

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة محمد البشير الإبراهيمي - برج بوعريريج

Université de Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi - Bordj Bou Arreridj

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département Electromécanique

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

En : Automatique

Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle

Par : - Abaza Othman Dou Ennouraine

- Achacha Diaeddine

Sujet

Commande par mode glissant terminal non singulière d'un système chaotique.

Soutenu publiquement, le 27/05/2024, devant le jury composé de :

M. IRATNI Abdelhamid	Pr.	Univ-BBA	Président
M. BENHENICHE Abdelhak	MCA	Univ-BBA	Examineur
Mlle MERADI Dounia	MCB	Univ-BBA	Examineur
M. BOUCHAMA Ziyad	Pr.	Univ-BBA	Encadrant

Remerciements

Le grand remerciement revient à dieu qui nous a donné la force et le courage à réaliser et terminer ce modeste travail.

*Nous tenons à remercier très vivement notre encadreur Monsieur **BOUCHAMA Ziyad**, enseignant à l'université Mohamed El Bachir El Ibrahimi Bordj Bou Arreridj, nous le remercions de nous avoir toujours poussé vers l'avant, pour toute la confiance qu'il nous porte, pour sa grande disponibilité inconditionnelle, ses conseils avisés, et ses encouragements. Ses nombreuses idées furent un soutien très précieux.*

Nous remercions nos amis et collègues de l'université, pour l'ambiance conviviale qu'ils ont contribué à entretenir, les bons moments passés en leur compagnie et leur sympathie.

A tous ceux qui nous avons eu la chance de travailler avec ou que, nous avons eu l'honneur de côtoyer avant et pendant mon mémoire, et à tous nos professeurs de l'Université de Mohamed El Bachir El Ibrahimi Bordj Bou Arreridj.

Enfin, nous remercions chaleureusement tous les membres de nos familles et tous nos amis pour leur soutien et leurs encouragements.

DEDICACE

Je dédie ce mémoire :

À mes très chers parents pour leur soutien durant toute ma vie

d'étudiant et sans eux je ne serai jamais devenu ce que je suis.

À toute ma famille. À mon encadreur « BOUCHAMA Ziyad ».

À tous les professeurs et enseignants qui m'ont suivi durant tout mon cursus scolaire et qui m'ont permis de réussir Dans mes études.

À tous mes amis (es) sans aucune exception.

Collègues de la promotion 2023/2024

Spécialité : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

À toute personne ayant contribué à ce travail de près ou de loin.

Othmane.

DEDICACE

Je dédie ce mémoire :

*À mes très chers parents pour leur soutien durant toute ma vie
d'étudiant et sans eux je ne serai jamais devenu ce que je suis.*

*À toute ma famille. À mon encadreur « **BOUCHAMA Ziyad** ».*

*À tous les professeurs et enseignants qui m'ont suivi durant tout mon
cursus scolaire et qui m'ont permis de réussir Dans mes études.*

À tous mes amis (es) sans aucune exception.

Collègues de la promotion 2023/2024

Spécialité : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

À toute personne ayant contribué à ce travail de près ou de loin.

Diaeddine.

Table des matières

Liste des figures	
Remerciement.....	I
Dédicace.....	II
Table de matière.....	III
List de figures	IV
Introduction générale.....	1

Chapitre 01 : Introduction aux systèmes chaotiques.

1.1 Introduction.....	4
1.2 Systèmes dynamiques.....	4
1.2.1 Systèmes dynamiques à temps continu.....	4
1.2.2 Systèmes dynamiques à temps discret.....	5
1.2.3 Systèmes dynamiques.....	10
1.3 Chaos.....	14
1.3.1 Mécanismes du chaos : le pétrissage de la pâte.....	16
1.3.2 Caractériser le chaos.....	17
1.3.3 Détection du chaos et exposants de Lyapunov.....	19
1.4 Théorie de la bifurcation : définitions élémentaires.....	23
1.4.1 Bifurcations locales de points fixes.....	23
1.4.2 Bifurcations globales.....	24
1.4.3 Diagrammes de bifurcation.....	24
1.5 Systèmes dissipatifs et attracteurs.....	25
1.6 Conclusion.....	26
Références.....	27

Chapitre 02 : Introduction à la commande par mode glissant

2.1 Introduction.....	29
2.2 Théorie de la stabilité de Lyapunov.....	29
2.2.1 Stabilité des points d'équilibre.....	29
2.2.2 Méthode directe de Lyapunov.....	30
2.3 Commande par mode glissant.....	31

2.3.1 Synthèse de la commande par mode glissant.....	32
2.4 Exemple d'application	35
2.4.1 Résultat de simulation	38
2.5 Conclusion.....	40
Références.....	41

Chapitre 03 : Commande par mode glissant terminale des systèmes chaotiques.

3.1 Introduction	42
3.2 Commande par mode glissant terminal.....	42
3.3 Synthèse d'une loi de commande TSMC.....	42
3.4 Descriptions dynamique des oscillateurs chaotiques.....	44
3.5 Synchronisation et anti-synchronisation des oscillateurs de Van der Pol.....	45
3.5.1 Dynamique de synchronisation.....	46
3.5.2 Dynamique d'anti-anti-synchronisation.....	50
3.6 Synchronisation et anti-synchronisation des oscillateurs de Duffing.....	50
3.6.1 Dynamique de synchronisation.....	51
3.6.2 Dynamique d'anti-anti-synchronisation	52
3.7 Résultats et discussions.....	52
3.7.1 Oscillateur chaotique de Van der Pol.....	52
3.7.2 Oscillateur chaotique de Duffing.....	56
3.8 Conclusion.....	60
Références.....	61
Conclusion générale.....	62
Résumé.....	63

Liste des figures

Figure 1.1. Une trajectoire intersectant une carte de Poincaré.....	8
Figure 1.2. Carte de Poincaré d'un système unidimensionnel non autonome.....	10
Figure 1.3. Carte de Poincaré d'un système tridimensionnel autonome.....	10
Figure 1.4. L'attracteur de Lorenz.....	16
Figure 1.5. Pétrissage de la pâte comme processus de rétroaction.....	17
Figure 1.6. Sensibilité de l'attracteur de Lorenz aux conditions initiales.....	19
Figure 1.7. Diagramme de bifurcation de la carte logistique et de l'exposant de Lyapunov.....	23
Figure 1.8. Exemples de bifurcations locales.....	25
Figure 1.9. Exemples de bifurcations globales.....	26
Figure 2.1. Portrait de phase d'une surface de glissement.....	31
Figure 2.2. Mouvement chaotique de la variable d'état x_1	36
Figure 2.3. Mouvement chaotique de la variable d'état x_2	36
Figure 2.4. Mouvement chaotique de la variable d'état x_3	37
Figure 2.5. Attracteur chaotique.....	37
Figure 2.6. Evolution de la variable d'état x_1	38
Figure 2.7. Evolution de la variable d'état x_2	39
Figure 2.8. Evolution de la variable d'état x_3	39
Figure 2.9. Evolution de la loi de commande $u(t)$	39

Figure 3.1. Portrait de phase de l'oscillateur Van der Pol excité externe.....	44
Figure 3.2. Portrait de phase de l'oscillateur Duffing externe excité	45
Figure 3.3. Evolution dynamique des états $(x_{1,2}, y_{1,2})$ du système chaotique.....	53
Figure 3.4. Evolution dynamique des erreurs de suivies Van der Pol (cas 1).....	53
Figure 3.5. Evolution de la surface de glissement et commande Van der Pol dans (cas 1).....	54
Figure 3.6. Evolution des gains de la commande Van der Pol (cas 1).....	54
Figure 3.7. Evolution dynamique des états $(x_{1,2}, y_{1,2})$ du système chaotique Van der Pol dans (cas 2).....	55
Figure 3.8. Evolution dynamique des erreurs de suivies Van der Pol (cas 2).....	55
Figure 3.9. Evolution de la surface de glissement et commande Van der Pol (cas 2).....	56
Figure 3.10. Evolution des gains de la commande Van der Pol (cas 2).....	56
Figure 3.11. Evolution dynamique des états $(x_{1,2}, y_{1,2})$ du système chaotique Duffing Dans (cas 1).....	57
Figure 3.12. Evolution dynamique des erreurs de suivies Duffing (cas 1).....	57
Figure 3.13. Evolution de la surface de glissement et commande Duffing dans (cas 1).....	58
Figure 3.14. Evolution des gains de la commande Duffing (cas 1).....	58
Figure 3.15. Evolution dynamique des états $(x_{1,2}, y_{1,2})$ du système chaotique Duffing Dans (cas 2).....	59
Figure 3.16. Evolution dynamique des erreurs de suivies Duffing (cas 2).....	59
Figure 3.17. Evolution de la surface de glissement et commande Duffing dans (cas 2).....	59
Figure 3.18. Evolution des gains de la commande Duffing (cas 2).....	61

Introduction

Introduction générale

Les systèmes chaotiques sont des systèmes dynamiques non linéaires très complexes, et leurs réponses possèdent certaines caractéristiques, telles qu'une sensibilité excessive aux conditions initiales. En d'autres termes, de petites variations dans les conditions initiales peuvent induire différentes trajectoires d'états du système. Au cours des deux dernières décennies, des études sur les systèmes chaotiques ont été stimulées, développées et analysées de manière approfondie en raison de leurs applications potentielles, notamment dans la conception de nouvelles lois de commande robustes et surtout dans les communications sécurisées [1-2].

La synchronisation et l'anti-synchronisation chaotiques sont des phénomènes dans lesquels deux systèmes chaotiques, lorsqu'ils sont couplés de manière appropriée, commencent à évoluer de manière synchrone ou asynchrone. En d'autres termes, ils partagent des comportements dynamiques similaires dans la dynamique de synchronisation ou des comportements dynamiques opposés dans la dynamique d'anti-synchronisation. Ces concepts sont assurés par des lois de commande non linéaires telles que la commande par glissement, la commande synergétique, la commande backstepping, etc.

La commande par mode glissant (SMC) est bien connue pour sa robustesse face aux incertitudes du système et aux perturbations externes, et elle a été appliquée dans divers systèmes de contrôle [3-4]. Généralement, les contrôleurs SMC ont été conçus sur la base d'une stabilité asymptotique, et les trajectoires du système évoluent vers un attracteur spécifié atteignant l'équilibre en un temps non défini. Ainsi, l'évolution linéaire de la surface de glissement tend à amplifier le gain du contrôleur SMC. Dans des applications pratiques où la propriété de saturation des signaux d'entrée de commande est prise en compte, un contrôleur SMC à gain élevé n'est pas souhaitable.

Récemment, plusieurs algorithmes de commande basés sur des approches adaptatives combinées avec les théories d'attracteurs terminaux [5-8] ont proposé une approche dite adaptative terminale, aboutissant à une convergence en temps fini. En réduisant le temps requis pour atteindre le point d'équilibre, cela renforce à la fois la convergence et l'atténuation rapide des perturbations.

Dans ce mémoire, nous proposons d'élaborer un nouvel algorithme de contrôle par mode glissant, nommé mode glissant terminal adaptatif. Ce mémoire est organisé en trois chapitres principaux.

Dans le premier chapitre, nous présentons des notions générales sur les dynamiques non linéaires, en particulier les systèmes chaotiques. Le deuxième chapitre introduit la commande par mode glissant conventionnelle, suivie d'un exemple d'application. Dans le troisième chapitre, la commande adaptative par mode glissant terminal est synthétisée pour deux types de systèmes chaotiques, à savoir les oscillateurs de Van der Pol et de Duffing, suivie par des résultats de simulation qui font l'objet d'une étude, mettant en évidence la prévalence de la technique étudiée.

Bibliographie

- [1] Bouraoui, H. & Kemih, K. (2013). Observer-Based synchronization of a new hybrid chaotic system and its application to secure communications. *Acta Physica Polonica. A*, 123(2), 259–262.
- [2] Liu, X., Li, C., Ge, S. S. & Li, D. (2022). Time-Synchronized control of chaotic systems in secure communication. *IEEE Transactions on Circuits and Systems. I, Regular Papers*, 69(9), 3748–3761. <https://doi.org/10.1109/tcsi.2022.3175713>.
- [3] Feng, J.W., He, L., Xu, C., Francis, A., Wu, G.: Synchronizing the noise perturbed Genesio chaotic system by sliding mode control. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 15, 2546–2551 (2010).
- [4] Etemadi, S., Alasty, A., Salarieh, H.: Synchronization of chaotic systems with parameter uncertainties via variable structure control. *Phys. Lett. A* 357, 17–21 (2005).
- [5] N. Zerroug, M.N. Harmas, S. Benaggoune, and K.Zehar, DSP-based implementation of fast terminal synergetic control for a DC-DC buck converter, *Journal of the Franklin Institute*, 355, (5), 2329-2343, 2018.
- [6] M. Zak, Terminal attractors dynamics in neural networks, *International Journal of Neural Networks*, 2, (4), 259-274, 1989.
- [7] . Mondal, and C. Mahanta, Adaptive second order terminal sliding mode controller for robotic manipulators, *Journal of the Franklin Institute*, 351, (4), 2356-2377, 2014.
- [8] YANG, Chi-Ching. Adaptive nonsingular terminal sliding mode control for synchronization of identical Φ^6 oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 69, p. 21-33.

Chapitre 1: Introduction aux systèmes chaotiques.

1.1 Introduction

Un système dynamique est un système dont les états changent au cours du temps t . Son évolution est généralement régie par un ensemble de règles qui précisent la valeur d'état au temps t . D'une part, une évolution en temps discret est généralement décrite par un ensemble d'équations algébriques appelées récurrence. D'autre part, une évolution en temps continu est exprimée par un système d'équations différentielles. L'état stationnaire d'un système dynamique est défini comme étant son comportement asymptotique quand le t tend vers l'infini. Fréquemment, cet état stationnaire est un état borné qui peut correspondre soit à une solution statique, soit à une solution dynamique.

Ce chapitre présente quelques éléments théoriques de base pour bien comprendre le développement de ce travail. Nous avons divisé ce chapitre en quatre parties. Dans la première partie, nous présentons le concept de système dynamique. En particulier, nous décrivons les deux classes bien connues de systèmes dynamiques, à savoir les systèmes dynamiques en temps continu et en temps discret. Les différentes natures de solutions de ces systèmes seront présentées. La deuxième partie traite du chaos. D'abord, nous présentons quelques caractéristiques importantes du chaos. Deuxièmement, nous développons les principaux mécanismes du chaos. Enfin, nous présentons les méthodes de détection et d'analyse du chaos. Par la suite, on montre le résultat d'une simulation numérique de l'une de ces méthodes appliquées à la récurrence logistique. Dans la troisième partie, nous discuterons quelques notions élémentaires de la théorie des bifurcations. La quatrième partie présente les concepts relatifs aux systèmes dissipatifs ainsi qu'aux attracteurs et leurs définitions.

1.2 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un système dans lequel les états changent avec le temps t . Les états du système, pour des valeurs discrètes ou continues de t , peuvent être prédits en connaissant leurs états actuels et l'ensemble des règles régissant leur évolution. La manière la plus courante de définir une évolution en temps continu est par des équations différentielles, tandis qu'un système dynamique en temps discret est généralement décrit par une fonction (système d'équations algébriques).

1.2.1 Systèmes dynamiques à temps continu

L'évolution d'un système dynamique en temps continu est déterminée par un ensemble d'équations différentielles, autonomes ou non autonomes. Dans le cas autonome, le système dynamique à temps continu est décrit comme suit :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad (1.1)$$

Où $x \in R_n$ est le vecteur d'état, $t \in \mathbb{R}$ et F est le champ vectoriel. Lorsque F ne dépend pas explicitement de t , le système est appelé autonome. Nous avons appelé espace d'état étendu, l'espace $(n+1)$ -dimensionnel $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$, où la dimension supplémentaire correspond à la dimension temporelle (t). Nous pouvons toujours transformer un système dynamique non autonome en un système autonome en appliquant un changement approprié de variables. La dynamique autonome équivalente est un système dimensionnel $(n+1)$ -

Débit et trajectoires

Soit l'état initial du système à l'instant t_0 soit x_0 , la partie principale d'un système dynamique est une règle d'évolution qui détermine l'état x_t à l'instant t . Soit T représente un intervalle de temps qui inclut t_0 , on appelle flot de (1.1) l'application φ^t définie dans l'espace d'état X , qui change un état initial x_0 en un état x_t à l'instant t , comme :

$$\varphi^t : X \rightarrow X \quad (1.2)$$

$$x_f = (\varphi^t)x_0 \quad (1.3)$$

La fonction φ^t est généralement appelée l'opérateur d'évolution du système dynamique. Pour un système dynamique à temps continu, l'ensemble $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ des opérateurs d'évolution est appelé un flot [1].

Définition : Un point $x \in X$ est appelé un point d'équilibre si, pour tout $t \in T$ on a $(\varphi^t)x = x$

Généralement, la solution de (1.1) peut être considérée comme une application de différents points de T vers différents points de l'espace d'état de n -dimensionnel. La courbe intégrale est le graphe d'une solution de (1.1) dans l'espace d'état étendu. La trajectoire du système à travers x_0 est la projection d'une solution $x(t, t_0, x_0)$ sur R^n .

1.2.2 Systèmes dynamiques à temps discret

La loi d'évolution qui régit un système à temps discret est donnée par :

$$x_{K+1} = F(x_K) \quad (1.4)$$

Où $x_K \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état à l'instant discret t_K et F est une fonction matricielle de récurrence.

L'équation (1.4) est une application qui transforme l'état courant x_K du système à l'état suivant x_{K+1} . Soient M et N deux régions de points, une application F de M à N est représentée par

$$F : M \rightarrow N$$

En général, on dit que F applique M sur N si pour chaque point $b \in N$ il existe au moins un point $a \in M$ qui est appliqué à b par F .

De plus, F est appelée injective si deux points différents de M sont toujours associés à deux points différents de N . Si chaque point x_K a un antécédent unique x_{K-1} , alors la fonction injective est dite bijective. Sinon, F est appelée une fonction non bijective. L'inverse de F est noté F^{-1} :

$$x_{K-1} = F^{-1}(x_K) \quad (1.5)$$

L'approche de modélisation en temps discret apparaît naturellement dans les processus dynamiques lorsque l'état d'un système à un certain moment t_K détermine complètement son état à t_{K+1} . Nous notons qu'il est possible que dans une évolution continue du processus, seul l'état au temps discret t_K soit pris en compte. Dans ce cas, le système en temps discret n'est pas toujours inversible, car il résulte de la discrétisation temporelle d'un système déterministe.

Orbites

Une orbite d'une application non inversible initiée à $x = x_0$ est composée des points discrets :

$$\{(x_0), \dots, F^2(x_0), \dots, F^m(x_0), \dots\} \quad (1.6)$$

Où $m \in \mathbb{N}^+$ et \mathbb{N}^+ est l'ensemble de tous les entiers positifs. F^K signifie la k -ème application successive de F lorsque $k > 0$. De la même manière, lorsque $k < 0$, F^K signifie la k -ème application successive de F^{-1} . Pour une application inversible initiée à $x = x_0$, les orbites sont constituées des points discrets :

$$\left\{ \dots, F^{-m}(x_0), \dots, F^{-2}(x_0), F^{-1}(x_0), x_0, F(x_0), F^2(x_0), \dots, F^m(x_0), \dots \right\}, \quad (1.7)$$

Définitions :

- Un cycle est une orbite périodique.
- Un cycle d'un système dynamique est appelé cycle limite s'il n'y a pas d'autres cycles dans son voisinage.

