

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université de Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi - Bordj Bou Arreridj

Faculté des Sciences et de la technologie

Département d'Electronique

Mémoire

Présenté pour obtenir

LE DIPLOME DE MASTER

FILIERE : ELECTRONIQUE

Spécialité : électronique de système embarqué

Par

MIHOUB Imene

BENSIDHOUM Soumia



Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi - B.B.A. -



Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi - B.B.A. -

Étude, implémentation et comparaison des méthodes de
filtrage variationnelle (l1 et l2 normes)

Soutenu le : 18 septembre 2019

Devant le jury :

- | | | |
|--------------------|--------------|-------------------------------|
| • BEKKOUCHE Toufik | Président | MAA- U. de Bordj Bou Arreridj |
| • HAMADACHE Fouzia | Examineur | MAA- U. de Bordj Bou Arreridj |
| • DIFELLAH Nacira | Encadreur | MAA- U. de Bordj Bou Arreridj |
| • HAMDINI Rabah | Co-Encadreur | |

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

Avant tout développement, il apparaît opportun de commencer ce mémoire par des remerciements tout d'abord Allah le tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre sincère gratitude à notre encadreuse: M'DIFFELLAH Nacira a eu la gentillesse d'avoir proposé, suivi et dirigé ce travail.

Nous voudrions tout d'abord remercier Mr.Hamdini pour ses conseils et ses aides

Nous souhaitons remercier les membres du jury pour nous avoir fait l'honneur d'accepter et de présider le jury de soutenance de notre projet.

Nos remerciements vont aussi à tous ceux qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de cette recherche.

Résumé

Dans le traitement des images, la technique de restauration des images joue un rôle essentiel. Éliminer les bruits des images est un défi problème, pour ce faire nous avons étudié deux techniques de netteté et de réduction d'image utilisant la technique de minimisation de la norme l_1 et de la norme l_2 . L'objectif de ce mémoire est d'explorer les avantages des deux techniques par rapport aux techniques existantes.

Les problèmes de minimisation peuvent être résolus par plusieurs méthodes numériques qui convergent efficacement vers la solution. Nous présentons la résolution par méthode variationnelle. Nous montrons la qualité des images restaurées, en utilisant la minimisation de la norme l_2 , est préférable à celle utilisant uniquement la norme l_1 . Les résultats sont discutés et comparés sur la valeur de base du SNR.

Mots clés : Restauration d'image, norme L_1 , norme L_2 , TV, SNR.

Sommaire

Sommaire

Résumé	i
Liste des abréviations	ii
Sommaire	iii
Liste des tableaux	iv
Liste des figures introduction générale	

Chapitre 1: Les Opérateur opérationnel

I. Introduction	3
II. Espace vectoriel	3
1. Gradient	3
2. Laplacien	3
3. Divergence	4
III. Equations aux dérivés partiels (EDP)	4
1. Définition d'une EDP	4
2. Formulation mathématique d'une EDP	4
IV. Les normes	5
1. Normes L1, L2	5
V. Discrétisation par différence finies	6
1. Discrétisation des dérivées partielles par différences finies	7
VI. Discrétisation spatiale	8
1. Discrétisation des opérateurs vectoriels	8
VII. Interprétation	10
VIII. Conclusion	11

Chapitre 2 : Méthodes de Filtrage

I.	Introduction	12
II.	Bruit	12
	4. Définition de bruit	12
	5. Les différentes sources de bruit	12
	6. Types de bruit et modélisation	13
	a) Bruit additif	13
	b) Bruit multiplicatif	13
	c) Le flou	13
	6.1 Bruit gaussien	14
	6.2 Bruit de poisson	15
	6.3 Bruit Rayleigh	15
	6.4 Bruit sel et poivre	16
	3.5 Bruit Gamma	17
	3.6 Bruit Speckle	18
III.	Filtrage	19
	1. Définition de filtrage	19
	2. Filtrage d'une image par quelques méthodes classiques	19
	2.1 Filtre linéaire	19
	a. Filtre moyenneur	20
	b. Filtre gaussien	23

2.2 Les filtres non linéaires	27
a. Filtre médian	27
b. Filtre Wiener	31
IV. Mesures de qualité	35
1. Rapport signal sur bruit(SNR)	35
V. Interprétation	36
VI. Conclusion	36

Chapitre3: Filtrage variation par L1 et L2 régulation

I. Introduction	38
II. Restauration d'image régularisée basée sur L2	38
a. Régularisation des images par minimisation d'énergies	38
b. Régularisation TV	39
III. Restauration d'image régularisée basée sur L1	41
1. Avantage et inconvénients de l'utilisation de la variation totale	44
IV. Résultat	44
V. Interprétation	49
VI. Conclusion	49

Liste des abréviations

VT	Variation Total
EDP	Equation Différentielle Partielle
SNR	Signal to Noise Ratio
ROF	Rundin-Osher-Fatmi
png	Portable Network Graphics
bmp	BitMap
jpg	Joint Photographic Experts Group

Liste des tableaux

Chapitre 02 Méthode de filtrage

Tab.II.1 Tableau Avantages et Inconvénients de filtrage linéaire et Filtrage non linéaire	35
Tab.III.2. Tableau Avantages et Inconvénients des filtres	36
Chapitre 03 Filtrage variation par L1 et L2 régulation	
Tab.III.1 Avantage et inconvénients de la variation totale	44
Tab.II.2 Tableau mesures de qualité SNR des images	49

Liste des figures

Chapitre 01 : Les Opérateur Opérationnel

Fig.I.1. Maillage d'une matrice

Chapitre 02 : Méthodes de filtrage

Fig.II.0. Exemples de dégradations d'image	14
Fig.II.1. Distribution du bruit gaussienne (PDF).	15
Fig.II.2. Distribution du bruit poivre et sel (PDF).	16
Fig.II.3. Distribution de bruit Gamma (PDF).	18
Fig. II.4. Restauration de Cameramen par filtrage Moyen avec variance $\sigma = 0.08$	20
Fig.II.5. Restauration de Cameramen par filtrage Moyen avec variance $\sigma = 0.15$	21
Fig.II.6. Restauration de Cameramen par filtrage Moyen avec variance $\sigma = 0.18$	21
Fig.II.7. Restauration de Cameramen par filtrage Moyen avec variance $\sigma = 0.20$	22
Fig.II.8. Restauration de Cameramen par filtrage Moyen avec variance $\sigma = 0.25$	23
Fig. II.9: Restauration de Cameramen par filtrage Gaussien avec variance $\sigma = 0.08$	24
Fig. II.10: Restauration de Cameramen par filtrage Gaussien avec variance $\sigma = 0.15$	25
Fig. II.11: Restauration de Cameramen par filtrage Gaussien avec variance $\sigma = 0.18$	26
Fig. II.12: Restauration de Cameramen par filtrage Gaussien avec variance $\sigma = 0.20$	26
Fig.II.13. Restauration de Cameramen par filtrage Médian avec variance $\sigma = 0.08$	27
Fig.II.14. Restauration de Cameramen par filtrage Médian avec variance $\sigma = 0.15$	28
Fig. II.15. Restauration de Cameramen par filtrage Médian avec variance $\sigma = 0.18$	29
Fig.II.16. Restauration de Cameramen par filtrage Médian avec variance $\sigma = 0.20$	29
Fig.II.17. Restauration de Cameramen par filtrage Médian avec variance $\sigma = 0.25$	30

Fig.II.18. Restauration de Cameramen par filtrage Wiener avec variance $\sigma = 0.08$	31
Fig.II.19. Restauration de Cameramen par filtrage Wiener avec variance $\sigma = 0.15$	32
Fig.II.20. Restauration de Cameramen par filtrage Wiener avec variance $\sigma = 0.18$	33
Fig.II.21. Restauration de Cameramen par filtrage Wiener avec variance $\sigma = 0.20$	33
Fig. II.22. Restauration de Cameramen par filtrage Wiener avec variance $\sigma = 0.25$	34

Chapitre 03 Filtrage variation par L1 et L2 régulation

Fig.III.01: cameraman image	45
Fig.III.02: Einstein image	46
Fig.III.03: Tower image	47
Fig.III.04 Lena image	48

Introduction générale

Introduction générale

La restauration des images consiste à améliorer l'image afin de la rendre plus significative à l'œil en renforçant les caractéristiques de l'image originale et en corrigeant les distorsions et les dégradations introduites lors de son acquisition. [Basse Marhaba]

Les différentes techniques de restauration que l'on peut utiliser sont basées sur l'emploi de différents types de filtres. Le filtrage qu'il soit spatial ou fréquentiel, est considéré parmi les techniques classiques de débruitage des images dont on peut citer le filtre moyenneur, le filtre gaussien, le filtre médian et le filtre de Wiener, effectivement ces méthodes sont simples à appliquer et donnent des résultats acceptables de point de vue atténuation de bruit mais elles ont un inconvénient majeur l'atténuation des contours de l'image. Pour pallier à ce problème, de nouvelles techniques plus performantes à base des Equations aux Dérivées Partielles (EDP). [Moussa Embarek]

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont les solutions sont des fonctions inconnues (variables) vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. Les EDPs ont été introduites en traitement d'images en 1984. Partant de l'équation classique de la chaleur, une grande variété d'EDP est utilisée pour résoudre quelques problèmes de base en traitement d'images. Les EDP permettent de décrire l'évolution d'un système à grand nombre de particules. Elles jouent un rôle fondamental dans la modélisation de tels systèmes. [Vincent]

Ces approches permettent en traitement d'image et en vision de traiter des problèmes aussi bien linéaires que non linéaires dans un formalisme rigoureux et bien souvent avec des schémas numériques de résolution efficaces qui assurent le caractère bien posé du problème.

