la boucle interne. Le déplacement résultant du robot permet de exercer l'effort désiré sur l'environnement.

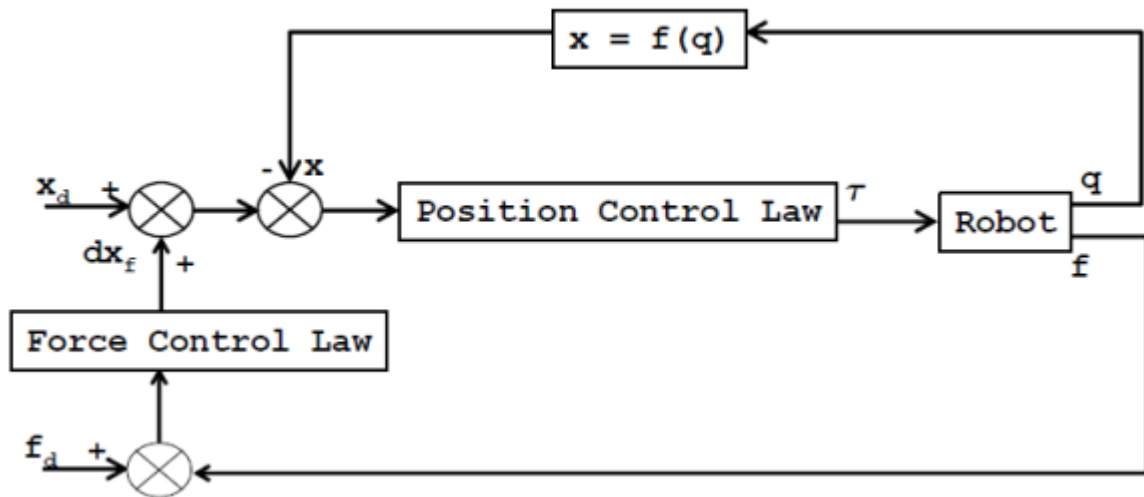


Figure 2.9 : Schéma de commande hybride externe

Pour plus d'informations sur ce chapitre, voir la référence.

## 2.5 Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord rappelé les différents modèles géométriques et cinématiques relatifs aux robots. Nous avons présenté les différents schémas de commande largement utilisés en robotique. En effet, la complexité d'un schéma de commande dépend des performances recherchées. Cependant la modélisation dynamique de robots reste, dans la plus part des cas, la phase la plus déterminante du fait que les performances de la commande en dépendront. Dans le chapitre qui suit, nous présenterons notre application qui consiste en la modélisation et la commande de deux types de robots bipèdes.

# CHAPITRE 03:

Modélisation et commande de  
robots bipèdes

## Chapitre 03:

# Modélisation et commande de robots bipèdes

### 3.1 Introduction:

Dans ce chapitre représentant le cœur de notre travail, nous allons nous intéresser plus particulièrement à deux types de robots bipèdes (robots à jambes). Le premier robot est de type compas quant au second, il consiste en une imitation des membres inférieurs de l'être humain, possédant cinq (05) degrés de liberté. Pour mieux présenter ce chapitre, nous avons préféré d'étudier le robot le du type compas en premier temps, puis le robot bipède à cinq degré de liberté possédant une structure mécanique plus complexe.

En premier temps, nous allons commencer par étudier le robot bipède de type compas. S'agissant de la modélisation dynamique, nous allons rajouter un terme d'inertie rendant plus précis le modèle dynamique en comparaison avec celui de la référence [3]. Des simulations ont été menées sur le robot représenté par son modèle dynamique avant [3] et après l'ajout du terme d'étertie.

En ce qui concerne le robot bipède à cinq degrés de liberté, Nous allons lui établir le modèle dynamique en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange d'une façon similaire au cas des robots manipulateurs planaires [3].

Notre contribution est de commander le robot pour un ensemble de scénarios dont nous avons proposé concrétisant ainsi la marche de l'être humain, tout en considérant une surface plane. La commande à appliquer sur le robot représenté par son modèle dynamique est la commande linéarisante. Les résultats de simulation de la commande linéarisante sont comparés à ceux issus de l'application d'une commande PID classique.

### 3.2 Intérêt du modèle dynamique d'un robot :

La modélisation est la phase déterminante dans l'étude des robots. En effet, le modèle dynamique d'un robot manipulateur ou bipède s'avère d'un intérêt



important pour la simulation de mouvement, l'analyse des structures du manipulateur et la conception d'algorithmes de contrôle. La simulation du mouvement du robot permet de tester les stratégies de contrôle et les techniques de planification du mouvement sans recourir à un système physiquement disponible. L'analyse du modèle dynamique peut être utile pour la conception mécanique de prototypes. Le calcul des forces et des couples nécessaires à l'exécution de mouvements typiques fournit des informations utiles pour la conception des articulations, des transmissions et d'actionneurs.

Il existe deux méthodes pour établir les équations du mouvement d'un manipulateur dans l'espace articulaire. La première méthode est basée sur la formulation de Lagrange et est conceptuellement simple et systématique. La seconde méthode est basée sur la formulation Newton - Euler. Dans notre étude, nous allons nous concentrer sur la méthode d'Euler-Lagrange sans la prise en considération des masses des actionneurs et de leurs moments d'inertie [15].

### **3.3 Modélisation dynamique et résultats de pour la commande :**

La modélisation et la simulation sont basées sur les lois dans l'annexe.

#### **3.3.1 Le robot bipède de type compas CBR (Compas-Bipède Robot) :**

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la modélisation dynamique du robot CBR. Pour cela, nous avons utilisé les coordonnées relatives.

##### **3.3.1.1 Le modèle anthropométrique :**

Les paramètres physiques constituant les modèles dynamiques des robots bipèdes sont à calculer. Chaque corps rigide  $C_i$  du robot CBR est caractérisé par les paramètres physiques suivants (Figure 3.1):

- $m_i \in \mathcal{R}$  : Masse du corps  $C_i$
- $l \in \mathcal{R}$  : Longueur du corps  $C_i$
- $I_i \in \mathcal{R}$  : Inertie autour du centre de masse du corps  $C_i$
- $a \in \mathcal{R}$  : Distance proximale

- $b \in \mathcal{R}$  : Distance distale

Les modèles dynamiques seront élaborés dans l'espace tridimensionnel [19].

### 3.3.1.2 La modélisation dynamique du CBR en tant que robot manipulateur (coordonnées relatives) :

La structure globale du modèle dynamique d'un robot bipède issu du formalisme d'Euler-Lagrange est donnée comme suit :

$$M(q, \dot{q})\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (3.1)$$

Avec :

$M$  : La matrice d'inertie du système.

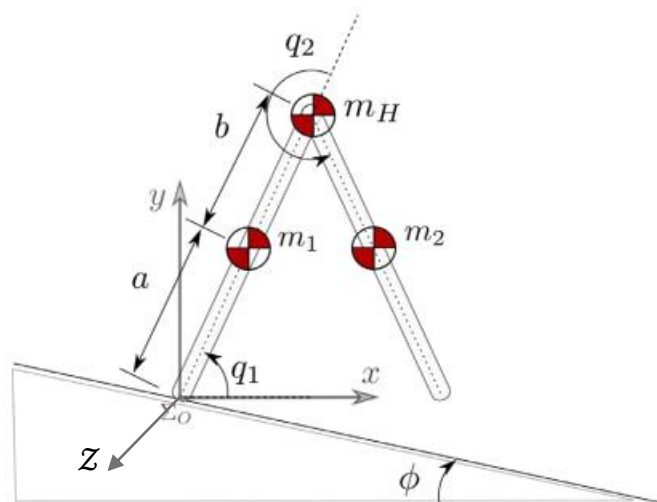
$C$  : Matrice regroupant les forces de Coriolice et Centrifuges.

$G$  : Vecteur des forces de gravitation et de frottements.

$\tau$  : Vecteur de couples appliquées aux articulations.

Dans cette partie, nous allons déterminer la structure globale du modèle dynamique du robot CBR en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange, puis par identification, nous déterminons les expressions des différentes fonctions du modèle.

Le modèle dynamique du CBR, tel qu'il est déterminé habituellement pour le cas d'un robot manipulateur sériel, c.-à-d.,  $q_1$  est la position articulaire correspondant à l'articulation (liaison) de la base et  $q_2$  est la position articulaire mesurée à partir de la ligne d'extension de la jambe d'appui jusqu'à la seconde jambe (appelée jambe libre ou pivotante) [3], comme indiqué à la **Figure 3.1**.



**Figure 3. 1: CBR avec des coordonnées généralisées comme pour le cas d'un robot sériel.**

Pour le calcul de l'énergie potentielle, les distances verticales  $h_H, h_1, h_2$ , jusqu'au centre de masse de la hanche, la jambe 1 et la jambe 2 du CBR mesurées à partir du pied d'appui  $\Sigma_o$  sont les suivantes:

$$\begin{aligned} h_1 &= a \sin q_1 \\ h_H &= l \sin q_1 \\ h_2 &= l \sin q_1 + b \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Où :  $l = a + b$ .

Les positions  $x_1, x_H, x_2$  de chaque centre de gravité par rapport au pied de support  $\Sigma_o$  sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{bmatrix} a \cos q_1 \\ a \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_H &= \begin{bmatrix} l \cos q_1 \\ l \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_2 &= \begin{bmatrix} l \cos q_1 + b \cos(q_1 + q_2) \\ l \sin q_1 + b \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Maintenant, on dérive les équations (3.3) par rapport au temps pour trouver les vitesses de chaque centre de masse données par :

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{bmatrix} -a \sin q_1 \dot{q}_1 \\ a \cos q_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ v_H &= \begin{bmatrix} -l \sin q_1 \dot{q}_1 \\ l \cos q_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ v_2 &= \begin{bmatrix} -l \sin q_1 \dot{q}_1 - b \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l \cos q_1 \dot{q}_1 + b \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Une fois les vitesses sont calculées, il est tout à fait possible d'obtenir l'énergie cinétique du système donnée par l'expression :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \|v_1\|^2 + \frac{1}{2} I_1 \|\omega_1\|^2 + \frac{1}{2} m_H \|v_H\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|v_2\|^2 + \frac{1}{2} I_2 \|\omega_2\|^2 \quad (3.5)$$

L'énergie potentielle totale du système est exprimée par :

$$U = m_1gh_1 + m_Hgh_H + m_2gh_2 \quad (3.6)$$

En utilisant les propriétés trigonométriques  $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$  et  $\cos(\theta_1) \cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_2)$  et en remplaçant l'équation (3.4) dans (3.5), l'énergie cinétique totale du système est exprimée donc comme suit:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}m_1a^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_Hl^2\dot{q}_1^2 \\ & + \frac{1}{2}m_2 \left( l^2\dot{q}_1^2 + (b(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))^2 + 2l\dot{q}_1b(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 \right) \\ & + \frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

En remplaçant l'équation (3.2) dans (3.6), l'énergie potentielle totale du système est donc donnée par :

$$U = m_1ga \sin q_1 + m_Hgl \sin q_1 + m_2g(l \sin q_1 + b \sin(q_1 + q_1)) \quad (3.8)$$

Le Lagrangien du système mécanique est exprimé par :

$$L = T - U$$

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m_1a^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_Hl^2\dot{q}_1^2 \\ & + \frac{1}{2}m_2 \left( l^2\dot{q}_1^2 + (b(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))^2 + 2l\dot{q}_1b(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 \right) + \frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ & - (m_1ga \sin q_1 + m_Hgl \sin q_1 \\ & + m_2g(l \sin q_1 \\ & + b \sin(q_1 \\ & + q_1)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = & m_1a^2\dot{q}_1 + I_1\dot{q}_1 + m_Hl^2\dot{q}_1 + m_2(l^2\dot{q}_1 + b^2\dot{q}_1 + b^2\dot{q}_2 + 2lb\dot{q}_1 \cos(q_2) \\ & + lb\dot{q}_2 \cos(q_2)) + I_2\dot{q}_1 + I_2\dot{q}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = & [m_1a^2 + I_1 + m_Hl^2 + m_2(l^2 + b^2 + 2lb \cos(q_2)) + I_2]\ddot{q}_1 \\ & + [b^2 + lb \cos(q_2) + I_2]\ddot{q}_2 \\ & - 2lb \sin(q_2) \dot{q}_2\dot{q}_1 - lb \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 a + m_H l + m_2 l)g \cos(q_1) - m_2 b g \cos(q_1 + q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2(b^2 \dot{q}_2 + b^2 \dot{q}_1 + lb \dot{q}_1 \cos(q_2)) + I_2 \dot{q}_2 + I_2 \dot{q}_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = [m_2 b^2 + m_2 lb \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_1$$

$$+ [m_2 b^2 + I_2] \ddot{q}_2$$

$$- m_2 lb \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 lb (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \sin(q_2) - m_2 g b \cos(q_1 + q_2) \quad (3.10)$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [m_1 a^2 + I_1 + m_H l^2 + m_2 (l^2 + b^2 + 2lb \cos(q_2)) + I_2] \ddot{q}_1 \\ &+ [m_2 b^2 + m_2 lb \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_2 \\ &- 2m_2 lb \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 - m_2 lb \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + (m_1 a + m_H l + m_2 l)g \cos(q_1) \\ &+ m_2 b g \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= [m_2 b^2 + m_2 lb \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_1 + [m_2 b^2 + I_2] \ddot{q}_2 - m_2 lb \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 \\ &+ m_2 lb (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \sin(q_2) \\ &+ m_2 g b \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Où :  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , sont les couples externes délivrés par les actionneurs appliqués aux articulations 1 et 2

D'après l'équation (3.11), les éléments du modèle dynamique du robot CBR sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} M(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} m_1 a^2 + I_1 + m_H l^2 + m_2 (l^2 + b^2 + 2lb \cos(q_2)) + I_2 & m_2 b^2 + m_2 lb \cos(q_2) + I_2 \\ m_2 b^2 + m_2 lb \cos(q_2) + I_2 & m_2 b^2 + I_2 \end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -m_2 lb \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 lb \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_2 lb \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ G(q) &= \begin{bmatrix} (m_1 a + m_H l + m_2 l)g \cos(q_1) + m_2 b g \cos(q_1 + q_2) \\ m_2 g b \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$M(q, \dot{q})' = \begin{bmatrix} m_H l^2 + m(l^2 + a^2 + b^2) + 2mlb \cos(q_2) & mlb \cos(q_2) + mb^2 \\ mlb \cos(q_2) + mb^2 & mb^2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q})' = \begin{bmatrix} -mlb \sin(q_2) \dot{q}_2 & -mlb \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ mlb \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(q)' = \begin{bmatrix} (m_H l + ma + ml)g \cos(q_1) + mbg \cos(q_1 + q_2) \\ mgb \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3.12')$$

Par rapport au modèle présenté par l'équation (3.12'), le terme d'inertie rajouté dans notre modèle est mis en gras dans l'expression de  $M(q, \dot{q})$ .

### 3.3.1.3 Simulation :

Dans cette partie, nous réalisons une simulation d'allure de marche du robot CBR (qui peut être vu comme un robot manipulateur à 2 DDL). Les simulations ont été réalisées sur le robot représenté par son modèle dynamique. Pour cela, nous considérons les deux modèles : modèle sans amélioration [3] et modèle avec l'ajout du terme d'inertie,

Les simulations ont été réalisées dans l'environnement Matlab. Les différents scénarios relatifs à l'allure de la marche considérés sont représentés dans la figure suivante :

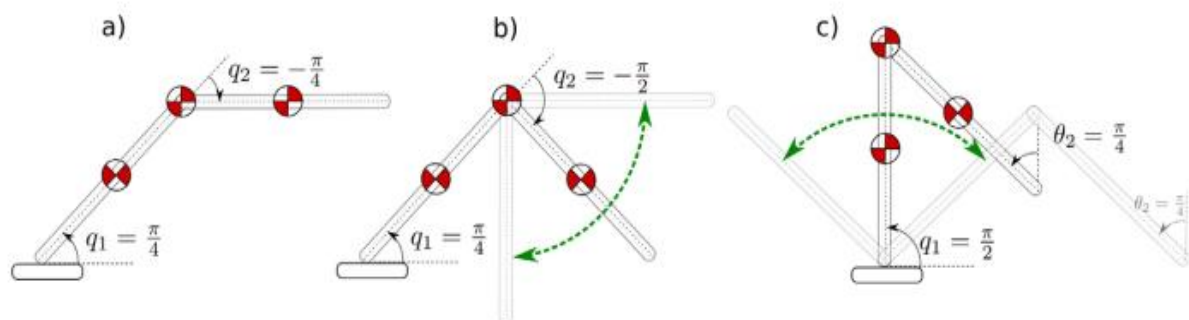


Figure 3. 2: Les différents scénarios pour évaluer les couples du modèle dynamique

### 3.3.1.4 Signification des scénarios considérés :

- a) **Scénario a** : C'est pour calculer les couples appliqués dans cette posture. Donc, l'application des couples dans ce cas doit assurer le maintien du

robot fixé en cette posture, avec l'articulation 1 inclinée à 45 degrés ( $q_1 = \frac{\pi}{4} [rad]$ ) et l'articulation 2 horizontale ( $q_2 = -\frac{\pi}{4} [rad]$ ).