Cartes de Poincaré

Dans de nombreux cas, les cartes interviennent dans l'analyse des systèmes dynamiques en temps continu. L'étude de telles cartes nous permet d'appliquer les résultats concernant les cartes aux équations différentielles en temps continu. Habituellement, la carte résultante est définie dans un espace de dimension inférieure à celui du système dynamique continu d'origine. Les cartes découlant des équations différentielles ordinaires Ordinary Differential Equations : (ODEs) sont appelées cartes de Poincaré. Ainsi, la carte de Poincaré est un outil mathématique extrêmement utile pour décrire la dynamique des systèmes dynamiques. Elle transforme un système dynamique continu en temps n – dimensionnel en un système dynamique discret en temps $(n - 1)$ – dimensions.

Considérons un système dynamique à temps continu, gouverné dans un espace d'état en n – dimensions, avec une trajectoire initiée à $x = x_0$. Dans cet espace, une hypersurface est une surface de dimension $n - 1$, comme illustré à la figure (1.1) [2]. La carte de Poincaré est un système dynamique à temps discret dont les points discrets représentent les coordonnées des points d'intersection de la trajectoire avec l'hypersurface.

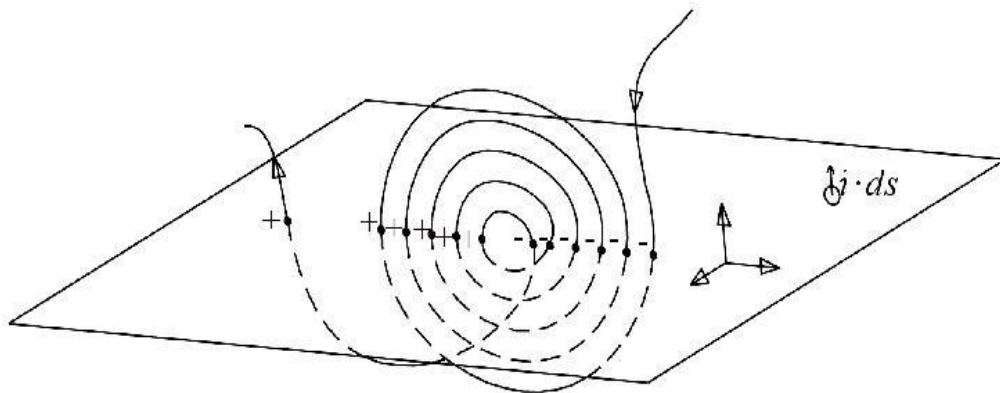


Figure 1.1. Une trajectoire intersectant une carte de Poincaré.

La principale utilité des cartes de Poincaré est la réduction de la dimension du système. Puisque les propriétés du système dynamique intrinsèque ont été préservées, l'analyse dynamique se concentre uniquement sur les points de la carte de Poincaré. La définition de la carte de Poincaré dépend de l'autonomie du système :

- **Cas 1 : Système dynamique non autonome**

Dans ce cas, nous considérons un système T -périodique non autonome à n -dimensions défini comme suit :

$$\dot{x} = F(x,t) \quad (1.8)$$

Nous pouvons le convertir en un système autonome $(n + 1)$ -dimensionnel en ajoutant un état supplémentaire $\theta = \frac{2\pi t}{T}$. Le système résultant est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, \frac{\theta t}{2\pi}), x(t_0) = x_0 \\ \dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}, \theta(t_0) = \frac{2\pi t_0}{T} \end{cases} \quad (1.9)$$

Il est 2π -périodique sur θ . Les plans $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ peuvent être identifiés et l'espace d'état est transformé de l'espace euclidien \mathbb{R}^{n+1} en un espace cylindrique $\mathbb{R}^n \times S^1$, où S^1 est le cercle unité. La solution du système (1.9) dans l'espace d'état cylindrique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^t(x_0, t_0) \\ \frac{2\pi t}{T} \text{ mod } 2\pi \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Où la fonction modulo définie comme étant limitée à $0 \leq \theta < 2\pi$.

Nous considérons l'hyperplan n -dimensionnel $\Sigma \in \mathbb{R}^n \times S^1$ défini par :

$$\Sigma = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 : \theta = \theta_0\} \quad (1.11)$$

Toutes les T secondes, la trajectoire du système (1.9) croise Σ , voir figure (1.2) [3].

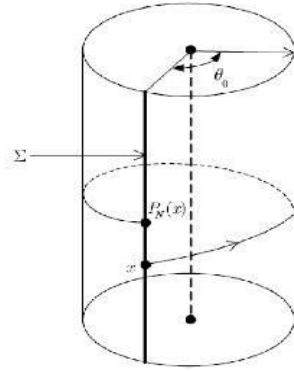


Figure 1.2. Carte de Poincaré d'un système unidimensionnel non autonome.

La carte de Poincaré résultante du système non autonome est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
 P_N : \Sigma &\rightarrow \Sigma (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \\
 P_N(x) &= \varphi^{t_0+T}(x_0, t_0)
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

• **Cas 2 : Système dynamique autonome**

Soient un système autonome à n – dimensions et un cycle limite Γ , comme le montre la figure (1.3) [3].

Soit $x_0 \in \Gamma$ et Σ un hyperplan $(n-1)$ – dimensionnel qui se croise transversalement Γ en x_0 . En raison de la continuité de φ^t en x_0 , la trajectoire initialisée sur T dans un voisinage suffisamment proche de x_0 croisera Σ après T secondes dans ce voisinage.

$\{\varphi^t \text{ et } \Sigma\}$ Définissent la carte de Poincaré du système autonome P_A à partir d'un voisinage de x_0 $U \subset \Sigma$ vers un autre voisinage $V \subset \Sigma$ du même point.

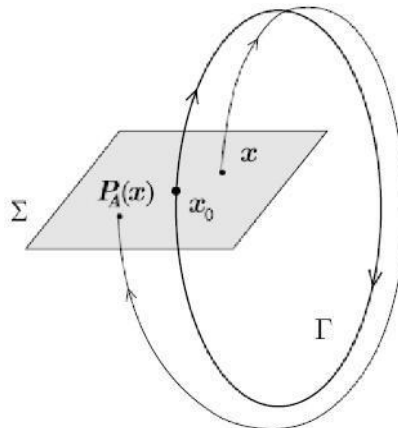


Figure 1.3. Carte de Poincaré d'un système tridimensionnel autonome.

1.2.3 Systèmes dynamiques

Pour un système dynamique, quatre types de solutions sont considérés. Nous présentons ici un bref exposé de ces types.

Solutions d'équilibre

Qu'il s'agisse d'un système différentiel (1.1) ou d'une récurrence (1.4), les solutions d'équilibre sont caractérisées par ces représentations sous forme de points fixes dans l'espace d'état ou dans le plan de récurrence (x_k, x_{k+1}) , c'est pourquoi elles sont généralement appelées solutions à point fixe. Dans le cas d'un système dynamique autonome à temps continu, les solutions à point fixe x^* sont données par :

$$\dot{x}^* = F(x^*, t) = 0 \quad (1.13)$$

Ici, nous discutons brièvement des types de points fixes des systèmes unidimensionnels et bidimensionnels [4].

Espace d'état unidimensionnel

Un espace d'état unidimensionnel comprend trois types de points fixes, définis comme suit :

- Nœuds (puits) : points fixes qui attirent les trajectoires voisines.
- Répulsifs (sources) : points fixes qui repoussent les trajectoires voisines.
- Points de selle : points fixes qui attirent les trajectoires d'un côté mais les repoussent de l'autre.

Pour un espace d'état unidimensionnel, nous observons que la dérivée de F par rapport à x , évaluée en x^* , est négative pour un nœud et positive pour un répulsif. La valeur de cette dérivée au point fixe x^* est appelée valeur propre (ou valeur caractéristique) du point fixe. Nous désignons la valeur caractéristique par λ , telle que :

$$\lambda = \left. \frac{dF(x,t)}{dx} \right|_{x=x^*} \quad (1.14)$$

La leçon importante ici est que, en déterminant le caractère du point fixe, nous pouvons déterminer le comportement des trajectoires au voisinage de ce point fixe.

Chpitre01: Introduction aux systèmes chaotiques

Lorsque la valeur caractéristique est égale à zéro, nous devons examiner la dérivée seconde de F par rapport à x . Si la dérivée seconde a le même signe des deux côtés de x^* , alors c'est un point de selle. Par conséquent, au fil du temps, la trajectoire est attirée vers le point fixe d'un côté, mais elle est repoussée du point de selle de l'autre côté. Pour les nœuds et les répulsifs, lorsque $\lambda = 0$, la dérivée seconde de F change de signe à $x = x^*$. Ce type de point fixe est appelé point fixe plat.

Espace d'état bidimensionnel: Maintenant, nous allons étendre notre discussion aux systèmes bidimensionnels. Dans ce cas, le système dynamique à temps continu (1.1) sera exprimé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, t) \end{cases} \quad (1.15)$$

Les points fixes sont les points (x_1^*, x_2^*) satisfaisant :

$$\begin{cases} F_1(x_1^*, x_2^*, t) = 0 \\ F_2(x_1^*, x_2^*, t) = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Pour simplifier la notation, nous allons écrire les termes dérivés de F comme :

$$F_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad (1.17)$$

Où $i, j \in \{1, 2\}$.

Afin de voir comment nous déterminons les valeurs caractéristiques de l'espace d'état bidimensionnel, nous présentons une méthode générale pour trouver l'équation caractéristique pour des points fixes. Cette méthode utilise la matrice Jacobienne des dérivées des fonctions d'évolution temporelle F_1 et F_2 . Cette procédure peut être généralisée pour trouver les valeurs caractéristiques des points fixes dans l'espace d'état de n'importe quelle dimension. La matrice Jacobienne pour le système (1.15) est définie comme suit :

$$J = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Où les dérivées F_{ij} sont calculées au point fixe. On soustrait λ de chaque élément de la diagonale principale et on fixe le déterminant de la matrice à zéro :

$$\begin{vmatrix} F_{11} - \lambda & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.19)$$

Ça mène à l'équation caractéristique:

$$\lambda^2 - (F_{11} + F_{22})\lambda + (F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}) = 0 \quad (1.20)$$

L'équation (1.20) a deux solutions, qui peuvent s'écrire comme suit :

$$\lambda_{\pm} = \frac{F_{11} + F_{22} \pm \sqrt{(F_{11} + F_{22})^2 - 4(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21})}}{2} \quad (1.21)$$

Où λ_+ et λ_- désignent respectivement les résultats obtenus avec le signe + et - devant la racine carrée dans l'équation (2.21). Nous introduisons la trace de la matrice Jacobienne, définie comme la somme des éléments diagonaux principaux:

$$Tr J = F_{11} + F_{22} \quad (1.22)$$

D'après l'équation (1.21), on peut facilement noter que la somme des éléments diagonaux de J est en effet égal à la somme des valeurs caractéristiques :

$$\lambda_+ + \lambda_- = F_{11} + F_{22} = Tr J \quad (1.23)$$

Maintenant, nous introduisons le déterminant de J comme :

$$\Delta = F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} \quad (1.24)$$

Ensuite, nous pouvons montrer que la nature des points fixes dépend de $Tr J$ et Δ comme indiqué ci-dessous :

	$Tr J < 0$	$Tr J > 0$
$\Delta > (1/4) (Tr J)^2$	nœud spiralé	Spire répulsive
$0 < \Delta < (1/4) (Tr J)^2$	nœud	répulsif
$\Delta < 0$	point de selle	point de selle

Solutions périodiques

Contrairement aux solutions d'équilibre, les solutions périodiques sont marquées par des états variables dans le temps. Ce sont des solutions dynamiques, chacune étant caractérisée par une période de base T .

Une solution $x(t)$ d'un système à temps continu est appelée solution périodique si :

$$x(t+T) = x(t) \quad \text{et} \quad x(t+\tau) \neq x(t) \quad \text{pour} \quad 0 < \tau < T \quad (1.25)$$

Une solution périodique est dite isolée s'il existe un voisinage qui ne contient pas d'autre solution périodique. En d'autres termes, une solution périodique isolée correspond à une orbite fermée isolée dans l'espace des états. Dans le cas d'un système autonome, cette solution est appelée cycle limite. Si toutes les trajectoires positives initialisées près d'un cycle limite s'en approchent, alors ce cycle limite est stable.

Solutions quasipériodiques

Une solution dynamique caractérisée par deux ou plusieurs périodes linéairement indépendantes est appelée une solution quasipériodique. Une solution quasipériodique $x(t)$ d'un système différentiel (1.1) est définie par :

$$x(T_1 t, T_2 t, \dots, T_m t) \quad (1.26)$$

Nous disons que m périodes T_1, T_2, \dots, T_m sont linéairement indépendants ou incommensurables si l'équation suivante :

$$n_1 T_1 + n_2 T_2 + \dots + n_m T_m = 0 \quad (1.27)$$

est satisfaite :

$$n_1 = n_2 = \dots = n_m = 0 \quad (1.28)$$

Cette solution (1.26) est désignée comme une solution m-périodique ou m-quasipériodique. En général, une solution k-périodique se présente sous la forme :

$$x = x(T_1 t, T_2 t, \dots, T_k t) \quad (1.29)$$

Où x est périodique avec une période de un pour chaque élément de l'ensemble (T_1, T_2, \dots, T_k) , et T_k sont k périodes incommensurables. Seuls les systèmes autonomes dont l'ordre est égal ou supérieur à k peuvent avoir une solution k -périodique. Cette règle s'applique également aux systèmes non autonomes de dimension $(k + 1)$.

Solutions chaotiques

Tout comme les solutions d'équilibre, périodiques et quasi-périodiques, les solutions chaotiques sont également bornées. Il n'existe pas de définition spécifique pour une solution chaotique en raison de l'absence de représentation mathématique standard. Cependant, une solution chaotique peut être définie comme une solution dynamique qui n'est ni en équilibre, ni périodique, ni quasipériodique [1].

Contrairement à une solution chaotique instable, la solution stable peut être simulée et observée. Cependant, l'observation simple de l'évolution des variables d'état ne permet pas de déterminer s'il s'agit de solutions quasipériodiques ou chaotiques.

Dans la section (1.3), nous explorons le chaos dans les systèmes cartographiques et continus.

1.3 Chaos

L'étude du chaos est essentielle dans le domaine des systèmes fortement non linéaires. En physique, le chaos peut être illustré par l'étude de la turbulence des fluides. L'image d'un fluide en mouvement turbulent symbolise divers problèmes.

Henri Poincaré, l'un des scientifiques français les plus importants du XIXe siècle, a compris la possibilité de solutions chaotiques avec des structures géométriques complexes. Cependant, c'est grâce au développement de la simulation informatique des équations différentielles que la théorie du chaos a vraiment pris son envol. Deux articles de premier plan ont été publiés dans les années 1960. La première traite de l'aspect appliqué du sujet, tandis que le second couvre la théorie pure. Lorenz a publié l'article le plus influent intitulé "Flux déterministe non périodique" en 1963 [5]. Cet article présente les résultats de simulation d'un système d'équations différentielles du troisième ordre. Ce système d'équations représente un modèle simple de la météo et s'exprime comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) \\ \dot{y} = -y + 28x - xz \\ \dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy \end{cases} \quad (1.30)$$

Les solutions numériques de l'équation (1.30) sont représentées dans la **Figure (1.4)**. Ces solutions présentent une structure géométrique : elles résident brièvement dans un mouvement qui est très proche de la périodicité, puis passent à un autre type de mouvement.

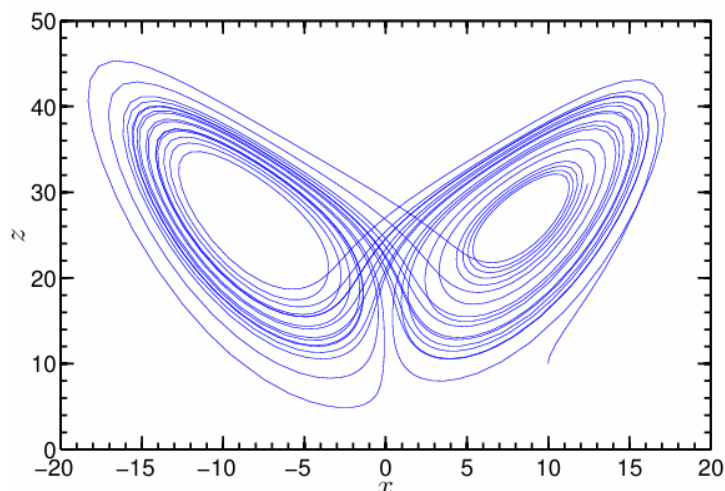


Figure 1.4 .L'attracteur de Lorenz.

Nous reviendrons plus en détail sur la discussion des attracteurs tels que l'attracteur de Lorenz dans la section (1.5).

Le deuxième article, intitulé “*Differentiable Dynamical Systems : Systèmes dynamiques différentiables*”, a été publié par *Smale* en 1967[6]. Dans cet article, l'auteur a tenté de prouver mathématiquement l'existence du chaos dans une classe spécifique de cartes. Ces deux articles révèlent certaines des difficultés liées à l'étude du chaos. Néanmoins, le terme “chaos”, dans le sens qui lui est donné pour les systèmes dynamiques, n'a été utilisé qu'à partir de 1975 par *Li* et *Yorke* dans l'article largement cité [7]. Ils ont démontré que tout système unidimensionnel qui présente un cycle régulier de période trois révélera également des cycles réguliers de toute autre longueur, ainsi que des orbites entièrement chaotiques.

Cette section commence par quelques définitions de base des caractéristiques du chaos, puis décrit certains mécanismes du chaos et examine enfin la détection numérique du chaos.

1.3.1 Mécanismes du chaos : le pétrissage de la pâte

En gros, l'analyse du chaos est très difficile. Cependant, il existe un moyen éclairant de comprendre véritablement le comportement chaotique. L'une des métaphores les plus importantes de la théorie du chaos est le pétrissage de la pâte [8]. Ce processus fournit un accès instinctif aux propriétés mathématiques des principes du chaos. Un boulanger exécute des actions encore et encore. Nous supposons que le pétrissage est le processus consistant à étirer la pâte, à la plier et à la contracter, répété fréquemment **figure (1.5)**. Dans le même contexte, *Smale* avait formellement introduit la soi-disant « Smale Horseshoe Map » [9]. Implique qu'il existe une région dans l'espace d'état qui dépend de manière sensible des conditions initiales.

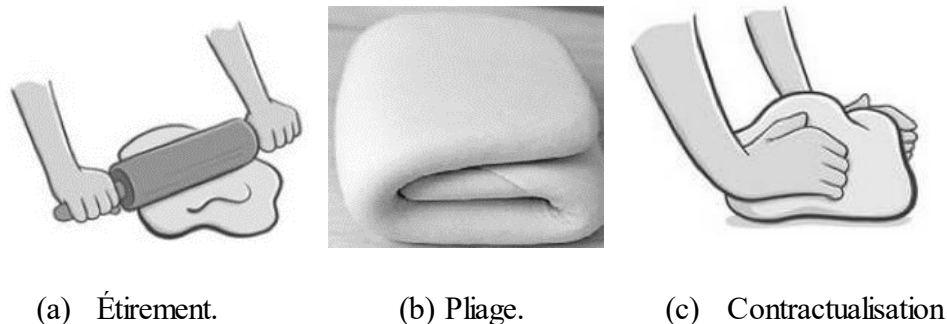


Figure 1.5. Pétrissage de la pâte comme processus de rétroaction :
étirer, plier, contracter, etc.

