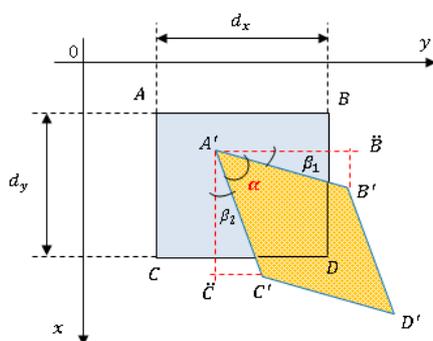
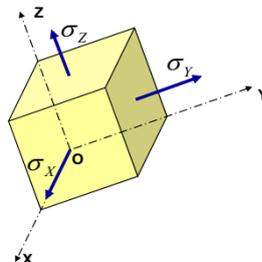
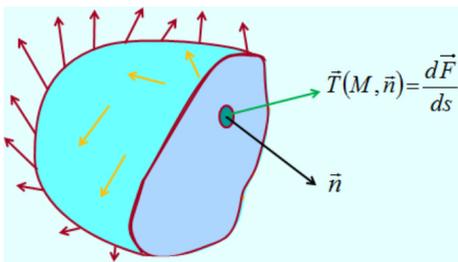


SUPPORT DE COURS EN Mécanique des Milieux Continus

Dr. RAOUACHE Elhadj



NIVEAU : 3^{ème} Année Licence en Génie Mécanique

Avant-propos

Ce programme de cours en Mécanique des Milieux Continus (MMC) semble couvrir un large éventail de sujets essentiels pour la compréhension approfondie du comportement des matériaux et des structures.

Le cours est divisé en cinq chapitres distincts, chacun abordant un aspect spécifique de la MMC. Les chapitres sont les suivants :

1. Calcul vectoriel
2. Calcul tensoriel
3. Étude de contrainte
4. Tenseur de déformation
5. Loi du comportement

L'approche du cours, combinant la théorie avec des exemples pratiques, est très bénéfique. Elle aide les étudiants à visualiser et à appliquer les concepts théoriques dans des contextes réels, ce qui est crucial pour une compréhension approfondie.

Ce programme semble fournir une base solide pour les étudiants en génie mécanique, génie civil et d'autres domaines connexes où la compréhension du comportement des matériaux et des structures est essentielle.

Chapitre 01

Calcul vectoriel

1- Introduction

Le calcul vectoriel est un outil mathématique, très utilisé en physique. En fait, Il existe en physique deux types de grandeurs : les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles.

2- Définitions

a. Grandeur scalaire

C'est une grandeur physique décrite par un nombre (scalaire) et une unité.

Exemple

le volume, la masse, la température, la longueur, le temps, ...etc.

b. Grandeur vectorielle

C'est toute grandeur dont la détermination nécessite un sens, une direction, un point d'application et une valeur (ou intensité).

Exemple

le déplacement, la vitesse, l'accélération, la force, le champ électrique,... etc.

c. Coordonnées d'un point

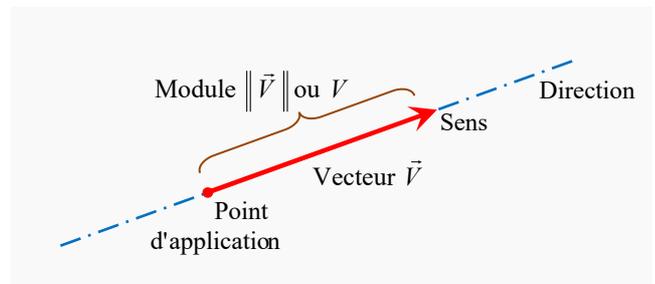
Dans l'espace, un point A est défini par des nombres (ou scalaires) $a_1, a_2, a_3, .. a_n$, appelés les coordonnées de A , et il s'écrit : $A(a_1, a_2, a_3, .., a_n)$.

3- Vecteurs

a. Définition

Un vecteur (nommé par exemple \vec{V}) est une grandeur définie par :

- *Une direction* : c'est la droite qui porte le vecteur.
- *Un sens* : représente l'orientation du vecteur (symbolisé par une flèche \rightarrow)
- *Un module* $\|\vec{V}\|$ (ou simplement V) : représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur \vec{V} .

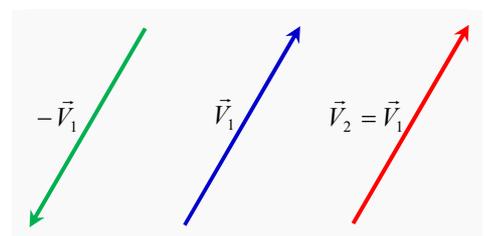


Graphiquement, le module correspond à la longueur du vecteur.

- *Un point d'application* : c'est le point qui sert d'origine à la représentation du vecteur.

Remarques :

- 1- *Le module d'un vecteur (appelée également la norme ou l'intensité) est un scalaire toujours positif* $\|\vec{V}\| \geq 0$.
- 2- Un vecteur est dit unitaire si son module égal à 1 (ou unité).
- 3- *Deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont égaux $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$, s'ils ont le même module et le même sens.*
- 4- L'opposé d'un vecteur \vec{V} noté $-\vec{V}$ est un vecteur ayant le même module et la même direction, mais avec un sens opposé.



b. Types des vecteurs1- **Vecteur lié**

Un vecteur \vec{V} est dit lié (ou bipoint), si son point d'application est fixe.

Un vecteur lié est un couple ordonné de 2 points - par exemple- A et B : $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$

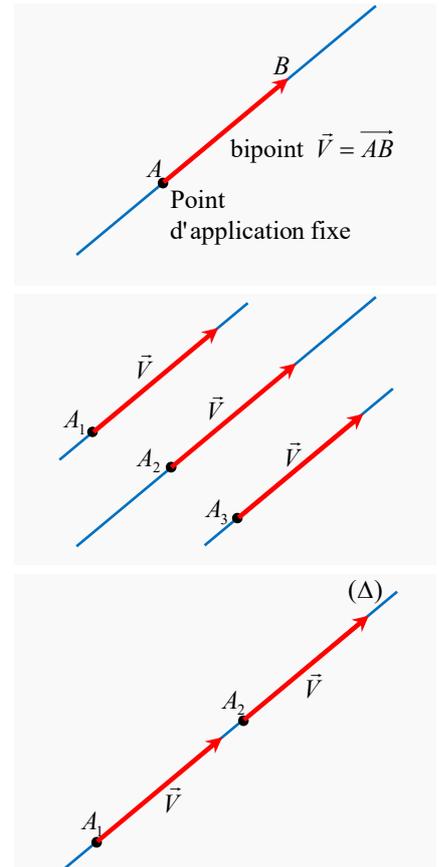
Où : A est le point d'application du vecteur \vec{V} .

2- **Vecteur libre**

Un vecteur \vec{V} est dit libre, si son point d'application peut être transféré à n'importe quel point de l'espace.

3- **Vecteur glissant**

Un vecteur \vec{V} est dit glissant, si son point d'application peut se déplacer le long d'une ligne d'action (la direction (Δ)).

4- **Système de coordonnées cartésiennes**a. Repère cartésien

Dans un espace tridimensionnel, le repère cartésien se compose d'une origine (point O) et des axes orientés et orthogonaux (perpendiculaires entre eux) passant par cet origine.

- *Axe des abscisses* (noté Ox) ;
- *Axe des ordonnées* (noté Oy) ;
- *Axe des cotes* (noté Oz) ;

b. Base cartésienne orthonormée

Dans un espace tridimensionnel, le repère cartésien est muni d'une base vectorielle orthonormée constituée de trois vecteurs unitaires et orthogonaux deux à deux notés comme suivant :

- \vec{i} : porté par l'axe Ox et orienté selon son orientation.
- \vec{j} : porté par l'axe Oy et orienté selon son orientation.
- \vec{k} : porté par l'axe Oz et orienté selon son orientation.

c. Coordonnées cartésiennes d'un point

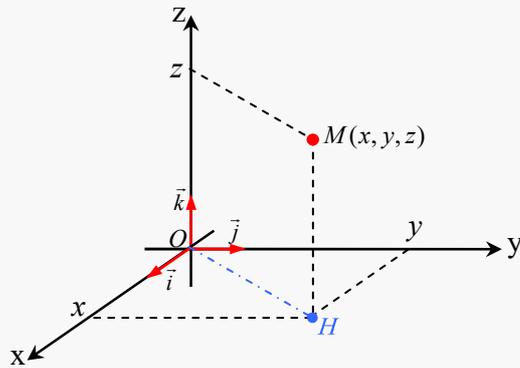
Dans un repère cartésien, chaque point est défini par ses coordonnées cartésiennes suivantes :

- *Abscisse* (notée x) : c'est la coordonnées du point suivant l'axe Ox ;
- *Ordonnée* (notée y) : c'est la coordonnées du point suivant l'axe Oy ;
- *cote* (notée z) : c'est la coordonnées du point suivant l'axe Oz ;

Dans un repère cartésien, un point $M(x, y, z)$ est représenté comme dans la figure ci-contre .

Les coordonnées de l'origine O sont $(0, 0, 0)$.

Le point $H(x, y, 0)$ est la projection orthogonale de M sur le plan (Oxy) .



d. Composantes cartésiennes d'un vecteur

Dans un repère cartésien, tout vecteur \vec{V} est défini par ses composantes cartésiennes, par

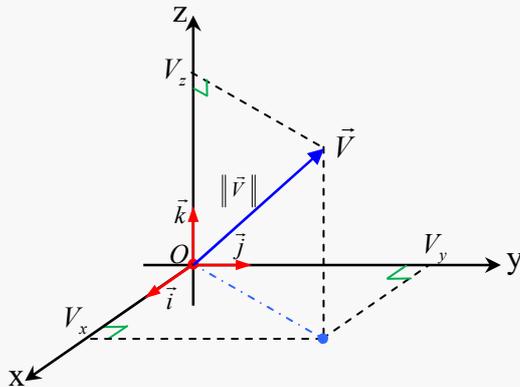
exemple V_x , V_y et V_z , et il s'écrit sous la forme colonne : $\vec{V} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

Représentation graphique d'un vecteur

Dans un repère cartésien, un vecteur :

$$\vec{V} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

est représenté comme dans la figure ci-contre .



Remarques :

- 1- En plus de ses coordonnées, un point $M(x, y, z)$ peut être défini par le vecteur position :

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (O est l'origine du repère)}$$

- 2- Un vecteur est dit nul ($\vec{V} = \vec{0}$) si ses composantes sont nulles ($V_x = V_y = V_z = 0$).