Dans ce mémoire, nous allons étudier la méthode de restauration par filtrage des images bruitées par bruit additif telle que : filtre moyenneur, médian, wiener, gaussien puis nous présentons les normes L_1 et L_2 , utilisés pour résoudre l'algorithme basé sur la minimisation de la variation totale (TV) sont répandus en vision par ordinateur. Ils sont utilisés dans une variété d'applications telles que débruitage d'images. Nous montrons comment cette nouvelle formulation du problème de variation totale peut être résolue par des moyens d'algorithme proximaux parallèles rapides.

Notre mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre constitue des Opérateur opérationnel qui donne les technique lies à notre problématique tels que : les éléments d'analyse vectorielle, les normes utilise et la discrétisation des EDPs par les différences finies.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les bruits et leur source, et les méthodes classiques de restauration pour le filtrage d'une image, nous intéressons aux filtres linéaire (filtre gaussien et filtre moyennneur)et non linéaire (filtre médian et winner).

Dans le dernier chapitre est le cœur de notre problématique, nous allons présenter la technique de monder carrée puis étudier et développer les normes l1 et L2.

Nous terminons par une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Chapitre 1: Les Operateur operationnel

I.	Introduction	3
II.	Espace vectoriel	3
	1. Gradient	3
	2. Laplacien	3
	3. Divergence	4
III.	Equations aux dérivés partiels (EDP)	4
	1. Définition d'une EDP	4
	2. Formulation mathématique d'une EDP	4
IV.	Les normes	5
	1. Normes L1, L2	5
V.	Discrétisation par différence finies	6
	1. Discrétisation des dérivées partielles par différences finies	7
VI.	Discrétisation spatiale	8
	1. Discrétisation des opérateurs vectoriels	8
VII.	Interprétation	10
VIII.	Conclusion	11

Chapitre 1 : Préliminaires mathématiques

I. Introduction

Dans ce chapitre nous présentons quelques notions de base mathématiques dans le domaine de traitement d'image, tels que : le gradient, le Laplacien, la divergence, nous passons par la suite à introduire Equations aux Dérivées Partielle(EDP) qui s'expriment en fonction de deux variables spatiales et un variable temporelle. Nous passons par suit à introduire la discrétisation des dérivées partielles par différence finie.

II. Espace vectoriel

On donne l'expression suivante des opérateurs mathématiques gradient, divergence, Laplacien, en coordonnées scalaires dans un espace à n dimension, tous ces opérateurs sont construits à l'aide de l'opérateur fondamental Nabla $\vec{\nabla}$.

1. Gradient [M. Bendjeffal &all]

Le gradient est un vecteur représentant la variation d'une fonction par rapport à la variation de ses différents paramètres définit comme suit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} u(x, y) = \vec{\nabla} u(x, y) \quad (\text{I.0})$$

Que l'on note également :

$$\overrightarrow{\text{grad}} u(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \vec{j} \quad (\text{I.1})$$

2. Laplacien [H.Lagoune &all ,2017]

Le Laplacien est l'opérateur différentiel défini par l'application de l'opérateur gradient suivie de l'application de l'opérateur divergence, le Laplacien d'un champ est égal à la somme des dérivées secondes de ce champ par rapport à chacune des variables.

$$\Delta = \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} u(x, y)) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u(x, y)) = \nabla^2 u(x, y) \quad (\text{I.2})$$

Le Laplacien est donnée par l'équation :

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \quad (\text{I.3})$$

3. Divergence [H.Lagoune &all]

La divergence notée *div* est un opérateur différentiel linéaire de degré 1, n'est défini qu'à parti d'une fonction vectorielle de $v(M)$ point et donne une fonction scalaire de point définie, en coordonnées par :

$$\text{div } v = \overrightarrow{\text{grad}} v \quad (\text{I.4})$$

Ou bien

$$\text{div } v = \nabla v \quad (\text{I.5})$$

Que l'on note également :

$$\text{div } v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \quad (\text{I.6})$$

La divergence obtenue est un champ scalaire

III. Equations aux dérivés partiels (EDP)

1. Définition d'une EDP [Meriem Hacini]

EDP permettent de décrire l'évolution d'un système à grand nombre de particules. Elles jouent un rôle fondamental dans la modalisation de tels systèmes, les particules deviennent des pixels. Si chaque problème de traitement d'image peut être traduit dans un énoncé ou l'aspect évolutif d'un système en jeu, l'écriture variationnelle par EDP s'impose comme outil de modélisation. Spécifiquement, la résolution des problèmes inverses s'effectue en stabilisation les problèmes mais pose à partir de techniques de régularisation.

2. Formulation mathématique d'une EDP [Olivier Lavalie]

L'ordre d'une EDP est l'ordre le plus élevé parmi les dérivées partielles apparaissant dans l'EDP. Notre étude dans ce mémoire est restreinte aux EDP d'ordre inférieur ou égal à deux.

Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction à n variable

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = f \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^p \partial y^{n-p}} \right) \quad (I.7)$$

En nous plaçant dans le cadre de l'amélioration d'une image en niveaux de gris, la formulation par EDP implique classiquement la modélisation de l'image par un ensemble discret de points (pixels). En considérant la luminance comme une fonction de coordonnées spatiales (x, y) et du temps t , les propriétés de l'image restaurée sont obtenues au travers d'une EDP ayant comme arguments la fonction luminance et ses dérivées partielles, la solution de cette EDP, à un certain instant t , représente l'image restaurée (améliorée)

Donc

$$u(x, y, t) = f \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^p \partial y^{n-p}} \right) \quad (I.8)$$

IV. Les normes ⁽¹⁾

En géométrie, la norme est une extension de la valeur absolue des nombres aux vecteurs. Elle permet de mesurer la longueur commune à toutes les représentations d'un vecteur dans un espace affine, mais définit aussi une distance entre deux vecteurs invariante par translation et compatible avec la multiplication externe.

La norme usuelle dans le plan ou l'espace est dite euclidienne car elle est associée à un produit scalaire, à la base de la géométrie euclidienne.

1. Normes L1, L2

Un vecteur de dimension n

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n \quad (I.9)$$

Une norme vectorielle générale $|x|$, parfois écrite avec une double barre sous la forme $\|x\|$, est une norme non négative définie telle que :

$$|x| > 0 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } |x| = 0.$$

$$|kx| = |k| |x|.$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Une barre unique désigne une norme vectorielle, une valeur absolue ou un module complexe, tandis qu'une barre double est réservée à une norme matricielle.

La norme de vecteur $|x|_p$ pour $p = 1, 2, 3, \dots$ est définie comme :

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^l |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{I.10})$$

Norme 1 : c'est la somme des valeurs absolues

$$L_1(x) = \sum_{i=1}^l |x_i| \quad (\text{I.11})$$

Et norme 2 ce donne :

$$L_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^l |x_i|^2} \quad (\text{I.12})$$

Les normes L2 dans les deux cas sont dites attachées au produit scalaire correspondant dans le cas d'espaces vectoriels réels.

V. Discrétisation par différence finies [Guerchouche Nouara]

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées partielles des équations au moyen des développement de Taylor ou combinaisons de valeur ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage comme le montre la figure suivante :

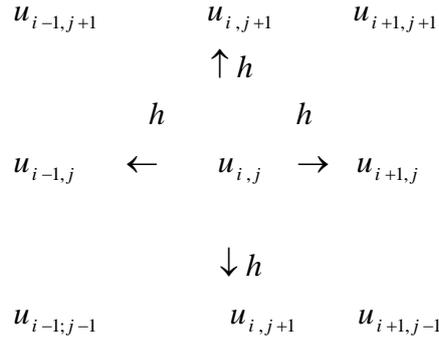


Fig1.1. Maillage d'une matrice

1. Discrétisation des dérivées partielles par différences finies

Considérons un cas monodimensionnel ou l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x, y)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N + 1$ points x_i pour $i = 0, 1, \dots, N$ régulièrement espacés avec un pas h .

On note $u_{i,j}^n$ la fonction de $u(x, y, t)$ au nœud x_i à l'instant $n\Delta t$. De même pour la dérivée de $u(x, y)$ au nœud x_i à l'instant $n\Delta t$.

a. Dérivée à droit centrée

$$u_x^+ = \frac{\partial u^+}{\partial x} \underset{\text{Discrétisation}}{\nabla_x^+} u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \tag{I.13}$$

b. Dérivée à gauche centrée

$$u_x^- = \frac{\partial u^-}{\partial x} \underset{\text{Discrétisation}}{\nabla_x^-} u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \tag{I.14}$$

c. Dérivée à gauche avant

$$u_x^{0-} = \frac{\partial u^{0-}}{\partial x} \underset{\text{Discrétisation}}{\nabla_x^-} u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h} \tag{I.15}$$

d. Dérivée à droit avant

$$u_x^{0+} = \frac{\partial u^{0+}}{\partial x} \underset{\text{Discrétisation}}{\nabla_x^+} u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} \tag{I.16}$$

e. Dérivée centrée

$$u_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \underset{\text{Discrétisation}}{\nabla_x^0} u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \tag{I.17}$$

f. Dérivée centrée avant

$$u_y^+ = \frac{\partial u^+}{\partial y} \underset{\text{Discrétisation}}{\nabla_y^+} u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} \quad (\text{I.18})$$

g. Dérivée centrée arrière

$$u_y^- = \frac{\partial u^-}{\partial y} \underset{\text{Discrétisation}}{\nabla_y^-} u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h} \quad (\text{I.19})$$

h. Dérivée à gauche arrière

$$u_y^{0-} = \frac{\partial u^{0-}}{\partial y} \underset{\text{Discrétisation}}{\nabla_y^{0-}} u_{i,j}^n = \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2h} \quad (\text{I.20})$$

Dérivée centrée

$$u_y^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} \underset{\text{Discrétisation}}{\nabla_y^0} u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \quad (\text{I.21})$$

g. Dérivée à droit avant

$$u_y^{0+} = \frac{\partial u^{0+}}{\partial y} \underset{\text{Discrétisation}}{\nabla_y^{0+}} u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2h} \quad (\text{I.22})$$