Ainsi, le processus de pétrissage a de nombreuses caractéristiques en commun avec les mécanismes fondamentaux nécessaires à l'apparition du chaos. Voyons comment :

Étirer: L'action d'étirement est responsable de la divergence exponentielle des bits ou des voisins. Ce premier mécanisme est essentiel pour assurer la dépendance sensible des solutions chaotiques aux conditions initiales, mais il n'est pas suffisant pour conduire à l'imprévisibilité.

Pliable : Le mécanisme d'étirement seul conduira à une géométrie illimitée. Par conséquent, l'action de pliage est essentielle pour maintenir l'attracteur borné. Le pliage se produit comme une non-linéarité essentielle obligeant l'écoulement divergent à changer brusquement de direction afin de maintenir les trajectoires dans une région bornée de l'espace. En raison de ce mécanisme, les trajectoires se décroellent rapidement. Cependant, il est impossible de définir une région initiale garantissant, après un certain temps, une distance entre les trajectoires aussi petite que souhaitée. Ainsi, sans l'action de pliage, la sensibilité aux conditions initiales ne conduit pas au chaos.

Contrats: Puisque la solution chaotique est bornée, elle reste intégrée dans un volume fini ou hyper volume. Par conséquent, s'il y a expansion dans une certaine direction de l'espace, elle doit être compensée par des contractions dans d'autres directions. L'action simultanée de l'étirement et de la contraction dans des directions différentes permet aux solutions de diverger les unes des autres tout en occupant un volume fini. Les opérations répétées d'étirement, de pliage et de contraction entraînent des dynamiques chaotiques.

1.3.2 Caractériser le chaos

Comme nous l'avons dit précédemment, il n'existe pas de définition spécifique du chaos. Cependant, les solutions chaotiques sont dotées de certaines caractéristiques appropriées bien connues. Dans ce sens, la plupart des définitions du chaos largement utilisées dans la littérature sont exprimées en termes de propriétés descriptives du système chaotique.

Les scientifiques qualifient de chaotiques les mouvements complexes non aléatoires qui présentent une expansion très rapide des erreurs, ce qui, malgré un déterminisme parfait, empêche toute aptitude efficace à effectuer des prédictions précises à long terme.

Explorons brièvement les propriétés les plus importantes du chaos :

- **Apériodicité et délimitation**

Tout d'abord, il convient de noter que la solution chaotique est une solution apériodique, comme l'illustre la **figure (1.4)**. En d'autres termes, les courbes décrivant le comportement temporel d'un système chaotique dans l'espace d'état ne passent jamais deux fois par le même état. C'est l'intuition fondamentale : l'observation d'un système chaotique, même si sa durée est très grande, ne peut jamais anticiper son comportement ultérieur.

Deuxièmement, les attracteurs associés au comportement chaotique dans l'espace d'état ne sont pas un simple objet comme une courbe fermée ou un tore ; ce sont des objets géométriques complexes qui ont des dimensions fractales [1].

- **Dépendance sensible aux conditions initiales et imprévisibilité**

Une grande partie de la théorie du chaos est liée au concept de dépendance sensible aux conditions initiales. Cette propriété peut être considérée comme une perte de mémoire du système concernant l'historique précédent de toute solution. Cependant, cela implique que, même si le comportement est prévisible à court terme, les prédictions à long terme du système sont particulièrement impossibles malgré sa nature déterministe.

Cette propriété peut être décrite par le fait que, en partant de très petites différences dans les conditions initiales, les trajectoires d'un système chaotique divergeront jusqu'à devenir totalement non corrélées. C'est ce qu'on appelle l'effet papillon. Une petite perturbation créée par l'aile d'un papillon aujourd'hui à Paris peut provoquer une tempête torrentielle le mois prochain à New York.

Cet effet est clairement illustré dans la **figure (1.6)**, où le modèle de Lorenz est simulé avec de minuscules différences dans les conditions initiales (marquées par des cercles). Ces différences d'entrées sont rapidement amplifiées et créent des divergences écrasantes dans les sorties (marquées par des carrés).

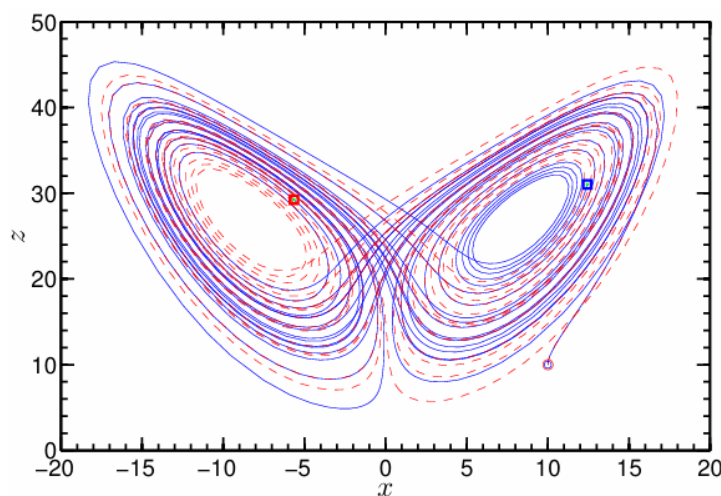


Figure 1.6. Sensibilité de l'attracteur de Lorenz aux conditions initiales.

En théorie, le comportement chaotique ne peut être déterminé quantitativement que si les conditions initiales sont connues avec un degré élevé de précision. Cependant, dans la pratique, les conditions initiales d'un système dynamique ne peuvent être mesurées ou décrites qu'avec une précision finie. Ainsi, comme déjà mentionné, quel que soit le niveau de précision des conditions initiales, le comportement à long terme du système physique ne peut jamais être prédit quantitativement.

- **Chaos déterministe**

Un paradoxe évident est que le chaos est déterministe, régi par des lois fixes, qui ne nécessitent elles-mêmes aucun élément de changement. Dans la littérature, on parle même de chaos déterministe. Ensuite, le chaos déterministe est généré par des règles déterministes.

Étant donné que les systèmes chaotiques sont déterministes, les trajectoires qui partent de conditions initiales identiques suivront exactement les mêmes chemins dans l'espace d'état.

- **Théorie ergodique**

Le comportement chaotique est ergodique. Cela signifie qu'au fil de l'évolution temporelle, la dynamique du système visite de manière ergodique un petit voisinage de chaque point dans chaque orbite périodique instable intégrée dans l'attracteur chaotique [10].

Pour une durée suffisamment longue, l'ergodicité du chaos garantit une couverture de tous les états et assure l'existence d'au moins un chemin entre n'importe quel état initial et n'importe quel état final situé sur l'attracteur.

1.3.3 Détection du chaos et exposants de Lyapunov

Comme nous le savons, les trajectoires d'un système chaotique divergent de manière exponentielle. Le taux de divergence exponentielle entre les trajectoires est l'une des mesures qui caractérisent le comportement chaotique et le détectent. Cela conditionne la capacité de prédire le comportement du système à plus ou moins long terme. Par définition, les exposants de Lyapunov associés à une trajectoire sont essentiellement une mesure des taux d'expansion et de contraction des trajectoires voisines [1]. Ils décrivent le taux exponentiel auquel une minuscule perturbation d'une trajectoire se développe ou se désintègre au cours de l'évolution temporelle dans l'espace d'état. Ainsi, ils sont directement liés à la sensibilité du système aux conditions initiales.

En tenant compte des exposants de Lyapunov, un attracteur chaotique est caractérisé par l'existence d'au moins un exposant positif, un exposant nul et tous les autres exposants négatifs. De plus, la stabilité des dynamiques chaotiques, c'est-à-dire l'existence d'un ensemble attracteur chaotique, nécessite que la somme des exposants soit négative. Par conséquent, nous pouvons en déduire que la dimension minimale de l'espace d'état permettant l'existence d'une solution chaotique, pour un système autonome à temps continu, est égale à trois.

En outre, à l'aide des exposants de Lyapunov, nous pouvons distinguer différents mouvements de solutions de systèmes dynamiques.

Concept des exposants de Lyapunov

Nous commençons par définir les exposants de Lyapunov pour un système non linéaire en temps continu donné. Soit le système autonome n-dimensionnel défini par (1.31) où $x(t)$ représente une trajectoire du système initialisée à $x(t=0) = x_0$.

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (1.31)$$

F Écrit la fonction vectorielle d'évolution non linéaire du système. En désignant la petite perturbation apportée à $x(t)$ à l'instant t par $\delta x(t)$. Nous considérons la déviation initiale $\delta x(t=0) = \delta x_0$, qui décrit la perturbation apportée à $x(t)$ au moment initial. Après linéarisation, nous obtenons une équation dans les termes de perturbation exprimée comme suit:

$$\dot{\delta x}(t) = J(t)\delta x(t) \quad (1.32)$$

Le système d'équation différentielle ordinaire à n^2 - dimensions (1.32) est également appelé système variationnel, où $J(t)$ est la matrice Jacobienne de F définie comme suit :

$$J(t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \quad (1.33)$$

Ensuite, l'évolution de la déviation est donnée par :

$$\delta x(t) = \phi(t)\delta x_0 \quad (1.34)$$

Où $\phi(t)$ est la solution de la matrice de transition de (1.32) associée à la trajectoire $x(t)$

Le taux d'expansion ou de contraction exponentielle dans la direction d'un δx_0 sur la trajectoire passant par x_0 s'exprime comme :

$$\bar{\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left[\frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x_0\|} \right] \quad (1.35)$$

La quantité asymptotique $\bar{\lambda}_i$ est appelée exposant de Lyapunov.

En général, le plus grand exposant désigné par λ est utilisé, car il reflète l'horizon de prévisibilité du système et décrit le taux d'expansion des trajectoires évoluant à partir de conditions initiales légèrement différentes. Pour la suite de la thèse, nous notons par λ l'exposant de Lyapunov.

Le plus grand exposant de Lyapunov est alors donné comme :

$$\lambda = \lim_{\delta x_0 \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left[\frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x_0\|} \right] \quad (1.36)$$

La prédiction du comportement du système dépend fortement de λ .

En ce qui concerne les exposants de Lyapunov, l'attracteur chaotique est caractérisé par l'existence d'au moins un exposant positif, d'un exposant nul et de tous les autres exposants négatifs. De plus, la stabilité de la dynamique chaotique, c'est-à-dire l'existence d'un attracteur chaotique, exige que la somme de tous les exposants soit négative.

Calcul des exposants de Lyapunov

Plusieurs méthodes discrètes et continues pour calculer les exposants de Lyapunov des systèmes dynamiques sont détaillées dans la littérature. Ces méthodes sont soit basées sur les valeurs singulières, soit sur la décomposition QR . Au cours des dernières années, des efforts importants ont été réalisés pour améliorer la précision des techniques d'orthonormalisation, dont dépend fortement l'estimation des exposants de *Lyapunov* [11]. Dans cette ligne, *Benettin* [12] a fondé que les approches de décomposition QR sont les plus efficaces. Ce sont deux grandes classes de méthodes QR pour estimer les exposants de Lyapunov : les méthodes QR discrètes et continues.

L'idée de base est d'extraire directement le spectre de Lyapunov à partir d'une décomposition de δx_t , en utilisant un changement de variables orthogonal variant dans le temps.

La solution fondamentale $\Phi(t)$ de (1.32) étant disponible, la décomposition $\delta x_t = Q_t R_t$ est appliquée pour avoir, d'une part, la matrice orthogonale Q_t et, d'autre part, R_t qui est une matrice triangulaire supérieure. Alors pour un vecteur donné b_i d'une base normale $\{b\}$, on peut écrire :

$$\|Q_t b_i\| = \|b_i\| \quad (1.37)$$

Par conséquent, l'expression suivante est satisfaite :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log \|\delta x(t).b_i\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \log \|R(t).b_i\| \quad (1.38)$$

Une fois que nous avons transformé le problème en une forme triangulaire, les exposants de Lyapunov peuvent être extraits des coefficients triangulaires de $R(t)$.

- **Orthogonalisation et Décomposition QR :**

L'orthogonalisation de la matrice $\delta x(t)$ est une tâche cruciale pour l'estimation du spectre de Lyapunov, dont la précision en dépend fortement. Le système dynamique étant non

linéaire, il est nécessaire de redéfinir, à période de temps régulière, une base orthogonale b_i sur laquelle $\delta x(t)$ doit être projeté. Une fois que nous avons choisi l'approche de décomposition QR [13], nous pouvons alors choisir l'une des techniques d'orthonormalisation les plus largement utilisées. Parmi plusieurs méthodes d'orthonormalisation, nous avons choisi la méthode classique de *Gram-Schmidt* [14].

- **Résultats des calculs : La carte logistique :**

Pour illustrer notre analyse précédente, nous présentons le calcul numérique de la carte logistique largement connue, définie comme :

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n) \tag{1.39}$$

Où $a \in [1, 4]$

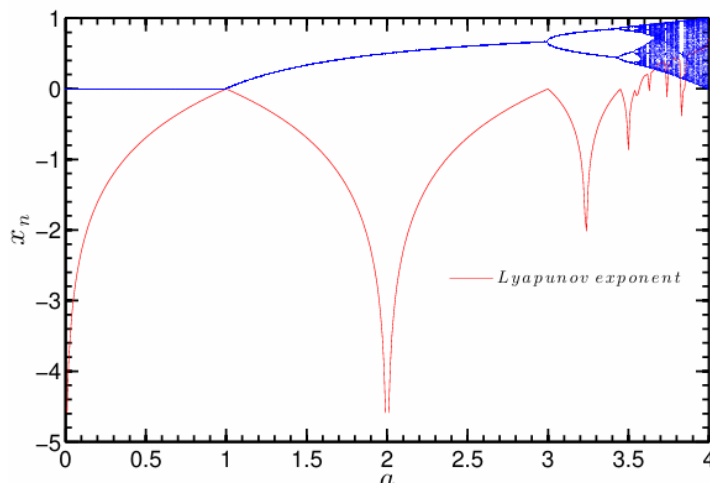


Figure 1.7. Diagramme de bifurcation de la carte logistique et de l'exposant de Lyapunov.

Ici, nous avons calculé l'exposant de Lyapunov en utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt déjà détaillé. Le but du calcul de l'exposant de Lyapunov ici est principalement de vérifier la quasi-périodicité et le chaos qui ont été prédits à partir du diagramme de bifurcation (voir la section (1.4) pour plus de détails sur les diagrammes de bifurcation). Le plus grand exposant de Lyapunov, ainsi que le diagramme de bifurcation de la carte logistique, sont illustrés à la figure (1.7). Pour ce cas particulier, la carte présente une quasi-périodicité à certaines valeurs particulières du paramètre de bifurcation. Elle peut également présenter un chaos dans la région au-delà de $a = 3,75$. Comme mentionné précédemment, les valeurs négatives des exposants de Lyapunov impliquent la stabilité des mouvements périodiques.

1.4 Théorie de la bifurcation : définitions élémentaires

Dans cette section, nous allons aborder certains concepts de la théorie des bifurcations. Tout d'abord, nous présentons les définitions des bifurcations locales et globales. Deuxièmement, nous décrivons brièvement l'analyse de la stabilité et de la stabilité structurelle des systèmes dynamiques non linéaires. Enfin, les concepts du diagramme de bifurcation seront illustrés.

Le terme de bifurcation a été introduit par Henri Poincaré dans les dynamiques non linéaires en 1885 dans les premiers articles décrivant un tel comportement [15]. La théorie de la bifurcation illustre la façon dont les caractéristiques topologiques d'un système (telles que le nombre et la nature des solutions) changent sous l'effet de variations d'un ou de plusieurs paramètres. La terminologie de la bifurcation locale fait référence au changement qualitatif qui se produit dans les environs d'un point fixe ou d'une solution périodique du système. Tout autre changement qualitatif est considéré comme une bifurcation globale. De plus, selon que la dynamique du système varie de manière continue ou discontinue, la bifurcation est classée en types continus et discontinus.

1.4.1 Bifurcations locales de points fixes

Ici, nous discutons brièvement de la bifurcation locale des points fixes d'un système différentiel autonome, lorsqu'un paramètre de contrôle scalaire est modifié.

Soit un système à temps continu à n – dimensions exprimé par :

$$\dot{x} = F(x, \alpha) \quad (1.40)$$

Où α est un paramètre réel.

Nous commençons le processus de contrôle avec des paramètres correspondant à un point fixe stable. Cependant, alors que nous modifions lentement un des paramètres de contrôle, le point fixe peut perdre sa stabilité (représenté en pointillés) par l'une des bifurcations voir **figure (1.8)** : la bifurcation du nœud de selle, la bifurcation de la fourche, la bifurcation transcritique ou la bifurcation de *Hopf* [7].

Nous notons que, pour les bifurcations de selle, de fourche et transcritique, seules les branches de points fixes ou de solutions statiques peuvent se rencontrer aux points de bifurcation. Ainsi, ces bifurcations sont considérées comme statiques. Cependant, au point de bifurcation associé à la bifurcation de *Hopf*, les branches des points fixes et de la solution périodique se rencontrent. Par conséquent, la bifurcation de *Hopf* est considérée comme dynamique.

1.4.2 Bifurcations globales

Les bifurcations non locales sont appelées bifurcations globales. Elles sont corrélées aux variations globales de l'espace d'état et surviennent lorsque le paramètre de contrôle varie lentement.

Habituellement, à un point de bifurcation global, nous avons soit une orbite homocline, soit une orbite hétérocline [1], voir **figure (1.9)**. Les bifurcations globales conduisent généralement à la génération d'orbites chaotiques. De plus, elles présentent un intérêt considérable pour l'analyse de la théorie du chaos.

1.4.3 Diagrammes de bifurcation

Afin d'illustrer graphiquement la dépendance d'un état x à un paramètre α du système dynamique autonome (1.40), nous avons besoin d'une mesure scalaire du n -vecteur x .