- 3- Dans la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur $\vec{V} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ s'écrit : $\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k}$

- 4- L'expression du module de $\vec{V} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ est : $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

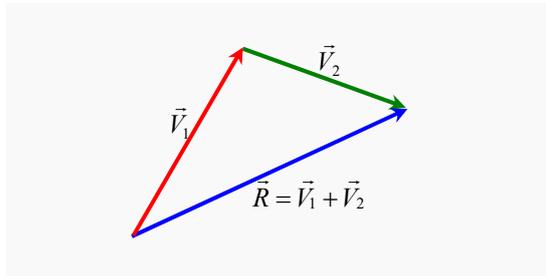
5-Opération sur les vecteurs

a. Addition vectorielle

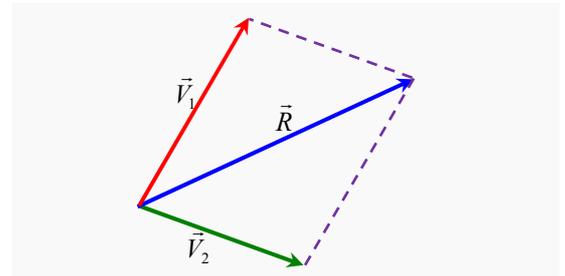
Le résultat de la somme de deux vecteurs $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur appelé la

résultante. $\vec{R} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$

On peut représenter la résultante \vec{R} par les méthodes graphiques suivantes :



Méthode du triangle



Méthode du parallélogramme

Propriétés de la somme vectorielle

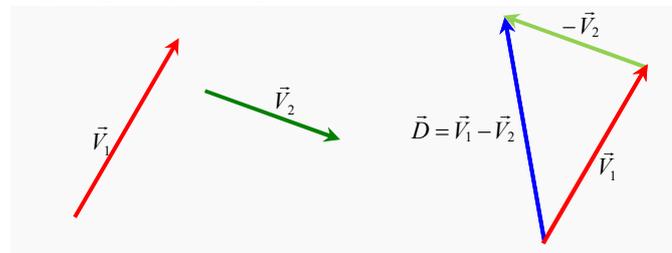
- La résultante de la somme d'un vecteur \vec{V} avec son opposé $-\vec{V}$ est le vecteur nul $\vec{0}$.
- La somme vectorielle est commutative: $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$
- La somme vectorielle est associative : $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$

b. Soustraction vectorielle

La soustraction vectorielle est définie comme l'addition du vecteur opposé :

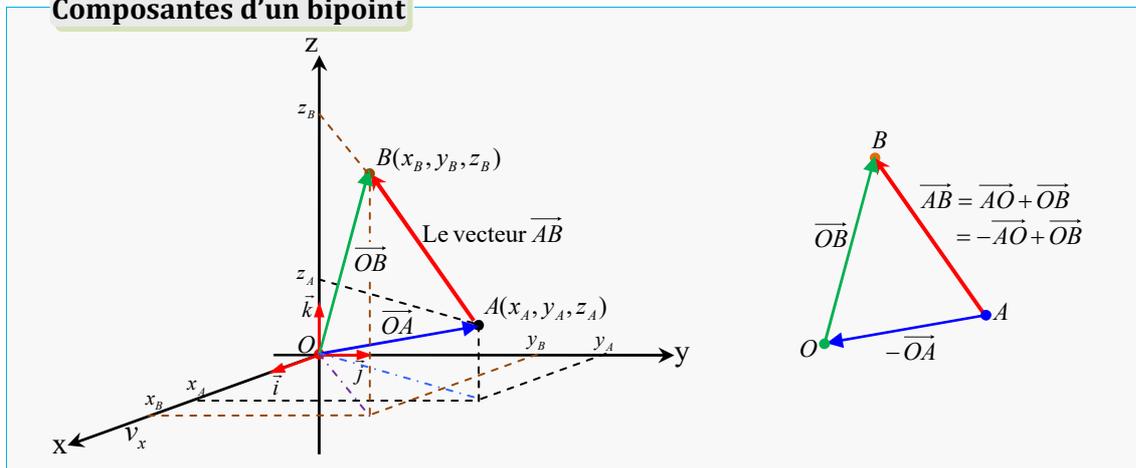
$$\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)$$

Pour trouver graphiquement le vecteur \vec{D} , on trace le vecteur opposé $-\vec{V}_2$ et on utilise la méthode du triangle.



Si : $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, donc les composantes du vecteur $\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ sont : $\vec{D} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$

Composantes d'un bipoint



Les composantes d'un bipoint (ou du vecteur) \vec{AB} , formé par les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, peuvent être déterminées comme suit :

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA} \text{ (décomposition de } \vec{AB} \text{ en deux vecteurs d'origine } O \text{)}$$

Avec : $\vec{OA} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k}$ et $\vec{OB} = x_B \cdot \vec{i} + y_B \cdot \vec{j} + z_B \cdot \vec{k}$

Donc, le vecteur \vec{AB} s'écrit : $\vec{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k}$

Le module de \vec{AB} est : $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

La direction de \vec{AB} est le segment de droite $[A, B]$

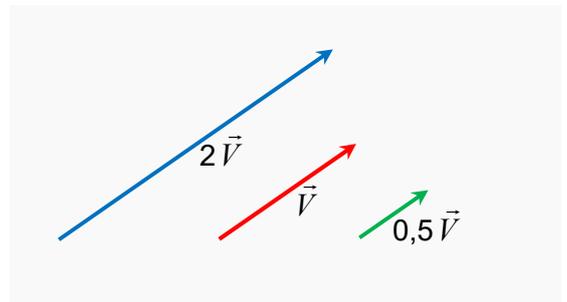
c. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Un vecteur \vec{V} peut être multiplié par un scalaire réel n pour donner un nouveau vecteur :

$$\vec{W} = n \cdot \vec{V}$$

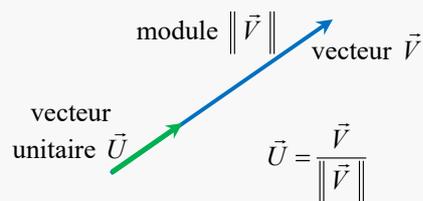
Les propriétés du vecteur \vec{W} sont :

- Le module de \vec{W} est : $\|\vec{W}\| = |n| \cdot \|\vec{V}\|$;
- La direction de \vec{W} est la même que celle de \vec{V} ;
- Le sens de \vec{W} est le même que celui de \vec{V} si $n > 0$, et il est opposé à celui de \vec{V} si $n < 0$.



Vecteur unitaire d'un vecteur

Tout vecteur non nul \vec{V} est égal à la multiplication d'un vecteur unitaire \vec{U} par son module $\|\vec{V}\|$: $\vec{V} = \|\vec{V}\| \cdot \vec{U}$



Le vecteur unitaire \vec{U} permet de définir la

$$\vec{U} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$$

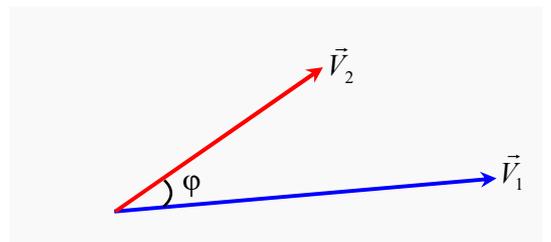
direction et le sens de \vec{V} , et il s'écrit :

d. Produit scalaire

Soient $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs

non nuls.

Le produit scalaire entre \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est la grandeur scalaire notée $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ telle que :



$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos \varphi \quad (\text{L'opérateur « } \cdot \text{ » signifie le produit scalaire})$$

$$= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \quad (\text{Expression analytique du produit scalaire})$$

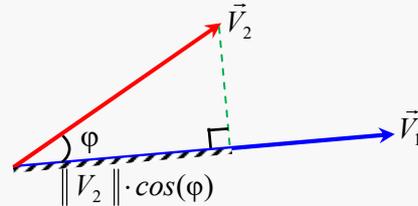
Avec : φ : c'est l'angle entre les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 ,

Composante d'un vecteur sur un axe

Dans l'expression du produit scalaire :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos \varphi$$

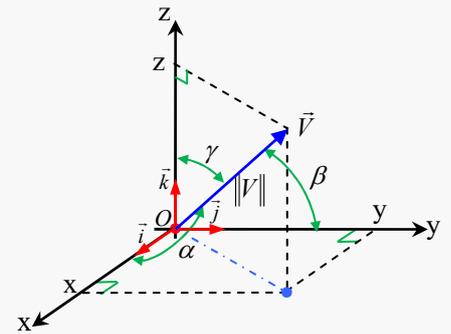
la grandeur « $\|\vec{V}_2\| \cdot \cos \varphi$ » représente la composante (ou la projection) de \vec{V}_2 sur la direction de \vec{V}_1 .



Exemple

La composante de $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur :

- l'axe Ox est : $x = \vec{V} \cdot \vec{i} = \|\vec{V}\| \cdot \cos \alpha$
- l'axe Oy est : $y = \vec{V} \cdot \vec{j} = \|\vec{V}\| \cdot \cos \beta$
- l'axe Oz est : $z = \vec{V} \cdot \vec{k} = \|\vec{V}\| \cdot \cos \gamma$



Propriétés du produit scalaire

- Si l'un des vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est nul, donc : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$
- Le produit scalaire est commutatif : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$
- Le produit scalaire est distributif : $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$
- Le produit scalaire entre deux vecteurs orthogonaux (perpendiculaires) \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \quad (\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2, \text{ c'est-à-dire l'angle } \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi = 0)$$

(c'est la condition d'orthogonalité de deux vecteurs non nuls)

- Le module d'un vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, qui égal à $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, peut être formulé par la relation : $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

Module de la résultante

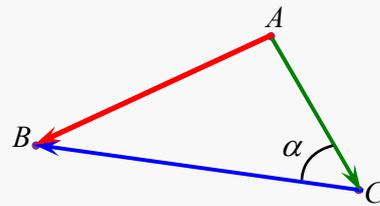
Soient les trois vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{CB} .

Si le vecteur \vec{AB} est la résultante des vecteurs \vec{AC} et \vec{CB} , c'est-à-dire :

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

Donc, le carré de son module égal à : $\|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\vec{AB}\|^2 &= (\vec{AC} + \vec{CB}) \cdot (\vec{AC} + \vec{CB}) \\ &= (\vec{AC} \cdot \vec{AC}) + (\vec{CB} \cdot \vec{CB}) + 2 \cdot \vec{AC} \cdot \vec{CB} \\ &= \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{CB}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{CB}\| \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$



Avec : α c'est l'angle entre les vecteurs \vec{AC} et \vec{CB}

e. Produit vectoriel

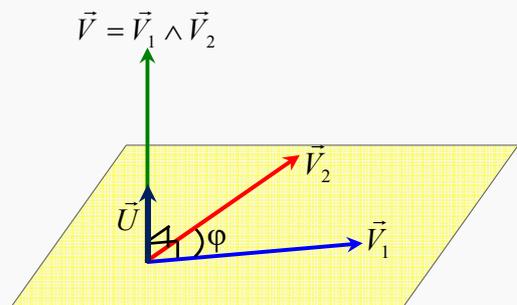
Soient \vec{V}_1 et \vec{V}_2 deux vecteurs non nuls, et φ l'angle entre eux.