- b) Scénario b :** Les couples appliqués pour maintenir l'articulation 1 inclinée à 45 degrés ( $q_1 = \frac{\pi}{4} [rad]$ ) sans déplacement et faire déplacer l'articulation 2 de manière sinusoïdale avec  $\frac{\pi}{4} [rad]$  d'amplitude, une période de  $T = 6 [s]$  et à partir de la position alignée ( $q_1 = -\frac{\pi}{2} [rad]$ ).
- c) Scénario c :** Les couples appliqués pour déplacer l'articulation 1 de manière sinusoïdale avec  $\frac{\pi}{4} [rad]$  d'amplitude, une période de  $T = 6s$ , à partir de la position verticale et en maintenant l'articulation 2 inclinée vers le bas sans mouvement inclinée à ( $q_2 = \frac{\pi}{4} [rad]$ ).

### 3.3.1.5 Trajectoire de la marche :

Les trajectoires proposées sont résumées dans les scénarios suivants.

- a) Scénario a :**

$$q_1 = \frac{\pi}{4}, \quad q_2 = -\frac{\pi}{4}$$

- b) Scénario b :**

$$q_1 = \frac{\pi}{4}, \quad q_2 = \frac{\pi}{4} \sin(2\pi ft) - \frac{\pi}{2}$$

- c) Scénario c :**

$$q_1 = \frac{\pi}{4} \sin(2\pi ft) + \frac{\pi}{2}, \quad q_2 = -\frac{\pi}{4} \sin(2\pi ft) - \frac{3\pi}{4}$$

3.3.1.6 Schéma bloc utilisé pour la simulation :

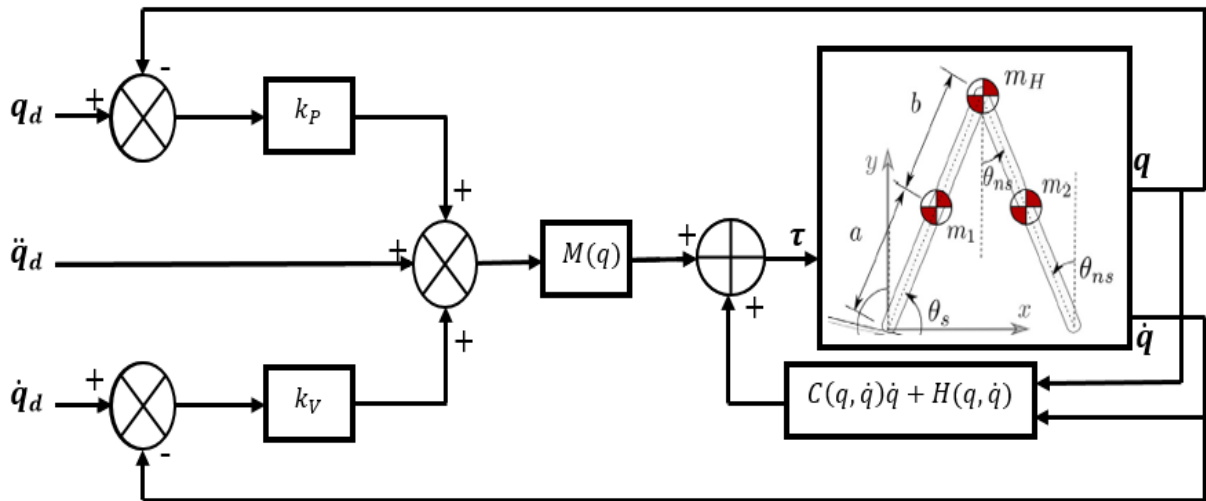


Figure 3. 3 :Commande linéarisante appliqué au robot CRB

3.3.1.7 Résultats de simulation :

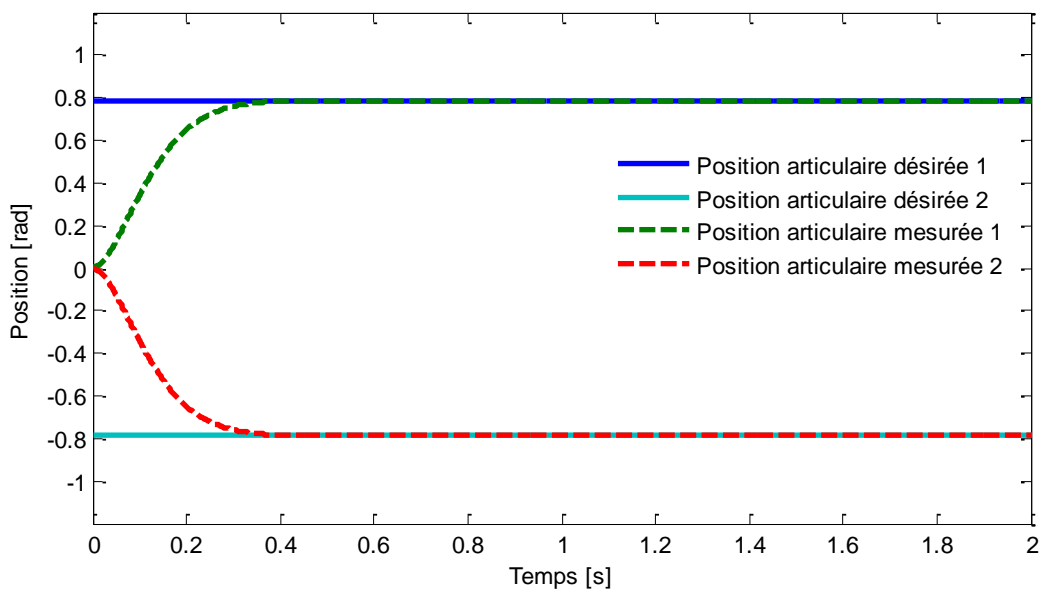
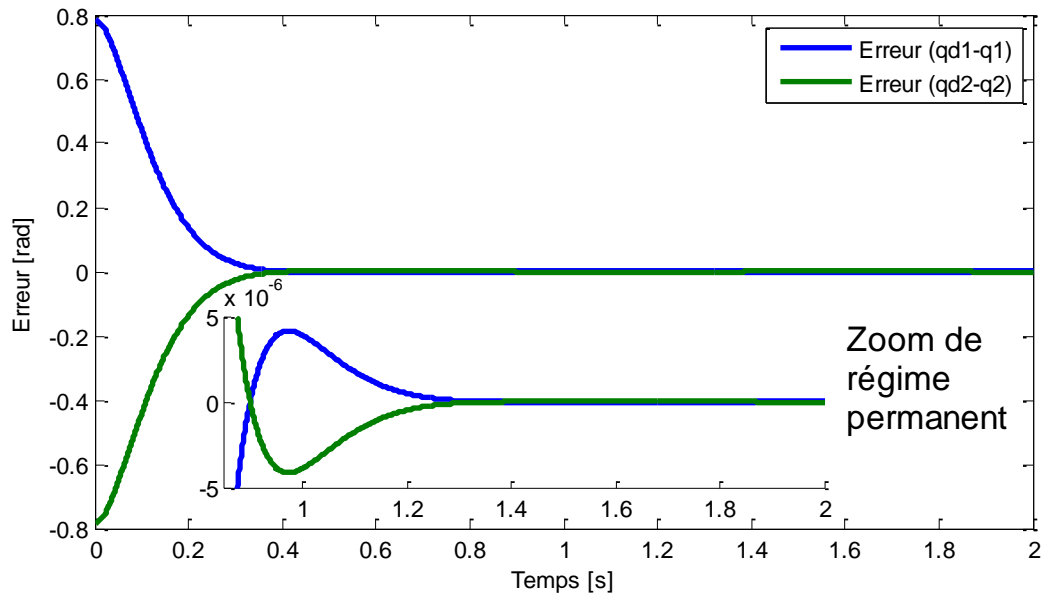


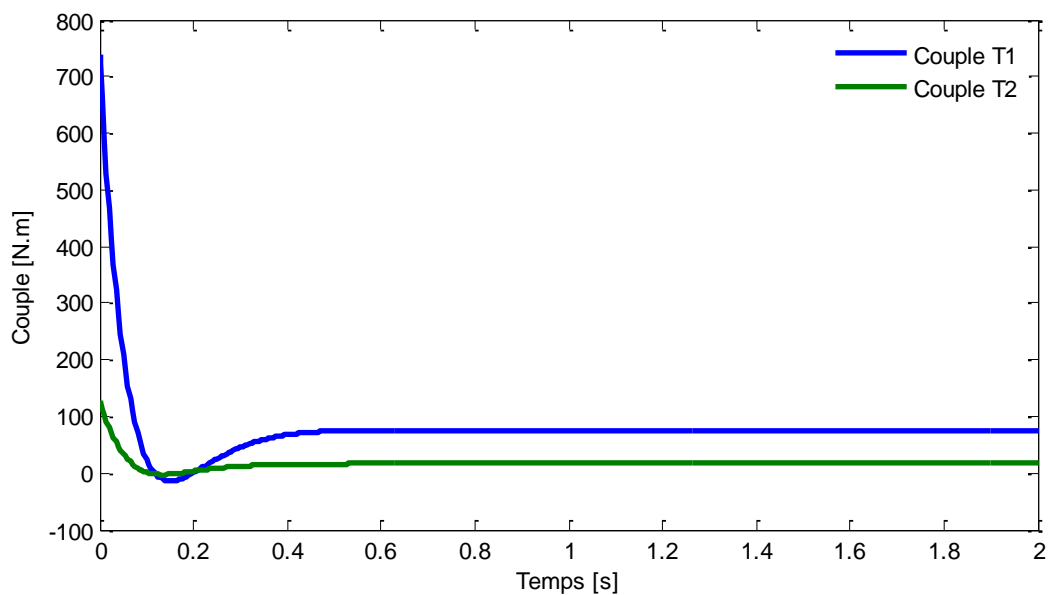
Figure 3. 4:Trajectoires articulaires q1 et q2 (scénario a)





**Figure 3. 5: Erreur de poursuite de trajectoire en position pour les scénarios a**

D'après l'erreur de poursuite de trajectoire en position relative à l'articulation 1 pour la commande linéarisante (Figure 3.5), nous constatons que la commande linéarisante donne de bons résultats.



**Figure 3. 6: Les couples appliqués aux actionneurs 1&2 en considérant le modèle dynamique sans modification [3] et après ajout du terme d'inertie (scénario a)**

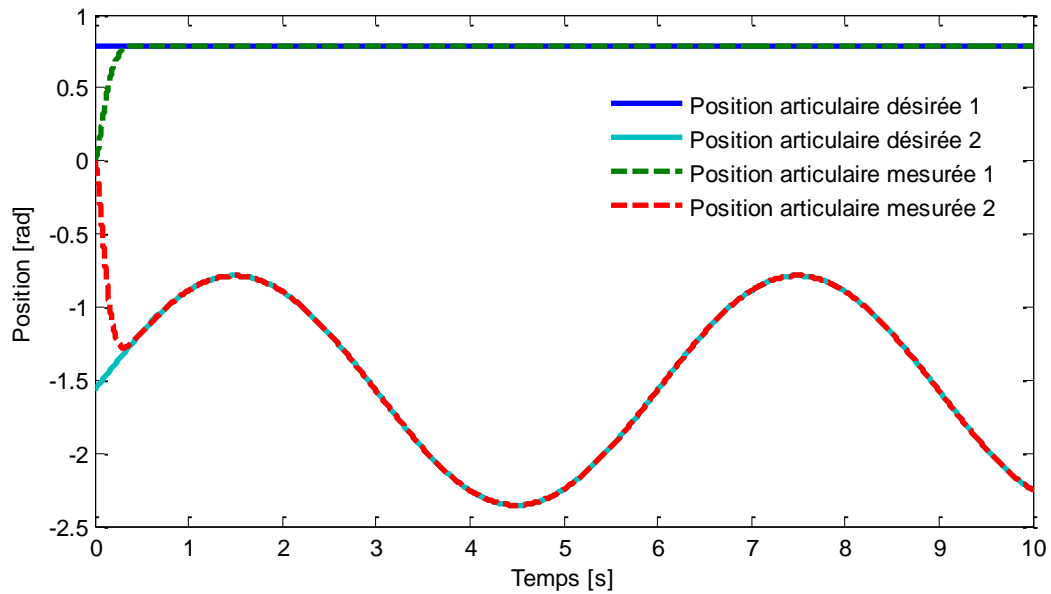


Figure 3. 7: Trajectoires articulars  $q_1$  et  $q_2$  ( scénario b)

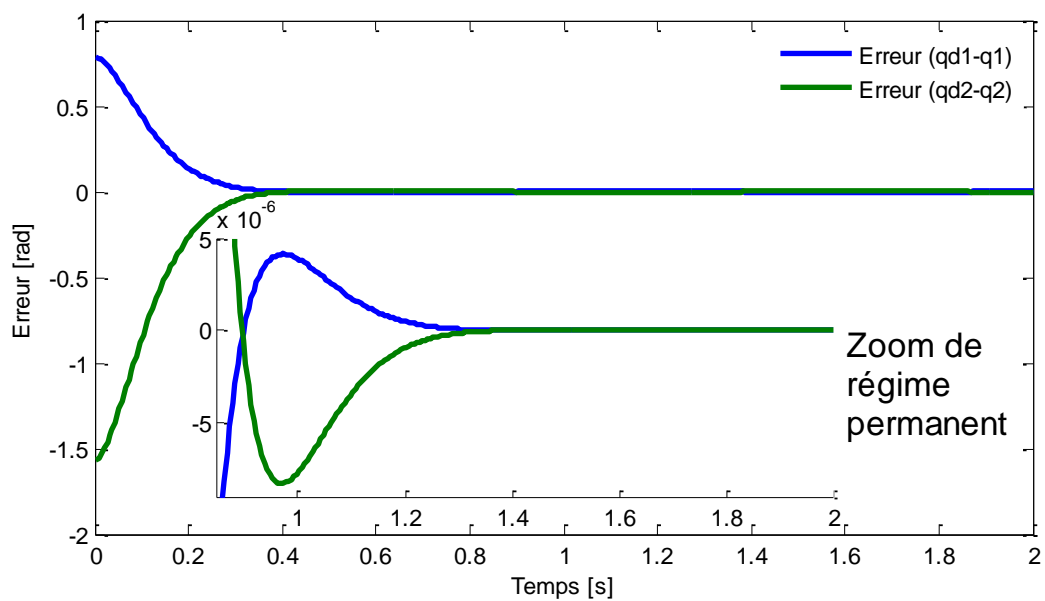


Figure 3. 8 : Erreur de poursuite de trajectoire en position pour les scénarios b

D'après la figure 3.8, nous constatons que la commande linéarisante donne de bons résultats.