VI. Discrétisation spatiale

Soit $u(x, y, t)$ une fonction de l'espace et du temps .par définition de la dérivée par rapport a t, on a :

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta t, y, t) - u(x, y, t)}{\Delta t} \quad (\text{I.23})$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \rightarrow \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t} \quad (\text{I.24})$$

1 .Discrétisation des opérateurs vectoriels

a. Gradient :

Le gradient en deux dimensions s'écrit comme suit :

$$\nabla u(x, y, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (I.25)$$

Notion : $\nabla u(x, y, t)$ Discrétisation $\begin{pmatrix} \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial y} \end{pmatrix}$ (I.26)

Divergence :

Soit le vecteur v défini par $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, la divergence de ce vecteurs s'écrit comme suit :

$$\text{div } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (I.27)$$

La divergence peut aussi s'écrire :

$$\text{div } v = \nabla \cdot \vec{v} \quad (I.28)$$

Après la discrétisation :

$$\text{div } \vec{v} \text{ Discrétisation } = \nabla \cdot \vec{v}_{i,j} \quad (I.29)$$

$$\text{div } \vec{v} \text{ Discrétisation } = v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n + v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n \quad (I.30)$$

c .Laplacien :

Laplacien de u est donné comme suit :

$$\Delta u(x, y, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (I.31)$$

Après discrétisation on trouve :

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \underset{\text{Discrétisation}}{\approx} \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (\text{I.32})$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \underset{\text{Discrétisation}}{\approx} \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \quad (\text{I.33})$$

Laplacien devient :

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \underset{\text{Discrétisation}}{\approx} \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \quad (\text{I.34})$$

On peut écrire l'équation (I.28) sous plusieurs formes comme :

a) Première formulation :

$$\Delta u(x, y, t) \underset{\text{discrétisation}}{\approx} \Delta u_{i,j}^n = \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n}{h^2} \quad (\text{I.35})$$

b) Deuxième formulation :

$$\Delta u(x, y, t) \Delta u_{i,j}^n = \frac{(u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n) + (u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n) + (u_{i,j-1}^n + u_{i,j}^n) + (u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n)}{h^2} \quad (\text{I.36})$$

c) Troisième formulation :

$$\Delta u(x, y, t) \underset{\text{Discrétisation}}{\approx} \Delta u_{i,j}^n$$

$$\Delta u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{h^2} - \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} - \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n}{h^2} - \frac{u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h^2} \quad (\text{I.37})$$

VII. Interprétation

L'équations aux dérivées partielles (EDP) et des méthodes variationnelle. Par souci de cohérence avec notre travail, nous avons choisi de nous limiter aux approches basées sur la régularisation continue par EDP. Notre objectif est de transcrire certaines de ces EDP dans un cadre discret pour différentes applications de la régularisation

VIII. **Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu des bases mathématiques sur lesquelles repose la restauration d'images telles que les éléments d'analyse vectorielle ainsi que le principe de discrétisation temporelle et spatiale à base des différences finies.

Chapitre 2

Méthodes de filtrage

Chapitre 2 : Méthodes de Filtrage

I.	Introduction	12
II.	Bruit	12
	1. Définition de bruit	12
	2. Les différentes sources de bruit	12
	3. Types de bruit et modélisation	13
	a) Bruit additif	13
	b) Bruit multiplicatif	13
	c) Le flou	13
	3.1 Bruit gaussien	14
	3.2 Bruit de poisson	15
	3.3 Bruit Rayleigh	15
	3.4 Bruit sel et poivre	16
	3.5 Bruit Gamma	17
	3.6 Bruit Speckle	18
III.	Filtrage	19
	1. Définition de filtrage	19
	2. Filtrage d'une image par quelques méthodes classiques	19
	2.1 Filtre linéaire	19
	a. Filtre moyennneur	20
	b. Filtre gaussien	23
	2.2 Les filtres non linéaires	27

a. Filtre médian	27
b. Filtre Wiener	31
IV. Mesures de qualité	35
1. Rapport signal sur bruit(SNR)	35
V. Interprétation	36
VI. Conclusion	36

Chapitre 2 : Méthode de filtrage

I. Introduction

Le filtrage d'une image peut être vu comme une opération de restauration puisqu'il permet d'enlever tous les artefacts et les bruit pour la rapprocher plus de l'image d'origine tout en conservant la même résolution spatiale .la méthode de filtrage la plus basique est le filtre gaussien fondé sur l'hypothèse de continuité des images mais cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée, pour cela plusieurs méthodes on été présentées pour résoudre ces problèmes.

II. Bruit

1. Définition du bruit [Lakhdari Rachida]

Le bruit c'est signal "parasite" dont la distribution dans l'image est aléatoire et la plupart du temps inconnue.

La variation soudaine d'un pixel par rapport à ses voisins est un phénomène qu'on appelle bruit. Ce dernier peut provenir de l'éclairage, des dispositifs électroniques du capteur.

2. Les différentes sources de bruit [Sukhjinder .Kaur]

- si l'image est numérisée à partir d'une photo prise sur film, le grain du film est la source de bruit. Bruit peut également être le résultat de l'endommagement du film ou être introduit par le scanner lui-même.
- Si l'image est acquise directement au format numérique, le mécanisme de collecte des données peut introduire du bruit.
- Des niveaux de lumière et une température de capteur insuffisants peuvent introduire le bruit dans l'image.
- La transmission électronique de données d'image peut introduire bruit.
- Des interférences dans le canal de transmission peuvent également corrompre l'image.
- Si des particules de poussière sont présentes sur l'écran du scanner, ils peuvent aussi introduire du bruit dans l'image.

3. Types de bruit et modélisation

On peut définir le bruit comme étant une dégradation dans l'image, provoquée par une perturbation externe. Si une image est envoyée par voie électronique d'un endroit à un autre, via le satellite ou la transmission sans fil, ou par le câble réseau, on peut s'attendre à des erreurs se produisant dans le signal de l'image. Ces erreurs apparaissent sur l'image de sortie de différentes manières en fonction du type de la perturbation dans le signal. Généralement, on peut savoir les types d'erreurs à attendre, et donc le type de bruit sur l'image, d'où nous pouvons choisir la méthode la plus adaptée pour réduire les effets. Le filtrage d'une image corrompue par le bruit est donc un domaine important de la restauration d'image.

Si l'image est représentée comme u , et le bruit gaussien par η . On distinguera trois types de dégradations :

a. Bruit additif

Ces dégradation sont liées au capteur qui provoque par l'erreur de mesure, par fois ces dégradation sont liées à la perturbation de l'environnement comme une tache de café, elles sont modélisées par l'équation :

$$f = K u + \eta \quad (\text{II.01})$$

Où f image dégradée (observée), K est un masque.

b. Bruit multiplicatif

Le bruit multiplicatif est un phénomène commun dans tous les systèmes d'imagerie cohérents tels que le laser, l'acoustique, les ultrasons.

En général, le bruit multiplicatif est modélisé selon l'expression suivante:

$$f = k u \cdot \eta \quad (\text{II.02})$$

c. Le flou

Le flou peut provenir d'une erreur de manipulation du matériel d'acquisition telle qu'une mauvaise focalisation ou un bougé.

Alors nous pouvons modeler une image floutée par l'équation :

$$f = k u * \eta \quad (\text{II.03})$$

En plus, le flou apparait dans l'image de différentes manières à savoir

La figure II.2 montre la dégradation d'une image par flou sur l'image 'camera man.jpg' :



a) Image original



b) Image floutée

Fig.II.0. Exemples de dégradations d'image

3.1 Bruit gaussien (Bruit d'amplificateur) [Mr.Rohit.Verma &all]

Le terme modèle de bruit normal est le synonyme de bruit gaussien.

Ce modèle de bruit est de nature additive et suit la distribution gaussienne. Cela signifie que chaque pixel de l'image bruyante est la somme de la valeur de pixel vraie et d'une valeur aléatoire de bruit distribué gaussien. Le bruit est indépendant de l'intensité de valeur de pixel à chaque point. Le PDF de la variable aléatoire gaussienne est donné par:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{II.4})$$

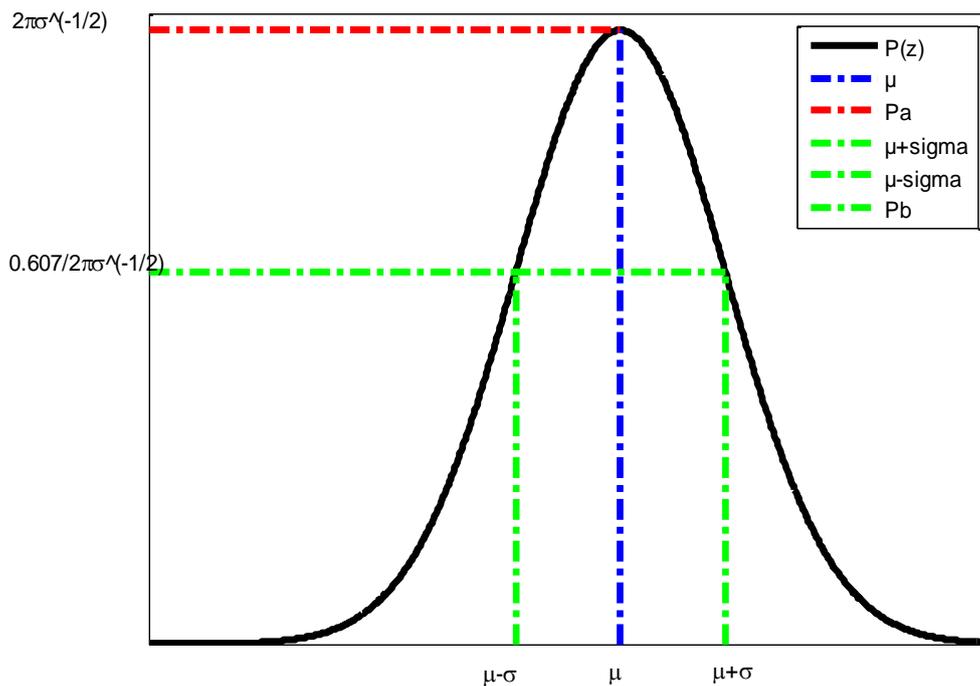


Figure II.1. Distribution du bruit gaussienne (PDF).