Le produit vectoriel de \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est le vecteur \vec{V} défini par :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \sin \varphi \cdot \vec{U}$$

(L'opérateur « \wedge » signifie le produit vectoriel)

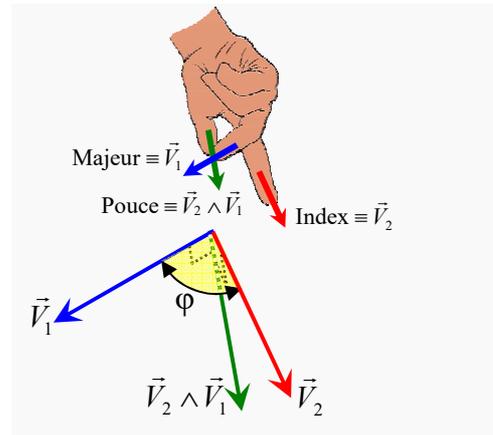
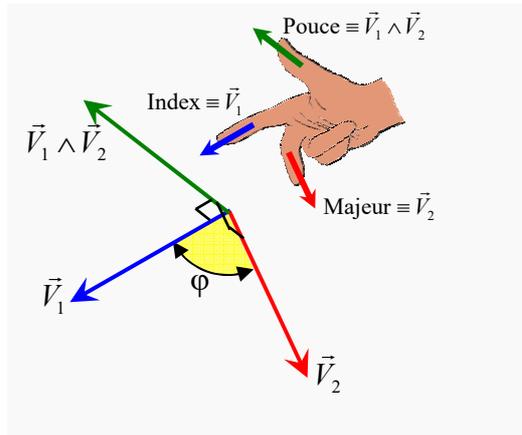
Avec : \vec{U} est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .



Le module de \vec{V} est égal à : $\|\vec{V}\| = \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot |\sin \varphi|$

Remarque :

Le sens du produit vectoriel est déterminé par la règle des 3 doigts de la main droite, disposés de telle sorte que :



Expression analytique du produit vectoriel

Dans une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, Si le vecteur $\vec{V} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est le produit vectoriel des vecteurs $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, donc ses composantes "x", "y" et "z" seront calculées par la méthode du déterminant comme suivant :

$$\begin{aligned} \vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{u}_1 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{u}_2 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{u}_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1) \cdot \vec{u}_1 - (x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1) \cdot \vec{u}_2 + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) \cdot \vec{u}_3 \end{aligned}$$

Propriétés du produit vectoriel

- Le produit vectoriel est anti commutatif : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$.
- Le produit vectoriel est distributif : $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 + \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$
- Le double produit vectoriel : $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ est un vecteur défini par la relation :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$$
- Si \vec{V}_1 est colinéaire à \vec{V}_2 (c'est-à-dire l'angle $\varphi = 0$ ou π), donc : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$.

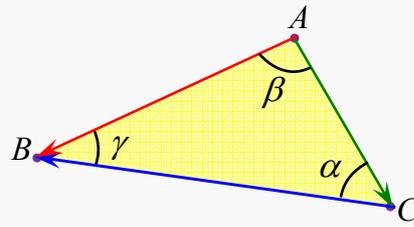
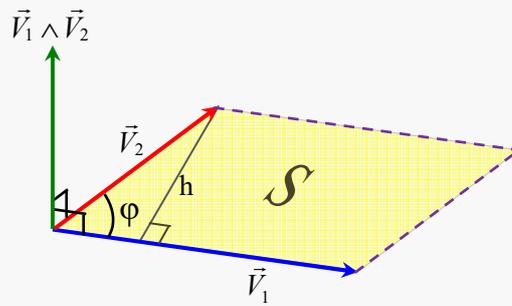
- Une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est dite orthonormée directe, si :
$$\begin{cases} \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \\ \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \\ \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \end{cases}$$

Surface d'un triangle

En géométrie, le module du produit vectoriel $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est égal à l'aire (ou la surface) du parallélogramme défini par les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .

Par conséquent, la surface d'un triangle ABC , formé par trois vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{CB} , égale à :

$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AC} \wedge \vec{CB}\| = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AC} \wedge \vec{AB}\| = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AB} \wedge \vec{CB}\| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{CB}\| \cdot \sin \alpha \quad (\alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \sin \beta \quad (\beta < \pi \Rightarrow \sin \beta > 0) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{CB}\| \cdot \sin \gamma \quad (\gamma < \pi \Rightarrow \sin \gamma > 0)
 \end{aligned}$$



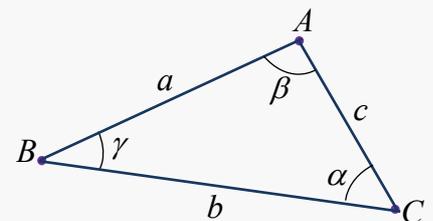
Application

Soit un triangle quelconque ABC .

Démontrer la formule des sinus :

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Corrigé : Le triangle ABC est formé par les vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{CB} .



On désignera par : - a : la longueur du côté AB ; c'est à dire : $a = \|\vec{AB}\|$;

- b : la longueur du côté CB ; c'est à dire : $b = \|\vec{CB}\|$;

- c : la longueur du côté AC ; c'est à dire : $c = \|\vec{AC}\|$;

- α : l'angle entre les vecteur \vec{AC} et \vec{CB} ;

- β : l'angle entre les vecteur \vec{AC} et \vec{AB} ;

- γ : l'angle entre les vecteur \vec{AB} et \vec{CB} ;

Donc, la surface du triangle s'écrit :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$\Rightarrow c \cdot b \cdot \sin \alpha = c \cdot a \cdot \sin \beta = a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

La division par le produit $a \cdot b \cdot c$, nous donne :

$$\frac{c \cdot b \cdot \sin \alpha}{a \cdot b \cdot c} = \frac{c \cdot a \cdot \sin \beta}{a \cdot b \cdot c} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{a \cdot b \cdot c}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

f. Produit mixte

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Soient les vecteurs non nuls

Le produit mixte $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ est défini par :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 \cdot (y_2 \cdot z_3 - y_3 \cdot z_2) + y_1 \cdot (x_3 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_3) + z_1 \cdot (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2)$$

Propriétés du produit mixte

- Le produit mixte est non commutatif : $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = -\vec{V}_3 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1)$
- Le produit mixte est invariant par permutation circulaire :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_3 \cdot (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1)$$

- Le produit mixte est nul si deux vecteurs sont colinéaires ou si les trois vecteurs sont coplanaires (les trois vecteurs sont dans le même plan).

Volume d'un parallélépipède

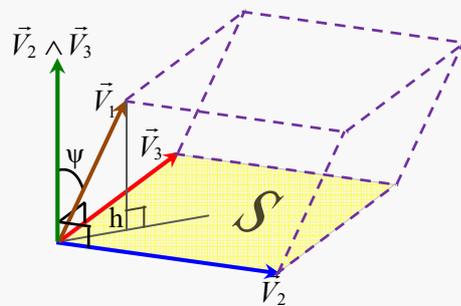
Si les trois vecteurs \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3 ont le même origine, donc :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\| \cdot \cos \psi$$

Avec :

$\|\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\|$: la surface de la base S .

$\|\vec{V}_1\| \cdot \cos \psi = h$: la hauteur du parallélépipède construit sur \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3



Alors, la valeur absolue : $\|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\| \cdot \cos \psi$ est égale au volume du parallélépipède.

g. Dérivation vectorielle

Soit un vecteur $\vec{V}(t)$ défini par ses composantes données en fonction d'une variable t (peut être le temps par exemple). La dérivée de $\vec{V}(t)$ par rapport à t est le vecteur : $\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$.

Propriétés de la dérivation vectorielle

- Dérivée de la somme (ou de la soustraction) : $\frac{d}{dt}(\vec{V}_1(t) \mp \vec{V}_2(t)) = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt} \mp \frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$
- Dérivée d'un vecteur multiplié par un scalaire : $\frac{d(n \cdot \vec{V}(t))}{dt} = \vec{V}(t) \cdot \frac{dn}{dt} + n \cdot \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$
- Dérivée d'un produit scalaire : $\frac{d}{dt}(\vec{V}_1(t) \cdot \vec{V}_2(t)) = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt} \cdot \vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t) \cdot \frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$
- Dérivée d'un produit vectoriel : $\frac{d}{dt}(\vec{V}_1(t) \wedge \vec{V}_2(t)) = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt} \wedge \vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t) \wedge \frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$

Remarque : Si \vec{U} est un vecteur unitaire. Alors, la dérivée du produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{U}$ par rapport au temps t , est égale :

$$\frac{d}{dt}(\vec{U} \cdot \vec{U}) = 2 \cdot \vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = 0 \quad (\text{puisque : } \vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{d(\vec{U} \cdot \vec{U})}{dt} = \frac{d\|\vec{U}\|^2}{dt} = 0)$$

Donc, le dérivé d'un vecteur unitaire, par rapport au temps, $\frac{d\vec{U}}{dt}$ est orthogonal à \vec{U} .

Application

Soient les vecteurs $\vec{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
et $\vec{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Trouver le module de chaque vecteur.
- 2) Calculer $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ et $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$.
- 3) Calculer le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$.
- 4) Trouver l'angle φ entre les deux vecteurs.
- 5) Calculer le module du produit vectoriel $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$

Corrigé :

1) Le module de \vec{A} est : $\|\vec{A}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

Le module de \vec{B} est : $\|\vec{B}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

$$2) \text{ La somme : } \vec{R} \begin{pmatrix} 1+0 \\ 2+1 \\ -1+(-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{La soustraction : } \vec{D} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-1 \\ -1-(-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{D} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3) \text{ Le produit scalaire : } \vec{A} \cdot \vec{B} = (1 \times 0) + (2 \times 1) + ((-1) \times (-1)) = 3$$

$$4) \text{ D'après l'expression du produit scalaire : } \vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} = \frac{3}{\sqrt{6} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

$$5) \text{ Le module du produit vectoriel : } \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot |\sin \varphi|$$

$$= \vec{A} \cdot \vec{B} = \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \sin(30^\circ)$$

$$= \sqrt{3}$$

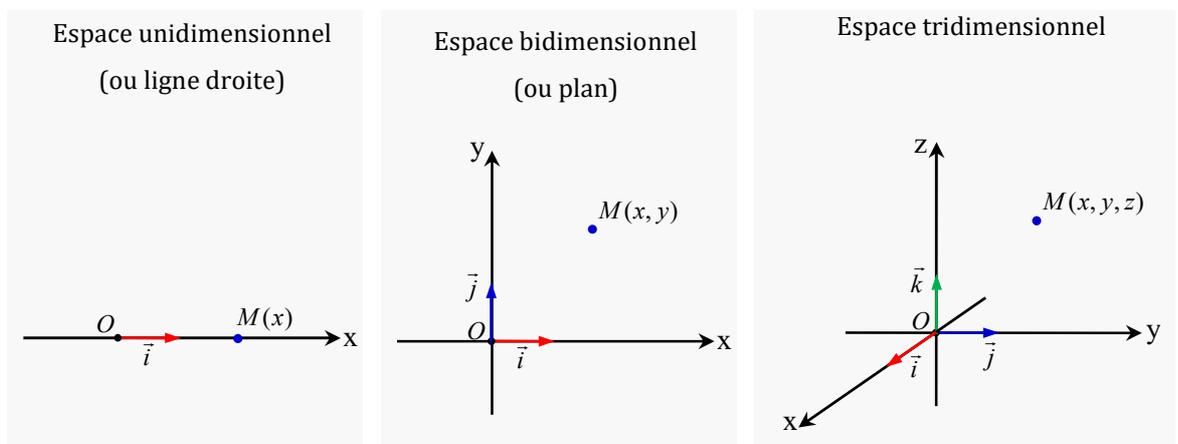
6- Systèmes de coordonnées

6-1. Coordonnées cartésiennes

a. Définition

Le repère cartésien (noté $\mathcal{R}(O, xyz)$) est un repère orthonormé fixe, d'origine $O(0, 0, 0)$ et muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Dans un espace unidimensionnel : le repère \mathcal{R} possède un seul axe Ox ;
- Dans un espace bidimensionnel : le repère \mathcal{R} possède deux axes Ox et Oy ;
- Dans un espace tridimensionnel : le repère \mathcal{R} comporte trois axes Ox , Oy et Oz .