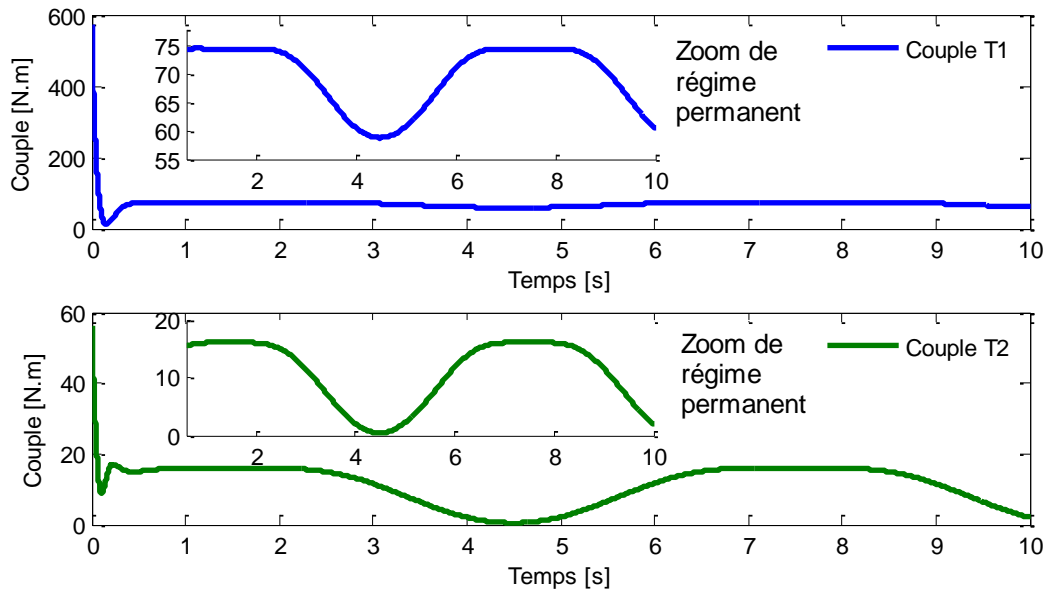


Figure 3. 9: Les couples appliqués aux actionneurs 1&2 en considérant le modèle dynamique sans modification [3] et après ajout du terme d’inertie (scénario b)

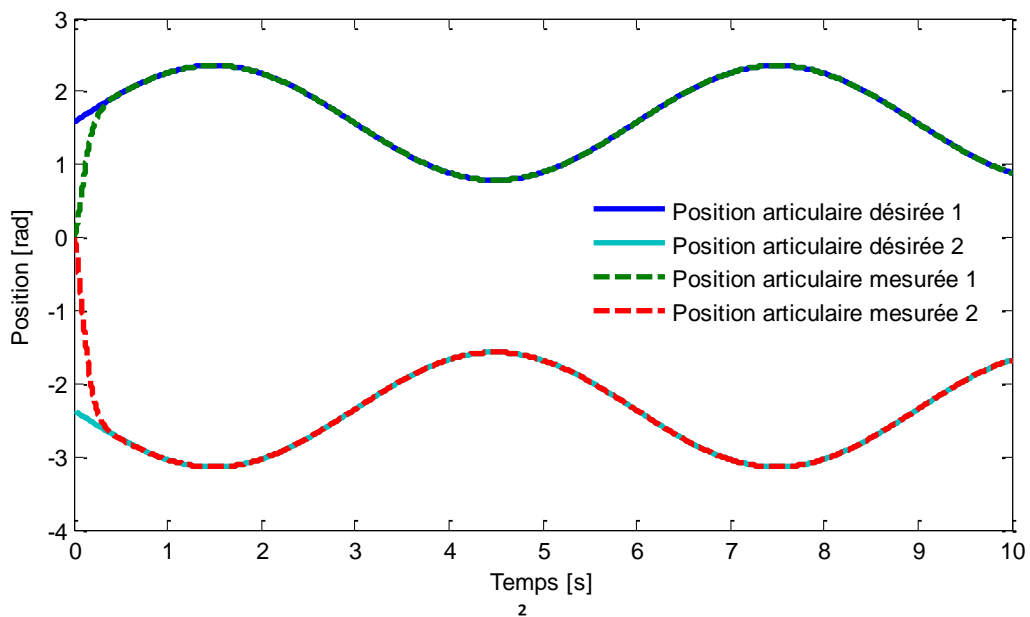


Figure 3. 10: Trajectoires articulaires  $q_1$  et  $q_2$  relatives au scénario C

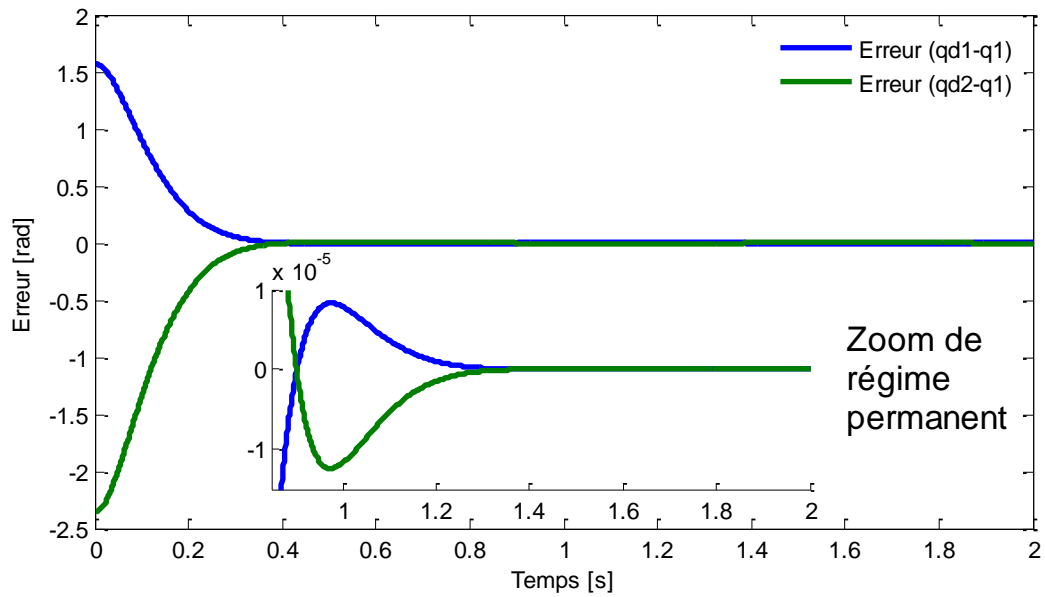


Figure 3. 11 : Erreur de poursuite de trajectoire en position pour les scénarios c

D’après la figure 3.8, nous constatons que la commande linéarisante donne de bons résultats.

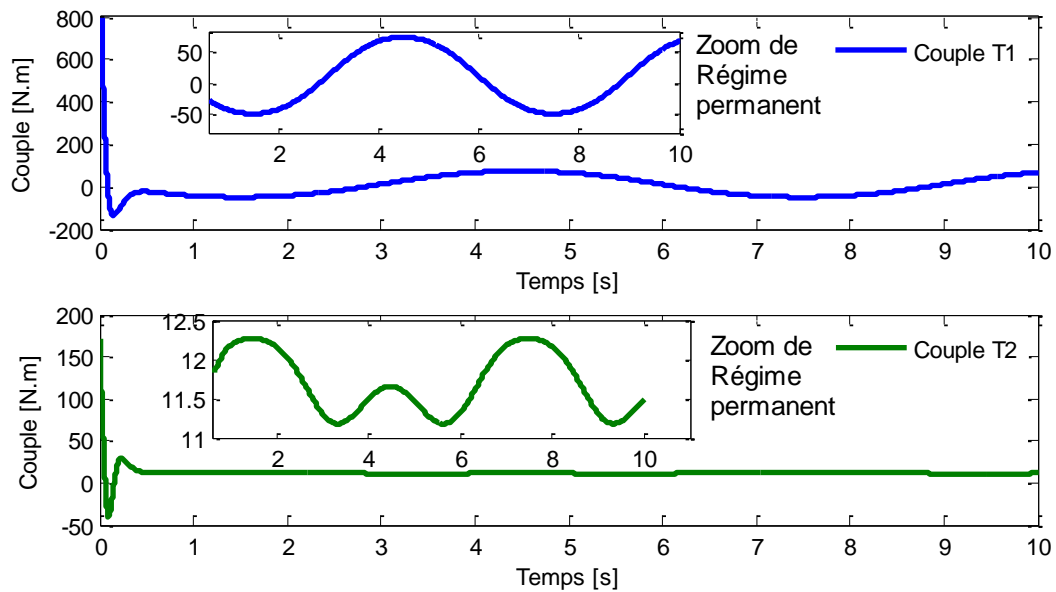


Figure 3. 12: Les couples appliqués aux actionneurs 1&2 en considérant le modèle dynamique sans modification [3] et après ajout du terme d’inertie (scénario c)

### 3.3.1.8 Comparaison des résultats :

Couples	Scénario a	Scénario a MD amélioré	Scénario b	Scénario b avec MD amélioré	Scénario c	Scénario c avec MD amélioré
$\tau_1max$ [Nm]	75.24	75.24	74.61	74.53	73.24	73.34
$\tau_2max$ [Nm]	16.48	16.48	16.14	16.04	12.27	12.27

**Tableau 3. 1 :Résultats numériques du simulation**

Le tableau 3.1 illustre l'influence du terme d'inertie qui nous avons rajouté dans le modèle dynamique sur les couples appliqué aux articulations par La diminution dans la valeur du couple qui s'explique par limiter la consommation en termes d'énergie. Cependant, l'augmentation dans la valeur du couple s'explique par le fait que la loi de commande tente de corriger de plus l'erreur de poursuite de trajectoire en position.

Cette modification dans les valeurs des couples est due à l'ajout du terme d'inertie rendant plus précis le modèle dynamique. Ceci est sans doute va augmenter les performances de la commande linéarisante. Cela est constaté pour un même scénario.

Les couples délivrés par la loi de commande relatifs aux deux modèles présentent dans notre cas une légère différence. Cette différence va certainement agir sur les actionneurs de sorte à s'approcher beaucoup plus de la trajectoire désirée. Autrement dit, l'erreur de poursuite va diminuer. Cela s'explique du fait que plus le modèle dynamique est précis, plus la commande linéarisante est plus performante.

De plus, ce premier prototype dans sa nature simple, nous a permis de nous familiariser avec les notions de bases relatives à la modélisation dynamique et la commande.

### 3.3.2 Le robot Bipède à cinq degrés de liberté :

Le robot bipède à 5 DDL à étudier dans cette partie est appelé Bip-ITLag représenté à la **Figure 3.13**. Il est conçu par « Instituto Tecnológico de la Laguna » au Mexique. Cette figure schématise le robot au cours de la phase du support simple (SSP). Tout d'abord, nous allons établir le modèle dynamique du robot, puis nous allons réaliser

des simulations tout en considérant des scénarios issus de l'allure de la marche de l'être humain. Les simulations seront menées sur le robot bipède représenté par son modèle dynamique. Elles seront réalisées dans l'environnement Matlab en considérant une surface plane pour la marche. Concernant la commande du robot, nous allons appliquer la commande linéarisante décrite en chapitre 2. Les résultats de simulations en termes de poursuite de trajectoire seront comparés à ceux issus de l'application d'une commande classique de type PID.

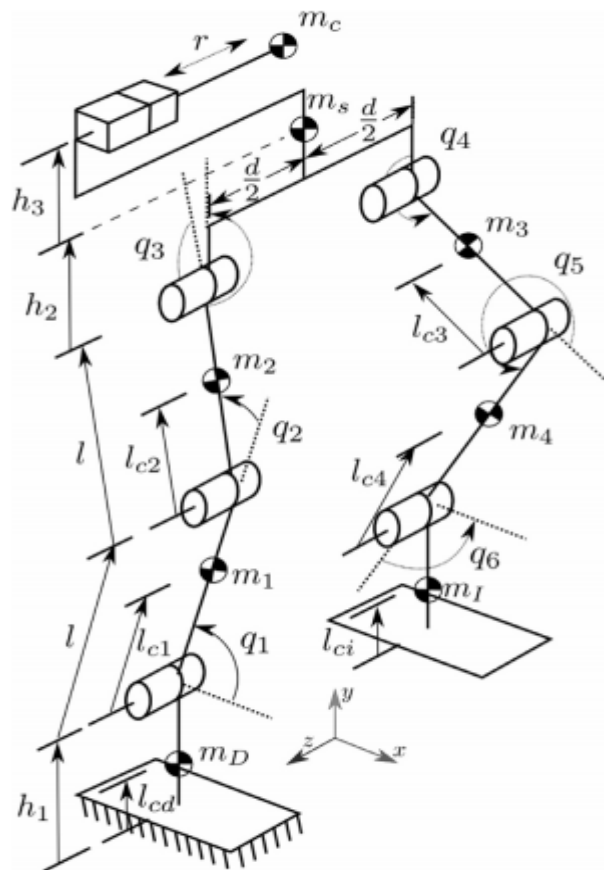


Figure 3. 13: Robot bipède Bip-ITLagen pris (coordonnés relatives)

### 3.3.2.1 Le Modèle anthropométrique :

Chaque corps rigide  $C_i$  du robot est caractérisé par les paramètres physiques suivants

- $m_i \in \mathcal{R}$  : Masse du corps  $C_i$
- $l \in \mathcal{R}$  : Longueur de chaque segment (corps)
- $I_i \in \mathcal{R}$  : Inertie autour du centre de masse du corps  $C_i$
- $l_{ci} \in \mathcal{R}$  : Distance proximale de chaque corps  $C_i$

Les modèles dynamiques seront élaborés dans l'espace tridimensionnel [19].

### 3.3.2.2 Le modèle dynamique du robot bipède à 5 DDL :

Le modèle dynamique est calculé moyennant la méthode d'Euler-Lagrange. En utilisant les coordonnées relatives  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T$  montrées à la **figure 3.13**, les vecteurs de position et les distances verticale  $h_{m_1}, h_{m_2}, h_{m_s}, h_{m_c}, h_{m_3}, h_{m_4}, h_{m_l}$  de chaque centre de masse (COM) mesurés à partir de l'origine de référence fixé à la cheville sont calculés et donnés par [3]:

$$\begin{aligned}
 h_{m_1} &= l_{c1} \sin(q_1) \\
 h_{m_2} &= l \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\
 h_{m_s} &= l \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) + h_2 \\
 h_{m_c} &= l \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) + h_2 + h_3 \\
 h_{m_3} &= l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + (l - l_{c3}) \sin(q_4 + \frac{\pi}{2}) \\
 h_{m_4} &= l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + l \sin(q_4 + \frac{\pi}{2}) + (l - l_{c4}) \sin(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}) \\
 h_{m_l} &= l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + l \sin(q_4 + \frac{\pi}{2}) + l \sin(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}) - h_l + l_{cl} \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{m_1} &= \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \\ l_{c1} \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{m_2} = \begin{bmatrix} l \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ l \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\
 x_{m_s} &= \begin{bmatrix} l \cos(q_1) + l \cos(q_1 + q_2) \\ l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + h_2 \\ -\frac{1}{2}d \end{bmatrix} \quad x_{m_c} = \begin{bmatrix} l \cos(q_1) + l \cos(q_1 + q_2) \\ l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + h_2 + h_3 \\ -\frac{1}{2}d + r \end{bmatrix} \\
 x_{m_3} &= \begin{bmatrix} l \cos(q_1) + l \cos(q_1 + q_2) + (l - l_{c3}) \cos(q_4 + \frac{\pi}{2}) \\ l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + (l - l_{c3}) \sin(q_4 + \frac{\pi}{2}) \\ -d \end{bmatrix} \\
 x_{m_4} &= \begin{bmatrix} l \cos(q_1) + l \cos(q_1 + q_2) + l \cos(q_4 + \frac{\pi}{2}) + (l - l_{c4}) \cos(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}) \\ l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + l \sin(q_4 + \frac{\pi}{2}) + (l - l_{c4}) \sin(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}) \\ -d \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$x_{m_1} = \begin{bmatrix} l \cos(q_1) + l \cos(q_1 + q_2) + l \cos(q_4 + \frac{\pi}{2}) + l \cos(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}) \\ l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + l \sin(q_4 + \frac{\pi}{2}) + l \sin(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}) - h_l + l_{cl} \\ -d \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$[q_3, q_6]^T = 0$ , puisque les pieds et la hanche ne bougent pas.