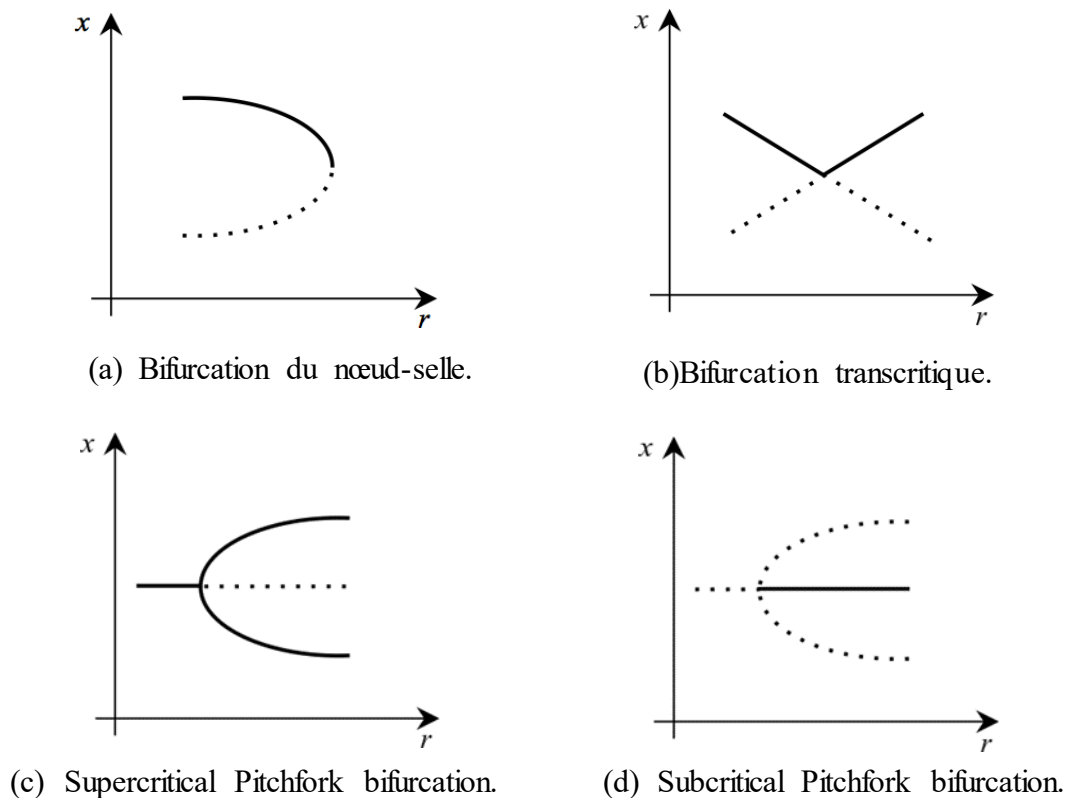
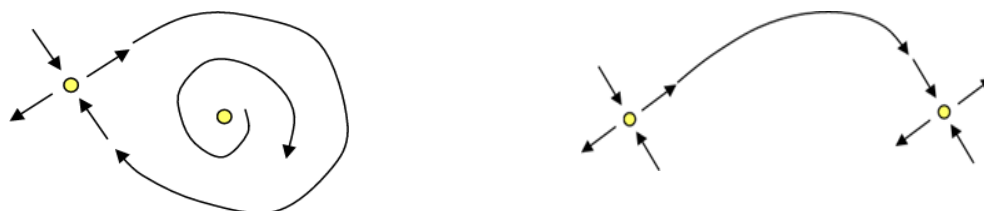


Figure 1.8. Exemples de bifurcations locales.



(a)Orbites homoclines : boucle de selle.

(b)Orbites hétéroclines : connexion de selle-selle.

Figure 1.9. Exemples de bifurcations globales.

Un diagramme représentant $x_k (1 \leq k \leq n)$ en fonction de α , où (x, α) résout l'équation (1.40), est appelé un diagramme de bifurcation voir **figure (1.7)**.

1.5 Systèmes dissipatifs et attracteurs

Dans cette section, nous discutons des définitions de base des systèmes dissipatifs et des attracteurs.

Pour un système physique, la dissipation résulte de phénomènes tels que le frottement, la viscosité, la compression, etc., et généralement, nous pouvons déterminer si la dissipation est importante ou non. Pour évaluer la dissipation, un outil mathématique conceptuel est généralement utilisé : un "cluster" de conditions initiales. Dans le cas d'un système unidimensionnel, il s'agit d'un segment de trajectoire relativement petit. Le but de cet outil mathématique est d'examiner ce qui se passe avec la longueur de ce segment au cours de l'évolution temporelle lorsque les points du segment se déplacent dans l'espace des états. Par définition, pour un système dissipatif borné, le groupe de points de trajectoire doit subir une contraction.

Référence au paragraphe (1.3.3), nous notons que, pour un système dissipatif, la somme des exposants de Lyapunov doit être négative.

Ici, nous limiterons notre discussion à la classe des systèmes dissipatifs. Pour ces systèmes, l'effet des transitoires dépend de la condition initiale, et en raison des actions de contraction, le comportement à long terme est restreint à des régions bornées de l'espace d'état. Ainsi, pour les systèmes dissipatifs, nous concentrons généralement notre attention uniquement sur leur évolution à long terme. Au fil du temps, la trajectoire d'un système dissipatif converge

vers un objet géométrique différent dans l'espace d'état, tel qu'un point final, une courbe ou une zone, etc.

Cet objet géométrique est appelé l'attracteur du système car un certain nombre de trajectoires convergent vers lui dans l'espace d'état. En cas de systèmes dissipatifs, les propriétés des attracteurs déterminent les caractéristiques dynamiques à long terme du système.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques généralités sur les systèmes dynamiques ont été intro duites. Quelques bases théoriques élémentaires liées à la non-linéarité du système dynamique ont été définies et expliquées.

Tout d'abord, le système dynamique en temps continu ainsi que le système dynamique en temps discret ont été introduits. Nous avons ensuite présenté la récurrence de Poincaré qui décrit l'évolution du système dynamique à des instants discrets. Les natures des solutions des systèmes dynamiques ont également été détaillées. En second lieu, les solutions chaotiques ont été explorées. Les caractéristiques des systèmes chaotiques, en particulier leur sensibilité aux conditions initiales, ont été expliquées et illustrées par le système des équations de Lorenz. Beaucoup d'efforts ont été fournis dans l'analyse des techniques de détection du chaos ainsi que des méthodes de calcul des exposants de *Lyapunov*. Le diagramme de bifurcations de la récurrence logistique et son exposant de *Lyapunov* ont été évalués. Après cela, des définitions élémentaires de la théorie des bifurcations ont été présentées. Finalement, nous avons exprimé le concept des systèmes dissipatifs et des attracteurs.

Bibliographie

- [1] A. H. Nayfeh and B. Balachandran, *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods*. John Wiley & Sons, Nov. 2008. (Cited on pages 11, 18, 21, 23 and 27.)
- [2] B. Robert, C. Goedel, and M.-C. Marion-Péra, “Dynamiques apériodiques et chaotiques du moteur pas à pas,” *Revue Internationale de Génie Electrique*, vol. 3, pp. 375–410, Jan. 2000. (Cited on pages 13, 78 and 81.)
- [3] K. Koubaâ, “Analyse et commande du comportement chaotique dans les convertisseurs multi-cellulaires,” Ph.D. dissertation, Université de Sfax, Ecole Nationale d’Ingénieurs de Sfax, 2013. (Cited on page 14.)
- [4] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, 2000. (Cited on page 15.)
- [5] E. N. Lorenz, “Deterministic Nonperiodic Flow,” *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, Mar. 1963. (Cited on page 19.)
- [6] S. Smale, “Differentiable dynamical systems,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 73, no. 6, pp. 747–817, 1967. (Cited on page 19.)
- [7] T.-Y. Li and J. A. Yorke, “Period Three Implies Chaos,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 82, no. 10, pp. 985–992, 1975. (Cited on page 19.)
- [8] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, *Chaos and fractals: new frontiers of science*. Springer Science & Business Media, 2006. (Cited on pages 20 and 24.)
- [9] H. Zhang, D. Liu, and Z. Wang, *Controlling Chaos: Suppression, Synchronization and Chaotification*. Springer Science & Business Media, Jun. 2009. (Cited on page 20.)
- [10] S. Boccaletti, C. Grebogi, Y. C. Lai, H. Mancini, and D. Maza, “The control of chaos: theory and applications,” *Physics Reports*, vol. 329, no. 3, pp. 103–197, May 2000. (Cited on page 22.)
- [11] K. Geist, U. Parlitz, and W. Lauterborn, “Comparison of different methods for computing Lyapunov exponents,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 83, no. 5, pp. 875–893, 1990. (Cited on page 25.)
- [12] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn, “Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for

Références

- computing all of them. Part 1: Theory,” *Meccanica*, vol. 15, no. 1, pp. 9–20, 1980. (Cited on page 25.)
- [13] M. De Castro, “Analyse des modes chaotiques dans un moteur linéaire à réluc- tance variable en vue du contrôle,” Ph.D. dissertation, University of Reims Champagne-Ardenne, FRANCE, Jan. 2010. (Cited on page 26.)
- [14] H. F. von Bremen, F. E. Udwalla, and W. Proskurowski, “An efficient QR based method for the computation of Lyapunov exponents,” *Physica D: Non- linear Phenomena*, vol. 101, no. 1, pp. 1–16, Feb. 1997. (Cited on page 26.)
- [15] H. Poincaré, “Sur l’équilibre d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation,” *Acta mathematica*, vol. 7, no. 1, pp. 259–380, 1885. (Cited on page 27.)

Chapitre 2 : introduction a la commande par mode glissant

2.1 Introduction

La commande à structure variable, également connue sous le nom de contrôle en mode glissant (SMC), a été développée par des scientifiques russes au début des années 1960 et rapportée plus tard dans la monographie d'Utkin dans les années 1970 [1]. Depuis lors, le SMC a été largement étudié et appliqué avec succès à de nombreux systèmes dynamiques en raison de sa robustesse face aux incertitudes du système et aux perturbations [2]. Ce chapitre présente quelques notions de la stabilité des systèmes et une brève revue de la littérature sur les concepts de commande par mode glissant.

2.2 Théorie de la stabilité de Lyapunov

La théorie de la stabilité joue un rôle essentiel dans le concept de la commande des systèmes physiques. Ces derniers sont généralement décrits par des modèles mathématiques non linéaires et sont caractérisés par des paramètres variables dans le temps, ce qui rend leur analyse de stabilité à l'aide des critères de stabilité linéaires, tels que le critère de stabilité de Routh ou le critère de stabilité de Nyquist, insuffisante pour étudier ce type de systèmes non linéaires. La théorie de la stabilité de Lyapunov [4,3], présentée dans cette section, est l'approche la plus générale utilisée pour étudier la stabilité des systèmes dynamiques, qu'ils soient linéaires ou non linéaires.

2.2.1 Stabilité des points d'équilibre

Considérons un système dynamique décrit par :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.1)$$

Où $x \in R^n$ est le vecteur de variables d'état, n est l'ordre du système et $f(x, t) \in R^n$ est un ensemble de fonctions de $x(t)$.

Supposons que $x_e \in R^n$ est un point d'équilibre du système (2.1), c'est-à-dire que $f(x_e, t) = 0$. Sans perte de généralité, nous énonçons toutes les définitions et théorèmes pour le cas où le point d'équilibre est à l'origine de R^n , $x_e = 0$.

Définition 2.1 : Le point d'équilibre à l'origine de (2.1) est

- stable, si, pour n'importe quel $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

- instable, si la condition ci-dessus n'est pas satisfaite
- asymptotiquement stable si elle est stable et δ peut être choisie de telle sorte que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (2.3)$$

Il est important de noter que la définition 2.1 concerne la stabilité locale, qui décrit uniquement le comportement d'un système près d'un point d'équilibre, afin d'atteindre la stabilité globale, la méthode directe de Lyapunov est présentée dans la suite pour remédier à cet inconvénient.

2.2.2 Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov, également appelée deuxième méthode de Lyapunov, permet de déterminer la stabilité d'un système sans intégrer explicitement l'équation différentielle dans (2.1). Le concept de fonction de Lyapunov provient de la mécanique théorique, où, dans les systèmes conservateurs stables, une 'énergie' est une fonction scalaire définie positive qui devrait diminuer avec le temps. En suivant cette analogie, nous pouvons construire une fonction scalaire généralisée 'semblable à l'énergie' en tant que fonction de Lyapunov pour analyser la stabilité de tout système non linéaire.

Théorème 2.1 : Soit $D \subset R^n$ un domaine contenant l'origine du système et que $V(x) = D \rightarrow R$ est une fonction différentiable et continue telle que

$$V(0) = 0 \text{ et } V(x) > 0, \forall x \neq 0 \quad (2.4)$$

Et

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad (2.5)$$

Alors $x = 0$ est stable, de plus, si

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0 \quad (2.6)$$

Alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.

Une fonction continuellement différentiable $V(x)$ satisfaisant (2.4) et (2.6) est appelée fonction de Lyapunov. Il est à noter que le critère de Lyapunov ci-dessus n'est pas constructif, car il ne donne pas de méthode pour déterminer la fonction de Lyapunov. Il incombe au

concepteur du contrôle de rechercher une fonction de Lyapunov appropriée pour établir la stabilité d'un point d'équilibre, ce qui s'avère souvent être une tâche ardue dans la pratique. De plus, comme le théorème ne donne que des conditions suffisantes, l'inverse du théorème n'est pas nécessairement vrai.

2.3 Commande par mode glissant

La commande par mode glissant (Sliding Mode Control ou SMC) est une technique de commande non linéaire qui a été introduite pour le contrôle des systèmes à structure variable. Cette méthode repose sur le concept de modification de la structure du contrôleur en fonction de l'état du système pour obtenir une réponse souhaitée. Le principe de la SMC consiste à amener les conditions initiales du système, représentées par un point dans l'espace de phase, sur une hypersurface appelée surface de glissement en intégrant des éléments de commutation dans la loi de commande. Une fois que ce point atteint la surface de glissement, le système entre en régime glissant.

La commande par modes glissants est une technique largement utilisée dans la littérature [5,7]. Son succès est dû à sa robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations externes. Il s'agit de définir d'abord une surface dite de glissement qui représente la dynamique désirée, puis synthétiser une loi de commande qui doit agir sur le système en deux phases. Dans la première, on force le système à rejoindre cette surface, et dans la seconde phase on doit assurer le maintien et le glissement le long de cette surface pour atteindre l'origine du plan de phase comme montré sur la **figure (2.1)**.

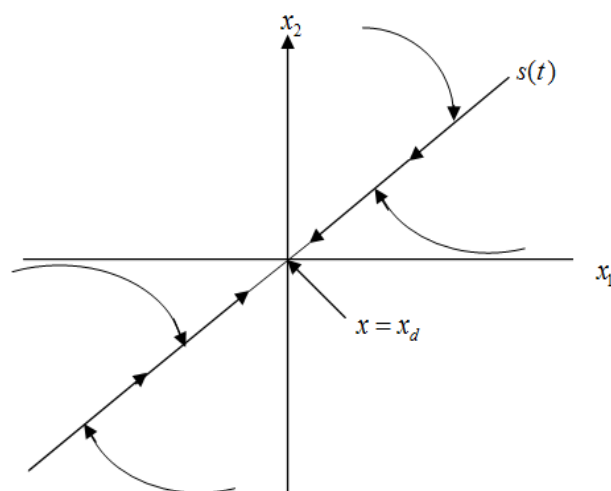


Figure 2.1 Portrait de phase d'une surface de glissement

En régime glissant, le comportement du système devient insensible aux perturbations externes et aux variations paramétriques, ce qui constitue une caractéristique majeure de la

commande par mode glissant. Cependant, l'un des principaux inconvénients de cette technique est le phénomène de broutement ou « chattering ». Ce problème se traduit par des oscillations à haute fréquence autour de la surface de glissement, pouvant exciter des dynamiques à haute fréquence négligées, ce qui peut parfois mener à l'instabilité du système.

2.3.1 Synthèse de la commande par mode glissant

Soit un système défini par l'équation d'état non linéaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(x) + g(x)u \\ y = x \end{cases} \quad (2.7)$$

Où: $x^{(n)}$ est la n^{ième} dérivée de x en fonction du temps, u la commande du système et $x = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$ le vecteur d'état, $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions non linéaires. $g(x)$ est supposée inversible.

Notre but est d'atteindre un état désiré $x_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}]$ en présence des incertitudes du modèle sur $f(x)$ et $g(x)$. On définit le vecteur de l'erreur de poursuite comme $e(t) = y(t) - x_d(t) = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}]^T$.

Une surface de glissement $s(x, t)$ varie en fonction du temps dans l'espace d'état \mathfrak{R}^n est donnée par [5]:

$$s(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e(t) \quad (2.8)$$

Où λ est une constante strictement positive et $s(x, t)$ un scalaire.

Le problème de poursuite de l'état désiré $y(t) = x_d(t)$ revient à maintenir les états du système sur la surface $s(x, t)$ pour tout $t > 0$.

Le choix particulier de la surface de glissement satisfait la condition (2.9):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2(x, t) \leq -\eta |s(x, t)|, \quad \eta > 0 \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) [6] qui est appelée condition d'attraction force les trajectoires d'état à se diriger vers la surface de glissement comme indiqué sur la figure (2.1). On assume que $s > 0$ et on définit t_f comme étant le temps nécessaire à une trajectoire pour atteindre la surface $s(x, t)$.

L'équation (2.9) peut être réécrite comme suit:

$$\frac{d}{dt} s(x,t) \leq -\eta \quad (2.10)$$

En intégrant (2.10) de $t = 0$ à $t = t_f$ on obtient

$$s(t_f) - s(0) \leq -\eta (t_f - 0) \quad (2.11)$$

Vu que $s(t_f) = 0$, l'équation (2.11) deviendra:

$$t_f \leq s(0)/\eta \quad (2.12)$$

t_f Peut aussi être obtenu en considérant le cas où $s < 0$, ce qui donne :

$$t_f \leq |s(0)|/\eta \quad (2.13)$$

L'équation (2.13) garantit que si les trajectoires sont à l'extérieur de $s(x,t)$, elles atteindront la surface de glissement dans un temps fini inférieur à $|s(0)|/\eta$.

Lorsque la surface de glissement $s = 0$ est atteinte, l'erreur tend vers zéro exponentiellement ($y = x_d$). Pour une condition permettant de donner à la surface de glissement une dynamique de convergence vers zéro, on utilise généralement la condition d'attractivité non-linéaire suivante [5] :

$$s(x,t)\dot{s}(x,t) \leq -\eta |s(x,t)| \quad (2.14)$$

L'élaboration de la loi de commande par mode glissant est basée sur le critère de stabilité de Lyapunov, cette loi est choisie telle que la dérivée d'une fonction de Lyapunov soit négative. L'idée est d'utiliser la fonction scalaire $s(x,t)$ pour définir la fonction de Lyapunov:

$$V(x,t) = \frac{1}{2} s^T(x,t) s(x,t) \quad (2.15)$$

La fonction de Lyapunov est définie positive de manière évidente et sa dérivée est:

$$\dot{V}(x) = s(x,t) \dot{s}(x,t) < 0 \quad (2.16)$$

La commande développée doit satisfaire la condition (2.16). La construction de cette loi de commande consiste à admettre qu'en mode de glissement le système piloté par une commande u_{eq} , solution de $\dot{s} = 0$, dite commande équivalente qui permet de maintenir l'état du système sur la surface $s = 0$.

Le calcul de la commande équivalente s'effectue en prenant en considération les conditions d'invariance suivantes :

$$\begin{cases} s(x,t) = 0 \\ \dot{s}(x,t) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Considérons l'exemple d'un système non-linéaire avec une seule entrée, représenté par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u \quad (2.18)$$

L'existence du mode glissant implique que :

$$\dot{s}(x,t) = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad (2.19)$$

En remplaçant (2.18) dans (2.19) :

$$\frac{\partial s}{\partial t} \dot{x} = \frac{\partial s}{\partial t} (f(x,t) + g(x,t)u_{eq}) = 0 \quad (2.20)$$

En supposant que $\frac{\partial s}{\partial t}(g(x,t))$ est inversible :

$$u_{eq} = \left[\frac{\partial s}{\partial t}(g(x,t)) \right]^{-1} \cdot \frac{\partial s}{\partial t}(f(x,t)) \quad (2.21)$$

Par conséquent, on peut déterminer la dynamique sur la surface de glissement pour tout instant:

$$\dot{x} = \left[I - g(x,t) \left[\frac{\partial s}{\partial t}(g(x,t)) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial t} \right] f(x,t) \quad (2.22)$$

La commande discontinue ou de commutation qui permet de garantir la condition d'attractivité, peut prendre plusieurs formes. La forme la plus simple est celle d'un relais.

$$u_c = -\eta \text{sign}(s(x,t)) \quad (2.23)$$

Où η est une constante positive.