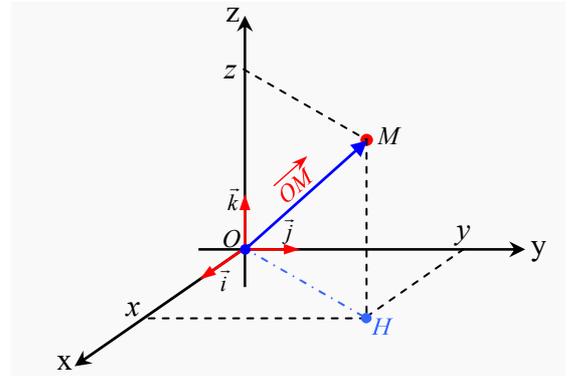
b. Vecteur position en coordonnées cartésiennes

En système de coordonnées cartésiennes, le vecteur position d'un point $M(x, y, z)$ s'écrit :

$$\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

- \vec{OM} est lié à l'origine O .
- Le module de \vec{OM} est :

$$\|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
- La direction de \vec{OM} est le segment de droite $[O, M]$
- Le sens de \vec{OM} est du point O (origine) vers le point M .



c. Dérivation du vecteur position par rapport au temps en coordonnées cartésiennes

En système de coordonnées cartésiennes, la dérivée du vecteur position :

$$\vec{OM}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

Tels que t est le temps, s'écrit :

$$\frac{d\vec{OM}(t)}{dt} = \left[\frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{i} + x(t) \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right] + \left[\frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{j} + y(t) \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right] + \left[\frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{k} + z(t) \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right]$$

Et puisque, la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est caractérisée par : $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$,

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{k} \\ &= \dot{x}(t) \cdot \vec{i} + \dot{y}(t) \cdot \vec{j} + \dot{z}(t) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Remarque :

En physique, on utilise la notation « $\dot{\quad}$ » et « $\ddot{\quad}$ » pour désigner la première et la seconde dérivée par rapport au temps t .

Application

Soit un point M , défini par ses coordonnées cartésiennes : $(\sin t, \cos t, t)$

- 1) Trouver, en fonction du temps t , l'expression du vecteur position $\vec{OM}(t)$
- 2) Calculer $\frac{d\vec{OM}(t)}{dt}$
- 3) Calculer le module du vecteur $\frac{d\vec{OM}(t)}{dt}$.

Corrigé :

1) Le vecteur position : $\overrightarrow{OM}(t) = \sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k}$

2) La dérivée par rapport à t :

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} &= \frac{d(\sin t)}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{d(\cos t)}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{d(t)}{dt} \cdot \vec{k} \\ &= \cos t \cdot \vec{i} - \sin t \cdot \vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

3) Le module de $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$: $\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{2}$

6-2. Coordonnées polaires**a. Définition**

Le système de coordonnées polaires est utilisé pour repérer la position d'un point M dans un plan (espace bidimensionnel).

La position du point $M(x, y)$ est repérée par :

- La coordonnée radiale ρ : c'est la distance qui sépare M de l'origine O .

$$\rho = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| \quad (0 \leq \rho \leq +\infty)$$

- La coordonnée angulaire θ : c'est l'angle que fait \overrightarrow{OM} avec l'axe Ox .

$$(0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

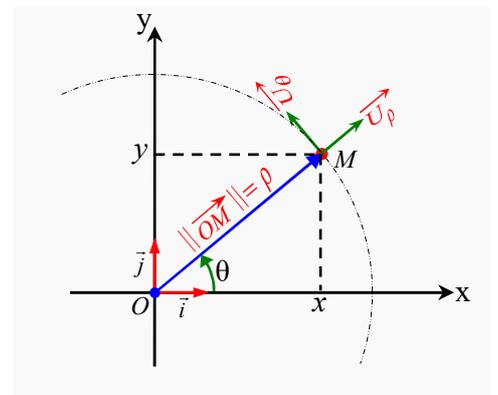
La base orthonormée associée aux coordonnées polaires est : $(\overrightarrow{U}_\rho, \overrightarrow{U}_\theta)$, tels que :

- \overrightarrow{U}_ρ (vecteur radial) : est le vecteur unitaire du vecteur \overrightarrow{OM} .

$$\overrightarrow{U}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\| \overrightarrow{OM} \right\|} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\rho}$$

- $\overrightarrow{U}_\theta$ (vecteur orthoradial) : est le vecteur directement perpendiculaire à \overrightarrow{U}_ρ .

(rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif)

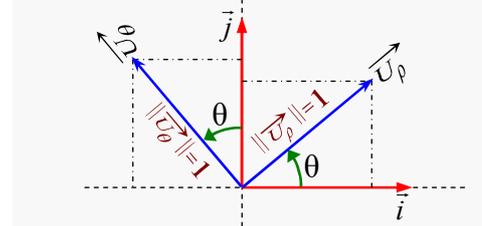
**b. Relation avec les coordonnées cartésiennes**

En utilisant la figure ci-dessus, on peut trouver les relations entre les coordonnées cartésiennes (x, y) et les coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta \\ y = \rho \cdot \sin \theta \end{cases}; \text{ et } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{si } x > 0); \text{ ou } \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad (\text{si } x < 0) \end{cases}$$

La relation entre la base polaire $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$ et la base cartésienne (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{cases} \vec{U}_\rho = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j} \\ \vec{U}_\theta = -\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j} \end{cases}$$



Remarques :

1- Les vecteurs \vec{U}_ρ et \vec{U}_θ sont liés au point M . Si M est en mouvement les vecteurs \vec{U}_ρ et \vec{U}_θ changent leurs directions, donc la base $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$ est « mobile » par rapport à la base fixe (\vec{i}, \vec{j}) .

2- La dérivation par rapport à l'angle polaire θ des vecteurs unitaires \vec{U}_ρ et \vec{U}_θ , nous

donne :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} \cdot \vec{i} + \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} \cdot \vec{j} = -\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j} = \vec{U}_\theta \\ \frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} = \frac{d(-\sin \theta)}{d\theta} \cdot \vec{i} + \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} \cdot \vec{j} = -[\cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}] = -\vec{U}_\rho \end{cases}$$

c. Vecteur position en coordonnées polaires

En système de coordonnées polaires, le vecteur position d'un point $M(\rho, \theta)$ s'écrit :

$$\vec{OM} = \rho \cdot \vec{U}_\rho$$

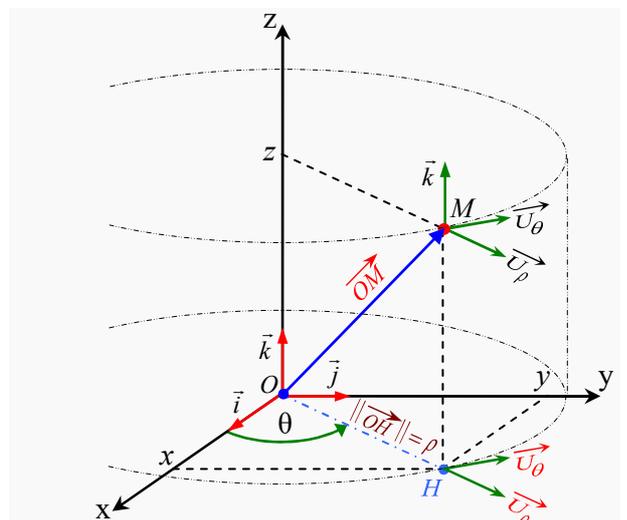
6-3. Coordonnées cylindriques

a. Définition

Dans le système de coordonnées cylindriques la position d'un point M est repérée par :

- Les coordonnées polaires ρ et θ de sa projection orthogonale (le point $H(x, y, 0)$) sur le plan horizontal (Oxy) .
- La coordonnée z (sa cote en coordonnées cartésiennes)

Donc les coordonnées cylindrique du point M sont :



$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OH}\| & (0 \leq \rho \leq +\infty) \\ \theta : \text{l'angle que fait le vecteur } \overrightarrow{OH} \text{ avec l'axe } Ox & (0 \leq \theta \leq 2\pi) \\ z & (-\infty \leq z \leq +\infty) \end{cases}$$

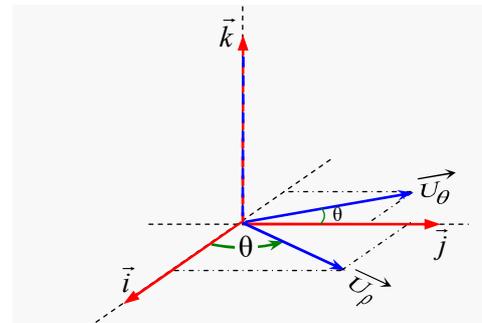
b. Relation avec les coordonnées cartésiennes

On peut passer du système de coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes (ou l'inverse) par les relations :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta \\ y = \rho \cdot \sin \theta \\ z = z \end{cases} ; \text{ et } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{si } x > 0); \text{ ou } \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad (\text{si } x < 0) \\ z = z \end{cases}$$

La base orthonormée associée aux coordonnées cylindriques est : $(\overrightarrow{U}_\rho, \overrightarrow{U}_\theta, \vec{k})$, tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{U}_\rho = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j} \\ \overrightarrow{U}_\theta = -\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$



c. Vecteur position en coordonnées cylindrique

En système de coordonnées cylindrique, le vecteur position d'un point $M(\rho, \theta, z)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cdot \overrightarrow{U}_\rho + z \cdot \vec{k}$$

Application

Deux points P et Q ont les coordonnées cylindriques $(4, \frac{\pi}{3}, 0)$ et $(2, \frac{5\pi}{6}, \sqrt{3})$.

Trouver les coordonnées cartésiennes des points P et Q .