Nous appliquons les mêmes étapes que pour le robot CBR, on obtient :

Les vitesses :

$$v_{m_1} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_{m_2} = \begin{bmatrix} -l \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{m_s} = \begin{bmatrix} -l \sin(q_1) \dot{q}_1 - l \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l \cos(q_1) \dot{q}_1 + l \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{m_c} = \begin{bmatrix} -l \sin(q_1) \dot{q}_1 - l \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l \cos(q_1) \dot{q}_1 + l \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{r} \end{bmatrix}$$

$$v_{m_3} = \begin{bmatrix} -l \sin(q_1) \dot{q}_1 - l \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - (l - l_{c3}) \sin(q_4 + \frac{\pi}{2}) \dot{q}_4 \\ l \cos(q_1) \dot{q}_1 + l \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + (l - l_{c3}) \cos(q_4 + \frac{\pi}{2}) \dot{q}_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$v_{m_4}$

$$= \begin{bmatrix} -l \sin(q_1) \dot{q}_1 - l \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - l \sin(q_4 + \frac{\pi}{2}) \dot{q}_4 - (l - l_{c4}) \sin(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\ l \cos(q_1) \dot{q}_1 + l \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l \cos(q_4 + \frac{\pi}{2}) \dot{q}_4 + (l - l_{c4}) \cos(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$v_{m_l} =$

$$\begin{bmatrix} -l \sin(q_1) \dot{q}_1 - l \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - l \sin(q_4 + \frac{\pi}{2}) \dot{q}_4 - l \sin(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\ l \cos(q_1) \dot{q}_1 + l \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l \cos(q_4 + \frac{\pi}{2}) \dot{q}_4 + l \cos(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3.15)

L'énergie cinétique totale du système est donc exprimée par :



$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_1 \|v_{m_1}\|^2 + \frac{1}{2} I_{m_1} \|\omega_{m_1}\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|v_{m_2}\|^2 + \frac{1}{2} I_{m_2} \|\omega_{m_2}\|^2 + \frac{1}{2} m_s \|v_{m_s}\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_c \|v_{m_c}\|^2 + \frac{1}{2} m_3 \|v_{m_3}\|^2 + \frac{1}{2} I_{m_3} \|\omega_{m_3}\|^2 + \frac{1}{2} m_4 \|v_{m_4}\|^2 + \frac{1}{2} I_{m_4} \|\omega_{m_4}\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_I \|v_{m_I}\|^2 \\
T &= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{m_1} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l l_{c2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2)] \\
&\quad + \frac{1}{2} I_{m_2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} m_s [l^2 \dot{q}_1^2 + l^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l^2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2)] \\
&\quad + \frac{1}{2} m_c [l^2 \dot{q}_1^2 + l^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l^2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + \dot{r}^2] \\
&\quad + \frac{1}{2} m_3 [l^2 \dot{q}_1^2 + l^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l^2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + (l - l_{c3})^2 \dot{q}_4^2 \\
&\quad + 2(l - l_{c3}) l \dot{q}_1 \dot{q}_4 \cos\left(q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + 2(l - l_{c3}) l \dot{q}_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right)] + \frac{1}{2} I_{m_3} \dot{q}_4^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_4 [l^2 \dot{q}_1^2 + l^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l^2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + l^2 \dot{q}_4^2 \\
&\quad + 2l^2 \dot{q}_1 \dot{q}_4 \cos\left(q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) + 2l^2 \dot{q}_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + (l - l_{c4})^2 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5)^2 + 2(l - l_{c4}) l \dot{q}_1 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \cos\left(q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + 2(l - l_{c4}) l (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + 2(l - l_{c4}) l \dot{q}_4 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \cos(q_5)] + \frac{1}{2} I_{m_4} (\dot{q}_4 + \dot{q}_5)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_I [l^2 \dot{q}_1^2 + l^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l^2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + l^2 \dot{q}_4^2 \\
&\quad + 2l^2 \dot{q}_1 \dot{q}_4 \cos\left(q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) + 2l^2 \dot{q}_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + l^2 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5)^2 + 2l^2 \dot{q}_1 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \cos\left(q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + 2l^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + 2l^2 \dot{q}_4 (\dot{q}_4 \\
&\quad + \dot{q}_5) \cos(q_5)] \tag{3.16}
\end{aligned}$$

L'énergie potentielle totale du système :

$$U = m_1gh_1 + m_2gh_2 + m_sgh_s + m_cgh_c + m_3gh_3 + m_4gh_4 + m_lgh_l$$

$$\begin{aligned} U = & m_1gl_{c1} \sin(q_1) + m_2g(l \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \\ & + m_sg(l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + h_2) + m_cg(l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2)) \\ & + h_2 + h_3) + m_3g \left( l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + (l - l_{c3}) \sin \left( q_4 + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ & + m_4g \left( l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + l \sin \left( q_4 + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ & + (l - l_{c4}) \sin \left( q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2} \right) \\ & + m_lg \left( l \sin(q_1) + l \sin(q_1 + q_2) + l \sin \left( q_4 + \frac{\pi}{2} \right) + l \sin \left( q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ & \left. - h_l + l_{cl} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Calcul de lagrangien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = & m_1l_{c1}^2\dot{q}_1 + I_{m_1}\dot{q}_1 + m_2[l^2\dot{q}_1 + l_{c2}^2\dot{q}_1 + l_{c2}^2\dot{q}_2 + 2ll_{c2}\dot{q}_1 \cos(q_2) + ll_{c2}\dot{q}_2 \cos(q_2)] + I_{m_2}\dot{q}_1 \\ & + I_{m_2}\dot{q}_2 + m_s[2l^2\dot{q}_1 + l^2\dot{q}_2 + 2l^2\dot{q}_1 \cos(q_2) + l^2\dot{q}_2 \cos(q_2)] \\ & + m_c[2l^2\dot{q}_1 + l^2\dot{q}_2 + 2l^2\dot{q}_1 \cos(q_2) + l^2\dot{q}_2 \cos(q_2)] \\ & + m_3 \left[ 2l^2\dot{q}_1 + l^2\dot{q}_2 + 2l^2\dot{q}_1 \cos(q_2) + l^2\dot{q}_2 \cos(q_2) + (l - l_{c3})^2\dot{q}_4 \right. \\ & \left. + (l - l_{c3})l\dot{q}_4 \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + (l - l_{c3})l\dot{q}_4 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ & + m_4 \left[ 2l^2\dot{q}_1 + l^2\dot{q}_2 + 2l^2\dot{q}_1 \cos(q_2) + l^2\dot{q}_2 \cos(q_2) + l^2\dot{q}_4 \right. \\ & \left. + l^2\dot{q}_4 \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2\dot{q}_4 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ & \left. + (l - l_{c4})l(\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ & \left. + (l - l_{c4})l(\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ & + m_l \left[ 2l^2\dot{q}_1 + l^2\dot{q}_2 + 2l^2\dot{q}_1 \cos(q_2) + l^2\dot{q}_2 \cos(q_2) + l^2\dot{q}_4 \right. \\ & \left. + l^2\dot{q}_4 \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2\dot{q}_4 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ & \left. + l^2(\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ & \left. + l^2(\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = & [m_1 l_{c1}^2 + I_{m_1} + m_2(l^2 + l_{c2}^2 + 2ll_{c2} \cos(q_2)) + I_{m_2} + m_s(2l^2 + 2l^2 \cos(q_2)) \\
& + m_c(2l^2 + 2l^2 \cos(q_2)) + m_3(2l^2 + 2l^2 \cos(q_2)) + m_4(2l^2 + 2l^2 \cos(q_2)) \\
& + m_l(2l^2 + 2l^2 \cos(q_2))] \ddot{q}_1 \\
& + [m_2(l_{c2}^2 + ll_{c2} \cos(q_2)) + I_{m_2} + m_s(l^2 + l^2 \cos(q_2)) \\
& + m_c(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_3(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_4(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_l(l^2 \\
& + l^2 \cos(q_2))] \ddot{q}_2 \\
& + \left[ m_3 \left( (l - l_{c3})l \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + (l - l_{c3})l \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right. \\
& + m_4(l^2 \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& + (l - l_{c4})l \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& + (l - l_{c4})l \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) + m_l(l^2 \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& + l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2 \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& \left. + l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \ddot{q}_4 \\
& + \left[ m_4 \left( (l - l_{c4})l \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + (l - l_{c4})l \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right) + m_l(l^2 \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
& \left. + l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \ddot{q}_5 \\
& - (2m_2 ll_{c2} + (2m_s + 2m_c + 2m_3 + 2m_4 + 2m_l)l^2) \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 \\
& - (m_2 ll_{c2} + (m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_l)l^2) \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\
& - (m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_l)l^2) \sin \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) (\dot{q}_1 - \dot{q}_4) \dot{q}_4 \\
& - (m_3(l - l_{c3}) + (m_l + m_4)l^2)l \sin \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - \dot{q}_4) \dot{q}_4 \\
& - (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) (\dot{q}_1 - \dot{q}_4 - \dot{q}_5) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\
& - (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - \dot{q}_4 - \dot{q}_5) (\dot{q}_4 \\
& + \dot{q}_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_1} = & -(m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_l)l^2) \dot{q}_1 \dot{q}_4 \sin \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& - (m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_l)l^2) \dot{q}_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& - (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \dot{q}_1 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \sin \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& - (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \sin \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& - g \cos(q_1) [l(m_l + m_4 + m_3 + m_c + m_s + m_2) + m_1 l_{c1}] \\
& - g \cos(q_1 + q_2) [l(m_l + m_4 + m_3 + m_c + m_s) + m_2 l_{c2}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = & m_2[l_{c2}^2 \dot{q}_2 + l_{c2}^2 \dot{q}_1 + ll_{c2} \dot{q}_1 \cos(q_2)] + I_{m_2} \dot{q}_2 + I_{m_2} \dot{q}_1 \\
& + m_s[l^2 \dot{q}_2 + l^2 \dot{q}_1 + l^2 \dot{q}_1 \cos(q_2)] + m_c[l^2 \dot{q}_2 + l^2 \dot{q}_1 + l^2 \dot{q}_1 \cos(q_2)] \\
& + m_3 \left[ l^2 \dot{q}_2 + l^2 \dot{q}_1 + l^2 \dot{q}_1 \cos(q_2) + (l - l_{c3})l \dot{q}_4 \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
& + m_4 \left[ l^2 \dot{q}_2 + l^2 \dot{q}_1 + l^2 \dot{q}_1 \cos(q_2) + l^2 \dot{q}_4 \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) + (l \right. \\
& \left. - l_{c4})l(\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
& + m_I \left[ l^2 \dot{q}_2 + l^2 \dot{q}_1 + l^2 \dot{q}_1 \cos(q_2) + l^2 \dot{q}_4 \cos\left(q_1 + q_2 - q_4\right) + l^2(\dot{q}_4 \right. \\
& \left. + \dot{q}_5) \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = & [m_2(l_{c2}^2 + ll_{c2} \cos(q_2)) + I_{m_2} + m_s(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_c(l^2 + l^2 \cos(q_2)) \\
& + m_3(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_4(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_I(l^2 + l^2 \cos(q_2))] \ddot{q}_1 \\
& + [m_2 l_{c2}^2 + I_{m_2} + m_s l^2 + m_c l^2 + m_3 l^2 + m_4 l^2 + m_I l^2] \ddot{q}_2 \\
& + \left[ m_3 \left( (l - l_{c3})l \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) \right) \right. \\
& + m_4 \left( l^2 \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) + (l - l_{c4})l \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
& + m_I \left( l^2 \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) + l^2 \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) \right) \left. \right] \ddot{q}_4 \\
& + \left[ m_4(l - l_{c4})l \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) \right. \\
& + m_I l^2 \cos\left(q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) \left. \right] \ddot{q}_5 \\
& - (m_2 ll_{c2} + (m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_I)l^2) \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 \\
& - (m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_I)l^2) \sin\left(q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - \dot{q}_4) \dot{q}_4 \\
& - (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \sin\left(q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - \dot{q}_4 - \dot{q}_5) (\dot{q}_4 \\
& + \dot{q}_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_2} = & -(m_2 ll_{c2} + (m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_I)l^2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_2) \\
& - (m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_I)l^2) \dot{q}_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin\left(q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2}\right) \\
& - (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \sin\left(q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) \\
& - (m_2 l_{c2} + l(m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_I))g \cos(q_1 + q_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} = & m_3 \left[ (l - l_{c3})^2 \dot{q}_4 + (l - l_{c3}) l \dot{q}_1 \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + (l - l_{c3}) l (\dot{q}_1 \right. \\
& \left. + \dot{q}_2) \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \right] + I_{m_3} \dot{q}_4 \\
& + m_4 \left[ l^2 \dot{q}_4 + l^2 \dot{q}_1 \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
& + (l - l_{c4})^2 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) + (l - l_{c4}) l \dot{q}_1 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& + (l - l_{c4}) l (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) + (2\dot{q}_4 + \dot{q}_5) (l \\
& \left. - l_{c4}) l \cos(q_5) \right] + I_{m_4} \dot{q}_4 + I_{m_4} \dot{q}_5 \\
& + m_l \left[ l^2 \dot{q}_4 + l^2 \dot{q}_1 \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
& + l^2 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) + l^2 \dot{q}_1 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& \left. + l^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) + (2\dot{q}_4 + \dot{q}_5) l^2 \cos(q_5) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} = & \left[ m_3 \left( (l - l_{c3}) l \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + (l - l_{c3}) l \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right. \\
& + m_4 (l^2 \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& + (l - l_{c4}) l \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) + (l - l_{c4}) l \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right)) \\
& + m_l (l^2 \cos \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& \left. + l^2 \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right)) \right] \dot{q}_1 \\
& + \left[ m_3 (l - l_{c3}) l \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
& + m_4 \left( l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + (l - l_{c4}) l \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \\
& + m_l \left( l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \dot{q}_2 \\
& + \left[ m_3 (l - l_{c3})^2 + I_{m_3} + m_4 (l^2 + (l - l_{c4})^2 + 2(l - l_{c4}) l \cos(q_5)) + I_{m_4} + m_l (2l^2 \right. \\
& \left. + 2l^2 \cos(q_5)) \right] \dot{q}_4 \\
& + \left[ m_4 ((l - l_{c4})^2 + (l - l_{c4}) l \cos(q_5)) + I_{m_4} + m_l (l^2 + l^2 \cos(q_5)) \right] \dot{q}_5 \\
& - (m_3 (l - l_{c3}) l + (m_4 + m_l) l^2) \sin \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) (\dot{q}_1 - \dot{q}_4) \dot{q}_1 \\
& - (m_3 (l - l_{c3}) l + (m_4 + m_l) l^2) \sin \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - \dot{q}_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
& - (m_4 (l - l_{c4}) l + m_l l^2) \sin \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) (\dot{q}_1 - \dot{q}_4 - \dot{q}_5) \dot{q}_1 \\
& - (m_4 (l - l_{c4}) l + m_l l^2) \sin \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - \dot{q}_4 - \dot{q}_5) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
& - (2m_4 (l - l_{c4}) l + 2m_l l^2) \sin(q_5) \dot{q}_5 \dot{q}_4 - (m_4 (l - l_{c4}) l + m_l l^2) \sin(q_5) \dot{q}_5^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_4} = & \left( m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_l)l^2 \right) \dot{q}_1 \dot{q}_4 \sin \left( q_1 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& + (m_3(l - l_{c3})l(m_4 + m_l)l^2) \dot{q}_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin \left( q_1 + q_2 - q_4 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& + (m_4(l - l_{c4})l \\
& + m_l l^2) \dot{q}_1 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \sin \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) + (m_4(l - l_{c4})l \\
& + m_l l^2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \sin \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \\
& - g \cos \left( q_4 + \frac{\pi}{2} \right) (m_3(l - l_{c3}) + (m_4 + m_l)l) \\
& - g \cos \left( q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2} \right) (m_4(l - l_{c4}) + m_l l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_5} = & m_4 \left[ (l - l_{c4})^2 \dot{q}_5 + (l - l_{c4})^2 \dot{q}_4 + (l - l_{c4})l \dot{q}_1 \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
& \left. + (l - l_{c4})l (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) + (l - l_{c4})l \dot{q}_4 \cos(q_5) \right] \\
& + I_{m_4} \dot{q}_5 + I_{m_4} \dot{q}_4 \\
& + m_l \left[ l^2 \dot{q}_5 + l^2 \dot{q}_4 + l^2 \dot{q}_1 \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
& \left. + l^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2 \dot{q}_4 \cos(q_5) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_5} = & \left[ m_4 \left( (l - l_{c4})l \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) + (l - l_{c4})l \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right. \\
& \left. + m_l (l^2 \cos \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) + l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right)) \right] \ddot{q}_1 \\
& + \left[ m_4 (l - l_{c4})l \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
& \left. + m_l l^2 \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \ddot{q}_2 \\
& + \left[ m_4 ((l - l_{c4})^2 + (l - l_{c4})l \cos(q_5)) + I_{m_4} + m_l (l^2 + l^2 \cos(q_5)) \right] \ddot{q}_4 \\
& + \left[ m_4 ((l - l_{c4})^2) + I_{m_4} + m_l (l^2) \right] \ddot{q}_5 \\
& - (m_4 (l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin \left( q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) (\dot{q}_1 - \dot{q}_4 - \dot{q}_5) \dot{q}_1 \\
& - (m_4 (l - l_{c4})l + m_l l^2) \cos \left( q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2} \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - \dot{q}_4 \\
& - \dot{q}_5) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - ((l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin(q_5) \dot{q}_5 \dot{q}_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_5} = & (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \dot{q}_1 (\dot{q}_4 \\
& + \dot{q}_5) \sin\left(q_1 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) + ((l - l_{c4})l + m_I l^2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_4 \\
& + \dot{q}_5) \sin\left(q_1 + q_2 - q_4 - q_5 - \frac{\pi}{2}\right) - ((l - l_{c4})l + m_I l^2) \dot{q}_4 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \sin(q_5) \\
& - m_4(l - l_{c4})g \cos\left(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}\right) - m_I l g \cos\left(q_4 + q_5 + \frac{\pi}{2}\right) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = & m_c \dot{r} \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = & m_c \ddot{r} \\
\frac{\partial L}{\partial r} = & 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & [m_1 l_{c1}^2 + I_{m_1} + m_2(l^2 + l_{c2}^2 + 2ll_{c2} \cos(q_2)) + I_{m_2} + m_s(2l^2 + 2l^2 \cos(q_2)) \\
& + m_c(2l^2 + 2l^2 \cos(q_2)) + m_3(2l^2 + 2l^2 \cos(q_2)) + m_4(2l^2 + 2l^2 \cos(q_2)) \\
& + m_I(2l^2 + 2l^2 \cos(q_2))] \ddot{q}_1 \\
& + [m_2(l_{c2}^2 + ll_{c2} \cos(q_2)) + I_{m_2} + m_s(l^2 + l^2 \cos(q_2)) \\
& + m_c(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_3(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_4(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_I(l^2 \\
& + l^2 \cos(q_2))] \ddot{q}_2 \\
& + [m_3((l - l_{c3})l \sin(q_1 - q_4) + (l - l_{c3})l \sin(q_1 + q_2 - q_4)) \\
& + m_4(l^2 \sin(q_1 - q_4) + l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4) + (l - l_{c4})l \sin(q_1 - q_4 - q_5) \\
& + (l - l_{c4})l \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)) + m_I(l^2 \sin(q_1 - q_4) \\
& + l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4) + l^2 \sin(q_1 - q_4 - q_5) \\
& + l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5))] \ddot{q}_4 \\
& + [m_4((l - l_{c4})l \sin(q_1 - q_4 - q_5) + (l - l_{c4})l \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)) \\
& + m_I(l^2 \sin(q_1 - q_4 - q_5) + l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5))] \ddot{q}_5 \\
& - (2m_2 ll_{c2} + (2m_s + 2m_c + 2m_3 + 2m_4 + 2m_I)l^2) \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 \\
& - (m_2 ll_{c2} + (m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_I)l^2) \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\
& - (m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_I)l^2) \cos(q_1 - q_4) \dot{q}_4^2 \\
& - (m_3(l - l_{c3}) + (m_I + m_4)l^2)l \cos(q_1 + q_2 - q_4) \dot{q}_4^2 \\
& - (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 - q_4 - q_5) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5)^2 \\
& - (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4 - q_5) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5)^2 \\
& + g \cos(q_1) [l(m_I + m_4 + m_3 + m_c + m_s + m_2) + m_1 l_{c1}] \\
& + g \cos(q_1 + q_2) [l(m_I + m_4 + m_3 + m_c + m_s) + m_2 l_{c2}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & [m_2(l_{c2}^2 + ll_{c2} \cos(q_2)) + I_{m_2} + m_s(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_c(l^2 + l^2 \cos(q_2)) \\
& + m_3(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_4(l^2 + l^2 \cos(q_2)) + m_l(l^2 + l^2 \cos(q_2))] \ddot{q}_1 \\
& + [m_2 l_{c2}^2 + I_{m_2} + m_s l^2 + m_c l^2 + m_3 l^2 + m_4 l^2 + m_l l^2] \ddot{q}_2 \\
& + [m_3((l - l_{c3})l \sin(q_1 + q_2 - q_4)) \\
& + m_4(l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4) + (l - l_{c4})l \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)) \\
& + m_l(l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4) + l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5))] \ddot{q}_4 \\
& + [m_4(l - l_{c4})l \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5) + m_l l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)] \ddot{q}_5 \\
& + (m_2 ll_{c2} + (m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_l)l^2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \\
& - (m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_l)l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4) \dot{q}_4^2 \\
& - (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4 - q_5) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5)^2 \\
& + (m_2 l_{c2} + l(m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_l))g \cos(q_1 + q_2) \\
\tau_4 = & [m_3((l - l_{c3})l \sin(q_1 - q_4) + (l - l_{c3})l \sin(q_1 + q_2 - q_4)) + m_4(l^2 \sin(q_1 - q_4) \\
& + l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4) + (l - l_{c4})l \sin(q_1 - q_4 - q_5) + (l \\
& - l_{c4})l \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)) + m_l(l^2 \sin(q_1 - q_4) + l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4) \\
& + l^2 \sin(q_1 - q_4 - q_5) + l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5))] \ddot{q}_1 \\
& + [m_3(l - l_{c3})l \sin(q_1 + q_2 - q_4)) \\
& + m_4(l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4) + (l - l_{c4})l \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)) \\
& + m_l(l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4) + l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5))] \ddot{q}_2 \\
& + [m_3(l - l_{c3})^2 + I_{m_3} + m_4(l^2 + (l - l_{c4})^2 + 2(l - l_{c4})l \cos(q_5)) + I_{m_4} \\
& + m_l(2l^2 + 2l^2 \cos(q_5))] \ddot{q}_4 \\
& + [m_4((l - l_{c4})^2 + (l - l_{c4})l \cos(q_5)) + I_{m_4} + m_l(l^2 + l^2 \cos(q_5))] \ddot{q}_5 \\
& + (m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_l)l^2) \cos(q_1 - q_4) \dot{q}_1^2 + (m_3(l - l_{c3})l \\
& + (m_4 + m_l)l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\
& + (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \cos(q_1 - q_4 - q_5) \dot{q}_1^2 \\
& + (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \cos(q_1 + q_1 - q_4 - q_5) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\
& - (2m_4(l - l_{c4})l + 2m_l l^2) \sin(q_5) \dot{q}_5 \dot{q}_4 - (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin(q_5) \dot{q}_5^2 \\
& - g \sin(q_4) (m_3(l - l_{c3}) + (m_4 + m_l)l) \\
& - g \sin(q_4 + q_5) (m_4(l - l_{c4}) + m_l l) \\
\tau_5 = & [m_4((l - l_{c4})l \sin(q_1 - q_4 - q_5) + (l - l_{c4})l \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)) \\
& + m_l(l^2 \sin(q_1 - q_4 - q_5) + l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5))] \ddot{q}_1 \\
& + [m_4(l - l_{c4})l \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5) + m_l l^2 \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)] \ddot{q}_2 \\
& + [m_4((l - l_{c4})^2 + (l - l_{c4})l \cos(q_5)) + I_{m_4} + m_l(l^2 + l^2 \cos(q_5))] \ddot{q}_4 \\
& + [m_4(l - l_{c4})^2 + I_{m_4} + m_l l^2] \ddot{q}_5 \\
& + (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \cos(q_1 - q_4 - q_5) \dot{q}_1^2 \\
& + (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4 - q_5) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\
& + (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin(q_5) \dot{q}_4^2 \\
& - m_4(l - l_{c4})g \sin(q_4 + q_5) - m_l l g \sin(q_4 + q_5) \\
\tau_r = & m_c \ddot{r}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Les éléments du modèle dynamique (16) du robot bipède sont :