La loi de commande par mode glissant satisfaite la condition (2.17) peut être donnée par :

$$u_{SMC} = u_{eq} + u_c \quad (2.24)$$

La loi de commande (2.24) est certes robuste vis-à-vis des perturbations externes mais présente deux inconvénients majeurs. Le premier réside dans la présence de la fonction *signe* dans le signal de commande provoquant le phénomène de broutement qui peut détériorer le système commandé. Le second inconvénient réside dans la difficulté du calcul de la constante η . Pour remédier à ces inconvénients, plusieurs solutions ont été présentées dans la littérature [7,8].

2.4 Exemple d'application :

Dans cet exemple un système de la torche à plasma est considéré et son modèle est d'écrit comme suit :

$$\ddot{F} + a_2\dot{F} + a_1\dot{F} + a_0F = \pm F^3 \quad (2.25)$$

Où $F, \dot{F}, \ddot{F} \in \mathfrak{R}$ et a_0, a_1 et $a_2 \in \mathfrak{R}$ 'sont les quantités de champ plasmatique et les paramètres du système, respectivement. Les paramètres thermo-physiques tels que l'outil de la torche à plasma, la vitesse d'écoulement du gaz plasmatique et le courant d'arc déterminent les paramètres de l'équation (2.25). Considérant le comportement dynamique de la torche à plasma, les coefficients de l'équation (2.25) sont tirés des résultats de la recherche [9,10]. L'équation (2.25) peut réécrite sous le format suivant :

$$\ddot{F} + \dot{F} + 50\dot{F} + \mu F = -F \quad (2.26)$$

μ représente le paramètre de bifurcation. Le modèle d'espace d'état du système (2.25) peut être décrit ci-dessous :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_1 - 50x_2 - x_3 - x_1^3 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Les points d'équilibre du système (2.27) sont $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0), (\pm\sqrt{-\mu}, 0, 0)$ pour $\mu \leq 0$.

La matrice Jacobienne du système (2.27) au point d'équilibre $(x_1^e, 0, 0)$ est la suivante, avec $x_1^e = 0$ et $(x_1^e = \pm\sqrt{-\mu})$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3(x_1^e)^2 - \mu & -50 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

L'analyse de stabilité du système (2.25) basée sur la méthode de Routh-Hurwitz montre que les points d'équilibre $(0,0,0)$ et $(\pm\sqrt{-\mu}, 0, 0)$ sont asymptotiquement stables pour

$0 < \mu < 50$ et $-25 < \mu < 0$ respectivement. Par conséquent $(0,0,0)$ est un point d'équilibre instable pour $\mu < 0$.

Les **figures (2.2-2.5)** montrent que le système (2.27) devient chaotique pour la condition initiale $(x_1, x_2, x_3) = (5, -2, 3)$ et $\mu = -130$.

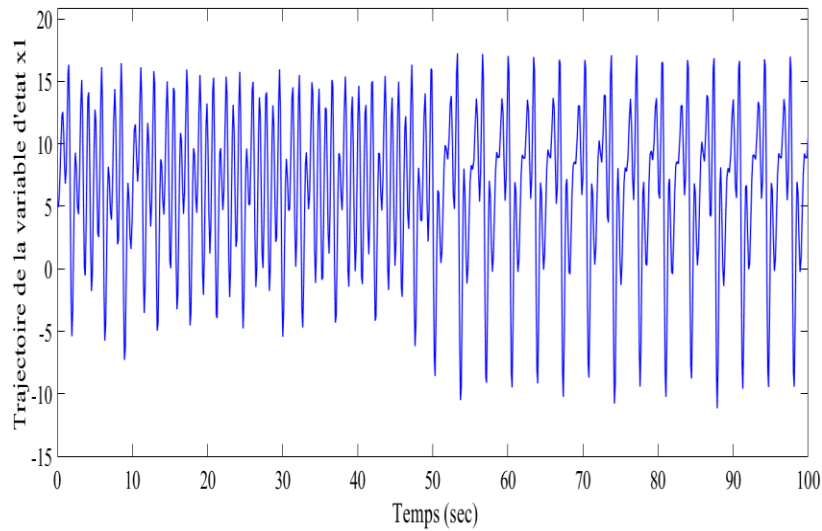


Figure 2.2. Mouvement chaotique de la variable d'état x_1 .

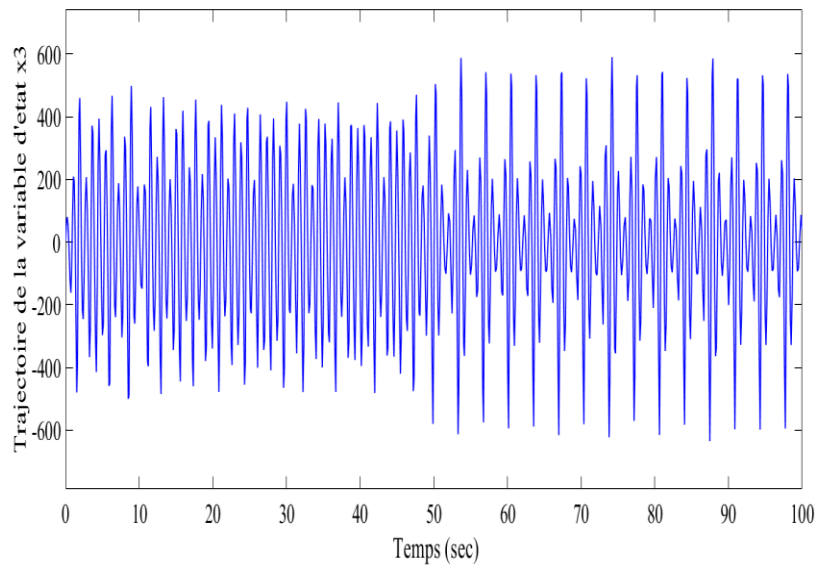


Figure 2.3. Mouvement chaotique de la variable d'état x_2 .

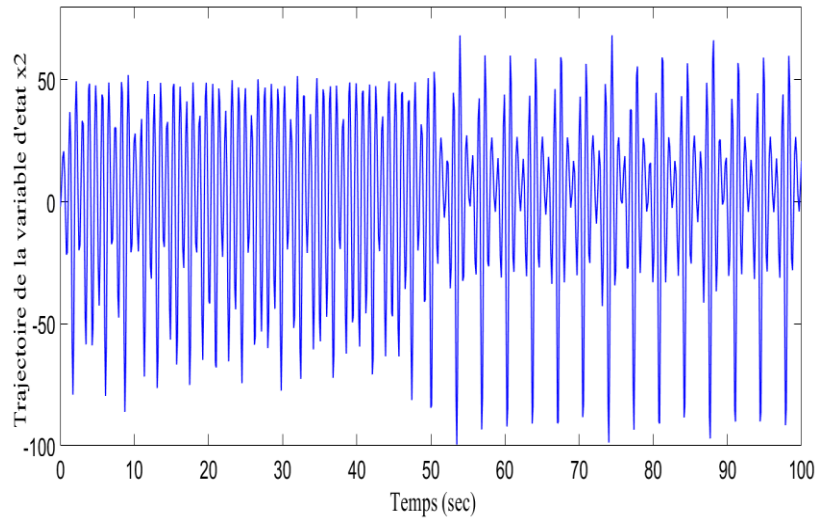


Figure 2.4. Mouvement chaotique de la variable d'état x_3 .

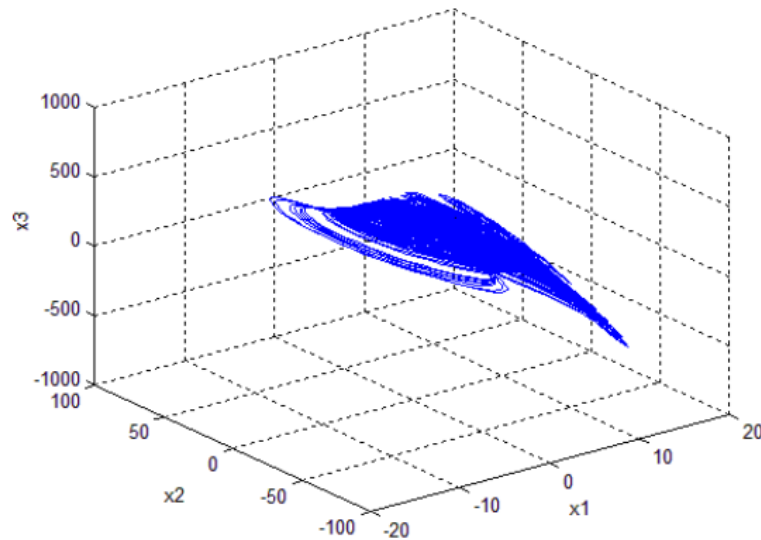


Figure 2.5. Attracteur chaotique.

On souhaite concevoir un contrôleur tel que les états du système de la torche à plasma convergent asymptotiquement vers le point d'équilibre instable $(0,0,0)$ pour $\mu < 0$.

Loi de commande SMC :

Dans cette application on admit que l'entrée de commande est considérée comme suit :

$$u(t) = x_1^3 + u_1(t) \quad (2.29)$$

Avec $u_1(t)$ la loi de commande SMC. Le système de la torche à plasma peut être récrit comme :

$$\dot{x} = f(x) + b(x)u_1 \quad (2.30)$$

Où :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, f(x) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\mu & -50 & -1 \end{bmatrix} x, \quad b(x) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donc la synthèse SMC stabilisant le système commence par définir une surface de glissement donnée par l'équation suivante :

$$s = cx \tag{2.31}$$

Où $c = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$. Dans la deuxième étape, la loi SMC est choisie de telle sorte que la convergence vers la surface de glissement soit garantie.

$$\dot{s} = c\dot{x} = c[f(x) + b(x)u_1(t)] \tag{2.32}$$

On obtient la loi de commande SMC donnée par l'équation:

$$u_1(t) = -(cb(x))^{-1} [cf(x) - \eta \text{sign}(s)] \tag{2.33}$$

L'expression de $u(t) = x_1^3 + u_1(t)$ est l'action de commande nécessaire pour le stabilisateur SMC de système (2.30). La loi de commande $u(t)$ force la trajectoire de la variable d'état à satisfaire l'équation (2.33). Selon cette équation, la trajectoire converge vers la surface $s = 0$. Afin d'étudier l'efficacité du stabilisateur non linéaire proposé, la simulation numérique a été effectuée sur le système de la torche plasma comme montré dans les figures (2.6-2.9).

2.4.1 Résultats de simulation:

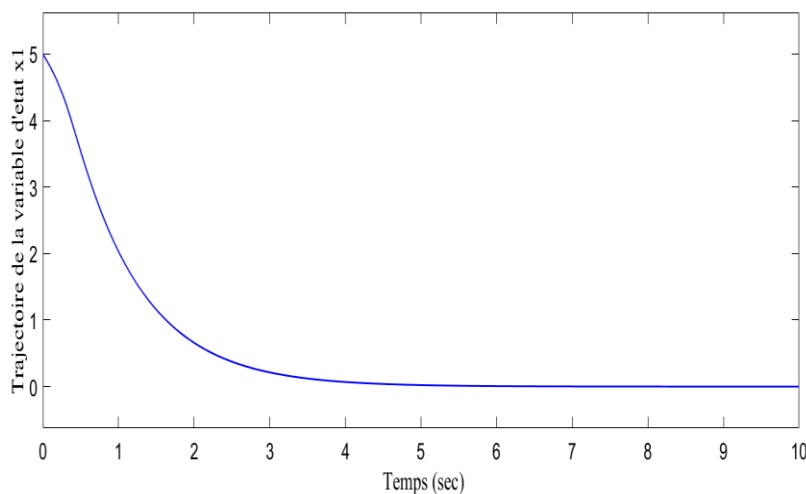


Figure 2.6. Evolution de la variable d'état x_1 .

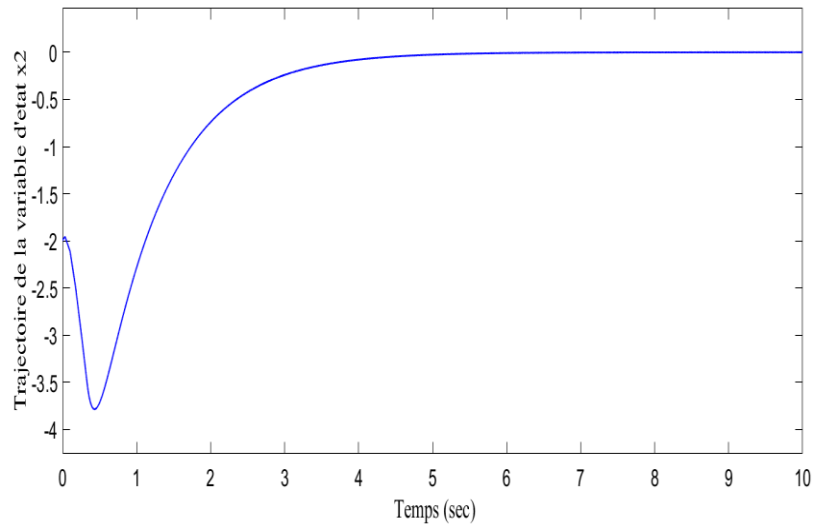


Figure 2.7. Evolution de la variable d'état x_2 .

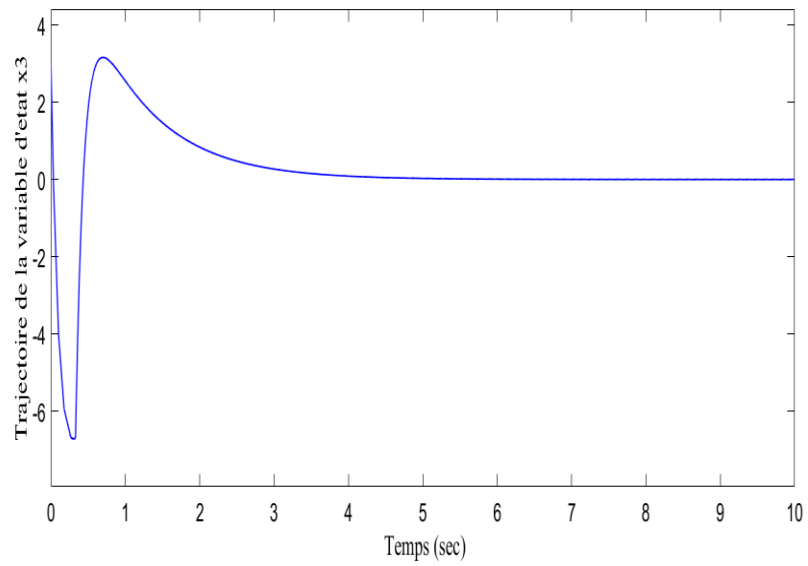


Figure 2.8. Evolution de la variable d'état x_3 .

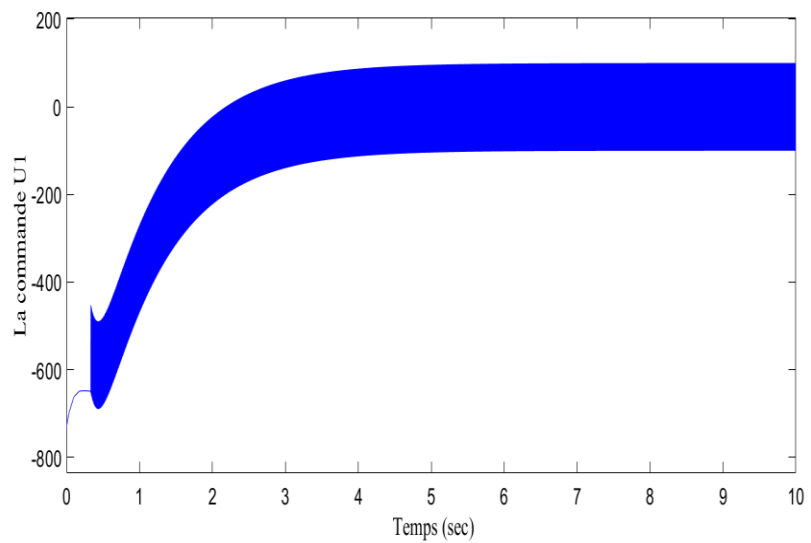


Figure 2.9. Evolution de la loi de commande $u(t)$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit le concept de la commande par mode glissant et illustré son utilisation à travers la simulation de la commande d'un système chaotique. Comme décrit dans ce chapitre, la conception SMC avec une surface de glissement linéaire a été adoptée pour décrire les performances souhaitées des systèmes en boucle fermée. Cela signifie que les variables d'état du système convergent asymptotiquement vers l'origine du système sur la surface de glissement linéaire. En mode glissant, la réponse en boucle fermée devient totalement insensible à la fois aux incertitudes des paramètres internes et aux perturbations externes. Bien que les paramètres de la surface de glissement linéaire puissent être ajustés pour obtenir un taux de convergence arbitrairement rapide, les états du système sur la surface de glissement ne peuvent pas converger vers l'origine dans un temps fini. Afin d'améliorer les performances en précision et en temps de réponse, l'approche terminale sera revue dans le but d'obtenir une convergence en temps fini.

Références

Bibliographie

- [1] V. I. Utkin, *Les modes de glissement et leur application dans les systèmes à structure variable*. Publications importées, Inc., 1978.
- [2] X. Zhang, L. Sun, K. Zhao et L. Sun, « Nonlinear speed control for PMSM system using sliding-mode control and disturbance compensation techniques », *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 28, n ° 3, pp. 1358-1365, 2013.
- [3] A. S. Zinober, *Structure variable et contrôle de Lyapunov*. Springer-Verlag, New York.
- [4] S. Sastry, *Nonlinear systems : analysis, stability, and control*. " Springer, New York, 2006.
- [5] S.C Tan, Y.M Lai, and C.K Tse, *Sliding mode control of switching power converters techniques and implementation*, CRC Press Taylor& Francis Group, 2012.
- [6] S. Vaidyanathan and C.H. Lien, *Applications of sliding mode control in science and engineering*, Springer, 2017.
- [7] V.I. Utkin, and H. Lee, *Chattering problem in Sliding Modes Control Systems*, 346-350, Italy, 2007.
- [8] A. Levant, « Robust exact differentiation via sliding mode technique », *Automatica*, vol. 34, n ° 3, 379-384, 1998.
- [9] V. I. Utkin, « Variable structure systems with sliding mode », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, n ° 2, pp. 212-222, 1977.
- [10] V. I. Utkin, « Sliding mode control design principles and applications to electric drives », *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, n ° 1, pp. 23-36, 1993.
- [11] J. Liu et X. Wang, *Advanced sliding mode control for mechanical systems: design, analysis, and Matlab simulation*. Springer 2012.