Corrigé :

- Les coordonnées cartésiennes du point $P(4, \frac{\pi}{3}, 0)$:

$$\begin{cases} x_P = \rho_P \cdot \cos \theta_P \\ y_P = \rho_P \cdot \sin \theta_P \\ z_P = z_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 4 \times \cos \frac{\pi}{3} = 2 \\ y_P = 4 \times \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \\ z_P = 0 \end{cases}$$

Donc, Les coordonnées cartésiennes de P sont : $P(2, 2\sqrt{3}, 0)$

- Les coordonnées cartésiennes du point $Q(2, \frac{5\pi}{6}, \sqrt{3})$:

$$\begin{cases} x_Q = \rho_Q \cdot \cos \theta_Q \\ y_Q = \rho_Q \cdot \sin \theta_Q \\ z_Q = z_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 2 \times \cos \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} \\ y_Q = 2 \times \sin \frac{5\pi}{6} = 1 \\ z_Q = \sqrt{3} \end{cases}$$

Donc, Les coordonnées cartésiennes de Q sont : $Q(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$

6-4. Coordonnées sphériques

a. Définition

Dans l'espace tridimensionnel, la position d'un point M est repéré en système de coordonnées sphériques par :

- La distance radiale r : c'est la distance qui sépare M de l'origine O .

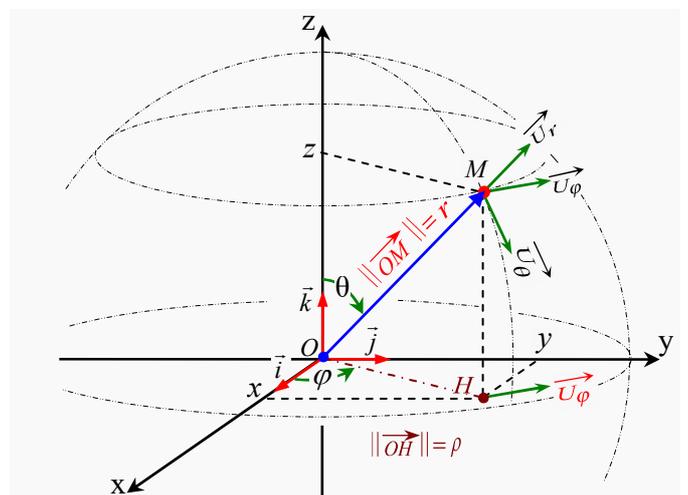
$$r = \|\overrightarrow{OM}\| \quad (0 \leq r \leq +\infty)$$

- La colatitude θ :

c'est l'angle que fait \overrightarrow{OM} avec l'axe Oz ($0 \leq \theta \leq \pi$)

- La longitude φ :

c'est l'angle que fait \overrightarrow{OH} (la projection orthogonale de \overrightarrow{OM} sur le plan horizontale (Oxy)) avec l'axe Ox ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)



b. Relation avec les coordonnées cartésiennes

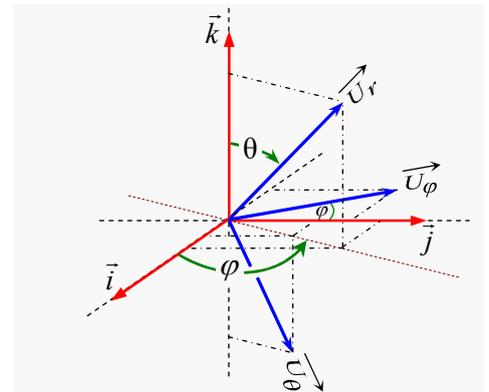
On peut passer du système de coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes (ou l'inverse) par les relations :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{si } x > 0); \text{ ou } \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad (\text{si } x < 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = r \cdot \cos \theta \end{cases} \quad ; \text{ et}$$

La base orthonormée associée aux coordonnées sphériques est : $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$, tels que :

$$\begin{cases} \vec{U}_r = \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{j} + \cos \theta \cdot \vec{k} \\ \vec{U}_\theta = \cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{j} - \sin \theta \cdot \vec{k} \\ \vec{U}_\varphi = -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j} \end{cases}$$



Remarques :

- 1- La base sphérique $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ est « mobile » par rapport à la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 2- La base $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ est orthonormée directe, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \vec{U}_r \wedge \vec{U}_\theta = \vec{U}_\varphi \\ \vec{U}_\theta \wedge \vec{U}_\varphi = \vec{U}_r \\ \vec{U}_\varphi \wedge \vec{U}_r = \vec{U}_\theta \end{cases}$$

- 3- Les différentielles totales des vecteurs unitaires $\vec{U}_r, \vec{U}_\theta$ et \vec{U}_φ sont :

- $d\vec{U}_r = \left(\frac{\partial \vec{U}_r}{\partial \theta}\right) \cdot d\theta + \left(\frac{\partial \vec{U}_r}{\partial \varphi}\right) \cdot d\varphi = d\theta \cdot \vec{U}_\theta + \sin \theta \cdot d\varphi \cdot \vec{U}_\varphi$
- $d\vec{U}_\theta = \left(\frac{\partial \vec{U}_\theta}{\partial \theta}\right) \cdot d\theta + \left(\frac{\partial \vec{U}_\theta}{\partial \varphi}\right) \cdot d\varphi = -d\theta \cdot \vec{U}_r + \cos \theta \cdot d\varphi \cdot \vec{U}_\varphi$
- $d\vec{U}_\varphi = \left(\frac{\partial \vec{U}_\varphi}{\partial \varphi}\right) \cdot d\varphi = -\sin \theta \cdot d\varphi \cdot \vec{U}_r - \cos \theta \cdot d\varphi \cdot \vec{U}_\theta$

c. Vecteur position en coordonnées sphériques

En système de coordonnées sphériques, le vecteur position d'un point $M(r, \theta, \varphi)$ s'écrit :

$$\vec{OM} = r \cdot \vec{U}_r$$

Application

Démontrer que : $\frac{\partial \vec{U}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin \theta \cdot \vec{U}_r - \cos \theta \cdot \vec{U}_\theta$

Corrigé :

D'après l'égalité : $\vec{U}_\varphi = \vec{U}_r \wedge \vec{U}_\theta$

Alors, la dérivée $\frac{\partial \vec{U}_\varphi}{\partial \varphi}$ égale : $\frac{\partial \vec{U}_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{U}_r}{\partial \varphi} \wedge \vec{U}_\theta + \vec{U}_r \wedge \frac{\partial \vec{U}_\theta}{\partial \varphi}$

Avec : $\frac{\partial \vec{U}_r}{\partial \varphi} = \sin \theta \cdot \vec{U}_\varphi$ et $\frac{\partial \vec{U}_\theta}{\partial \varphi} = \cos \theta \cdot \vec{U}_\varphi$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \vec{U}_\varphi}{\partial \varphi} &= \sin \theta \cdot (\vec{U}_\varphi \wedge \vec{U}_\theta) + \cos \theta \cdot (\vec{U}_r \wedge \vec{U}_\varphi) \\ &= \sin \theta \cdot (-\vec{U}_r) + \cos \theta \cdot (-\vec{U}_\theta) \\ &= -\sin \theta \cdot \vec{U}_r - \cos \theta \cdot \vec{U}_\theta \end{aligned}$$

Application

Soit un point M de coordonnées sphériques $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

Trouver le vecteur position \vec{OM} en coordonnées cartésiennes.

Corrigé :

L'expression du vecteur position en coordonnées sphérique est :

$$\vec{OM} = r_M \cdot \vec{U}_{r(M)}$$

Avec : $r_M = 2$

$$\begin{aligned} \text{et : } \vec{U}_{r(M)} &= \sin \theta_M \cdot \cos \varphi_M \cdot \vec{i} + \sin \theta_M \cdot \sin \varphi_M \cdot \vec{j} + \cos \theta_M \cdot \vec{k} \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} \right) \cdot \vec{i} + \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot \vec{j} + \left(\cos \frac{\pi}{4} \right) \cdot \vec{k} \\ &= \frac{-1}{2} \cdot \vec{i} + \frac{1}{2} \cdot \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Donc, le vecteur position de $M(2, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ en coordonnées cartésiennes est :

$$\vec{OM} = -\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{2} \cdot \vec{k}$$

Annexe

• **Algèbre**

Exposants

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

• **Trigonométrie**

Identités trigonométriques

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha \mp \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \mp \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan(\alpha \mp \beta) = \frac{\tan \alpha \mp \tan \beta}{1 \pm (\tan \alpha \cdot \tan \beta)}$$

Fonctions trigonométrique

Fonction	Dérivée $\left(\frac{d}{dx} \right)$	Fonction réciproque	Dérivée $\left(\frac{d}{dx} \right)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos(f(x))$	$-\frac{df(x)}{dx} \cdot \sin(f(x))$		
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin(f(x))$	$\frac{df(x)}{dx} \cdot \cos(f(x))$		
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2 + 1}$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$\frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$	$\text{arccot}(x)$	$\frac{-1}{x^2 + 1}$

• **Géométrie**

L'équation d'une droite est

de la forme : $y = a \cdot x + b$

Où :

b est l'ordonnée à l'origine
 $y(0)$;

a est la pente, telle que :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

L'équation d'un cercle est de

la forme : $x^2 + y^2 = r^2$

Où :

Le rayon : r ;

Le centre : l'origine $O(0, 0)$;

La circonférence : $C = 2\pi \cdot r$;

La surface : $S_{\text{cercle}} = \pi \cdot r^2$

L'équation d'une sphère est

de la forme : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

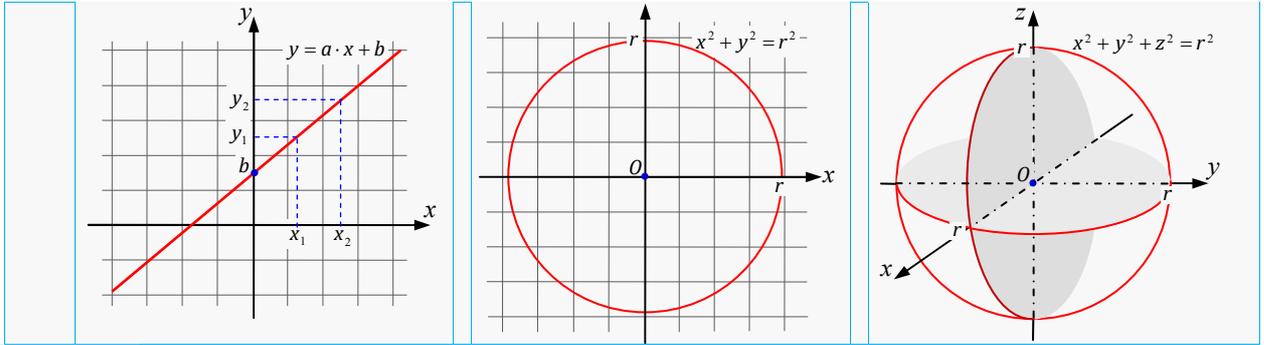
Où :

Le rayon : r ;

Le centre : l'origine $O(0, 0, 0)$;

La surface : $S_{\text{sphère}} = 4\pi \cdot r^2$;

Le volume : $V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$



Exercice 1

Soient les points suivants : $A(1, 1, 1)$, $B(2, -1, 0)$ et $C(0, -2, 2)$.

1. Représenter les points A , B et C , dans un repère cartésien (O, xyz) .
2. Déterminer les composantes des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .
3. Calculer l'angle φ compris entre les vecteur \vec{AB} et \vec{AC} .