$$M(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$m_{11} = m_1 l_{c1}^2 + I_{m_1} + m_2 (l^2 + l_{c2}^2 + 2ll_{c2} \cos(q_2)) + I_{m_2} \\ + (m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_l)(2l^2 + 2l^2 \cos(q_2))$$

$$m_{12} = m_{21} = m_2 (l_{c2}^2 + ll_{c2} \cos(q_2)) + I_{m_2} \\ + (m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_l)(l^2 + l^2 \cos(q_2))$$

$$m_{13} = m_{31} = (m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_l)l^2) \sin(q_1 - q_4) \\ + (m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_l)l^2) \sin(q_1 + q_2 - q_4) \\ + (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin(q_1 - q_4 - q_5) \\ + (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)$$

$$m_{14} = m_{41} = (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin(q_1 - q_4 - q_5) \\ + (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)$$

$$m_{15} = m_{25} = m_{35} = m_{45} = m_{51} = m_{52} = m_{53} = m_{54} = 0$$

$$m_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_{m_2} + (m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_l)l^2$$

$$m_{23} = m_{32} = (m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_l)l^2) \sin(q_1 + q_2 - q_4) \\ + (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)$$

$$m_{24} = m_{42} = (m_4(l - l_{c4})l + m_l l^2) \sin(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)$$

$$m_{33} = m_3 (l - l_{c3})^2 + I_{m_3} + m_4 (l^2 + (l - l_{c4})^2 + 2(l - l_{c4})l \cos(q_5)) + I_{m_4} \\ + m_l (2l^2 + 2l^2 \cos(q_5))$$

$$m_{34} = m_{43} = m_4 ((l - l_{c4})^2 + (l - l_{c4})l \cos(q_5)) + I_{m_4} + m_l (l^2 + l^2 \cos(q_5))$$

$$m_{44} = m_4 (l - l_{c4})^2 + I_{m_4} + m_l l^2$$

$$m_{55} = m_c$$

Et

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= -(2m_2ll_{c2} + (2m_s + 2m_c + 2m_3 + 2m_4 + 2m_I)l^2) \sin(q_2) \dot{q}_2 \\
c_{12} &= -(m_2ll_{c2} + (m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_I)l^2) \sin(q_2) \dot{q}_2 \\
c_{13} &= -((m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_I)l^2) \cos(q_1 - q_4) \\
&\quad + (m_3(l - l_{c3}) + (m_I + m_4)l^2)l \cos(q_1 + q_2 - q_4)) \dot{q}_4 \\
&\quad - ((m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 - q_4 - q_5) \\
&\quad + (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\
c_{14} &= -((m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 - q_4 - q_5) \\
&\quad + (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4 - q_5)) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\
c_{15} &= c_{25} = c_{35} = c_{45} = c_{51} = c_{52} = c_{53} = c_{54} = c_{55} = 0 \\
c_{21} &= (m_2ll_{c2} + (m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_I)l^2) \sin(q_2) \dot{q}_1 \\
c_{22} &= 0 \\
c_{23} &= -((m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_I)l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4) \dot{q}_4 \\
&\quad - (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4 - q_5) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\
c_{24} &= -(m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4 - q_5) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\
c_{31} &= ((m_3(l - l_{c3})l + (m_4 + m_I)l^2) \cos(q_1 - q_4) \\
&\quad + (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 - q_4 - q_5)) \dot{q}_1 + ((m_3(l - l_{c3})l \\
&\quad + (m_4 + m_I)l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4) \\
&\quad + (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 + q_1 - q_4 - q_5)) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
c_{32} &= ((m_3(l - l_{c3})l \\
&\quad + (m_4 + m_I)l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4) \\
&\quad + (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 + q_1 - q_4 - q_5)) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
c_{33} &= -(m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \sin(q_5) \dot{q}_5 \\
c_{34} &= -(m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \sin(q_5) (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\
c_{41} &= (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 - q_4 - q_5) \dot{q}_1 \\
&\quad + (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4 - q_5) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
c_{42} &= (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \cos(q_1 + q_2 - q_4 - q_5) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
c_{43} &= (m_4(l - l_{c4})l + m_I l^2) \sin(q_5) \dot{q}_4 \\
c_{44} &= 0
\end{aligned}$$

Et

$$G(q) = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} G_1 &= g \cos(q_1) [l(m_I + m_4 + m_3 + m_c + m_s + m_2) + m_1 l_{c1}] \\ &\quad + g \cos(q_1 + q_2) [l(m_I + m_4 + m_3 + m_c + m_s) + m_2 l_{c2}] \\ G_2 &= (m_2 l_{c2} + l(m_s + m_c + m_3 + m_4 + m_I)) g \cos(q_1 + q_2) \\ G_3 &= -g \sin(q_4) (m_3(l - l_{c3}) + (m_4 + m_I)l) - g \sin(q_4 + q_5) (m_4(l - l_{c4}) + m_I l) \\ G_4 &= -(m_4(l - l_{c4}) + m_I l) g \sin(q_4 + q_5) \\ G_5 &= 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

### 3.3.2.3 Simulation :

Les simulations ont été réalisées en considérant des scénarios de la marche sur une surface plane (Figure 3.14). Nous rappelons que la loi de commande utilisée est la commande linéarisante. En raison de s'assurer de la précision du modèle dynamique calculé et de tester les performances de la commande linéarisante pour une telle situation, les résultats de simulation en termes de poursuite de trajectoire contribuant à l'évolution du robot sur la surface plane sont comparés à ceux issus de l'application d'un PID classique.

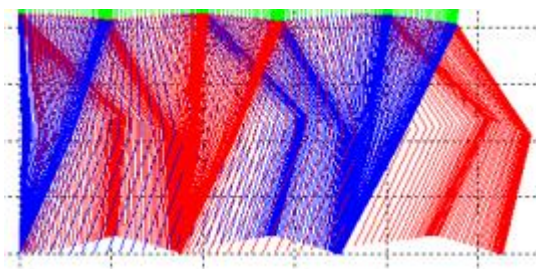


Figure 3.14: Scénarios de la marche considérés pour le robot bipède [20]

### 3.3.2.4 Signification du scénario considéré :

#### Premier pas :

Les positions articulaires du robot en état initial sont :

- $q_1 = q_2 = 60$  degrés,
- $q_4 = 150$  degrés,

- $q_5 = 360$  degrés

Maintenant le bipède s'appuie sur la jambe droite cependant que la jambe gauche est en mouvement. Pour cela, on fixe l'articulation 1 à 60 degrés et on fait déplacer les articulations 2, 4, 5, de manière sinusoïdale d'amplitudes maximales respectivement  $-\frac{\pi}{3}$ [rad],  $\frac{\pi}{3}$ [rad],  $-\frac{\pi}{6}$ [rad],  $\frac{\pi}{3}$ [rad] à une période  $T=6$ [s].

Les positions des articulations avant et après le premier pas sont :

L'articulation 1 est fixée à 60 degrés,

L'articulation 2 passe de 60 à 0 degré,

L'articulation 4 passe de 150 à 210 degrés,

L'articulation 5 passe de 360 à 300 degrés,

Et l'articulation prismatique passe de 0 (position initial) à 60 degrés et retourne à sa position initiale (0 degrés).

A la fin du premier pas, la jambe droite et la jambe gauche seront dans une position qui est exactement l'inverse de la pose initiale. Le déplacement se poursuit pour le deuxième pas inversement au premier, c'est-à-dire le bipède s'appuie sur la jambe gauche cependant que la jambe droite est en mouvement et ainsi de suite.