Chapitre 3 : commande par mode glissant terminal des systèmes chaotiques

3.1 Introduction :

Dans ce chapitre, une synthèse d'une commande adaptative par mode glissant terminal non singulier est présentée pour assurer la dynamique de synchronisation et la dynamique d'anti-synchronisation entre deux oscillateurs identiques de Van der Pol et deux autres oscillateurs identiques de Duffing. Des conditions suffisantes sont données sur la base du théorème de stabilité de Lyapunov pour atteindre les dynamiques chaotiques susmentionnées. Une simulation numérique est effectuée pour vérifier l'efficacité de l'algorithme présenté.

3.2 Commande par mode glissant terminal

Récemment, une nouvelle technique appelée commande par mode glissant terminal (TSMC) a été intensivement étudiée pour atteindre une convergence temporelle finie de la dynamique du système. Par rapport à la conception SMC basée sur le mode de glissement asymptotique, la commande TSMC présente des caractéristiques supérieures de convergence temporelle rapide et finie. Cela améliore particulièrement les performances de commande de haute précision en accélérant le taux de convergence près d'un point d'équilibre.

3.3 Synthèse d'une loi de commande TSMC

Considérons un système non linéaire d'ordre deux :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u\end{aligned}\tag{3.1}$$

Où $x = [x_1, x_2]^T$ est le vecteur d'état du système, $f(x)$ et $g(x) \neq 0$ sont des fonctions non linéaires et u la commande. Pour atteindre une convergence terminale des variables d'état du système, nous définissons la surface de glissement non linéaire suivante :

$$s = x_2 + \beta x_1^p\tag{3.2}$$

Où β est une constante positive, p et q deux entiers impairs positifs qui satisfont à la condition suivante :

$$p > q\tag{3.3}$$

La condition d'attractivité suffisante pour l'existence de TSMC est donnée par :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 < -\eta |s| \quad (3.4)$$

Où $\eta > 0$ est une constante. Selon [4], lorsque $s(0) \neq 0$, le temps t_r pour que les états du système atteignent le mode glissant $s = 0$ est fini et satisfait :

$$t_r \leq \left| \frac{s(0)}{\eta} \right| \quad (3.5)$$

La commande par mode glissant terminal est adoptée comme suit :

$$u = -g^{-1}(x) \left(f(x) + \beta \frac{p}{q} x_1^{\frac{q-1}{p}} x_2 + \eta \text{sign}(s) \right) \quad (3.6)$$

En mode de glissement terminal, la dynamique du système est régie par l'équation différentielle non linéaire suivante:

$$\dot{x}_1 = -\beta x_1^{\frac{q}{p}} \quad (3.7)$$

Il a été montré dans [4]-[7] que $x_1 = 0$ est l'attracteur terminal du système (3.1). Le temps fini t_s pris pour passer de $x_1(t_r) \neq 0$ à $x_1(t_s + t_r) = 0$ est alors donné par :

$$t_s = -\beta^{-1} \int_{x_1(t_r)}^0 \frac{dx_1}{x_1^{\frac{q}{p}}} = \frac{p}{\beta(p-q)} |x_1(t_r)|^{1-\frac{q}{p}} \quad (3.8)$$

L'expression (3.8) signifie que, dans le mode glissant terminal, les deux états du système x_1 et x_2 convergent vers zéro en temps fini. La technique TSMC a été largement appliquée à la commande de systèmes mécaniques, électriques et d'autres systèmes complexes [4]-[10], le développement de cette technique en est encore à ses débuts et de nombreuses recherches théoriques doivent encore être menées dans les années à venir. Techniquement, la théorie de la commande TSMC comporte une convergence temporelle définie mais présente une problématique de singularité, comme indiqué dans (3.8). En outre, les défis importants liés à la conception d'un système de contrôle selon TSMC incluent la détermination des limites des incertitudes et des perturbations, ainsi que le calcul

d'un modèle dynamique exact, qui est souvent inconnu pour les systèmes pratiques. L'objectif principal de la section suivante est de surmonter les inconvénients précités en appliquant une commande par mode glissant terminal avancée aux systèmes chaotiques. Une brève description des oscillateurs chaotiques est menée comme suit :

3.4 Descriptions dynamique des oscillateurs chaotiques

De nombreux systèmes physiques réels peuvent être modélisés par des oscillateurs chaotiques. Les deux exemples les plus étudiés sont l'oscillateur de Van der Pol et l'oscillateur de Duffing. Ces deux oscillateurs sont soumis à une excitation paramétrique harmonique et sont décrits par des équations différentielles non autonomes :

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + ax + \beta x^3 + \delta x^5 = f \cos(\omega t) \quad (3.9)$$

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + ax + \beta x^3 + \delta x^5 = f \cos(\omega t) \quad (3.10)$$

Où x est la variable d'état, $\mu > 0$ et λ sont les coefficients d'amortissement, $f \cos(\omega t)$ représente l'excitation paramétrique harmonique avec l'amplitude f et la période $T = 2\pi / \omega$.

L'oscillateur Van der Pol : représente des dynamiques chaotiques pour certains ensembles de valeurs de paramètres, $\mu = 0.4$, $\alpha = 1.0$, $\beta = -0.7$, $\delta = 0.1$, $f = 9$, $\omega = 3.14$ [3], avec les conditions initiales $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$ comme indiqué dans l'attracteur chaotique sur la

Figure 3.1

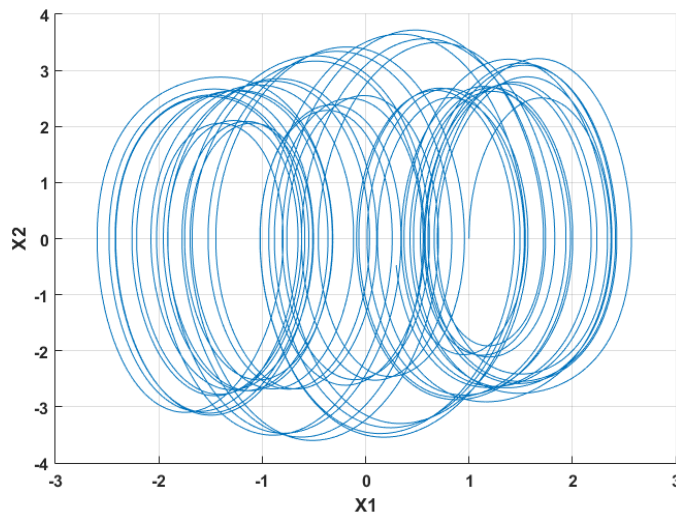


Figure 3.1 Portrait de phase de l'oscillateur Van der Pol excité externe.

L'oscillateur Duffing : présente une dynamique chaotique pour les ensembles de valeurs de paramètres, $\lambda = 0.01, \alpha = 1.0, \beta = -0.495, \delta = 0.05, f = 0.78, \omega = 0.55$ [1], avec les conditions initiales $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$ comme indiqué dans l'attracteur chaotique de l'espace de phase sur la **Figure3.2**. Il peut être a servi que les configurations dynamiques du système entre Les oscillateurs Van der Pol et Duffing sont similaires.

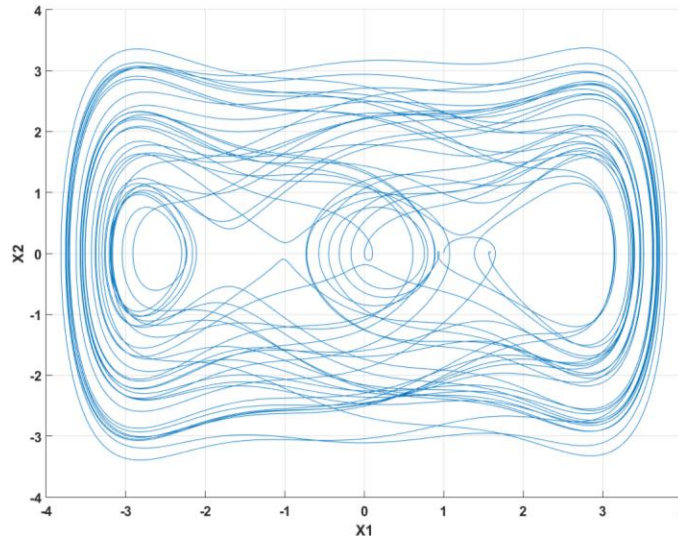


Figure 3.2.Portrait de phase de l'oscillateur Duffing excité externe.

3.5 Synchronisation et anti-synchronisation des oscillateurs de Van der Pol

À partir de l'équation (3.9), on suppose que les systèmes maître et esclave de Van der Pol sont formulés, respectivement, comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - ax_1 - \beta x_1^3 - \delta x_1^5 + f \cos(\omega t) \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \mu(1 - y_1^2)y_2 - ay_1 - \beta y_1^3 - \delta y_1^5 + f \cos(\omega t) \\ \quad + \Delta h(y_1, y_2) + d(t) + u(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

$x_i, y_i (i=1,2)$ Sont des variables d'état du système maître et esclave, respectivement. $\Delta h (y_1, y_2)$ Représente les incertitudes paramétriques du système, $d(t)$ est une perturbation externe, et $u(t)$ est

la loi de commande à concevoir. Généralement, on suppose que $\Delta h(y_1, y_2)$ et $d(t)$ sont bornées et satisfaisantes.

$$0 \leq |\Delta h(y_1, y_2)| \leq H, \quad 0 \leq |d(t)| \leq D, \quad (3.13)$$

Où H et D sont des constantes positives. Ensuite, l'erreur de synchronisations entre les systèmes (3.11) et (3.12) est défini comme suit :

$$e_i(t) = y_i(t) - \varepsilon x_i(t) \quad i = 1, 2, \quad (3.14)$$

$\varepsilon = 1$ où $\varepsilon = -1$ est un scalaire qui définit la relation entre les systèmes à synchroniser. L'objectif principal est de concevoir une loi de commande appropriée $u(t)$ de sorte que pour toutes les conditions initiales de deux systèmes (3.11) et (3.12), le comportement du système esclave converge vers celui du système maître, c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow \infty} (y_i(t) - \varepsilon x_i(t)) \rightarrow 0, i = 1, 2,$.

3.5.1 Dynamique de synchronisation

En substituant $\varepsilon = 1$ à (3.14), la dynamique de l'erreur de synchronisation peut être exprimée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{e}_2, \\ \dot{e}_2 = \mu e_2 - a e_1 - (\beta \psi_1(t) + \delta \psi_2(t) + \mu \psi_3(t) e_1 \\ \quad - \psi_4(t) e_2 + u(t) + \Delta h(y_1, y_2) + d(t), \end{cases} \quad (3.15)$$

Où $\psi_1(t) = y_1^2 + y_1 x_1 + x_1^2$, $\psi_2(t) = y_1^4 + y_1^3 x_1 + y_1^2 x_1^2 + y_1 x_1^3 + x_1^4$, $\psi_3(t) = (y_1 + x_1) x_2$, et $\psi_4(t) = y_1^2$ sont des fonctions non linéaires. Maintenant, considérer une surface de glissement $s(t) = 0$ appropriée pour obtenir une commande robuste qui dirige toutes les trajectoires dans l'espace d'état vers la surface $s(t) = 0$ et assurant que le système esclave reste synchronisé avec le maître même en présence d'incertitudes $\Delta h(y_1, y_2)$ et de perturbation externe $d(t)$.

$$\begin{aligned} s(t) &= e_1(t) + (1/k) [e_2(t)]^{p/q} \\ &= e_1(t) + (1/k) [\dot{e}(t)]^{p/q}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

Où $k > 0, p > q > 0$ entiers positive, p et q sont impairs [2]. Lorsque la surface de glissement $s(t) = 0$ est atteinte, la dynamique du système est déterminée par l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\dot{e}_1(t) + k'[e_1(t)]^{q/p} = 0, \quad k' = k^{q/p} > 0, \quad (3.17)$$

Où $e_1 = 0$ est l'attracteur terminal du système d'erreur (3.15). Le temps fini T_s nécessaire pour passer de $e_1(T_r) \neq 0$ à $e_1(T_r + T_s) = 0$ est donné par

$$\begin{aligned} T_s &= -(1/k') \int_{e_1(T_r)}^0 \frac{de_1(t)}{[e_1(t)]^{q/p}} \\ &= \frac{p}{k'(p-q)} |e_1(T_r)|^{1-q/p}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Les deux états d'erreur convergent vers zéro en un temps fini [2]. Par la suite, la commande ATSMC adaptative du système (3.12) pour atteindre à dynamique de synchronisation est donnée dans le **théorème 3.1**.

Théorème 3.1 Si la loi de commande $u(t)$ dans le système (3.12) est connue comme suit :

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha e_1(t) - \mu e_2(t) - (kq/p)[e_2(t)]^{2-p/q} \\ &\quad - [K_1(t) + K_2(t)|e_1(t)| + K_3(t)|e_2(t)|] \\ &\quad \cdot \text{sgn}(s(t)), \end{aligned} \quad (3.19)$$

Avec la surface $s(t)$ est définie par (3.16) et $1 < p/q < 2$, $K_1(t)$, $K_2(t)$, et $K_3(t)$ sont les gains de la loi de commande et qui sont ajustée par les lois d'adaptations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{K}_1(t) &= v_1 |s(t)| |e_2(t)|^{p/q-1}, \\ K_1(0) &= 0, \quad v_1 > 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_2(t) &= v_2 |s(t)| |e_1(t)| |e_2(t)|^{p/q-1}, \\ K_2(0) &= 0, \quad v_2 > 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_3(t) &= v_3 |s(t)| |e_2(t)|^{p/q}, \\ K_3(0) &= 0, \quad v_3 > 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

Où v_1, v_2, v_3 sont des coefficients positifs, la dynamique d'erreur de synchronisation convergeront vers zéro en un temps fini. Ainsi, la synchronisation entre les systèmes (3.11) et (3.12) peut réaliser.

Proof. Considérer la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_1(t) = \frac{1}{2} s^2(t) + \frac{p}{kq} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2v_i} (K_i(t) - \bar{K}_i)^2 \geq 0, \quad (3.23)$$

Où $\bar{K}_i, i = 1, 2, 3$, sont les paramètres optimaux de K_i

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &> H + D > 0, \\ \bar{K}_2 &> |\beta\psi_1(t) + \delta\psi_2(t) + \mu\psi_3(t)| > 0, \\ \bar{K}_3 &> |\mu\psi_4(t)| > 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

En prenant la dérivée temporelle de (3.23)

$$\dot{V}_1 = s\dot{s} + \frac{p}{kq} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{v_i} (K_i - \bar{K}_i) \dot{K}_i \quad (3.25)$$

En substituant la dynamique d'erreur (3.15), la surface (3.16), et les lois d'adaptations (3.20) à (3.22) dans (3.25), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \frac{p}{kq} (e_2)^{p/q-1} \left[|\beta\psi_1 + \delta\psi_2 + \mu\psi_3| |e_1| |s| \right. \\ &\quad + |\mu\psi_4| |e_2| |s| + (|\Delta h| + |d|) |s| \\ &\quad \left. - (K_1 + K_2 |e_1| + K_3 |e_2|) |s| \right] \\ &\quad + \frac{p}{kq} |e_2|^{p/q-1} \left[(K_1 - \bar{K}_1) \right. \\ &\quad \left. + (K_2 - \bar{K}_2) |e_1| + (K_3 - \bar{K}_3) |e_2| \right] |s|. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Puisque p et q sont des entiers impairs positifs et $1 < p/q < 2$, il y a $(e_2(t))^{p/q-1} > 0$ pour $e_2(t) \neq 0$. Puis

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \frac{p}{kq} |e_2|^{p/q-1} [-(\bar{K}_1 - H - D)|s| \\ &\quad -(\bar{K}_2 - |\beta\psi_1 + \delta\psi_2 + \mu\psi_3|)|e_1||s| \\ &\quad -(\bar{K}_3 - |\mu\psi_4|)|e_2||s|] < 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Par conséquent, pour le cas $e_2(t) \neq 0$, la condition de stabilité de Lyapunov est satisfaite. Les états du système peuvent atteindre la surface de glissement $s(t) = 0$. Dans ce qui suit, la stabilité du cas $e_2(t) = 0$ est discutée. Dans ce cas extrême, les gains constants dans la loi de commande sont appliqués. La dynamique de la surface de glissement est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= -(\beta\psi_1(t) + \delta\psi_2(t) + \mu\psi_3(t))e_1(t) \\ &\quad + \Delta h(y_1, y_2) + d(t) \\ &\quad - [\bar{K}_1 + K_2 |e_1(t)|] \cdot \text{sgn}(s(t)), \end{aligned} \quad (3.28)$$

Considérant la fonction de Lyapunov $V_2(t) = 0.5s^2(t)$ et implique la prise des dérivées.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -(\beta\psi_1 + \delta\psi_2 + \mu\psi_3)e_1s + (\Delta h + d)s \\ &\quad - \bar{K}_1 |s| - \bar{K}_2(t) |e_1||s| \\ &\leq -(\bar{K}_1 - H - D)|s| \\ &\quad - [\bar{K}_2 - |\beta\psi_1 + \delta\psi_2 + \mu\psi_3|] |e_1||s| < 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Par conséquent, pour le cas $e_2(t) = 0$, la condition de Lyapunov est satisfaite et les états du système peuvent atteindre la surface de glissement $s(t) = 0$. Il est conclu que la surface de glissement $s(t) = 0$ peut être atteinte à partir de n'importe quel point du plan de phase. Une fois que le manifold de commutation est atteint, le temps nécessaire pour atteindre le point équivalent

$e_1(t) = 0$ en mode glissant est fourni dans (3.18). L'état en mode glissant se rapprochera de zéro en temps fini. Ceci complète le **théorème 3.1**.

3.5.2 Dynamique d'anti-anti-synchronisation :

En substituant $\varepsilon = -1$ dans (3.14), la dynamique d'erreur anti-synchronisée peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= \mu e_2 - \alpha e_1 - (\beta\theta_1(t) + \delta\theta_2(t) + \mu\theta_3(t))e_1 \\ &\quad - \mu\psi_4(t)e_2 + u(t) + \Delta h(y_1, y_2) + d(t) \\ &\quad + 2f \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (3.30)$$

Où $\theta_1(t) = y_1^2 - y_1x_1 + x_1^2$, $\theta_2(t) = y_1^4 - y_1^3x_1 - y_1^2x_1^2 - y_1x_1^3 + x_1^4$, $\theta_3(t) = (x_1 - y_1)x$, et $\psi_4(t) = y_1^2$ sont des fonctions non linéaires. Ensuite, la commande ATSMC du système (3.12) pour réaliser la dynamique d'anti-synchronisation est fournie dans ce qui suit.

Théorème 3.2 Si la commande $u(t)$ dans le système (3.12) est conçue pour être la commande ATSMC adaptatif décrit dans (3.19) associé aux équations (3.20) à (3.22), alors l'anti-synchronisation entre les systèmes (3.11) et (3.12) peut être atteint.

Proof. La fonction candidate de Lyapunov est choisie sous la même forme que celle définie en (3.23). Les gains \bar{K}_i , $i = 1, 2, 3$ sont des constants optimaux suffisamment grands et satisfaisants les conditions suivantes.

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &> H + D + 2f > 0 \\ \bar{K}_2 &> |\beta\theta_1(t) + \delta\theta_2 + \mu\theta_3| > 0 \\ \bar{K}_3 &> |\mu\psi_4(t)| > 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

La suite de la démonstration est similaire à celle du **théorème 3.1**.