$P(z)$ est le bruit de distribution gaussien en image; μ et σ sont respectivement l'écart moyen et l'écart type.

En raison de ce même caractère aléatoire, la courbe de bruit gaussienne normalisée se présente sous la forme d'une cloche. Le PDF de ce modèle de bruit montre que 70% à 90% des valeurs de pixels brouillés d'image dégradée dans entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$. La forme de l'histogramme normalisé est presque identique dans le domaine spectral.

3.2. Le bruit de Poisson [SLIMANI Hanane &all]

Le bruit de Poisson ou le bruit de projectile est un type de bruit électronique qui se produit quand le nombre fini de particules qui portent l'énergie, telle que des électrons dans un circuit électronique ou des photons dans un circuit optique, est assez petit pour provoquer des fluctuations statistiques discernables dans une mesure.

3.3 Bruit Rayleigh [M. M. Puranik &All]

Une distribution de bruit de Rayleigh est souvent observée quand la grandeur globale d'un vecteur est liée à ses composants directionnels qui est où Rayleigh la distribution se

produit naturellement est lorsque la vitesse du vent est analysé dans son vecteur orthogonal à deux dimensions Composants

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-\frac{(z-a)^2}{b}} & \text{for } z \geq a \\ 0 & \text{for } z < a \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

3.4 Bruit sel et poivre [SLIMANI Hanane &All]

Ce type contient des occurrences aléatoires des valeurs d'intensité de noir et de blanc, et souvent causé par le seuil de l'image bruitée.

Le bruit de distribution du bruit « sel et poivre » peut être exprimé par:

$$p(z) = \begin{cases} p_a & z = a \\ p_b & z = b \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Où p_a , p_b sont les Fonctions de Densité de Probabilités (pdf), $p(z)$ est la distribution du bruit «sel et poivre» dans l'image.

La figure II.2 présente l'allure de la distribution du bruit poivre et sel.

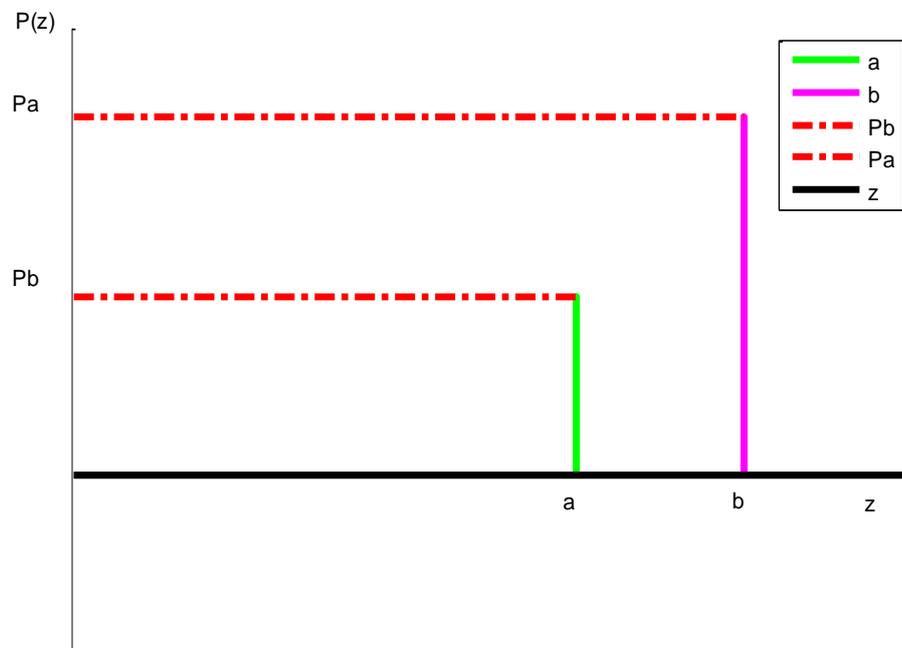


Figure. II.2. Distribution du bruit poivre et sel.

Si la moyenne est égale à zéro et que la variance est égale à 0,05. Ici nous avons deux pointes, l'une pour la région claire (où le niveau de gris est inférieur) appelée "région a" et une autre est une région sombre (où le niveau de gris est élevé) appelée «région b», nous avons clairement vu ici le format PDF.

Les valeurs sont minimum et maximum dans 'région a' et 'région b' respectivement. Sel et poivre le bruit a généralement corrompu l'image numérique par un dysfonctionnement des éléments de pixel dans l'appareil photo capteurs, espace de mémoire défectueux dans la mémoire, erreurs de numérisation, etc.

3.5 Bruit Gamma [M.M.Puranik &All]

Ce type de bruit peut être obtenu par un filtrage passe-bas des images basées par laser.

$$k = \frac{a(b-1)^{b-1}}{(b-1)!} e^{-(b-1)} \quad (\text{II.7})$$

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & \text{for } z \geq 0 \\ 0 & \text{for } z < 0 \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Où moyenne $\mu = \frac{a}{b}$ et variance $\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$

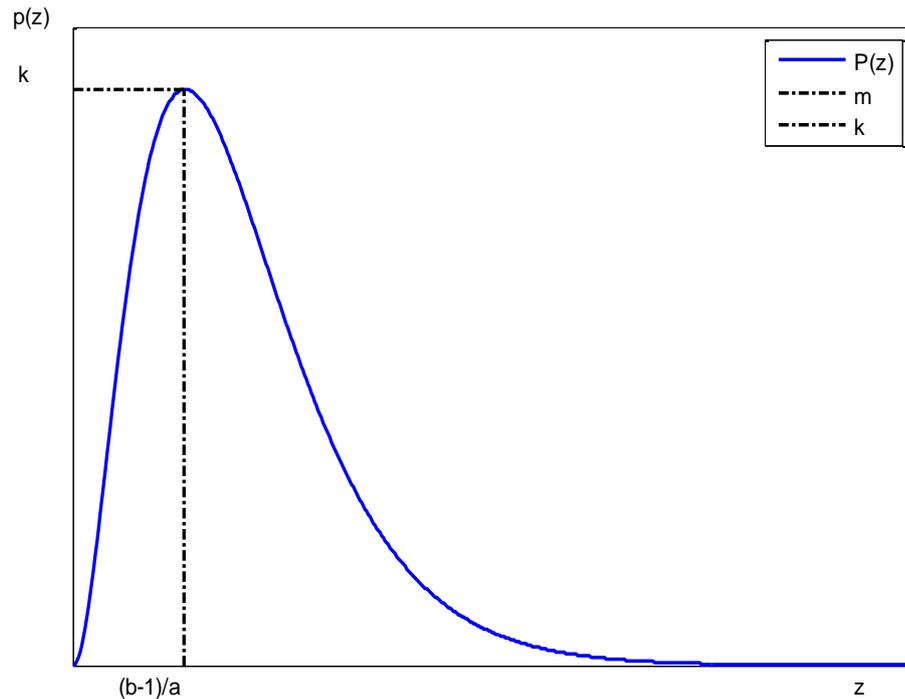


Figure. II.3. Distribution de bruit Gamma (PDF).

3.6 Bruit Speckle [Sukhjinder. Kaur &All]

Bruit Speckle ou chatoiement est un bruit multiplicatif contrairement au gaussien et bruit de poivre et sel Ce bruit peut être modélisé par vale aléatoire multiplications avec les valeurs de pixel de l'image et peut être exprimé comme $p = I + n * I$ Où P est l'image de la distribution du bruit de tavelure, I est l'entrée image et n est l'image de bruit uniforme de moyenne 0 et écart v .

Le bruit de chatoiement est couramment observé dans les systèmes de détection radar, bien qu'il puisse apparaître dans n'importe quel type d'image de télédétection utilisant un rayonnement cohérent. Comme la lumière d'un laser, le les ondes émises par les capteurs actifs se déplacent en phase et interagissent minimalement sur leur chemin vers la zone cible. Réduire l'effet du bruit de chatoiement permet à la fois une meilleure discrimination de la scène cibles et segmentation automatique plus facile des images.

III. Filtrage

1. Définition de filtrage [Lamraoui .Djedjiga &All]

Le principe du filtrage est de modifier la valeur des pixels d'une image, généralement dans le but d'améliorer son aspect. En pratique, il s'agit de créer une nouvelle image en se servant des valeurs des pixels de l'image d'origine. N'entrent pas dans la catégorie du filtrage toutes les transformations de l'image d'origine : zoom, découpage, projections, ...

2. Filtrage d'une image par quelques méthodes classiques

Différentes méthodes de filtrage ont été développées suivent le type et l'intensité du bruit, les premières et les plus simple de ces méthodes sont basées sur le filtrage linéaire stationnaire (invariant par translation), mais les limitations de ces technique (en particulier leur mauvaise conservation des transitions) a conduit au développement des filtres 'non linéaire'.