### 3.3.2.5 Trajectoires relatives aux scénarios de la marche :

Pour générer une simple trajectoire désirée de chaque articulation nous supposons :

- une position initiale du robot à (DSP),
- la patte droite est en avant et celle de la gauche est en arrière,
- la masse du tronc est situé dans le milieu de la hanche (position initiale),
- l'angle entre les deux cuisses est de 60 degrés,
- $q_1 = q_2 = 60$  degrés,
- $q_4 = 150$  degrés,
- $q_5 = 360$  degrés,
- $qd_1 = \frac{\pi}{3}$
- $qd_2 = -\frac{\pi}{3} \sin(2 * \pi * f * t) + \frac{\pi}{3}$

- $qd_4 = \frac{\pi}{3} \sin(2 * \pi * f * t) + \frac{15\pi}{18}$
- $qd_5 = -\frac{\pi}{6} \sin(4\pi ft) - \frac{\pi}{3} \sin(2\pi ft)^2 + 2\pi$
- $rd = \frac{\pi}{3} \sin(4\pi ft)$

La simulation des scénarios présentés est réalisée via l'organigramme suivant :

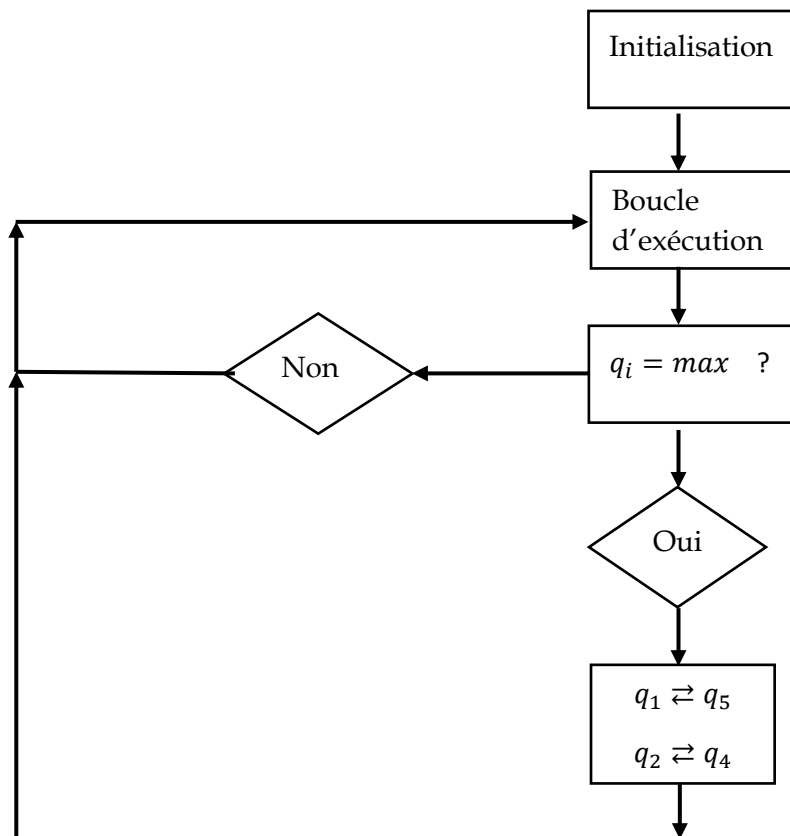


Figure 3. 15 : Organigramme de simulation des scénarios de la marche

3.3.2.6 Schéma de la commande du robot bipède à 5 DDL :

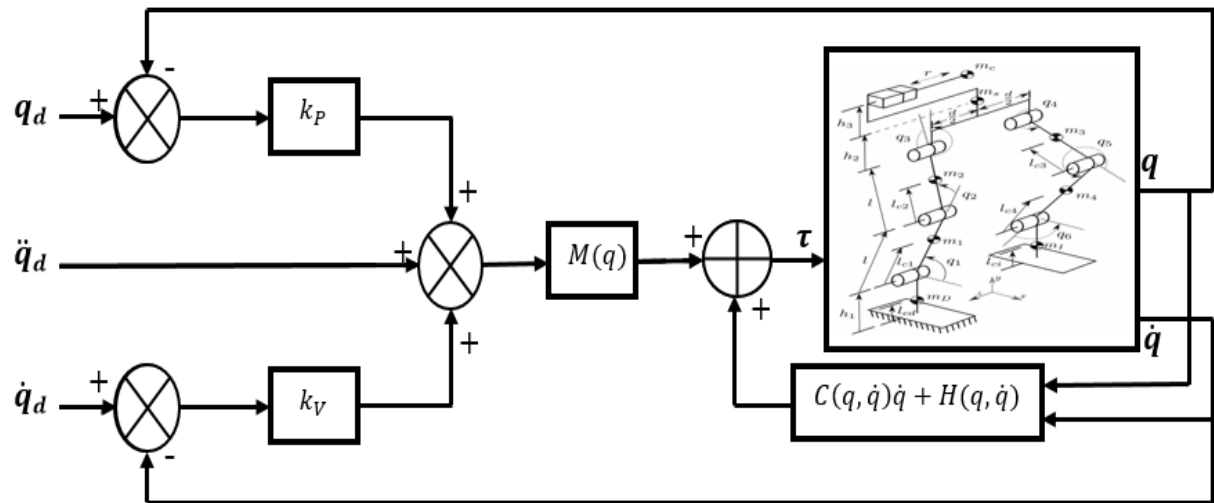


Figure 3. 16: Schéma de commande du robot bipède à 5 DDL.

3.3.2.7 Résultats de simulation:

En raison de tester la qualité d’une telle modélisation et de la commande linéarisante, des simulations ont été réalisées dans l’environnement Matlab. Des comparaisons ont été faites avec les résultats issus de l’application d’un PID classique concernant la commande. Les résultats de simulation en termes de poursuite de trajectoire sont donnés dans les figures qui suivent.

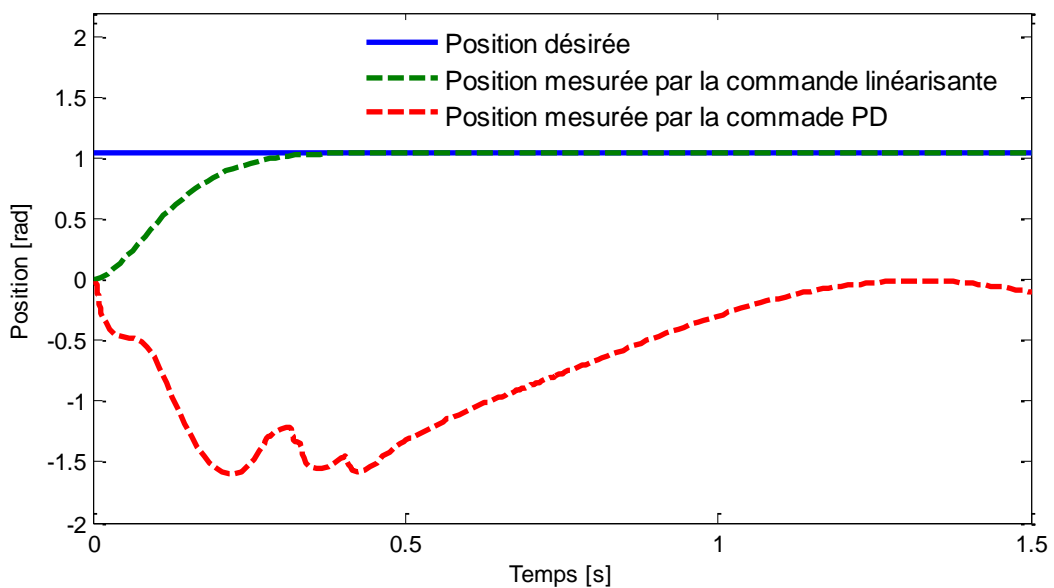
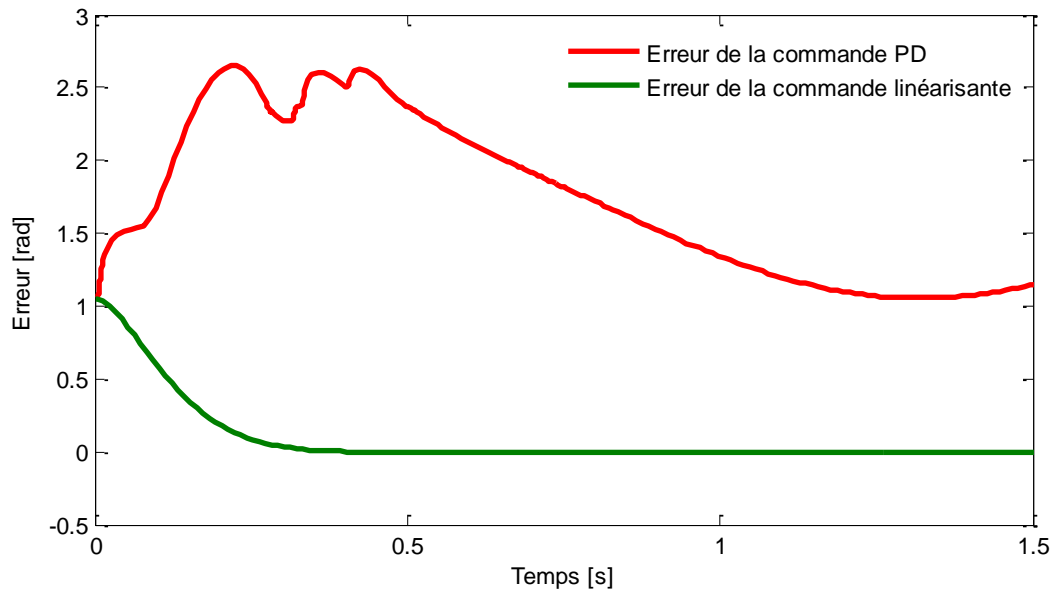
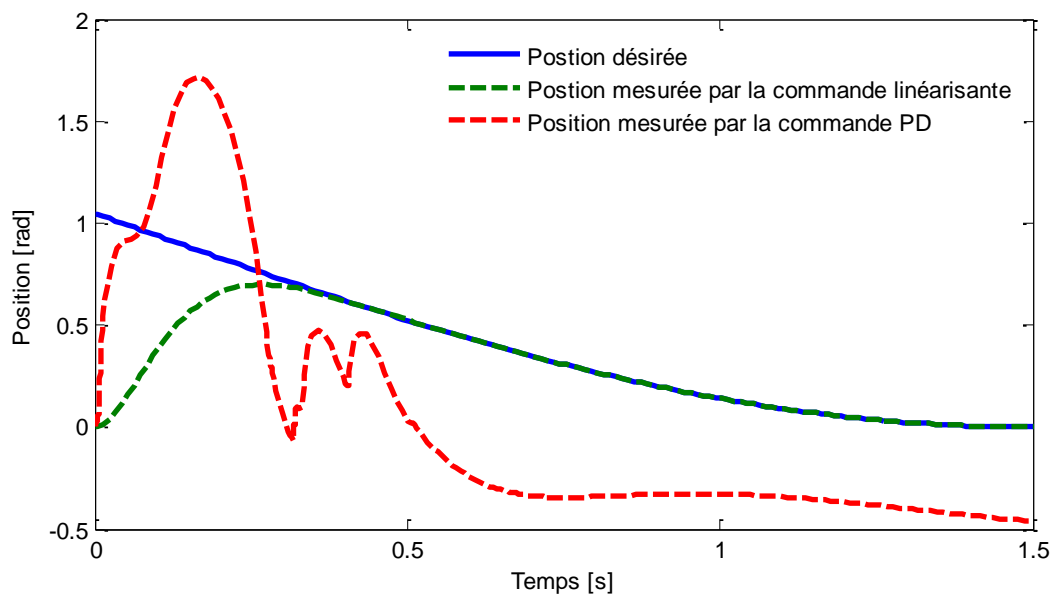


Figure 3. 17 : Poursuite de trajectoire pour l’articulation 1

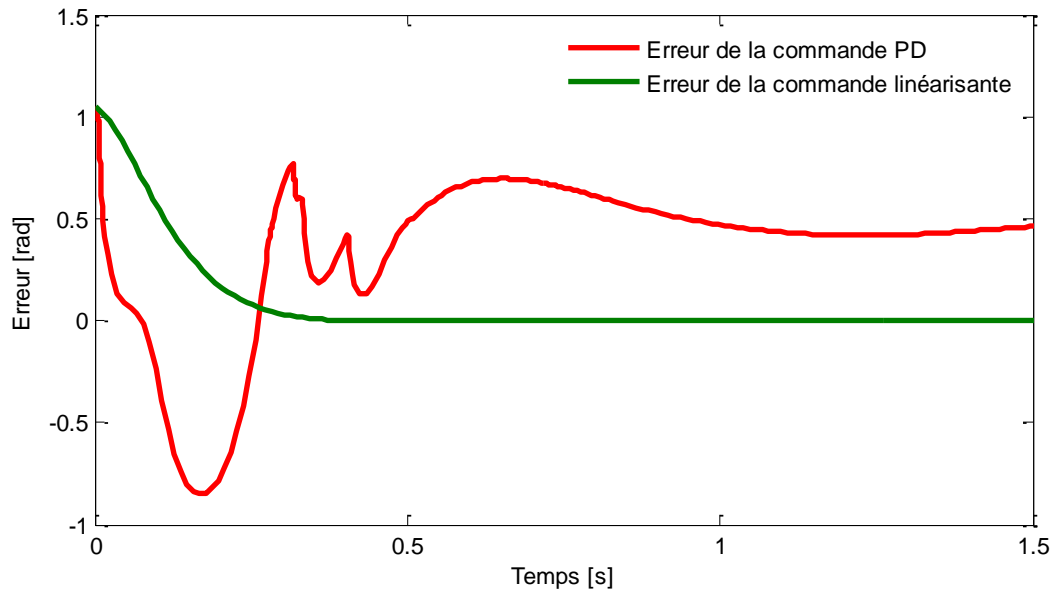


**Figure 3.18: Erreur de poursuite de trajectoire pour l'articulation 1**

D'après l'erreur de poursuite de trajectoire en position relative à l'articulation 1 pour les deux commande linéarisante et PID (figure 3.18), nous constatons bien que la commande linéarisante est la plus performante.

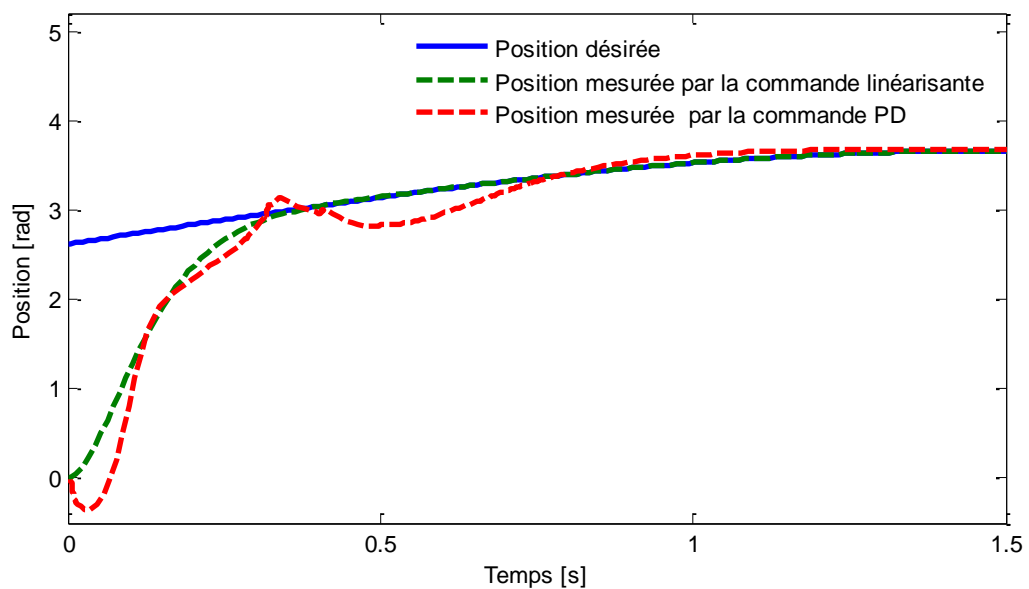


**Figure 3.19: Poursuite de trajectoire pour l'articulation 2**



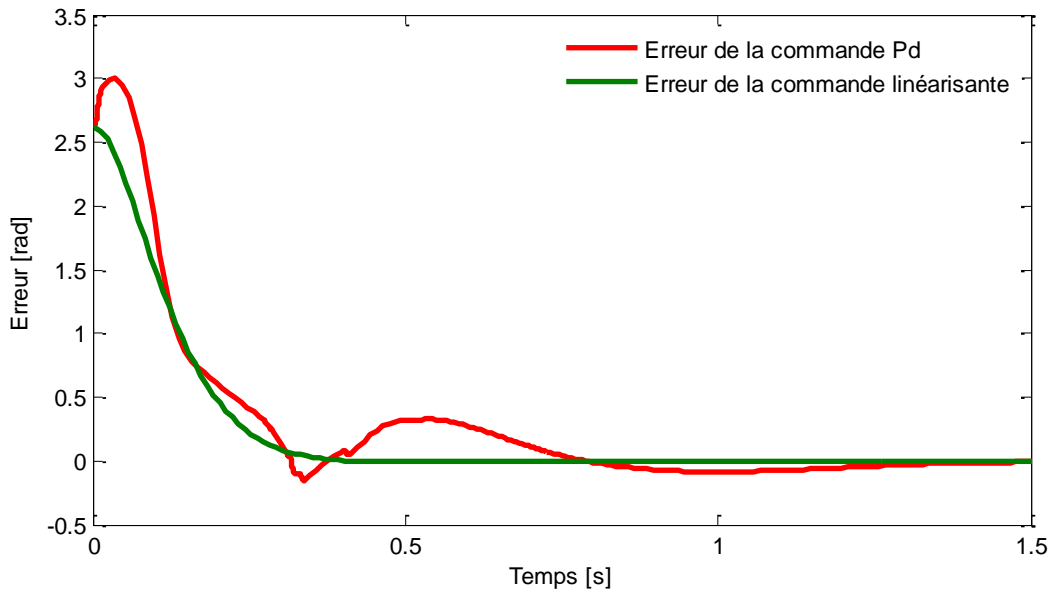
**Figure 3. 20: Erreur de poursuite de trajectoire pour l'articulation 2**

D'après l'erreur de poursuite de trajectoire en position relative à l'articulation 2 pour les deux commande linéarisante et PID (figure 3.20), nous constatons bien que la commande linéarisante est la plus performante.