3.6 Synchronisation et anti-synchronisation des oscillateurs de Duffing

Fondamentalement, la dynamique des oscillateurs de Duffing est similaire à celle de Van der Pol. On peut supposer que les oscillateurs synchronisés de Duffing sont obtenus par des formes simulées de commande ATSMC. Supposons que les systèmes maître et esclave de Duffing peuvent être décrits, respectivement, comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\lambda x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3 - \delta x_1^5 + f \cos(\omega t), \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\lambda y_2 - \alpha y_1 - \beta y_1^3 - \delta y_1^5 + f \cos(\omega t) \\ \quad + u(t) + \Delta h(y_1, y_2) + d(t), \end{cases} \quad (3.33)$$

Où $x_i, y_i (i=1, 2)$ sont les variables d'état du système maître et du système esclave, respectivement. $\Delta h(y_1, y_2)$ Représente l'incertitude du système, $d(t)$ est la perturbation externe et $u(t)$ est la commande à concevoir. De même, l'incertitude du système $x_i, y_i (i=1, 2)$ et la perturbation externe $d(t)$ sont bornées et définies dans (3.13). L'objectif de commande du problème actuel est de concevoir la commande appropriée $u(t)$ de telle sorte que pour toutes les conditions initiales des deux systèmes (3.32) et (3.33), le comportement de l'esclave converge vers celui du système de maître, c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow \infty} (y_i(t) - \varepsilon x_i(t)) \rightarrow 0, i = 1, 2$.

3.6.1 Dynamique de synchronisation

En remplaçant $\varepsilon = 1$ dans (3.14), le système d'erreur synchronisé peut être réécrit comme

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = -\lambda e_2 - \alpha e_1 - (\beta \psi_1(t) + \delta \psi_2(t)) e_1 + u(t) \\ \quad + \Delta h(y_1, y_2) + d(t), \end{cases} \quad (3.34)$$

Où $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ sont des fonctions non linéaires définies dans (3.15). Ensuite, la commande du système (3.34) est décrite par le **Théorème 3.2**.

Théorème 3.2 Si la commande $u(t)$ dans le système (3.33) est signée comme suit :

$$\begin{aligned} u(t) = & \alpha e_1(t) + \lambda e_2(t) - (kq/p) [e_2(t)]^{2-p/q} \\ & - [K_1(t) + K_2(t) |e_1(t)| + K_3(t) |e_2(t)|] \\ & \cdot \text{sgn}(s(t)), \end{aligned} \quad (3.35)$$

Avec la surface $s(t)$ est définie par (3.16) et $1 < p/q < 2$, $K_1(t)$, $K_2(t)$, et $K_3(t)$ sont les gains de la loi de commande et qui sont ajustée par les lois d'adaptations (3.20) à (3.22). Ensuite, les

états du système d'erreur (3.34) convergeront vers la surface $s(t)=0$, et l'erreur converge vers zéro en temps fini.

La démonstration du **Théorème 3.2** est similaire à celle du **Théorème 3.1**.

3.6.2 Dynamique d'anti-anti-synchronisation :

En substituant $\varepsilon=-1$ dans (3.14), la dynamique d'erreur anti-synchronisée peut être réécrite comme :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\lambda e_2 - \alpha e_1 - (\beta \theta_1(t) + \delta \theta_2(t)) e_1 + u(t) \\ \quad + \Delta h(y_1, y_2) + d(t) + 2f \cos(\omega t), \end{cases} \quad (3.36)$$

Où $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ sont des fonctions non linéaires définies dans (3.30). La commande du système (3.36) est décrite par le **Théorème 3.3**.

Théorème 3.3 Si la commande $u(t)$ dans le système (3.36) est conçu pour être la loi de commande ATSMC décrit en (3.35) associé aux (3.20) à (3.22), la dynamique d'anti-synchronisation peut être adapté.

La démonstration du **Théorème 3.3** est similaire à celle du **Théorème 3.1**.

3.7 Résultats et discussions

3.7.1 Oscillateur chaotique de Van der Pol

La simulation numérique est effectuée pour vérifier et démontrer l'efficacité de la commande adaptative étudiée. En utilisant la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre avec un pas de temps de 0,0001. Les paramètres du système sont comme dans la **Figure3.1** pour assurer une dynamique chaotique des variables d'état, les systèmes (3.11) et (3.12) avec la commande définie dans (3.19) sont résolus numériquement. Pour la loi de commande ATSMC, les constantes positives sont choisies comme $k = 20$, $p = 7$, $q = 5$, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_3 = (1.3/2.4)$ et $\nu_2 = (1.875/2)$. L'incertitude du système et la perturbation externe sont supposées être $\Delta h(y_1, y_2) = \sin(y_1) \sin(y_2)$ et $d(t) = \sin(\pi t)$, respectivement, dans toutes les études de simulation.

Cas 1 : Dans ce cas, un test de synchronisation est effectué. Deux ensembles différents de conditions initiales sont choisis : $(x_1, x_2) = (0,0)$ pour le système maître (3.11) et $(y_1, y_2) = (1.0,0)$ pour le système esclave (3.12). L'action de contrôle est activée à $t = 14$ s .

La **Figure3.3** illustre les évolutions dynamiques des états du système maître et des états du système esclave. L'évolution dynamique des erreurs synchrones entre les deux systèmes de Van der Pol est représentée à la **Figure3.4**. Il est montrées que les erreurs synchrones oscillent de manière irrégulière lorsque la commande est éteinte, mais lorsque la commande est en action, les erreurs synchrones convergent vers zéro et atteignent la synchronisation complète. L'évolution de la surface de glissement, de l'entrée de commande et des gains de loi de commande adaptatifs pour l'oscillateur Van der Pol esclave est illustrée dans les **Figure3.5** et **Figure3.6**, respectivement.

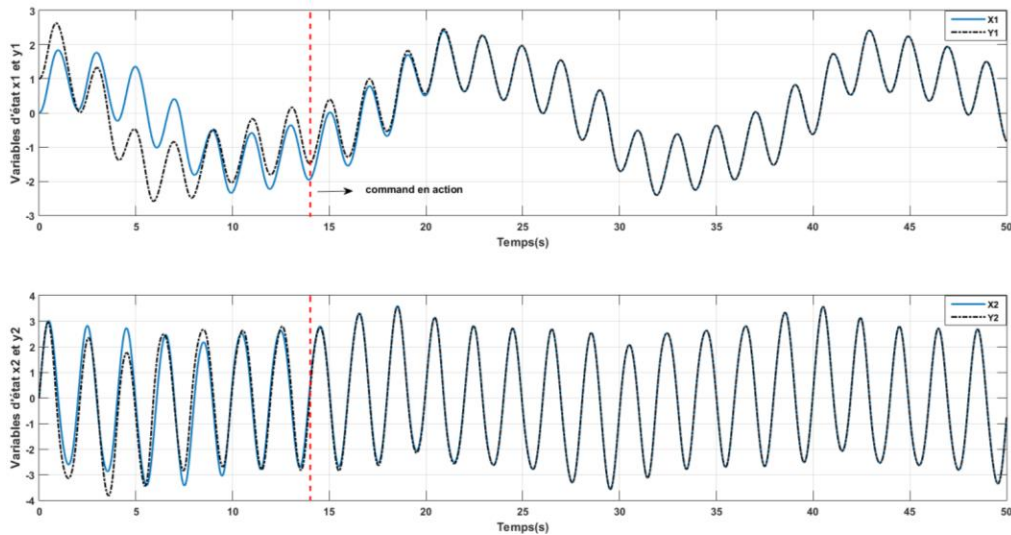


Figure 3.3. Evolution dynamique des états $(x_{1,2}, y_{1,2})$ du système chaotique Van der Pol dans (cas 1).

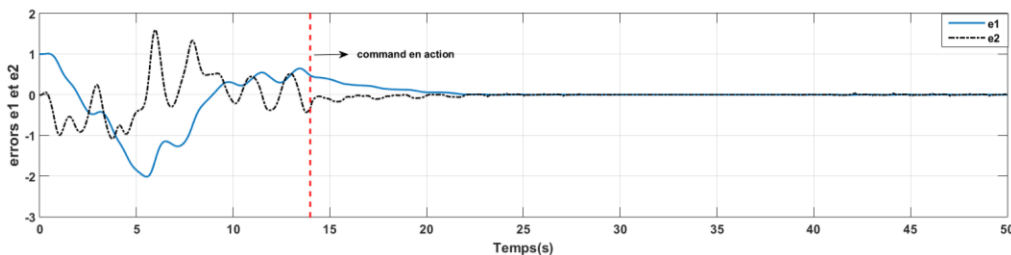


Figure 3.4. Evolution dynamique des erreurs de suivies Van der Pol (cas 1).

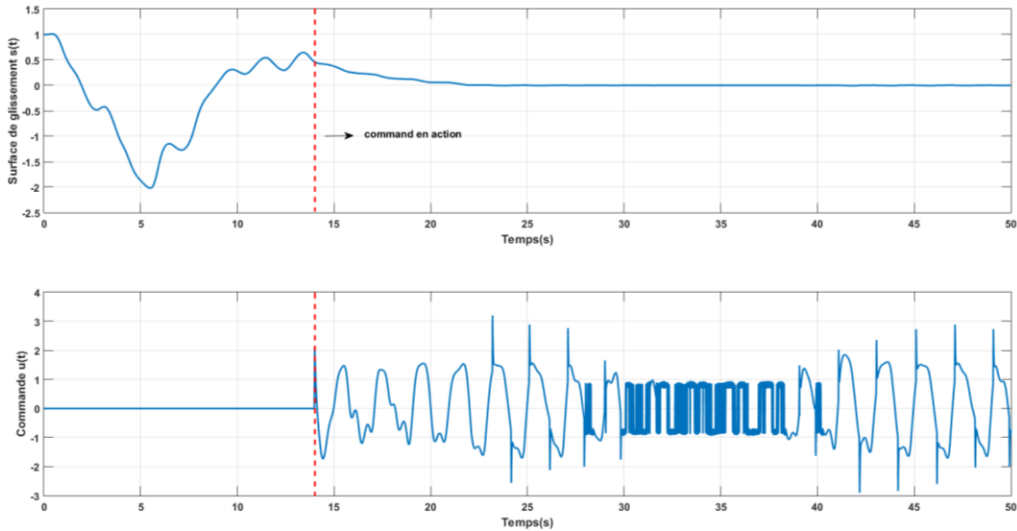


Figure 3.5. Evolution de la surface de glissement et commande Van der Pol dans (cas 1).

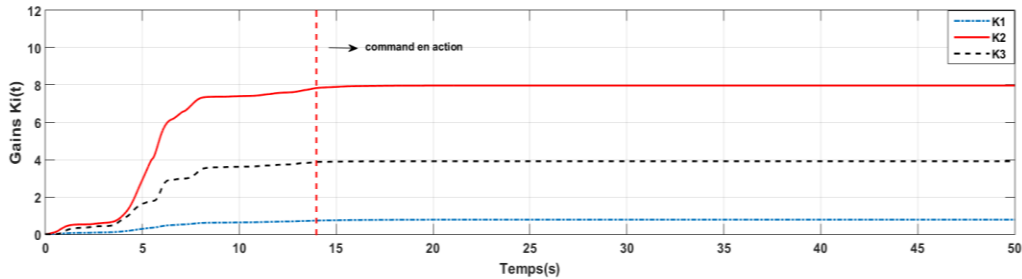


Figure 3.6. Evolution des gains de la commande Van der Pol (cas 1).

Ils démontrent que la valeur absolue de la surface de glissement converge vers zéro à environ $t = 25$ s . Il est visible que le signal de commande reste presque continu malgré les incertitudes du système et les perturbations externes. Comme prévu, on peut observer que les états des deux systèmes (3.11) et (3.12) s'appliquent l'un à l'autre pour différentes conditions initiales choisies. Après la mise en action de la commande, tous les états tendent à être synchronisés.

Cas 2 : Avec les mêmes conditions initiales, un test d'anti-synchronisation est simulé dans ce deuxième cas.

Figure 3.7 illustre les évolutions dynamiques des états du maître et des états du système esclave. L'évolution dynamique des erreurs anti-synchrones entre deux systèmes Van der Pol anti-synchronisés est représentée à la **Figure 3.8**. Lorsque la commande est en action à $t = 14$ s , les

erreurs anti-synchrones convergent vers zéro respectivement. L'évolution de la surface de glissement et de l'entrée de commande pour l'oscillateur Van der Pol esclave ainsi que les gains de la loi de commande adaptative sont illustrées à la **Figure 3.9**.

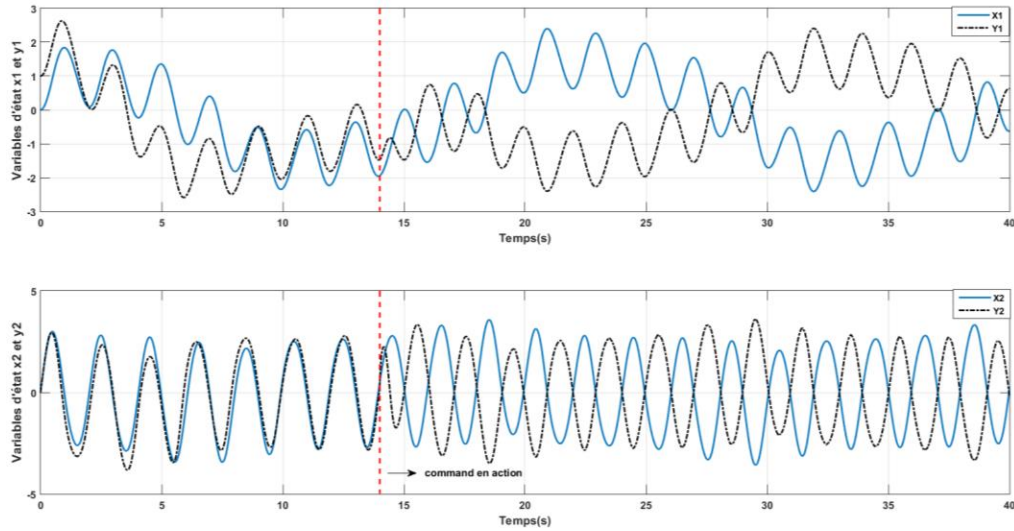


Figure 3.7. Evolution dynamique des états $(x_{1,2}, y_{1,2})$ du système chaotique Van der Pol dans (cas 2).

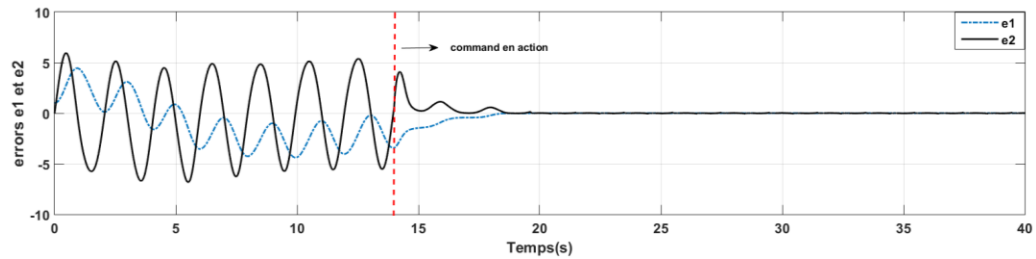


Figure 3.8. Evolution dynamique des erreurs de suivies Van der Pol (cas 2).

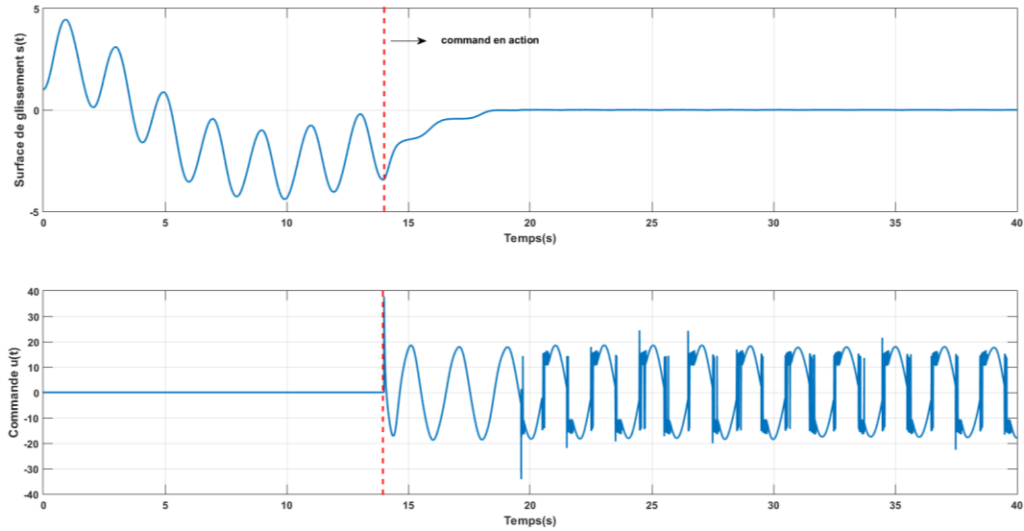


Figure 3.9. Evolution de la surface de glissement et commande Van der Pol (cas 2).

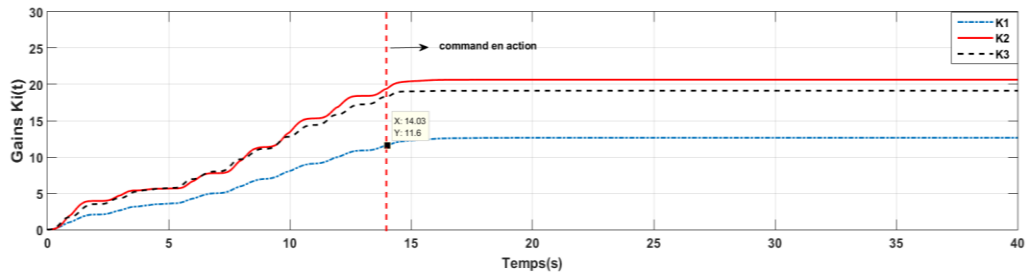


Figure 3.10. Evolution des gains de la commande Van der Pol (cas 2).

La commande est active à partir de $t = 14s$. Comme prévu, on peut observer que les états des deux systèmes (3.11) et (3.12) se séparent. Après la mise en action de la commande, tous les états tendent à être anti-synchronisés.

3.7.2 Oscillateur chaotique de Duffing

La simulation numérique est réalisée pour vérifier et démontrer l'efficacité du schéma présenté, en utilisant la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre avec un pas de temps de 0,0001. Les paramètres du système, comme dans la **Figure3.2**, assurent une dynamique chaotique des variables d'état. Les systèmes (3.32) et (3.33) avec la loi de commande définie dans (3.35) sont résolus numériquement. Pour la commande ATSMC adaptative décrite dans (3.35) associée à (3.20) à (3.22), les constantes sont choisies comme suit : $k = 20$, $p = 7$, $q = 5$, $\nu_1 = 0.03$, $\nu_2 = 0.55$ et $\nu_3 = 0.3$.

.Cas 1 : Dans ce cas, un test de synchronisation est effectué. Deux ensembles différents de

conditions initiales sont choisies : $(x_1, x_2) = (0.5, 0.5)$ pour le système maître (3.32) et $(y_1, y_2) = (1.0, 1.0)$ pour le système esclave (3.33). L'action de contrôle est activée à $t = 10$ s .