2.1 Filtrage linéaire

Le filtrage linéaire est la convolution d'une image (x, y) avec une fonction (x, y) qui s'appelle réponse impulsionnelle du filtre, Dans le cas continu

$$I(x, u) = (f * I)(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y') \cdot I(x - x', y - y') dx' dy' \quad (II.9)$$

Dans le cas discret, les domaines de I et de f sont bornés

Le domaine de I est $\left[-\frac{N}{2}, +\frac{N}{2}\right]$ et le domaine de f est $\left[-\frac{K}{2}, +\frac{K}{2}\right]$

On a nécessairement $K \leq N$, N étant la taille de l'image. Dans le cas discret la convolution s'écrit par :

$$f(x, u) = (f * I)(x, y)$$

$$(f * I)(x, y) = \sum_{i'=-\frac{K}{2}}^{+\frac{K}{2}} \sum_{j'=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} f(i - i', j - j') \cdot I(i', j') \quad (II.10)$$

Le filtrage linéaire consiste donc à remplacer chaque niveau de gris par une combinaison linéaire des niveaux de gris des points voisins, les coefficients de cette combinaison linéaire sont définis par la réponse impulsionnelle du filtre.

L'utilisation des filtres linéaires provient de l'extension des méthodes mises au point pour le traitement du signal au traitement des images numériques Ceci est dû au fait qu'une image numérique est considérée comme un signal bidimensionnel numérisé.

a) Filtre moyenneur

Le filtre moyenneur est un filtre passe-bas permettant ainsi d'éliminer les hautes fréquences, correspondant au bruit. Son inconvénient est qu'il élimine également les hautes fréquences correspondant aux détails de l'image : il rend ainsi l'image moins bruitée mais plus floue.

— Sigma varier le masque fixe

$$\sigma = 0.08 \quad M = 3 \times 3$$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig.II.4 : Restauration de Cameramen par filtrage Moyen

$$\sigma = 0.08 \quad M = 3 \times 3$$

$\sigma = 0.15$ $M = 3 \times 3$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig.II.5. Restauration de Cameramen par filtrage moyen

$\sigma = 0.15$ $M = 3 \times 3$

$\sigma = 0.18$ $M = 3 \times 3$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.6. Restauration de Cameramen par filtrage Moyen
 $\sigma = 0.18$ $M = 3 \times 3$

$\sigma = 0.20$ $M = 3 \times 3$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.7. Restauration de Cameramen par filtrage Moyen
 $\sigma = 0.20$ $M = 3 \times 3$

$$\sigma = 0.25 \quad M = 3 \times 3$$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.8. Restauration de Cameramen par filtrage Moyen
 $\sigma = 0.25 \quad M = 3 \times 3$

b) Filtre gaussien

Le filtre Gaussien est un exemple de filtre linéaire dont les coefficients, choisis avec plus de soins, permettent un traitement moins grossier de l'image.

Le filtre Gaussien est utilisé comme constituant du masque flou qui améliore la netteté apparente des photographies numériques. Bien qu'il soit popularisé par la photographie plus ou moins artistique, il est également utilisé dans certaines techniques, comme l'astronomie

Les coefficients du masque pour un filtre 3*3 sont: $\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Les coefficients sont calculés en utilisant des pondérations gaussiennes. Des itérations successives permettent d'obtenir le Gaussien 5*5 (2 itérations) et le Gaussien 7*7 (3 itérations)

— Sigma varier le masque fixe

$$\sigma = 0.08$$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.9 Restauration de Cameramen par filtrage Gaussien
 $\sigma = 0.08$

$\sigma = 0.15$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

*Fig .II.10. Restauration de Cameramen par filtrage Gaussien
 $\sigma = 0.15$*

$\sigma = 0.18$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.11. Restauration de Cameramen par filtrage Gaussien
 $\sigma = 0.18$

$\sigma = 0.20$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.12. Restauration de Cameramen par filtrage Gaussien
 $\sigma = 0.20$

2.2 Les filtres non linéaires

Ces opérateurs ont été développés pour pallier aux insuffisances des filtres linéaires : principalement la mauvaise conservation des contours. Ils ont le défaut d'infliger des déformations irréversibles à l'image.

a) Filtre médian

Le filtrage par la médiane est le filtre d'ordre le plus connu. Il produit un adoucissement de l'image puisque la valeur du point central d'une fenêtre est affectée par celle de ses voisins.

À la différence du filtre linéaire classique, on n'effectue pas une moyenne, mais on prend la valeur médiane, c'est-à-dire celle qui par classement en valeur croissante, se trouve au milieu

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ donne } (1 \ 1 \ 1 \ 2 \rightarrow 2 \ 3 \ 3 \ 4)$$

Dans ce cas, la valeur du point central devra être mise à 2

— **Sigma varier le masque fixe**

$$\sigma = 0.08 \quad M = 3 \times 3$$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.13.Restauration de Cameramen par filtrage Médian
 $\sigma = 0.08 \quad M = 3 \times 3$

$\sigma = 0.15 \quad M = 3 \times 3$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.14.Restauration de Cameramen par filtrage Médian
 $\sigma = 0.15 \quad M = 3 \times 3$

$\sigma = 0.18$ $M = 3 \times 3$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.15.Restauration de Cameramen par filtrage Médian

$\sigma = 0.18$ $M = 3 \times 3$

$\sigma = 0.20$ $M = 3 \times 3$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.16.Restauration de Cameramen par filtrage Médian

$\sigma = 0.20$ $M = 3 \times 3$

$\sigma = 0.25$ $M = 3 \times 3$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.17.Restauration de Cameramen par filtrage Médian

$\sigma = 0.25$ $M = 3 \times 3$

b) Filtre Wiener

Il peut être utilisé pour restaurer les images bruitées, ainsi que pour le filtrage. Les filtres de Wiener sont caractérisés par :

- **Prétention:** le signal et le bruit (additif) sont des processus aléatoires linéaires stationnaires avec des caractéristiques spectrales connues.
- **Condition:** le filtre doit être physiquement réalisable, c-à-d. causal (cette condition peut être abandonnée, ayant pour résultat une solution non-causale)
- **Critères d'exécution:** l'erreur minimum de moyenne carrée.

Le filtre de Wiener est donné par l'expression

$$G(u, v) = \frac{H^*(u, v) P_S(u, v)}{|H(u, v)|^2 p_S(u, v) + p_n(u, v)} \quad (\text{II.11})$$

— Sigma varier le masque fixe

$$\sigma = 0.08 \quad M = 5 \times 5$$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.18. Restauration de Cameramen par filtrage Wiener
 $\sigma = 0.08 \quad M = 5 \times 5$

$\sigma = 0.15 \quad M = 5 \times 5$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.19. Restauration de Cameramen par filtrage Wiener
 $\sigma = 0.15 \quad M = 5 \times 5$

$\sigma = 0.18$ $M = 5 \times 5$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.20. Restauration de Cameramen par filtrage Wiener
 $\sigma = 0.18$ $M = 5 \times 5$

$\sigma = 0.20$ $M = 5 \times 5$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.21. Restauration de Cameramen par filtrage Wiener

$\sigma = 0.20$ $M = 5 \times 5$

$\sigma = 0.25$ $M = 5 \times 5$



a) image originale



b) Image bruitée



c) Image filtrée

Fig .II.22. Restauration de Cameramen par filtrage Wiener

$\sigma = 0.25$ $M = 5 \times 5$

Tab.II.1 Tableau Avantages et Inconvénients de filtrage linéaire et Filtrage non linéaire

Type de filtrage	Avantages	Inconvénients
filtrage linéaire	<ul style="list-style-type: none"> - très simple et rapide. - filtre de Gauss plus robuste que moyenneur. 	<ul style="list-style-type: none"> - peu robuste. - filtre de Gauss plus complexe à calculer. - complexité.
Filtrage non linéaire	<ul style="list-style-type: none"> - Le filtrage médian est plus adapté que le filtrage linéaire pour réduire le bruit impulsionnelle. - donne des résultats de restauration acceptables. 	<ul style="list-style-type: none"> - atténuer les contours de l'image. - s'accompagne d'un étalement des transitions entre régions. - La réduction de bruit

IV. Mesures de qualité [Lamraoui. Djedjiga &All]

La mesure de la qualité des images est nécessaire dès lors qu'une image subit une dégradation afin de pouvoir quantifier le degré de gêne provoqué par cette dernière. Parmi les métriques les plus utilisés, on retrouve la mesure le rapport signal sur bruit (Signal to Noise Ratio : SNR).

-Rapport signal sur bruit (SNR)

Le SNR compare le niveau du signal désiré au niveau du bruit de fond. Plus le SNR est élevé, et plus le bruit est faible dans l'image, et vice versa. L'expression de SNR est donnée dans la formule

$$SNR = 10 \log(\sigma_g^2 / \sigma_e^2) \tag{II.12}$$

σ_g Est la variance de l'image originale et σ_e est la variance de l'erreur entre l'image originale et l'image bruitée

V. Interprétation

Tab.II.2. Tableau Avantages et Inconvénients des filtres

Type de filtrage	Avantages	Inconvénients
Filtre de moyenneur	<ul style="list-style-type: none"> - très simple et rapide. 	<ul style="list-style-type: none"> - forte atténuation de contours. - forte influence des pixels. - élimine également les hautes fréquences correspondant aux détails de l'image.
Filtre médian	<ul style="list-style-type: none"> - supprimer les pixels isolés. - Contrairement au flou. - Respect des contours. - résistance accru au bruit. 	<ul style="list-style-type: none"> - Peut s'applique aux images binaires et le résultat restera une image binaire - Produit un épaissement des contours - Supprime les détails fins qui ne sont pas bruit. - Couteux en temps de calcul.
Filtre de Wiener	<ul style="list-style-type: none"> - Employé fréquemment pour éliminer du bruit additif. - Minimiser l'erreur d'estimation quadratique moyenne. 	<ul style="list-style-type: none"> - Fournissez seulement une estimation ponctuelle.

VI. Conclusion

Les filtres sont les meilleurs pour éliminer le bruit à partir des images. Dans ce chapitre, nous décrivons différents types de modèles de bruit et techniques de filtrage. Les techniques de filtrage sont divisées en deux parties techniques linéaires et non linéaires. Après étudier les filtres linéaires et non linéaires.