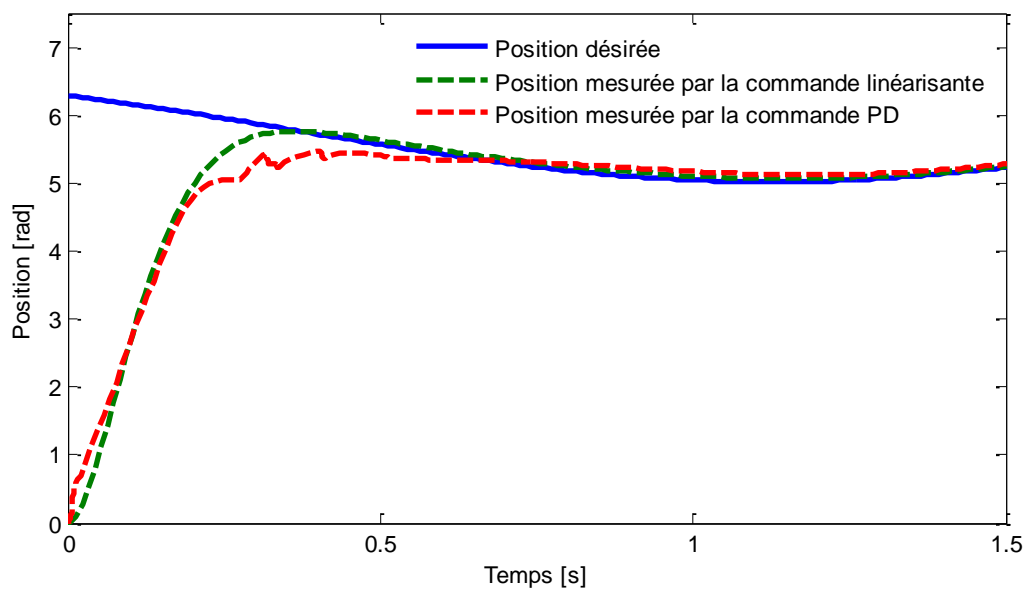
**Figure 3. 21: Poursuite de trajectoire pour l'articulation 4**



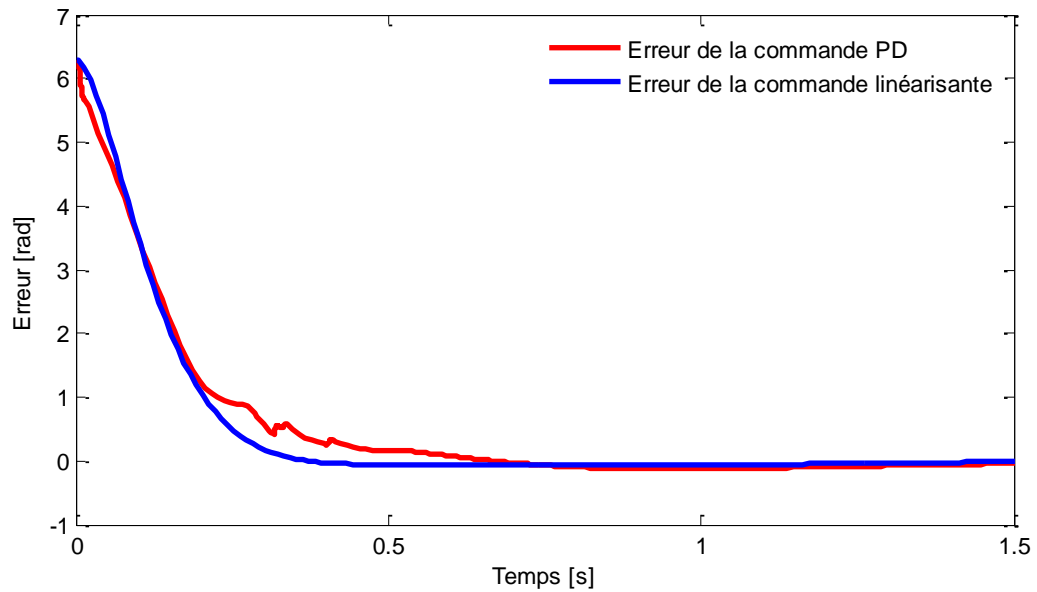


**Figure 3. 22: Erreur de poursuite de trajectoire pour l'articulation 4**

Même chose que précédemment, l'erreur de poursuite de trajectoire en position relative à l'articulation 4 pour les deux commande linéarisante et PID (figure 3.22), nous constatons bien que la commande linéarisante est la plus performante.

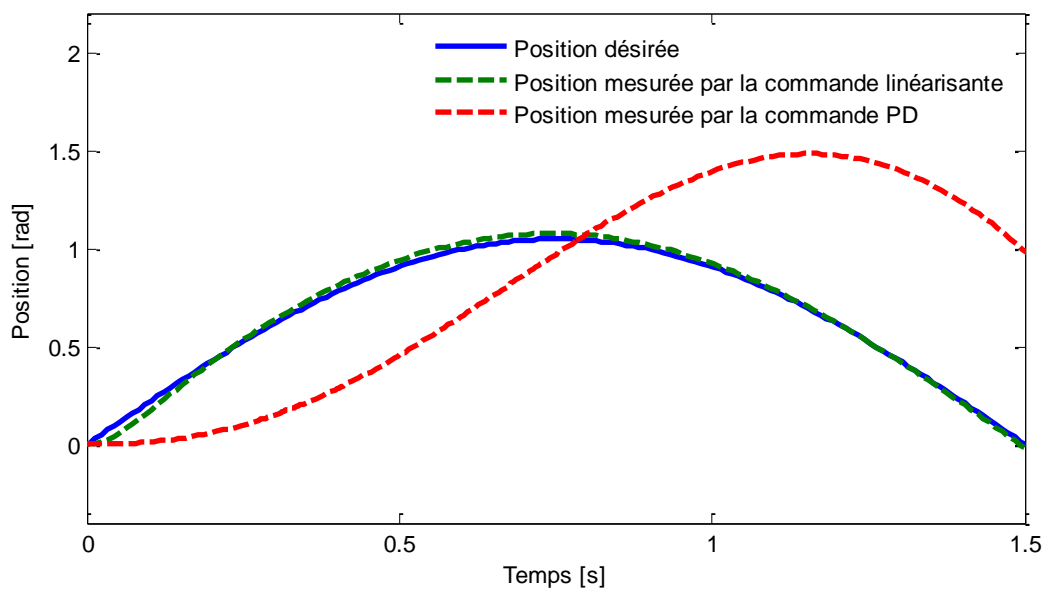


**Figure 3. 23: Poursuite de trajectoire pour l'articulation 5**

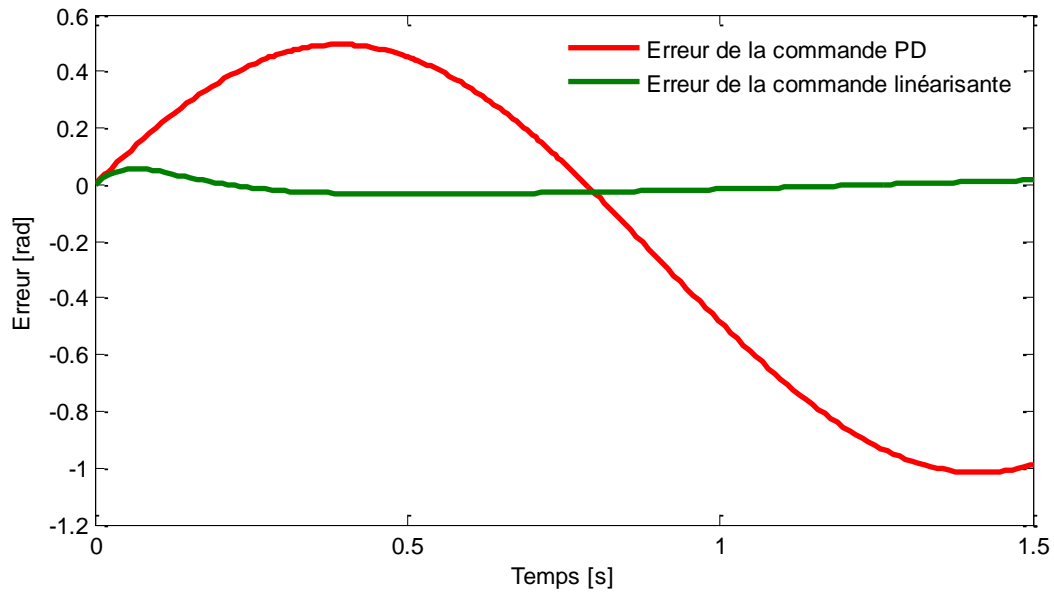


**Figure 3. 24: Erreur de poursuite de trajectoire pour l'articulation 5**

D'après l'erreur de poursuite de trajectoire en position relative à l'articulation 5 issue des deux commande linéarisante et PID (figure 3.24), nous constatons bien que la commande linéarisante est la plus performante.



**Figure 3. 25: Poursuite de Trajectoire pour l'articulation prismatique r**



**Figure 3. 26: Erreur de poursuite de trajectoire pour l'articulation r**

Même chose que précédemment, l'erreur de poursuite de trajectoire en position relative à l'articulation prismatique  $r$  issue des deux commande linéarisante et PID (figure 3.26), nous constatons bien que la commande linéarisante est la plus performante.

En résumé, la qualité d'une telle commande est mesurée par l'erreur commise en termes de poursuite de trajectoire. En effet, d'après les résultats de poursuite en poursuite de trajectoire en position cités précédemment, nous pouvons conclure que la loi de commande linéarisante donne de très bons résultats par rapport à la commande PID. Cela s'explique tout simplement que l'application de la commande linéarisante nécessite la connaissance parfaite du modèle dynamique ce qui est le cas pour notre robot étudié.

Les couples délivrés par la loi de commande appliqués aux différentes articulations sont donnés dans les figures suivantes (figures 3.27 et 3.28 et 3.29):

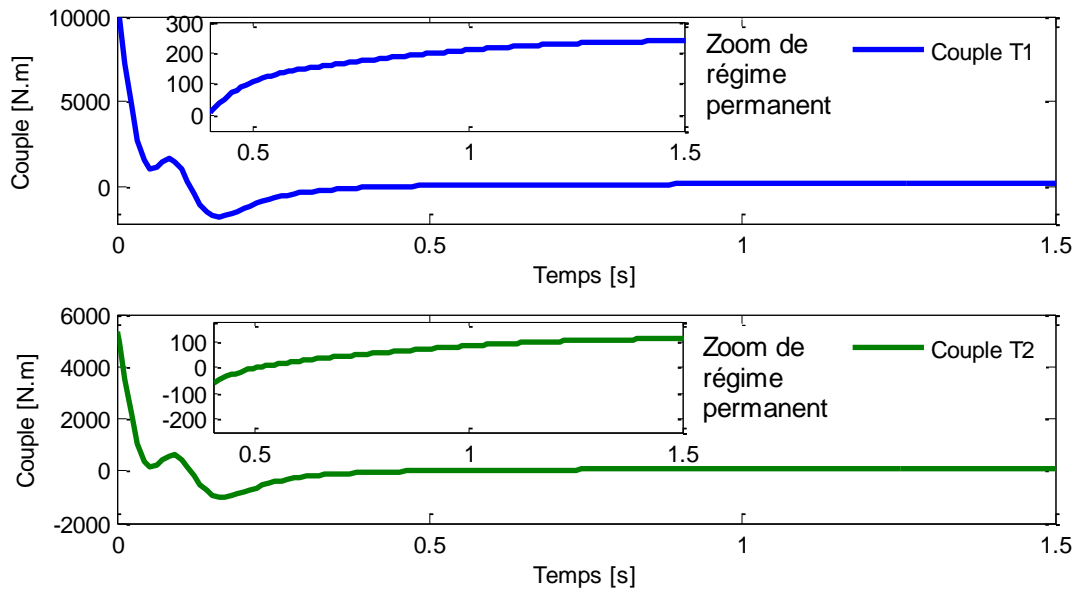


Figure 3. 27:Couple appliqués aux l'articulations 1, 2.