Exercice 2

On considère les vecteurs suivants : $\vec{A} = 2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 3 \cdot \vec{k}$ et $\vec{B} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$

1. Représenter, sur un repère cartésien (O, xyz) , les vecteurs \vec{A} et \vec{B} , puis calculer leurs modules.
2. Calculer le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$, et le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$.
3. Déterminer le vecteur unitaire \vec{U} perpendiculaire au plan (\vec{A}, \vec{B}) .
4. Représenter sur le repère précédent, le vecteur : $\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$.
5. Calculer le produit mixte : $\vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$, et déduire le volume du parallélépipède formé par les vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} .

Exercice 3

Dans le plan (xOy) muni de la base vectorielle (\vec{i}, \vec{j}) , on considère les points : $A(-3, 2)$, $B(3, 5)$ et $C(-1, -2)$.

1. Représenter les points A , B et C .
2. Calculer les composantes et les modules des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .
3. Déterminer les vecteurs unitaires des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .
4. Déterminer un point D , du plan (xOy) , tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé direct (O.N.D) $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs :

$$\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j} \quad ; \quad \vec{V}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \quad ; \quad \vec{V}_3 = a\vec{i} - \vec{j} + b\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{V}_4 = 2\vec{i} - \vec{k}$$

1. Représenter les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .
2. Calculer les modules : $\|\vec{V}_1\|$ et $\|\vec{V}_2\|$
3. Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et les composantes du produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$.
4. Calculer par deux méthodes différentes l'angle α formé par les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 ($\alpha = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$).

5. Calculer, en fonction de a et b , les composantes du double produit vectoriel $\vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$.
6. Trouver a et b pour que le vecteur \vec{V}_3 est perpendiculaire au plan (\mathcal{P}) formé par les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .
7. Calculer le produit mixte $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_4)$ et montrer que le vecteur \vec{V}_4 appartient au plan (\mathcal{P}) .

Exercice 5

Soit le repère $R(O, x, y, z)$ muni de la base O.N.D $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère, dans le plan (xOy) , deux vecteurs unitaires perpendiculaires \vec{u} et \vec{v} tournant autour de l'axe (Oz) , avec $\theta = \omega t$ l'angle formé par les vecteurs \vec{u} et \vec{i} (ω est une constante).

1. Exprimer les vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. Déterminer un vecteur unitaire \vec{w} , tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base O.N.D.
3. Exprimer la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
4. Calculer dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les dérivées : $\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R$ et $\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_R$.

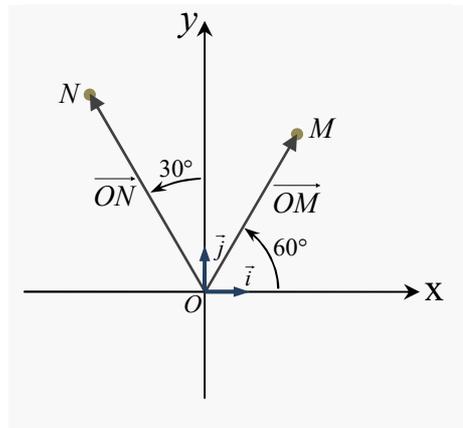
Soient le vecteur : $\vec{r} = \cos(bt)\vec{i} + \sin(bt)\vec{j} + t^2\vec{k}$ et la fonction scalaire $\lambda(t) = e^{-at}$ (a et b sont des constantes).

5. Calculer dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les dérivées : $\left. \frac{d(\lambda\vec{r})}{dt} \right|_R$ et $\left. \frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt} \right|_R$.

Exercice 6

Soient les vecteurs \vec{OM} et \vec{ON} , illustrés à la figure ci-contre.

1. Calculer les coordonnées polaires (ρ, θ) et cartésiennes (x, y) des points M et N .
2. Déterminer et représenter, dans le plan (O, xy) , les bases vectorielles $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$ associées aux points M et N .



Données : $OM = \|\vec{OM}\| = 4$ et $ON = \|\vec{ON}\| = 5$

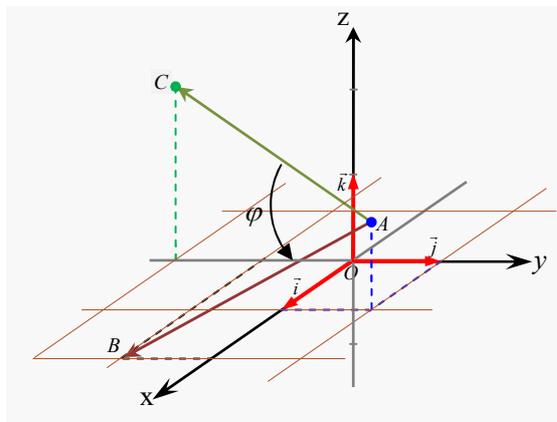
Exercice 7

1. Soient les points P_1 et P_2 définis par les coordonnées cartésiennes, respectivement, $(1, 2, 2)$ et $(-1, -2, 2)$.
Calculer leurs coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) et sphériques (r, θ, φ) .
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point M défini par ses coordonnées cylindriques $(3, 30^\circ, 2)$.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point N défini par ses coordonnées sphériques $(2, 45^\circ, 60^\circ)$.

Solutions

Exercice 1

1. Représentation des points



2. Le vecteur
- \vec{AB}
- :
- $\vec{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - \vec{k}$

Le vecteur \vec{AC} : $\vec{AC} = (x_C - x_A) \cdot \vec{i} + (y_C - y_A) \cdot \vec{j} + (z_C - z_A) \cdot \vec{k} = -\vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + \vec{k}$

3. D'après la formule du produit scalaire :
- $\vec{U} \cdot \vec{V} = U \cdot V \cdot \cos(\varphi) = x_U \cdot x_V + y_U \cdot y_V + z_U \cdot z_V$

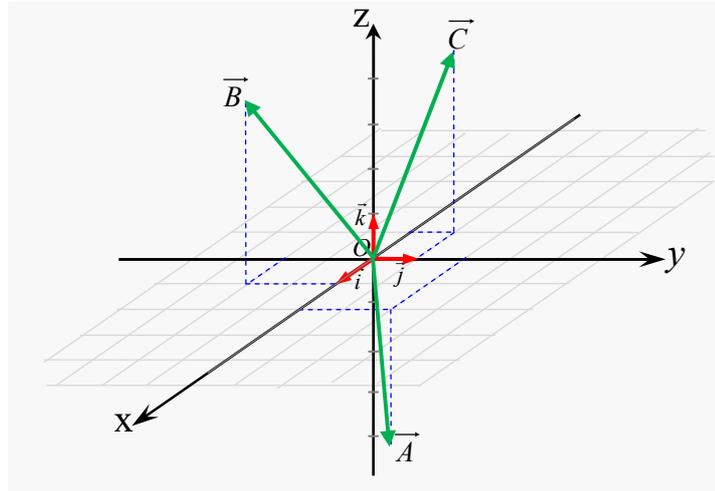
Donc, l'angle entre deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} est :
$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{U \cdot V}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}\right), \text{ avec : } \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \\ \|\vec{AB}\| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \approx 2,45 \\ \|\vec{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{11} \approx 3,32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right) = 1,06 \text{ (rad)} = 60,5^\circ$$

Exercice 2

1. Représentation des vecteurs



Les modules : $A = \|\vec{A}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{17} \approx 4,12$$

$$B = \|\vec{B}\| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21} \approx 4,58$$

2. Produit scalaire : $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 2 - 4 - 12 = -14$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Produits vectoriels :

$$= (8 - 6) \cdot \vec{i} - (8 - (-3)) \cdot \vec{j} + (-4 - 2) \cdot \vec{k}$$

$$= 2 \cdot \vec{i} - 11 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k}$$

3. Le vecteur unitaire \vec{U} : $\vec{U} = \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|}$, avec $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \sqrt{161} \approx 12,69$

$$\Rightarrow \vec{U} = \frac{1}{\sqrt{161}} (2 \cdot \vec{i} - 11 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k})$$

4. Représentation de $\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$

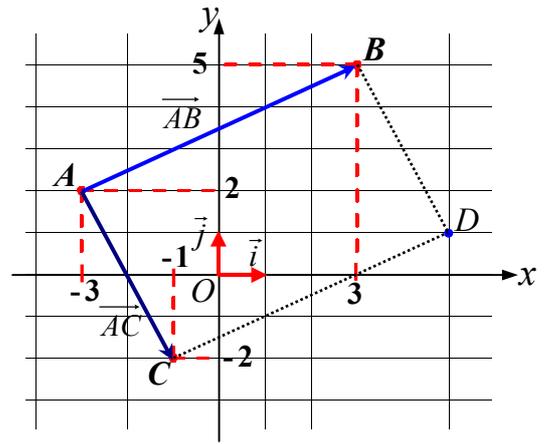
5. Produit mixte : $\vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 2 \cdot c_x - 11 \cdot c_y - 6 \cdot c_z = -37$

\Rightarrow Le volume du même parallélépipède formé par les vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} :

$$\text{Vol} = \left| \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) \right| = 37$$

Exercice 3

Dans le plan (xOy) muni de la base vectorielle (\vec{i}, \vec{j}) , on considère les points : $A(-3, 2)$, $B(3, 5)$ et $C(-1, -2)$.



1. Représentation des points A , B et C .
2. Les composantes des points \vec{AB} et \vec{AC} :

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} \\ &= (3 - (-3))\vec{i} + (5 - 2)\vec{j} = 6\vec{i} + 3\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} \\ &= ((-1) - (-3))\vec{i} + ((-2) - 2)\vec{j} = 2\vec{i} - 4\vec{j} \end{aligned}$$

Les modules : $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(6^2) + (3^2)} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(2^2) + ((-4)^2)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

3. Les vecteurs unitaires : $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{6\vec{i} + 3\vec{j}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} + \vec{j})$

$$\vec{u}_{AC} = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{2\vec{i} - 4\vec{j}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} - 2\vec{j})$$

4. Un point $D(x, y)$, tel que $ABCD$ soit un parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$ (ou $\vec{AC} = \vec{BD}$)

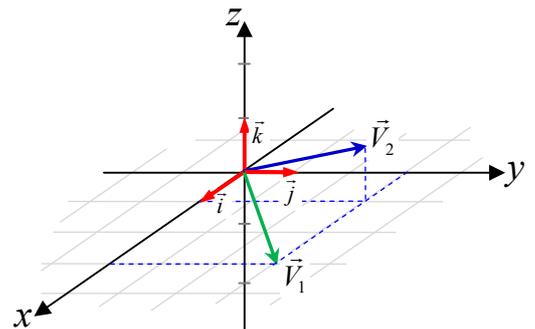
Alors, $6\vec{i} + 3\vec{j} = (x - x_C)\vec{i} + (y - y_C)\vec{j} = (x + 1)\vec{i} + (y + 2)\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 6 \\ y + 2 = 3 \end{cases}$

Donc, les coordonnées du point D sont : $(5, 1)$

Exercice 4

Dans un repère O.N.D $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs : $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{V}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