Chapitre 3

*Filtrage variation par L1 et L2
régulation*

Chapitre3: Filtrage variation par L1 et L2 régulation

I.	Introduction	38
II.	Restauration d'image régularisée basée sur L2	38
	a. Régularisation des images par minimisation d'énergies	38
	b. Régularisation TV	39
III.	Restauration d'image régularisée basée sur L1	41
	1. Avantage et inconvénients de l'utilisation de la variation totale	44
IV.	Résultat	44
V.	Interprétation	49
VI.	Conclusion	49

Chapitre 03 : Filtrage variation par L1 et L2 régulation

I. Introduction

Dans ce chapitre nous allons utiliser la méthode de résolution par deux algorithmes basés en L1 et L2, Nous allons utiliser un algorithme de descente de gradient standard, pour retrouver une image qui est décrite par un modèle de bruit additif où une image modélisée par une fonction de deux variables, soit :

$$f = u + \eta \quad (\text{III.0})$$

Tel que : f image bruité, u image originale et η bruit est souvent de moyenne nulle et décrit par sa variance σ^2 . Pour reconstruire f à partir de u , nous devons résoudre le problème

II. Restauration d'image régularisée basée sur L2 :

Etant donnée une image originale, on suppose qu'elle a été dégradée par un bruit additif η à partir de l'image dégradée f (images bruitées) de l'image originale u , on cherche à reconstruire u , si suppose que la bruit additif η est gaussien, la méthode du maximum de vraisemblance nous conduit à chercher u comme solution du problème de minimisation ou $\|\cdot\|_2$ désigne la norme dans L_2 . Il s'agit d'un problème inverse mal posé. Pour le résoudre numériquement, on est amené à introduire un terme de régularisation, et à considérer le problème.

a. Régularisation des images par minimisation d'énergies

Il est classique d'aborder le problème inverse par la méthode de régularisation. Il s'agit de minimiser une énergie de deux termes, l'un de régularité E_{lissage} et l'autre d'attache aux données E_{attache} :

$$E(u, f) = E_{\text{lissage}}(u, f) + E_{\text{attache}}(u) \quad (\text{III.1})$$

Où E_{lissage} est un terme de régularisation représentant l'information a priori sur la fonction à traiter. E_{attache} est un terme de fidélité aux données. Le rapport de force entre ces deux termes est contrôlé par la variable λ . Les différentes méthodes de régularisation diffèrent par le choix des termes E_{lissage} et E_{attache}

b. Régularisation TV

Il existe un autre modèle de régularisation classique qui est la variation totale (TV). Son intérêt majeur réside dans le fait qu'elle préserve les discontinuités qui peuvent se voir comme les contours. Grâce à cette qualité, la régularisation TV est largement utilisée dans de nombreuses applications en traitement d'images. Le terme de régularité favorise fortement les images très lisses. En particulier, ce terme n'autorise pas les discontinuités. En 1992, Rudin et al. ont proposé d'utiliser, à la place de la norme du gradient dans L2 la variation totale de l'image f afin de préserver les contours. Ils posent le problème de minimisation :

$$\min_u J(u(x, y; t)) = \min_u \left\{ \frac{1}{2} \|u(x, y; t) - f(x, y; t)\|^2 + \lambda \frac{1}{2} \|\nabla u(x, y; t)\|^2 \right\} \quad (\text{III.2})$$

$$\min_u J(u) = \min_u \{J_1(u) + \lambda J_2(u)\} \quad (\text{III.3})$$

$$J_1(u(x, y; t)) = \frac{1}{2} \|u(x, y; t) - f(x, y; t)\|^2 \quad (\text{III.4})$$

$$J_2(u(x, y; t)) = \frac{1}{2} \|\nabla u(x, y; t)\|^2 \quad (\text{III.5})$$

$J_1(u(x, y; t))$ Le terme de fidélité qui oblige l'image finale à ne pas être trop loin de l'image initiale. Notez que le terme de fidélité est le fonctionnel convexe.

$J_2(u(x, y; t))$ Le second terme est également le terme de régularisation qui effectue réellement la réduction du bruit.

Pour minimiser cette énergie fonctionnelle nous procédons comme suit :

$$\nabla J = 0 \quad (\text{III.6})$$

Et

$$\min_u J(u(x, y; t)) \Rightarrow \nabla J(u(x, y; t)) = 0 \quad (\text{III.7})$$

Avec :

$$\nabla J(u(x, y; t)) = \nabla \left\{ \frac{1}{2} \|J_1(u(x, y; t))\|^2 + \frac{1}{2} \|J_2(u(x, y; t))\|^2 \right\} \quad (\text{III.8})$$

Donc :

$$\nabla J(u(x, y; t)) = \nabla J_1(u(x, y; t)) + \nabla J_2(u(x, y; t)) \quad (\text{III.9})$$

Avec :

$$\nabla J_1(u(x, y; t)) = \frac{1}{2} \|u(x, y; t) - f(x, y; t)\|^2 = u(x, y; t) - f(x, y; t) \quad (\text{III.10})$$

Et :

$$J_2(u(x, y; t)) = \frac{1}{2} \|\nabla u(x, y; t)\|^2 = \Delta u(x, y; t) \quad (\text{III.11})$$

Et aussi:

$$\nabla J(u(x, y; t)) = u(x, y; t) - f(x, y; t) + \lambda \Delta u(x, y; t) \quad (\text{III.12})$$

De plus :

$$\frac{du(x, y; t)}{dt} = 0 \quad (\text{III.13})$$

En applique la méthode de gradient ¹

$$\frac{du(x, y; t)}{dt} = -\nabla J(u(x, y; t)) \quad (\text{III.14})$$

On trouve :

$$\frac{u(x, y; t+1) - u(x, y; t)}{\Delta(t+1) - \Delta(t)} = -(u(x, y; t) - f(x, y; t) + \lambda \Delta u(x, y; t)) \quad (\text{III.15})$$

Après la discrétisation :

$$u(x, y; t) \xrightarrow{\text{Discritization}} u_{i,j}^n \quad (\text{III.16})$$

$$f(x, y; t) \xrightarrow{\text{Discritization}} f_{i,j}^n \quad (\text{III.17})$$

$$\Delta(t+1) - \Delta(t) \xrightarrow{\text{Discritization}} \tau \quad (\text{III.18})$$

$$u(x, y; t+1) \xrightarrow{\text{Discritization}} u_{i,j}^{n+1} \quad (\text{III.19})$$

Alors :

$$\frac{u(x, y; t+1) - u(x, y; t)}{\Delta(t+1) - \Delta(t)} = -(u(x, y; t) - f(x, y; t) + \lambda \Delta u(x, y; t)) \quad (\text{III.20})$$

Donc :

¹ <http://aalem.free.fr/maths/C06-GRADIENT-D%27UNE-FONCTION.PDF>

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = - \left(u_{i,j}^n - f_{i,j}^n + \lambda \Delta u_{i,j}^n \right) \quad (\text{III.21})$$

Alors :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \tau \left(u_{i,j}^n - f_{i,j}^n + \lambda \Delta u_{i,j}^n \right) \quad (\text{III.22})$$

III. Restauration d'image régularisée basée sur L1 :

Le problème est trouvée la minimums de u

$$TV(u(x, y; t)) = \|\nabla u(x, y; t)\| \quad (\text{III.23})$$

$$\min_u J(u(x, y; t)) = \min_u \left\{ \frac{1}{2} \|u(x, y; t) - u(x, y; t)\|^2 + \lambda \|\nabla u(x, y; t)\| \right\} \quad (\text{III.24})$$

$$\nabla J_2(u(x, y; t)) = \text{div} \frac{\nabla u(x, y; t)}{\|\nabla u(x, y; t)\|} \quad (\text{III.25})$$

$$\|\nabla u(x, y; t)\| = \sqrt{\|\nabla u(x, y; t)\|^2} \quad (\text{III.26})$$

$$\nabla J_2(u(x, y; t)) = \text{div} \frac{\nabla u(x, y; t)}{\sqrt{\|\nabla u(x, y; t)\|^2}} \quad (\text{III.27})$$

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) &= \frac{\frac{\partial u^+}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u^+}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\right)^2}} - \frac{\frac{\partial u^-}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u^-}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{0+}}{\partial y}\right)^2}} \\ &+ \frac{\frac{\partial u^+}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^+}{\partial y}\right)^2}} - \frac{\frac{\partial u^-}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u^{0-}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^-}{\partial y}\right)^2}} \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

On pose que :

$$c_1(x, y; t) = \sqrt{\left(\frac{\partial u^+}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\right)^2} \quad (\text{III.29})$$

$$c_2(x, y; t) = \sqrt{\left(\frac{\partial u^{0-}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^-}{\partial y}\right)^2} \quad (\text{III.30})$$

$$c_3(x, y; t) = \sqrt{\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^+}{\partial y}\right)^2} \quad (\text{III.31})$$

$$c_4(x, y; t) = \sqrt{\left(\frac{\partial u^{0-}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^-}{\partial y}\right)^2} \quad (\text{III.32})$$

Après la discrétisation :

$$c_{1,i,j}^n = \sqrt{\left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h}\right)^2} \quad (\text{III.33})$$

$$c_{2,i,j}^n = \sqrt{\left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{u_{i-1,j+1}^n - u_{i-1,j-1}^n}{2h}\right)^2} \quad (\text{III.34})$$

$$c_{3,i,j}^n = \sqrt{\left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h}\right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{h^2}\right)^2} \quad (\text{III.35})$$

$$c_{4,i,j}^n = \sqrt{\left(\frac{u_{i+1,j-1}^n - u_{i-1,j-1}^n}{2h}\right)^2 + \left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{h^2}\right)^2} \quad (\text{III.36})$$