L'évolution dynamique des erreurs entre les deux systèmes de Duffing synchronisés est illustrée à la **Figure 3.12**. Il est montré que les erreurs synchrones oscillent irrégulièrement lorsque la commande est éteinte, et lorsque la commande est en action à $t = 10$ s, les erreurs synchrones convergent vers zéro et atteignent la synchronisation. L'évolution de la surface de glissement, de l'entrée de commande et des gains de la loi de commande adaptative est illustrée dans les **Figure 3.13** et **Figure 3.14**, respectivement. Elles montrent que la valeur absolue du mode glissant converge vers zéro. On peut voir que le signal de commande est continu et sans bavardage malgré les incertitudes du système en cours et les perturbations externes.

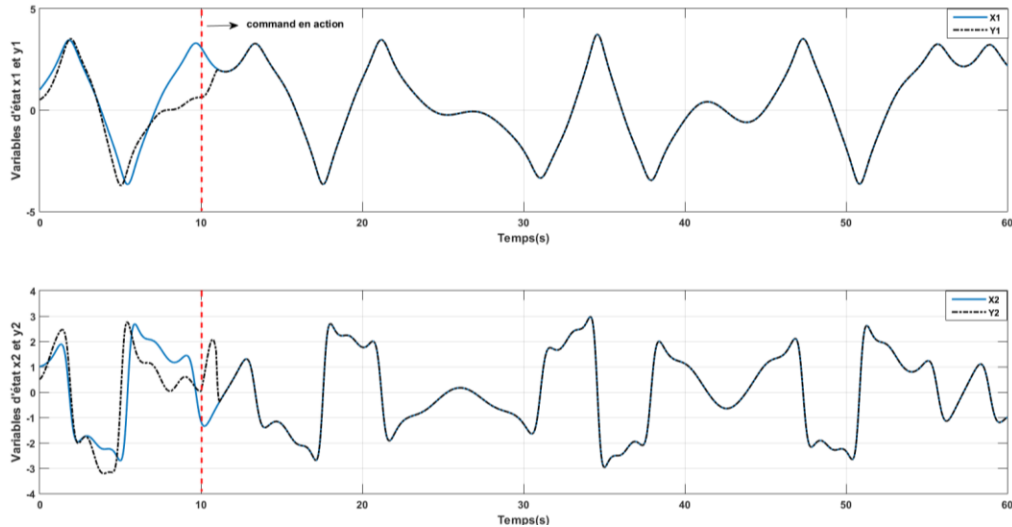


Figure 3.11. Evolution dynamique des états $(x_{1,2}, y_{1,2})$ du système chaotique

Duffing dans (cas 1).

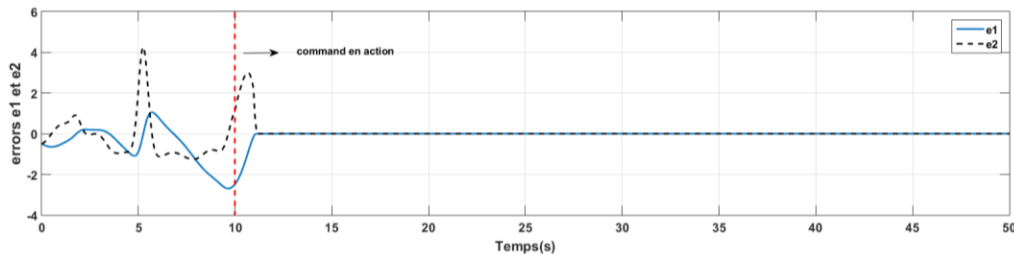


Figure 3.12. Evolution dynamique des erreurs de suivies Duffing (cas 1).

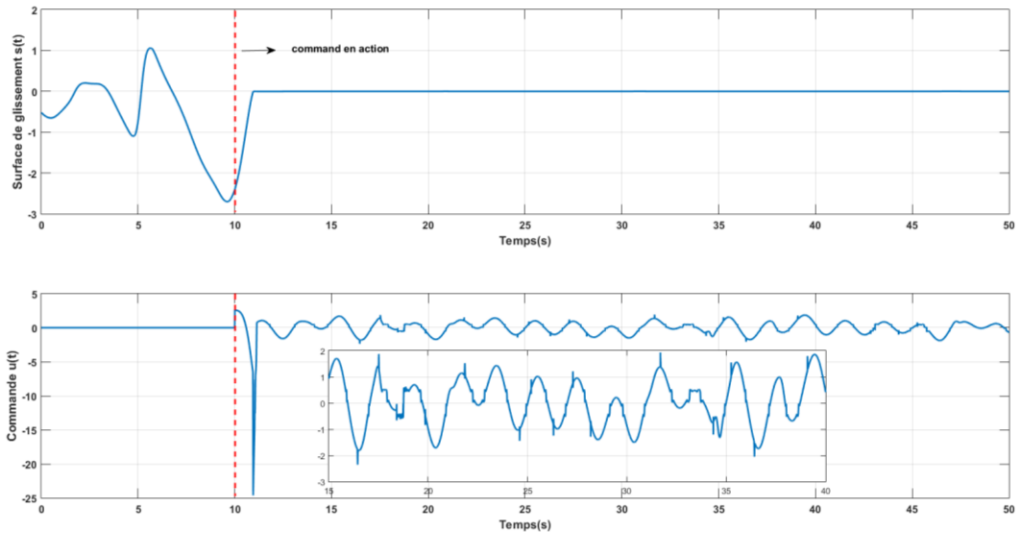


Figure 3.13. Evolution de la surface de glissement et commande Duffing dans (cas 1).

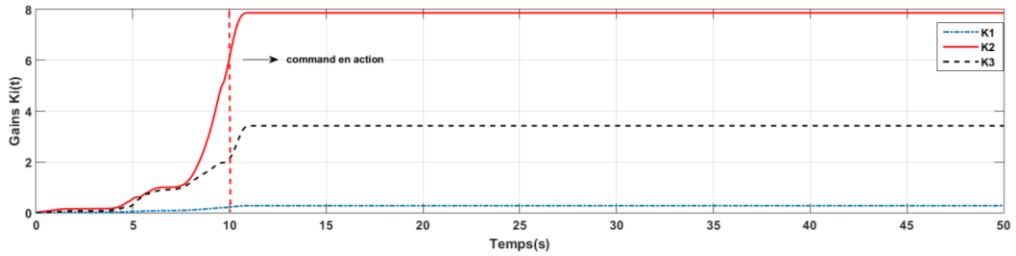


Figure 3.14. Evolution des gains de la commande Duffing (cas 1).

Cas 2 : Dans ce cas, la simulation numérique est effectuée pour vérifier et démontrer l'efficacité du schéma présenté pour la dynamique d'anti-synchronisation. Avec les mêmes conditions initiales et condition de simulation, les constantes de la commande sont choisies comme $k = 20, p = 7, q = 5, v_1 = v_2 = v_3 = 0.005$.

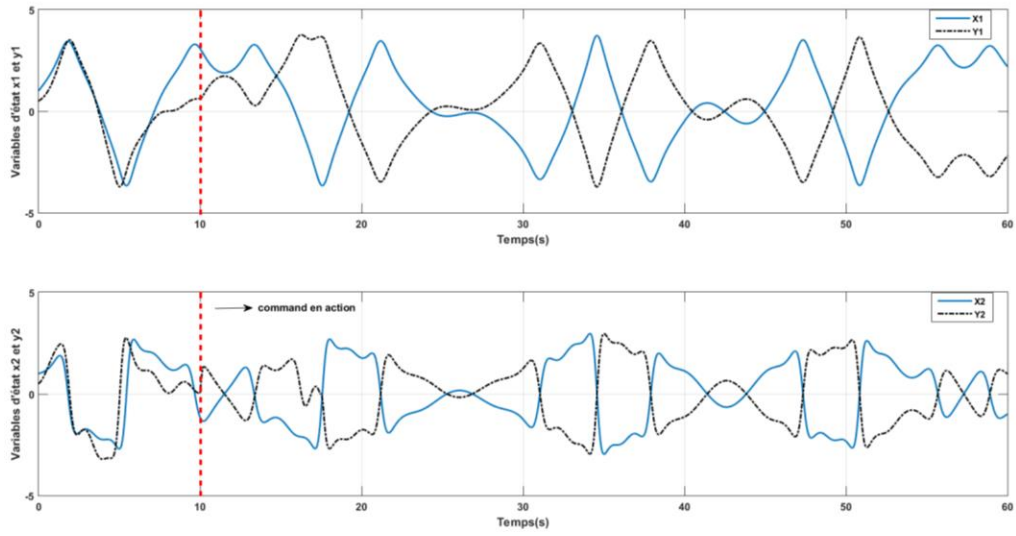


Figure 3.15. Evolution dynamique des états $(x_{1,2}, y_{1,2})$ du système chaotique Duffing dans (cas 2).

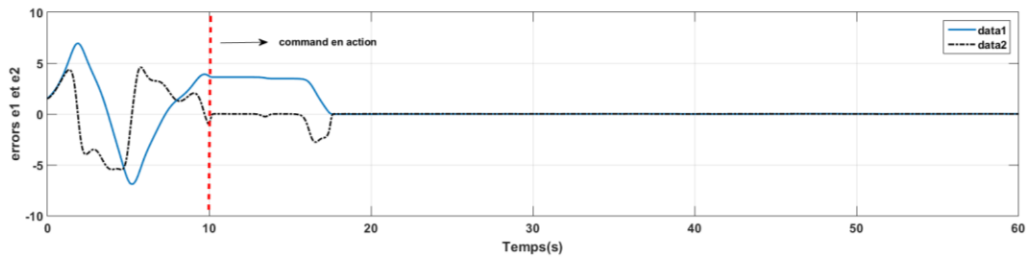


Figure 3.16. Evolution dynamique des erreurs de suivies Duffing (cas 2).

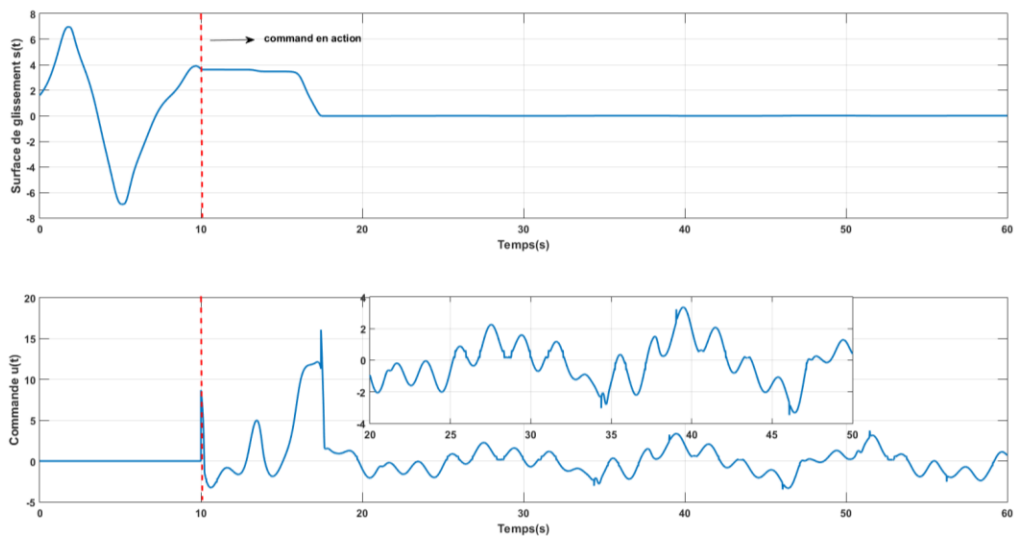


Figure 3.17. Evolution de la surface de glissement et commande Duffing dans cas 2.

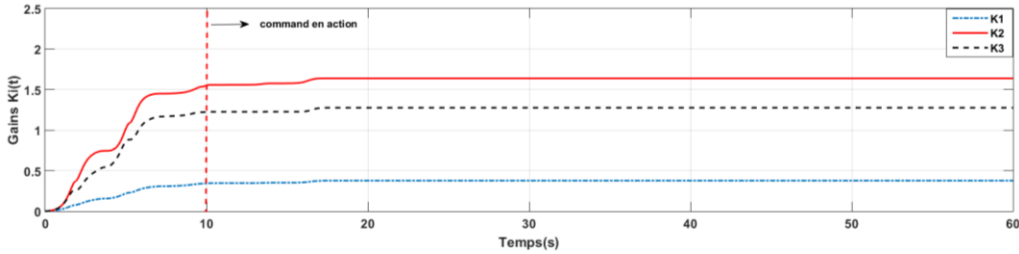


Figure 3.18. Evolution des gains de la commande Duffing (cas 2).

La **Figure3.15** illustre l'évolution dynamique des états du maître et du système esclave, respectivement. L'évolution de la surface de glissement et de l'entrée de commande pour l'oscillateur esclave de Duffing et des gains de la loi de commande adaptative est illustrée à la **Figure3.17** et la **Figure3.18**. La commande est en action à partir de $t = 10s$. On peut observer que les états des deux systèmes (3.32) et (3.33), séparés l'un de l'autre pour différentes conditions initiales choisies, tendent à être anti-synchronisés une fois la commande en action. Les commandes ATSMC adaptatives abordées dans cet article peuvent également être appliquées pour réaliser une synchronisation chaotique entre deux oscillateurs identiques.

3.8 Conclusions

Ce chapitre a été consacré à l'étude d'une loi de commande par mode glissant terminal avancée pour réaliser des dynamiques de synchronisation chaotique entre deux oscillateurs chaotiques. La loi de commande de l'approche TSMC est alimentée par l'erreur de synchronisation et dotée d'un gain adaptatif. Ce dernier est mis à jour à l'aide de techniques adaptatives pour ajuster sa valeur. Les processus de synchronisation et d'anti-synchronisation peuvent être assurés par le contrôleur adaptatif proposé malgré les incertitudes du système et les perturbations externes. Les simulations numériques ont été effectuées et vérifient l'efficacité du schéma présenté, démontrant la réalisation précise d'une synchronisation chaotique.

Bibliographie

- [1] Njah, A.N. : Synchronisation via le contrôle actif d'oscillateurs chaotiques Φ^6 identiques et non identiques avec excitation externe. *J. Sound Vib.* **327**, 322–332 (2009).
- [2] Feng, Y., Yu, X., Man, Z. : Contrôle du mode de glissement terminal non singulier des manipulateurs rigides. *Automatica* 38, 2159– 2167 (2002).
- [3] SieweSiewe, M., MoukamKakmeni, F.M., Tchawoua, C. : Resonant oscillation and homoclinic bifurcation, in a Φ^6 Van der Pol oscillator. *Chaos Solitons Fractals* 21, 841–853 (2004).
- [4] Z. Man et X. Yu, « Terminal sliding mode control of MIMO linear systems », *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, vol. 44, n ° 11, pp. 1065-1070, 1997.
- [5] Y. Feng, X. Yu et Z. Man, « Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators ».
- [6] Z. Man et X. Yu, « Adaptive terminal sliding mode tracking control for rigid robot manipulators with uncertain dynamics », *JSME International Journal*, vol. 40, n ° 3, p. 493-502, 1997.
- [7] Z. Man, A. P. Paplinski et H. R. Wu, « A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, n ° 12, p. 2464-2469, 1994.
- [8] Y. Feng, X. Yu et Z. Man, « Adaptive fast terminal sliding mode tracking control of robotic manipulator », dans *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 4, pp. 4021-4026, 2001.
- [9] S. Yu, X. Yu et Z. Man, « A fuzzy neural network approximator with fast terminal sliding mode and its applications », *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 148, n ° 3, pp. 469-486, 2005.
- [10] Y. Feng, X. Yu et F. Han, « On nonsingular terminal sliding mode control of nonlinear systems », *Automatica*, vol. 49, n ° 6, p. 1715-1722, 2013.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans cette mémoire, une commande adaptative par mode glissant terminal non singulier (ATSMC) a été étudiée pour atteindre une dynamique chaotique de synchronisation et une autre dynamique chaotique d'anti-synchronisation entre deux oscillateurs identiques en présence d'incertitudes paramétriques et de perturbations externes, à savoir le système de Van der Pol ou les systèmes de Duffing.

La commande ATSMC peut être mise en œuvre sans qu'il soit nécessaire de fournir et/ou de connaître les termes non linéaires de la dynamique d'erreur, les limites des incertitudes du système et des perturbations externes. Sur la base du théorème de stabilité de Lyapunov, des conditions suffisantes sont données pour garantir la stabilité des dynamiques souhaitées. De plus, des simulations numériques sont effectuées dans le chapitre correspondant pour vérifier l'efficacité des schémas présentés. Les résultats numériques montrent que les dynamiques chaotiques peuvent être obtenues avec précision grâce au contrôle sans broutement.

Il reste néanmoins à réaliser une implémentation pratique sur DSP, qui permettrait d'évaluer la robustesse de la méthode de commande étudiée, surtout en ce qui concerne les convertisseurs statiques et les systèmes d'énergies renouvelables.

Résumé

Résumé

Ce mémoire est consacré à mettre en évidence une commande adaptative par mode glissant terminale (ATSMC) appliquée à certains types de systèmes chaotiques, à savoir les oscillateurs chaotiques de Van der Pol et de Duffing. L'approche étudiée réduit le temps requis pour atteindre le point d'équilibre, renforçant à la fois la convergence, l'atténuation rapide des perturbations et l'effet des incertitudes paramétriques. Pour rendre le contrôleur facilement réalisable en temps réel, le gain de la commande par mode glissant est ajusté par des lois d'adaptation dérivées de l'analyse de stabilité de Lyapunov. Les résultats de simulation numérique illustrent l'efficacité de l'approche ATSMC.

Mots clés : Oscillateurs chaotiques, commande adaptative, mode glissant, attracteurs terminaux.

Abstract

This thesis is devoted to highlighting an adaptive terminal sliding mode control (ATSMC) applied to certain types of chaotic systems, such as the Van der Pol and Duffing chaotic oscillators. The studied approach reduces the time required to reach the equilibrium point, reinforcing convergence, attenuation of disturbances, and the effect of parametric uncertainties. To make the controller easily implementable, the sliding mode controller gain is adjusted using adaptation laws derived from Lyapunov stability analysis. The numerical simulation results illustrate the effectiveness of the ATSMC approach.

Key words: Chaotic oscillators, adaptive control, sliding mode, terminal attractors.

ملخص

تتطرق هذه المذكرة إلى دراسة طريقة التحكم في وضع الانزلاق التكيفي والمحدود (ATSMC) المطبق على بعض أنواع الأنظمة الفوضوية، والتي نذكر منها مذبذبات Van der Pol و Duffing الفوضوية. طريقة التحكم المدروسة تحدد وتقلل من الوقت اللازم للوصول إلى نقطة التوازن، مما يعزز التقارب السريع والتأثير السلبي لكل من للاضطرابات الخارجية وعدم اليقين البارامترى. لجعل وحدة التحكم قابلة للتنفيذ بسهولة في وقت زمني محدد وفعلي، يتم ضبط محدد التحكم في الوضع المنزلق من خلال قوانين التكيف المستمدة من تحليل استقرار Lyapunov. توضح نتائج المحاكاة فعالية نهج نظام التحكم المدروس.

الكلمات المفتاحية: المذبذبات الفوضوية، التحكم التكيفي، الوضع المنزلق، التقارب الزمني المحدد.