1. Représenter les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .



2. Les modules : $\|\vec{V}_1\| = \sqrt{(3^2) + (3^2) + 0} = 3\sqrt{2}$

$$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{1 + (3^2) + 1} = \sqrt{11}$$

3. Le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 &= (3 \times 1) + (3 \times 3) + (0 \times 1) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Le produit vectoriel : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} &= (3 - 0)\vec{i} - (3 - 0)\vec{j} + (9 - 3)\vec{k} \\ &= 3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \end{aligned}$$

4. L'angle α formé par les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 :

Méthode 1 : D'après le produit scalaire : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\|}$

Alors, $\cos \alpha = \frac{12}{3\sqrt{2} \times \sqrt{11}} = 2\sqrt{\frac{2}{11}} \approx 0,85 \Rightarrow \alpha \approx 31,48^\circ$

Méthode 2 : D'après le produit vectoriel : $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot |\sin \alpha| \Rightarrow |\sin \alpha| = \frac{\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\|}{\|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\|}$

Alors, $|\sin \alpha| = \frac{\sqrt{(3^2) + (-3^2) + (6^2)}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{11}} = \sqrt{\frac{3}{11}} \approx 0,52 \Rightarrow \alpha \approx 31,48^\circ$

5. Soit le vecteur : $\vec{V}_3 = a\vec{i} - \vec{j} + b\vec{k}$

Le double produit vectoriel : $\vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & -1 & b \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (-6+3b)\vec{i} - (6a-3b)\vec{j} + (-3a+3)\vec{k}$

6. Le vecteur \vec{V}_3 est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \vec{V}_1 et $\vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{0}$

Alors, $(-6+3b)\vec{i} - (6a-3b)\vec{j} + (-3a+3)\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -6+3b=0 \\ 6a-3b=0 \\ -3a+3=0 \end{cases}$

Donc, les valeurs de a et b sont : $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

7. Soit le vecteur : $\vec{V}_4 = 2\vec{i} - \vec{k}$

Le produit mixte : $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_4) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_4 = 6 - 6 = 0$

Le produit mixte $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_4)$ est nul, donc les vecteurs \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_4 sont coplanaires (appartiennent au même plan (\mathcal{P}))

Exercice 5

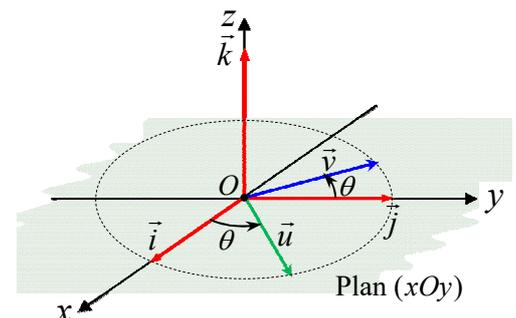
Soit le repère $R(O, x, y, z)$ muni de la base O.N.D $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère, dans le plan (xOy) , deux vecteurs unitaires perpendiculaires \vec{u} et \vec{v} tournant autour de l'axe (Oz) , avec $\theta = \omega t$ l'angle formé par les vecteurs \vec{u} et \vec{i} (ω est une constante).

1. D'après le produit scalaire (ou par projection) :

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{\|\vec{i}\|} = 1 \times \cos \theta = \cos(\omega t)$$

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{j}}{\|\vec{j}\|} = 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\omega t)$$

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{k}}{\|\vec{k}\|} = 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

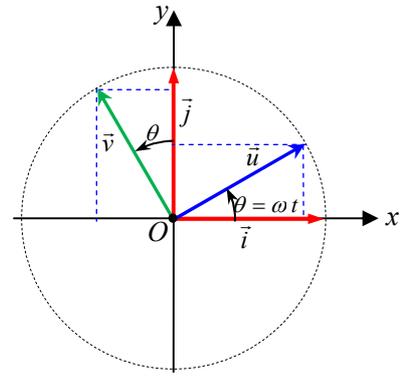


Alors, le vecteur $\vec{u} = \cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}$

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\|\vec{i}\|} = 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\omega t)$$

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\|\vec{j}\|} = 1 \times \cos(\theta) = \cos(\omega t)$$

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{\|\vec{k}\|} = 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$



Donc, le vecteur $\vec{v} = -\sin(\omega t)\vec{i} + \cos(\omega t)\vec{j}$

2. Soit un vecteur unitaire : $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (c.à.d : $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$)

Les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constituent une base O.N.D \Leftrightarrow Le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 1$

$$\text{Avec : } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \end{bmatrix} = \vec{k}$$

Donc, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = z = 1$, et par conséquent : $x = 0$ et $y = 0$

Alors, le 3^{ème} vecteur de la base O.N.D $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ c'est le vecteur unitaire : $\vec{w} = \vec{k}$

3. La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en fonction de la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$\text{D'après les relations : } \begin{cases} \vec{u} = \cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j} \\ \vec{v} = -\sin(\omega t)\vec{i} + \cos(\omega t)\vec{j} \\ \vec{w} = \vec{k} \end{cases}, \text{ nous avons : } \begin{cases} \vec{i} = \cos(\omega t)\vec{u} - \sin(\omega t)\vec{v} \\ \vec{j} = \sin(\omega t)\vec{u} + \cos(\omega t)\vec{v} \\ \vec{k} = \vec{w} \end{cases}$$

4. Le calcul, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, des dérivées

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R = \frac{d\cos(\omega t)}{dt} \vec{i} + \cos(\omega t) \left. \frac{d\vec{i}}{dt} \right|_R + \frac{d\sin(\omega t)}{dt} \vec{j} + \sin(\omega t) \left. \frac{d\vec{j}}{dt} \right|_R \quad (\text{avec : } \left. \frac{d\vec{i}}{dt} \right|_R = \vec{0} \text{ et } \left. \frac{d\vec{j}}{dt} \right|_R = \vec{0})$$

$$\text{Alors, } \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R = -\omega \sin(\omega t)\vec{i} + \omega \cos(\omega t)\vec{j} = \omega \vec{v} \quad (\text{avec : } \omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R = \frac{d\theta}{dt} \vec{v})$$

$$\text{et aussi : } \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_R = -\frac{d\sin(\omega t)}{dt} \vec{i} + \frac{d\cos(\omega t)}{dt} \vec{j} = -\omega \cos(\omega t)\vec{i} - \omega \sin(\omega t)\vec{j} = -\omega \vec{u} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}$$

5. Soient le vecteur : $\vec{r} = \cos(bt)\vec{i} + \sin(bt)\vec{j} + t^2\vec{k}$ et la fonction $\lambda(t) = e^{-at}$.

Le calcul, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, des dérivées :

$$\left. \frac{d(\lambda \cdot \vec{r})}{dt} \right|_R = \frac{d\lambda}{dt} \vec{r} + \lambda \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_R$$

$$= -a e^{-at} (\cos(bt) \vec{i} + \sin(bt) \vec{j} + t^2 \vec{k}) + e^{-at} (-b \sin(bt) \vec{i} + b \cos(bt) \vec{j} + 2t \vec{k})$$

$$= e^{-at} \left((-a \cos(bt) - \sin(bt)) \vec{i} + (-a \sin(bt) + \cos(bt)) \vec{j} + (-a t^2 + 2t) \vec{k} \right)$$

$$\text{et : } \left. \frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R \wedge \vec{r} + \vec{u} \wedge \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_R$$

$$\text{Avec : } \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R \wedge \vec{r} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) & 0 \\ \cos(bt) & \sin(bt) & t^2 \end{bmatrix}$$

$$= \omega t^2 (\cos(\omega t) \vec{i} + \sin(\omega t) \vec{j}) - \omega (\sin(\omega t) \sin(bt) + \cos(\omega t) \cos(bt)) \vec{k}$$

$$= \omega t^2 (\cos(\omega t) \vec{i} + \sin(\omega t) \vec{j}) - \omega \cos(\omega - b) t \vec{k}$$

$$\text{Et : } \vec{u} \wedge \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_R = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -b \sin(bt) & b \cos(bt) & 2t \end{bmatrix}$$

$$= 2t (\sin(\omega t) \vec{i} - \cos(\omega t) \vec{j}) + b (\cos(\omega t) \cos(bt) + \sin(\omega t) \sin(bt)) \vec{k}$$

$$= 2t (\sin(\omega t) \vec{i} - \cos(\omega t) \vec{j}) + b \cos(\omega - b) t \vec{k}$$

$$\text{Donc : } \left. \frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt} \right|_R$$

$$= (\omega t^2 (\cos(\omega t) + 2t \sin(\omega t)) \vec{i} + (\omega t^2 \sin(\omega t) - 2t \cos(\omega t)) \vec{j} + (b - \omega) \cos(\omega - b) t \vec{k})$$

Exercice 6

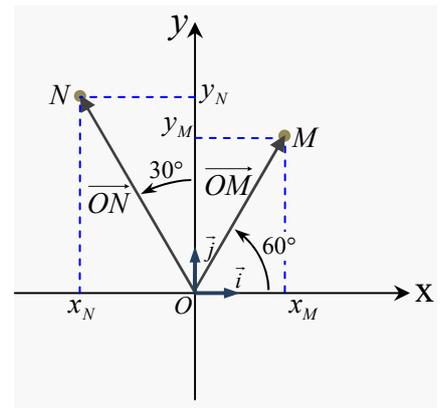
1. Les coordonnées polaires de :

$$M : \begin{cases} \rho_M = \|\overline{OM}\| = 4 \\ \theta_M = 60^\circ \end{cases} \quad \text{et} \quad N : \begin{cases} \rho_N = \|\overline{ON}\| = 5 \\ \theta_N = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ \end{cases}$$

Les coordonnées cartésiennes :

- de M : $\begin{cases} x_M = \rho_M \cdot \cos(\theta_M) = 2 \\ y_M = \rho_M \cdot \sin(\theta_M) = 2\sqrt{3} \end{cases}$
- de N : $\begin{cases} x_N = \rho_N \cdot \cos(\theta_N) = -2,5 \\ y_N = \rho_N \cdot \sin(\theta_N) = 2,5\sqrt{3} \end{cases}$

2- La base vectorielle $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$:



- de M : $\vec{U}_{\rho(M)} = \cos(\theta_M) \cdot \vec{i} + \sin(\theta_M) \cdot \vec{j}$

$$= \frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{3} \cdot \vec{j})$$

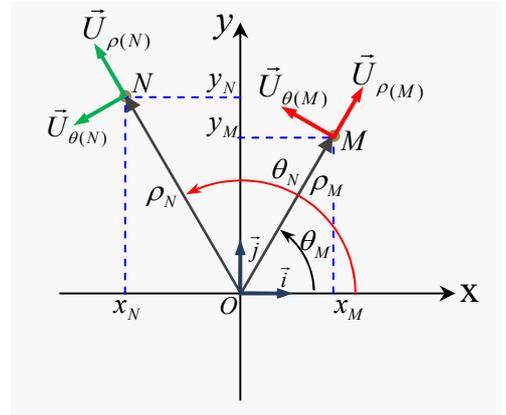
$$\vec{U}_{\theta(M)} = -\sin(\theta_M) \cdot \vec{i} + \cos(\theta_M) \cdot \vec{j}$$

$$= \frac{1}{2}(-\sqrt{3} \cdot \vec{i} + \vec{j})$$

- de N : $\vec{U}_{\rho(M)} = \cos(\theta_M) \cdot \vec{i} + \sin(\theta_M) \cdot \vec{j}$

$$= \frac{1}{2}(-\vec{i} + \sqrt{3} \cdot \vec{j})$$

$$\vec{U}_{\theta(M)} = -\sin(\theta_M) \cdot \vec{i} + \cos(\theta_M) \cdot \vec{j} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} \cdot \vec{i} - \vec{j})$$