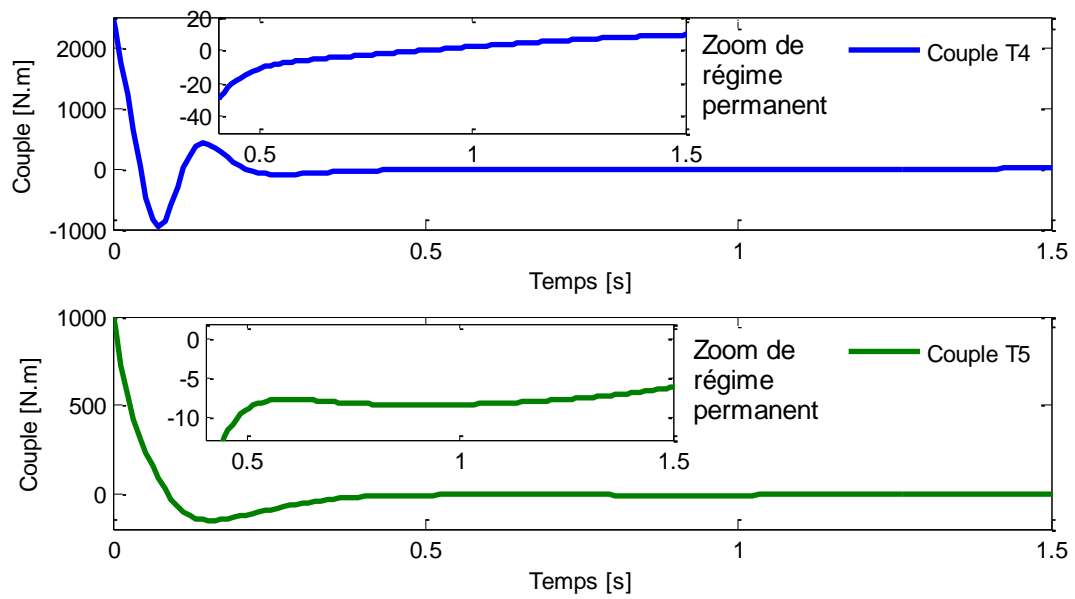


Figure 3. 28:Couples appliqués aux articulations 4, 5

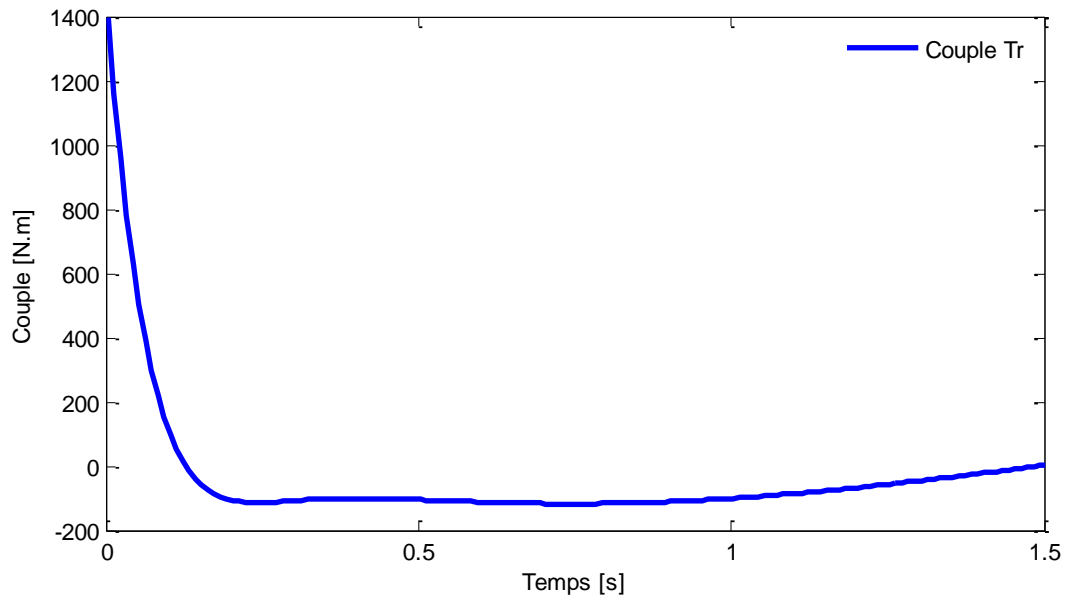


Figure 3. 29: Couple appliqué à l'articulation 5 (articulation prismatique)

### 3.4 Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons établi la modélisation dynamique des deux robots : robot de type compas et robot bipède à 5 DDL. En effet, la modélisation est établie en se basant sur la méthode d'Euler-Lagrange. Elle a été faite comme pour le cas d'un robot manipulateur sériel en utilisant les coordonnées relatives. Pour le robot CBR, nous avons rendu plus précis le modèle dynamique par rapport à celui donné dans la référence [3] en rajoutant un terme d'inertie. Concernant la commande, nous avons appliqué la commande linéarisante jugée performante lorsque le modèle dynamique du robot est connu. La commande linéarisante est testée pour plusieurs scénarios imitant la marche de l'être humain tout en considérant une surface plane. Les résultats issus de l'application de la commande linéarisante sur le robot à 5 DDL ont été comparés à ceux obtenus en appliquant un PID classique. En fait, la commande linéarisante est toujours la plus performante.



## **Conclusion générale**

---

Dans ce mémoire de fin d'étude nous nous sommes penchés sur l'étude des robots bipèdes. Il s'agit bien précisément de la modélisation et de la commande du robot bipède de type compas et celui à 5 degrés de liberté[3].

Pour la réalisation de ce travail, nous avons commencé par une recherche bibliographique en donnant un état de l'art sur les robots marcheurs décrit en chapitre 1. Or, les structures abordées vont de la plus simple à la plus complexe. Le degré de complexité de la modélisation et de la commande d'un robot dépendra fortement de la nature de sa structure. Les robots humanoïdes, en tant que robots marcheurs, marquent fortement leur présence dans le domaine de la robotique vu leur structure morphologique similaire à l'être humain, lui offrant, entre autres, une capacité et une dextérité de se déplacer.

Dans le second chapitre, nous avons présenté les différentes commandes dédiées aux robots manipulateurs. Aussi, nous nous sommes partis de la plus simple jusqu'à la plus évoluée. Comme nous l'avons mentionné dans ce chapitre, faire un choix sur une commande dépend de la tâche à réaliser, de la structure du robot et des performances recherchés. Le choix dont nous avons fait sur la commande linéarisante est en adéquation avec notre travail du fait que les modèles dynamiques des robots étudiés sont connus.

Par ailleurs, l'essentiel de notre travail est décrit dans le chapitre 3. Il s'agit en fait de modéliser les deux types de robots bipèdes puis les commander en générant des trajectoires issues de la nature de la marche de l'être humain, c'est ce que nous avons appelés scénarios de la marche. En ce qui concerne la modélisation, nous avons considéré les coordonnées relatives pareillement à ce qui se fait pour les robots manipulateurs. Cependant pour la partie commande, nous avons utilisé la commande linéarisante du fait que les différents modèles sont calculés. Une comparaison des résultats de simulation en termes de poursuite de trajectoire avec ceux issus du PID classique a été réalisée.

En résumé, ce travail de fin d'étude nous a vraiment permis de nous initier à la recherche. En effet, nous avons pu en premier temps, refaire le même travail d'une publication de revue de renommée établie. Nous nous sommes arrivés aux mêmes résultats. Une fois, nous avons maîtrisé le sujet, nous avons pu apporter des améliorations à savoir l'ajout du terme d'inertie pour le modèle dynamique du robot CBR ce qui le rend plus précis et également la commande du robot bipède à 5 DDL en proposant un scénario de la marche imitant bien celle de l'être humain.

Les simulations ont été effectuées dans l'environnement Matlab tout en considérant une surface plane pour le déplacement.

Comme perspectives à ce présent travail, nous envisageons revoir notre étude en considérant un humanoïde complet. Aussi, il serait intéressant de considérer des surfaces de déplacement quelconques en adéquation avec les terrains réels. Pour cela, nous estimons que le recours à l'utilisation des outils de l'intelligence artificielle aussi bien pour la commande que pour la modélisation semble d'un intérêt crucial.





## Références bibliographiques:

- [1] Yang, X., She, H., Lu, H., Fukuda, T., & Shen, Y. (2017). State of the art: Bipedal robots for lower limb rehabilitation. *Applied Sciences*, 7(11), 1182
- [2] Mu, X., & Wu, Q. (2003, June). A complete dynamic model of five-link bipedal walking. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003.* (Vol. 6, pp. 4926). IEEE.
- [3] De-León-Gómez, V., Santibañez, V., & Moreno-Valenzuela, J. (2017). A procedure to find equivalences among dynamic models of planar biped robots. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 75, 48-66.
- [4] Aloulou, A., & Boubaker, O. (2010, March). Modeling and controlling a humanoid robot in the three dimensional space. In *Proceeding of the IEEE International Symposium on Robotics and Intelligent Sensors, Mar* (p.188).
- [5] Wikipedia contributors. (2018, September 27). Legged robot. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 20:00, April 24, 2019, from [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Legged\\_robot&oldid=861412829](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Legged_robot&oldid=861412829)
- [6] Machado, J. T., & Silva, M. F. (2006, April). An overview of legged robots. In *International symposium on mathematical methods in engineering*. Ankara, Turkey: MME Press.
- [7] Robotplatform.com. (2019). *Robot Platform | Knowledge | Wheeled Robots*. [online] Available at: [http://www.robotplatform.com/knowledge/Classification\\_of\\_Robots/legged\\_robots.html](http://www.robotplatform.com/knowledge/Classification_of_Robots/legged_robots.html)
- [8] Bezerra, C. A. D., & Zampieri, D. E. (2004). Biped robots: the state of art. In *International Symposium on History of Machines and Mechanisms* (p. 372). Springer, Dordrecht. Raibert, M. H. (1986). *Legged robots that balance*. MIT press
- [9] Li, Y., Li, B., Ruan, J., & Rong, X. (2011, September). Research of mammal bionic quadruped robots: A review. In *2011 IEEE 5th International Conference on Robotics, Automation and Mechatronics (RAM)* (p. 166). IEEE.
- [10] Tedeschi, F., & Carbone, G. (2014). Design issues for hexapod walking robots. *Robotics*, 3(2), 181-206.
- [11] Legged robots features, types, uses, advantages and disadvantages. (2019, March 16). Retrieved from <https://www.online-sciences.com/robotics/legged-robots-features-types-uses-advantages-and-disadvantages/>
- [12] Todd, D. J. (2013). *Walking machines: an introduction to legged robots*. Springer Science & Business Media.

- [13] Daachi, M.E (2015). *Cours de Robotique*. Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi Bordj Bou Arreridj.
- [14]Wissama, K., & Etienne, D (1999). *Modélisation et commande des robots* Hermès Sciences Publications.
- [15]Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2010). *Robotics: modelling, planning and control*. Springer Science & Business Media.
- [16] De Luca,A. *Dynamic model of robots:Lagrangian approach*. University of ROMA
- [17] Kelly, R., Davila, V. S., & Perez, J. A. L. (2006). *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media.
- [18] Romagnan, J. P. (2014). *Comprendre la mécanique*. EDP sciences. P.256
- [19] Aloulou, A., & Boubaker, O. (2010). Control of a step walking combined to arms swinging for a three dimensional humanoid prototype. *Journal of Computer Science*, 6(8), p.888
- [20] Arous, Y., & Boubaker, O. (2012, March). Gait trajectory generation for a five link bipedal robot based on a reduced dynamical model. In *2012 16th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference* (p.996). IEEE.
- [21] Hogan, N. (1985). Impedance control: An approach to manipulation: Part I—Theory. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 107(1), pp.1-16.
- [22] Raibert, M. H., & Craig, J. J. (1981, June). Hybrid force/position control of manipulators. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, v.103, pp.126-133.
- [23] Perdereau, V. (1991). *Contribution à la commande hybride force-position. Application à la coopération de deux robots* (Doctoral dissertation, Paris 6).
- [24] Matsuoka, K. (1979). "A Model of Repetitive Hopping Movements in Man". In: *Fifth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms; International Federation for Information Processing*.

## Annexe A:

### A.1 Notions sur la Dynamique:

La dérivation du modèle dynamique d'un manipulateur (identique au robot bipède) joue un rôle important pour la simulation de mouvement, l'analyse des structures du manipulateur et la conception d'algorithmes de contrôle. La simulation du mouvement du robot permet de tester les stratégies de contrôle et les techniques de planification du mouvement sans recourir à un système physiquement disponible. L'analyse du modèle dynamique peut être utile pour la conception mécanique de prototypes. Le calcul des forces et des couples nécessaires à l'exécution de mouvements typiques fournit des informations utiles pour la conception des articulations, des transmissions et d'actionneurs.

Il existe deux méthodes pour dériver les équations du mouvement d'un manipulateur dans l'espace articulaire. La première méthode est basée sur la formulation de Lagrange et est conceptuellement simple et systématique. La seconde méthode est basée sur la formulation Newton – Euler. Dans cette mémoire, nous allons nous concentrer sur la méthode d'Euler-Lagrange et nous ne prendrons pas en considération les masses des actionneurs et leurs moments d'inertie[13].

### A.2 La formulation de Lagrange:

Les références [15-16-17] mentionnée ça.

Le modèle dynamique fournit une description de la relation entre les couples d'actionneur de l'articulation et le mouvement de la structure.

Lagrangien du système mécanique peut être défini en fonction des coordonnées généralisées.

$$L = T - U \quad (1)$$

Où : T et U désignent respectivement l'énergie cinétique totale et l'énergie potentielle totale du système.

Les équations de Lagrange sont exprimées par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Où :  $\tau_i$  est la force (couple) généralisée associée à la coordonnée généralisée  $q_i$  ou l'actionneur de la liaison  $i$ .

### A.3 Energie Cinétique:

L'énergie cinétique de chaque liaison sauf les actionneurs :

$$T_{l_i} = T_{Tr_i} + T_{Ro_i} \quad (3)$$

Où :  $T_{Tr}$  est l'énergie cinétique translationnel et  $T_{R0}$  est l'énergie cinétique rotationnel

**Translationnel :**

$$T_{Tr_i} = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{q}_{l_i}^T \dot{q}_{l_i} \quad (4)$$

Où :  $m_{l_i}$  et  $\dot{q}_{l_i}$  sont la masse et vecteur de vitesse de centre de masse pour chaque liaison  $i$  respectivement.

**Rotationnel :**

$$T_{Ro_i} = \frac{1}{2} \omega_{l_i}^T I_{l_i} \omega_{l_i} \quad (5)$$

Où :  $I_{l_i}$  et  $\omega_{l_i}$  sont la matrice D'inertie et vecteur de la vitesse angulaire pour chaque liaison  $i$  respectivement.

En supposant que la liaison faire une rotation autour son axe z de centre de masse, dans ce cas la  $I_{l_i}$  représenter comme suit [15-16] :

$$I_{l_i} = \begin{bmatrix} I_{l_{i}xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{l_{i}yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{l_{i}zz} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Où :  $I_{l_{i}xx}$ ,  $I_{l_{i}yy}$  et  $I_{l_{i}zz}$  sont les inerties de liaison  $i$  par apport les axe de rotation x et y et z respectivement.

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_{l_i} (a_{l_i}^2 + b_{l_i}^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_{l_i} (3(a_{l_i}^2 + b_{l_i}^2) + h_{l_i}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_{l_i} (3(a_{l_i}^2 + b_{l_i}^2) + h_{l_i}^2) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Où :  $m_{l_i}$ ,  $a_{l_i}$ ,  $b_{l_i}$ ,  $h_{l_i}$  sont la masse et le diamètre externe et interne et la longueur de la liaison cylindrique  $i$  respectivement.

Le moment d'inertie d'un solide par rapport au point G (Centre de masse) choisi comme origine est défini par [18] :

$$I_{l_i} = \frac{1}{2} (I_{l_{i}xx} + I_{l_{i}yy} + I_{l_{i}zz}) \quad (8)$$

En additionnant l'équation 3.3 avec 3.4 on obtient :

$$T_{l_i} = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{q}_{l_i}^T \dot{q}_{l_i} + \frac{1}{2} \omega_{l_i}^T I_{l_i} \omega_{l_i} \quad (9)$$

L'énergie cinétique totale du système est :

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{q}_{l_i}^T \dot{q}_{l_i} + \frac{1}{2} \omega_{l_i}^T I_{l_i} \omega_{l_i} \quad (10)$$

Le module de l'énergie cinétique totale du système :

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_{l_i} \|\dot{q}_{l_i}\|^2 + \frac{1}{2} I_{l_i} \|\omega_{l_i}\|^2 \quad (11)$$

Avec :

$$\omega_{l_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_{l_i} \end{bmatrix}$$

#### A.4 Energie Potentiel:

Voir les référence [15-17] :

$$U_{l_i} = m_{l_i} g^T h_{l_i} \quad (12)$$

L'énergie potentielle totale du système est :

$$U = \sum_{i=1}^n m_{l_i} g^T h_{l_i} \quad (13)$$

Où :  $m_{l_i}$ ,  $g$ ,  $h_{l_i}$  sont la masse et le vecteur de l'accélération gravitationnel et vecteur de position de centre de masse de la liaison  $i$  respectivement.

Le module d'énergie potentielle totale du système est :

$$U = \sum_{i=1}^n m_{l_i} \|g^T\| \|h_{l_i}\| \quad (14)$$

Avec :

$$g^T = [0 \quad g \quad 0] h_{l_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_{l_i} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En remplaçant les équations (3.9) et (3.12) dans (3.1) on obtient l'équation de Lagrange comme suit :

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{q}_{l_i}^T \dot{q}_{l_i} + \frac{1}{2} \omega_{l_i}^T I_{l_i} \omega_{l_i} - m_{l_i} g^T h_{l_i} \quad (15)$$

#### A.5 Le model Dynamique:

L'équation de la modèle dynamique est obtenir à partir de l'application de l'équation d'Euler-Lagrange.

$$M(q, \dot{q}) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (16)$$

Où :  $M$ : la matrice d'inertie du système.

$C$  : La matrice de coriolice et centrifuge.

$G$  : Le vecteur de force de gravitation.

$\tau$  : Vecteur de couples.