La divergence devient :

$$\text{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \text{discrétisation } D_{i,j}^n$$

$$D_{i,j}^n = \frac{1}{h^2} \left[\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{c_{1,i,j}^n} - \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{c_{2,i,j}^n} + \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{c_{3,i,j}^n} - \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{c_{4,i,j}^n} \right] \quad (\text{III.37})$$

Alors :

$$D_{i,j}^n = \frac{1}{h^2} \left[\frac{u_{i+1,j}^n}{c_{1,i,j}^n} + \frac{u_{i-1,j}^n}{c_{2,i,j}^n} + \frac{u_{i,j+1}^n}{c_{3,i,j}^n} + \frac{u_{i,j-1}^n}{c_{4,i,j}^n} \right]$$

$$- \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{c_{1,i,j}^n} + \frac{1}{c_{2,i,j}^n} + \frac{1}{c_{3,i,j}^n} + \frac{1}{c_{4,i,j}^n} \right] u_{i,j}^n \quad (\text{III.38})$$

On not :

$$c_1 = \frac{1}{c_{1,i,j}^n}, c_2 = \frac{1}{c_{2,i,j}^n}, c_3 = \frac{1}{c_{3,i,j}^n}, c_4 = \frac{1}{c_{4,i,j}^n} \text{ d'où :}$$

$$D_{i,j}^n = \frac{1}{h^2} \left[\frac{u_{i+1,j}^n}{c_{1,i,j}^n} + \frac{u_{i-1,j}^n}{c_{2,i,j}^n} + \frac{u_{i,j+1}^n}{c_{3,i,j}^n} + \frac{u_{i,j-1}^n}{c_{4,i,j}^n} \right] - \frac{1}{h^2} [c_1 + c_2 + c_3 + c_4] u_{i,j}^n \quad (\text{III.39})$$

1. Avantage et inconvénients de l'utilisation de la variation totale

Tab.III.1 Avantage et inconvénients de la variation totale

Avantage	La variation totale permet d'obtenir des images débruitées de bonne qualité, principalement si l'image originale est de type « bande-dessinée », c'est à dire contenant beaucoup d'aplats.
Inconvénients	pour des images naturelles, La variation totale présente des artefacts donnant un effet « de marche d'escalier » (staircasing effect)

IV. Résultat

Nous allons maintenant exposer les résultats obtenus par les deux méthodes, ainsi que les temps de calculs obtenus avec Matlab. Voici l'image originale (non floutée et bruitée et la restauration) qui servira de base pour nos tests.



a) Image original



b) Image bruitée

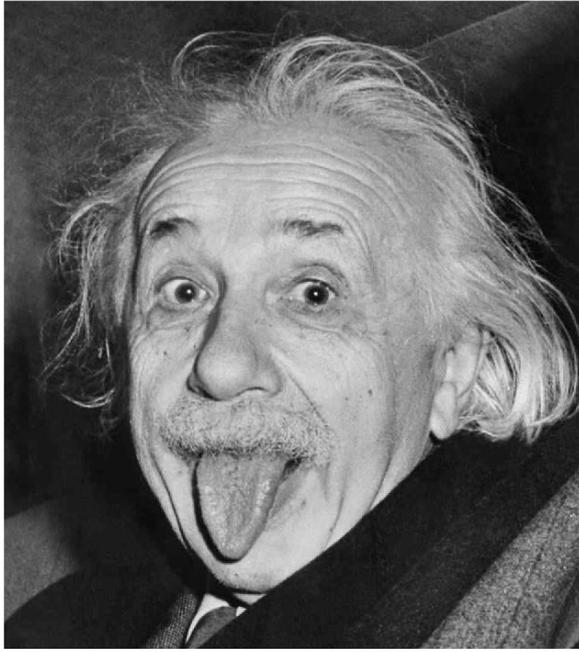


c) Image restauré avec la norme de régularisation ℓ_2
 $SNR = 11,60dB$

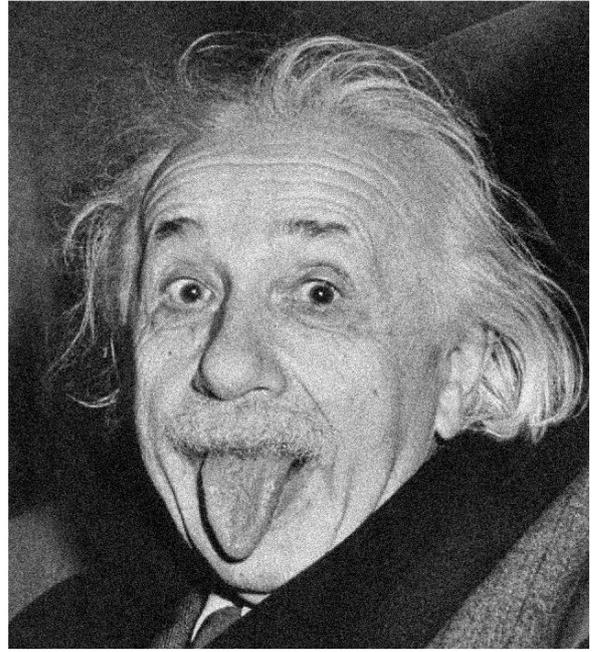


d) Image restauré avec la norme de régularisation ℓ_1
 $SNR = 15,55dB$

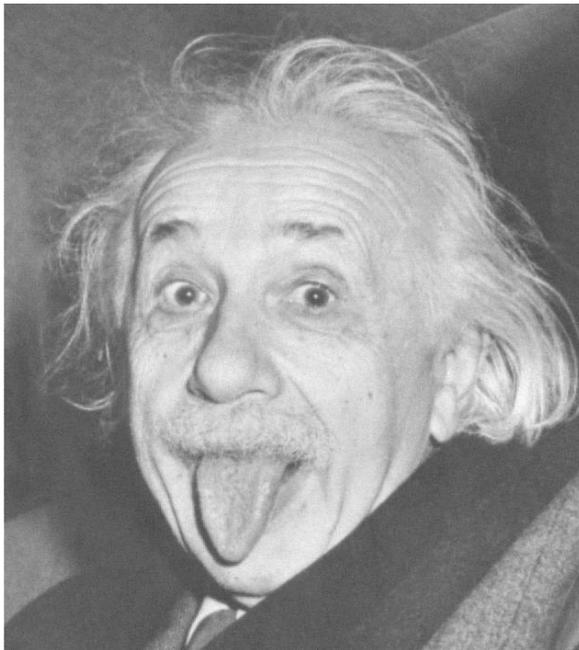
Fig.III.01: cameraman image



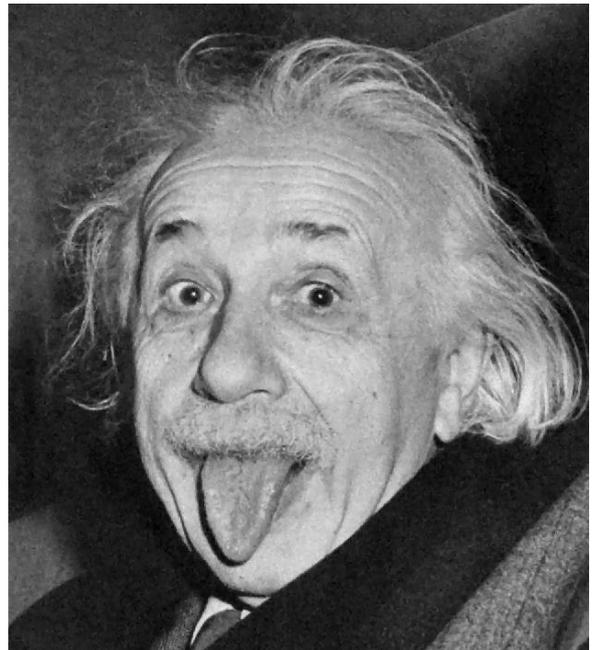
a) Image original



b) Image bruitée



c) Image restauré avec la norme de régularisation ℓ_2
 $SNR = 11,19dB$

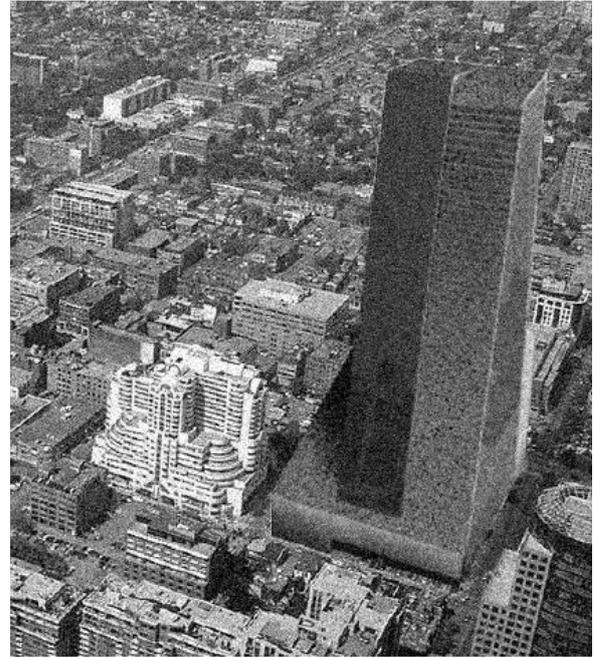


d) Image restauré avec la norme de régularisation ℓ_1
 $SNR = 19,54dB$

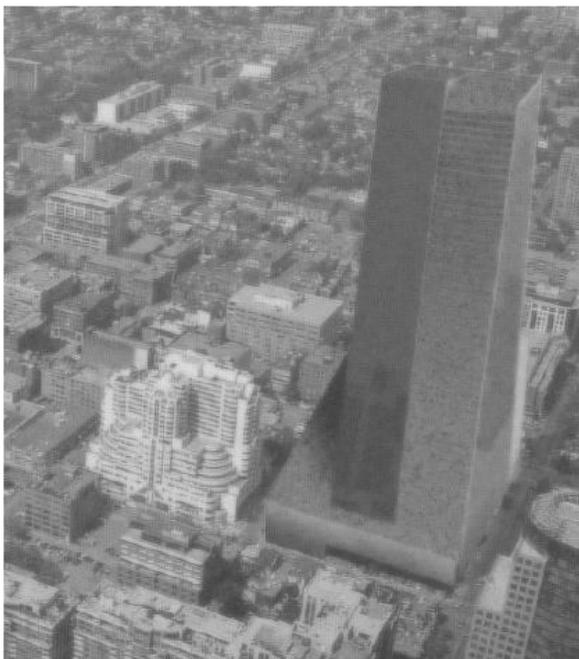
Fig.III.02: Einstein image



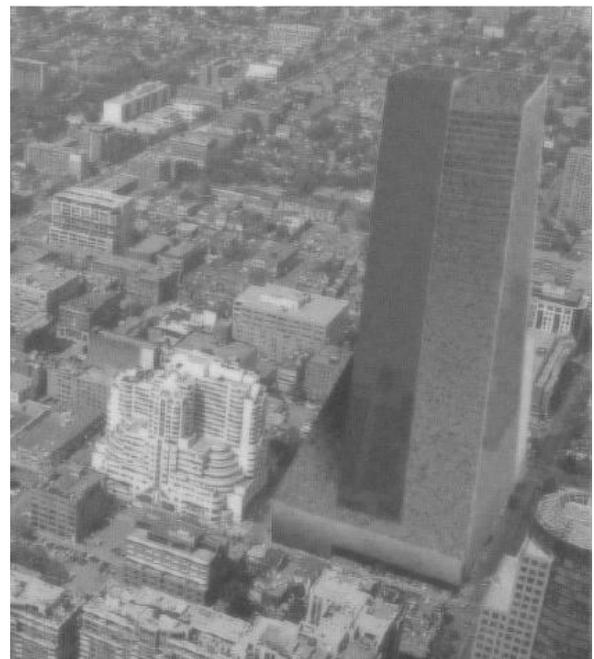
a) Image original



b) Image bruitée



c) Image restauré avec la norme de régularisation ℓ_2
 $SNR = 4,92dB$



d) Image restauré avec la norme de régularisation ℓ_1
 $SNR = 9,33dB$

Fig.III.03: Tower image



a) Image original



b) Image bruitée



c) Image restauré avec la norme de régularisation ℓ_2
 $SNR = 10,36dB$



d) Image restauré avec la norme de régularisation ℓ_1
 $SNR = 16,08dB$

Fig.III.04 Lena image

On voit que la norme 2 donne un meilleur résultat pour ce type de bruit, même si le temps de calcul est légèrement plus long.

La norme l2 donne un meilleur rendu que la norme l1 et permet de préserver l'information de contour et élimine les contours très fins.

Tab.II.2Tableau mesures de qualité SNR des images

<i>Image</i>	<i>Taille</i>	<i>SNR en dB</i>	
		<i>H1</i>	<i>TV</i>
<i>Cameraman</i>	<i>256x256</i>	<i>11,60</i>	<i>15,55</i>
<i>Einstein</i>	<i>1064x948</i>	<i>11,19</i>	<i>19,54</i>
<i>Tower</i>	<i>474x422</i>	<i>4,92</i>	<i>9,33</i>
<i>Lena</i>	<i>512x512</i>	<i>10,36</i>	<i>16,08</i>

V. Interprétation

-nous comparons les images obtenues pour l'expérience de débruitage à celles obtenues avec l'algorithme de Rudin-osher-Fatemi. Les textures sont beaucoup mieux préservées, et l'aspect global est beaucoup plus net.

VI. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les normes l1 et l2 basé sur les filtrages variationnelle, on utilisera cette étude théorique et vu leur résultat et nous avons fait une comparaison entre ces deux norme.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'activité de recherche présentée dans ce mémoire est classée autour de la restauration d'une image de bonne qualité à partir de sa version dégradée par un bruit additif gaussien, dans le but d'éliminer ou supprimer le bruit pour récupérer le maximum d'informations significatives de l'image originale.

Nous avons présenté une étude sur deux approches de filtrage de traitement d'image, nous commençons par les méthodes de restaurations classiques, ces méthodes suppriment les hautes fréquences et effacent les contours, en suite les méthodes non linéaire donnent des résultats de restauration acceptables, et leur simplicité d'implantation est derrière leurs grandes utilisations dans la littérature.

Nous utilisons par la suite les méthodes de restauration par filtrage variationnelle plus précisément la technique de minimisation de la norme L1 dans filtrage adaptatif et la norme L2. L'objectif est d'explorer les avantages de cette technique par rapport aux techniques existantes, nous considérons que la norme L2 donne des bords plus forts et un plus grand détail d'image que la norme L1.

La comparaison entre la méthode de restauration est basée sur le calcul du rapport signal sur bruit (SNR).

Bibliographie

Bibliographie

[G.Aubert/]	G.Aubert et P.Kornprobst.mathematical''problems in image prossesing partial defferential equation and calculus of vriation (second edition) '' volum 147 d'applied mathematical,2006.
[M.Bendjeffal/]	M.Bendjeffal et A.Daoud''Rrestauration d'image par filtrage de d'image par filtrage de diffusion isotrope et anisotrope sous interface graphique'' ,Mémoire de Master en génie électrique(informatique industrielle),faculté des sciences et technologie,Departement d'Eelectronique ,Univertisé Mouhamed El- bachir El Ibrahimi-borj bou arreridj-algérie(2015).
[H.Lagoune/]	H.Lagoune et O.Mouhamadi''Réduction de bruit multiplicatif dans les image par filtrage de diffusion anisotropique'' ,Mémoire de Master en génie électrique(informatique industrielle),faculté des sciences et technologie,Departement d'Eelectronique ,Univertisé Mouhamed El- bachir El Ibrahimi-borj bou arreridj-algérie(2017).
[4]	http://ressources.unisciel.fr/sillages/mathematiques/espacevect_cambodge/Espaces_vectoriels_normes.pdf
[A.Nouara/]	A.Nouara''Reconstruction de donné manquantes dans une image'',Université Mouloud Mammeri,Tizi-Ouzou,Mémoire mageister 2012.
[L.Derich .R./]	L.Derich .R.et.R.Faugeras.O.''Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur.Institut national de recherche en informatique et en automatique,1995.
[E.Goncalvés/]	E.Goncalvés'' résolution numérique : discrétisation des EDP et EDO ''Institut national polytechnique de Grenoble,cours

	2005.
[Lucido.L/]	Lucido.L et Deriche.R et Alvarez.L et Rigaud.V ‘sur quelque schémas numériques de résolution d’équations aux dérivées partielle pour le traitement d’image ,Inria,1997.
[Lakhdari .Rachida/]	Lakhdari .Rachida.‘Morphologie mathématique :caractérisation morphologique, Segmentation par LPE’.
[Sukhjinder .Kaur/]	Sukhjinder .Kaur’’Noise Types and Various Removal Techniques’’, Volume.04, February 2015.
[Mr.Rohit.Verma/]	Mr.Rohit.Verma and Dr.Jahid.Ali ’’A Comparative Study of Various Types of Image Noise and Efficient Noise Removal Techniques’’, Volume 03, October 2013.
[Mr.Rohit.Verma/]	Mr.Rohit.Verma, And Rakesh Kumar and Kamaljeet Kainth’’ Different Noise Types and Digital Image Processing’’, Volume 06,June 2016, pp 563.
[M. M. Puranik/]	M. M. Puranik and S.V.Halse’’Study of Various Types of Noises in Digital Images’’Volume.57 ,March 2018.
[Medhavi. Aggarwal/]	Medhavi. Aggarwal,and Ranjit Kaur and Beant Kaur’’ Design of Efficient Adaptive Image Filters to suppress Salt and Pepper Noise’’, Vol.05,September 2014.
[Lamraoui .Djedjiga/]	Lamraoui .Djedjiga and Slimani.Hanane ‘’Filtrage des images par différentes approches’’, Mémoire de Master Génie Electrique,Faculté des Sciences de l’Ingénieur, UNIVERSITE M’HAMED BOUGARA-BOUMERDES.
[Bassel.Mrhaba]	Bassel.Mrhaba and Mourad Zribi and Wassim Khoder’’image rastoration using a combination of Blind and non-bindeconcolution tachniqu’’.vol-2,pp225 ,May-2006 .

[RONDEPIERRE Aude]	RONDEPIERRE Aude et WEISS Pierre''Algorithmes pour le débruitage et la déconvolution d'images en résolution parallèle avec CUDA''.
[Moussa Embarek]	Moussa Embarek, R. (2012).Noisy digital image restoration. Mémoire de fin d'étude de master. Université Larbi Ben M'hidi.Oum El Bouaghi, Algérie
[Olivier Lavalie]	Olivier Lavalie '' Diffusion et fusion directionnelles pour le lissage et le rehaussement de structures fortement orientées'',Oct 2007.

Résumé

Dans le traitement des images, la technique de restauration des images joue un rôle essentiel. Éliminer les bruits des images est un défi problème, pour ce faire nous avons étudié deux techniques de netteté et de réduction d'image utilisant la technique de minimisation de la norme l_1 et de la norme l_2 . L'objectif de ce mémoire est d'explorer les avantages des deux techniques par rapport aux techniques existantes.

Les problèmes de minimisation peuvent être résolus par plusieurs méthodes numériques qui convergent efficacement vers la solution. Nous présentons la résolution par méthode variationnelle. Nous montrons la qualité des images restaurées, en utilisant la minimisation de la norme l_2 , est préférable à celle utilisant uniquement la norme l_1 . Les résultats sont discutés et comparés sur la valeur de base du SNR.

Mots clés : Restauration d'image, norme L_1 , norme L_2 , TV, SNR.