Exercice 7

1. Système cartésien \rightarrow Système cylindrique :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ si } : x > 0 \\ z = z \end{cases} \text{ ; ou } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \text{ si } : x < 0 \\ z = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Le point } P_1(1, 2, 2) : \begin{cases} \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \approx 2,24 \\ \theta_1 = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \approx 63,43^\circ \\ z_1 = z_1 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Le point } P_2(-1, -2, 2) : \begin{cases} \rho_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \approx 2,24 \\ \theta_2 = \arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right) + 180^\circ \approx 243,34^\circ \\ z_2 = z_2 = 2 \end{cases}$$

Système cartésien \rightarrow Système sphérique :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ si } : x > 0 \end{cases} \text{ ; ou } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \text{ si } : x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Le point } P_1(1, 2, 2) : \begin{cases} r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = 3 \\ \theta_1 = \arccos\left(\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}\right) \approx 48,19 \\ \varphi_1 = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \approx 63,43 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Le point } P_2(-1, -2, 2) : \begin{cases} r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = 3 \\ \theta_2 = \arccos\left(\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\right) \approx 48,19 \\ \varphi_2 = \arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right) + 180^\circ \approx 243,34^\circ \end{cases}$$

2. Système cylindrique \rightarrow Système cartésien:
$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\theta) \\ y = \rho \cdot \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} ;$$

$$\Rightarrow \text{Le point } M(3, 30^\circ, 2) : \begin{cases} x_M = \rho_M \cdot \cos(\theta_M) \approx 2,6 \\ y_M = \rho_M \cdot \sin(\theta_M) = 1,5 \\ z_M = z_M = 2 \end{cases}$$

3. Système sphérique \rightarrow Système cartésien:
$$\begin{cases} x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ z = r \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Le point } A(2, 45^\circ, 60^\circ) : \Rightarrow \begin{cases} x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) = 2 \times \sin(45^\circ) \times \cos(60^\circ) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) = 2 \times \sin(45^\circ) \times \sin(60^\circ) \\ z = r \cdot \cos(\theta) = 2 \times \cos(45^\circ) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \approx 0,71 \\ y \approx 1,22 \\ z \approx 1,41 \end{cases}$$

Exercices supplémentaires**Exercice 1 :**

Dans un repère O.N.D.R $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit les vecteurs $\vec{U} = 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{V} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

1. Représenter les vecteurs \vec{U} et \vec{V} .
2. Calculer les modules $\|\vec{U}\|$ et $\|\vec{V}\|$.
3. Calculer le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{V}$.
4. Calculer les composantes du produit vectoriel $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$; puis son module $\|\vec{W}\|$.
5. Déterminer le vecteur unitaire de \vec{W} .

Exercice 2 :

Dans un repère O.N.D.R $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} définis à tout instant t par :

$$\vec{u} = \sin(t)\vec{i} + \cos(2t)\vec{j} + t^2\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = e^{-t}\vec{i} - 2\cos(3t)\vec{j} + \sin(3t)\vec{k}$$

1. Déterminer les dérivées : $\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R$ et $\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_R$ à l'instant $t=0$.
2. Déterminer l'instant τ où le vecteur : $\vec{w} = e^{3t}\vec{i} + \cos(3t)\vec{j} - 2\sin(3t)\vec{k}$ est perpendiculaire à \vec{v} .

Réponses aux questions des exercices supplémentaires**Exercice 1**

2. $\|\vec{U}\| = \sqrt{10}$ et $\|\vec{V}\| = \sqrt{5}$; 3. $\vec{U} \cdot \vec{V} = 5$; 4. $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = 5\vec{i}$ et $\|\vec{W}\| = 5$; 5. Vecteur unitaire de \vec{W} : $\vec{w} = \vec{i}$

Exercice 2

$$1. \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R = \cos(t)\vec{i} - 2\sin(2t)\vec{j} + 2t\vec{k} \Rightarrow \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{R \text{ (à } t=0)} = \vec{i}$$

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_R = -e^{-t}\vec{i} + 6\sin(3t)\vec{j} + 3\cos(3t)\vec{k} \Rightarrow \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{R \text{ (à } t=0)} = -\vec{i} + 3\vec{k}$$

2. \vec{w} est perpendiculaire à \vec{v} à l'instant τ : $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \tau = \frac{\ln(2)}{2}$

Chapitre 02

Calcul tensoriel

2.1. Introduction

Une matrice est un tableau rectangulaire formé de nombres réels. Grâce aux matrices, on peut par exemple codifier dans un même objet toute l'information d'un système d'équations.

2. Définition :

- Une matrice $A = (a_{ij})$ de type $m \times n$ est un tableau rectangulaire comprenant m lignes et n colonnes formées de nombres réels.
- L'élément situé au croisement de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté a_{ij}

Une matrice est symbolisée par une lettre en caractères gras, par exemple \mathbf{A} . On note A_{ij} l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (la ligne est toujours nommée en premier).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Exemple avec $n = 2$, $m = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$

On note $[A_{ij}]$ la matrice d'élément général A_{ij} . On a donc : $\mathbf{A} = [A_{ij}]$

Si $m = 1$, la matrice est appelée *vecteur* (plus précisément *vecteur-colonne*) :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Si $n = m$, la matrice est appelée *matrice carrée*.

Quelques matrices carrées particulières (Exemples avec $n = 3$)

Matrice unité

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale notée diag (D_{ii})

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

$$D = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$$

Une matrice carrée A est dite *symétrique* si :

$$A_{ji} = A_{ij}$$

Pour tout i différent de j

2.2. Opérations sur les matrices

2.2.1. Addition, soustraction

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de même type, leur somme $A + B$ est la matrice de même type obtenue en additionnant les tableaux élément par élément :

$$A + B = (C_{ij}), \text{ avec } C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 10 & 10 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -2 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

2.3. Multiplication par un scalaire

Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre :

$$3 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix}$$

2.3. Transposition

La transposée A^T d'une matrice A est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow x^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \dots x_n]$$

2.5. Multiplication des matrices

Définissons tout d'abord le produit d'un vecteur-ligne x^T par un vecteur-colonne y :

$$x^T y = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \dots x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 \dots \dots \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Ce produit est appelé *produit scalaire* des vecteurs x et y , noté $x \cdot y$. Les vecteurs doivent avoir la même dimension.

Le produit matriciel est défini comme suit :

le produit de la matrice A ($n \times m$) par la matrice B ($m \times p$) est la matrice C ($n \times p$) telle que l'élément C_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice A par la colonne j de la matrice B .

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj} \quad \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \begin{matrix} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, p \end{matrix}$$

Exemple :

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}$$

2.6. Propriétés :

- ✓ Le produit matriciel est :

- ✓ associatif: $\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- ✓ distributif par rapport à l'addition : $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- ✓ non commutatif: \mathbf{AB} n'est pas égal à \mathbf{BA} en général.
- ✓ La matrice unité \mathbf{I} est *élément neutre* pour la multiplication : $\mathbf{AI}_m = I_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$, si la matrice \mathbf{A} est de dimensions $n \times m$.
- ✓ Transposée d'un produit : $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

2.6.1 Quelques produits particuliers :

(\mathbf{x} et \mathbf{y} sont des vecteurs-colonnes, \mathbf{A} est une matrice)

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Carré scalaire.

Sa racine carrée $(\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2}$ est appelée *norme* du vecteur (notée $\|\mathbf{x}\|$)

$$\mathbf{xy}^T = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = [x_i y_j]$$

Produit extérieur des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y}

(Matrice d'élément général $x_i y_j$)

Ne pas confondre avec le [produit scalaire](#).

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i x_j$$

Forme quadratique (si \mathbf{A} est symétrique)

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i x_j$$

Forme bilinéaire (dite symétrique si \mathbf{A} est symétrique)

4.3 Base canonique de l'espace des matrices

Soit M une matrice de dimension mn , muni d'une base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice E_{ij} est celle dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j) , qui vaut 1.

Pour toute matrice M , les coordonnées dans la base canonique sont les coefficients

$$M = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} E_{ij}$$

- Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7. Déterminant d'une matrice carrée

Pour une matrice 2×2 , on montre que la matrice inverse est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Le nombre $ad - bc$ est appelé *déterminant* de la matrice A , notée :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = |A| \det(A)$$

La matrice inverse A^{-1} n'existe donc que si $\det A$ est différent de zéro.

La matrice A est singulière si $\det A = 0$, régulière dans le cas contraire. Ce résultat se généralise à une matrice de dimension quelconque.

2.9. Propriétés des déterminants :

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier, $\det(I) = 1$ (si I est la matrice unité)
- Si A est régulière, $\det(A^{-1}) = 1 / \det(A)$
Si A est orthogonale, $\det(A) = \pm 1$

2.10. Inversion des matrices carrées

Une matrice carrée A est dite *inversible* ou *régulière* s'il existe une matrice carrée A^{-1} (appelée *matrice inverse*) telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

Si A^{-1} n'existe pas, la matrice A est dite *singulière*

Propriétés :

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (Attention au changement d'ordre !)
- $[\text{diag}(D_{ii})]^{-1} = \text{diag}(1/D_{ii})$
- La matrice A est dite *orthogonale* si $A^{-1} = A^T$

2.11. Les tenseurs:

Un tenseur est un concept mathématique qui généralise les notions de scalaires, de vecteurs et de matrices pour représenter des quantités qui peuvent avoir différentes composantes dans plusieurs dimensions. Les tenseurs sont largement utilisés en mathématiques, en physique et en ingénierie pour modéliser et représenter des phénomènes complexes et des propriétés physiques qui varient dans l'espace et le temps.

Formellement, un tenseur est un objet mathématique qui possède des propriétés spécifiques sous des transformations de coordonnées. Cela signifie que les composantes d'un tenseur changent d'une manière prédéfinie lorsque les coordonnées du système changent. Les tenseurs peuvent avoir différentes dimensions, et la manière dont leurs composantes se transforment dépend de leur rang (ordre) et de leurs propriétés de symétrie.

Voici une brève explication des différents ordres de tenseurs :

1. **Tenseur d'ordre 0 (scalaire)** : Un scalaire est un tenseur d'ordre 0. Il n'a pas de direction ou de composantes vectorielles. Les nombres réels sont des exemples de scalaires.
2. **Tenseur d'ordre 1 (vecteur)** : Un vecteur est un tenseur d'ordre 1. Il a une direction et une magnitude. Les vecteurs ont des composantes qui dépendent du système de coordonnées utilisé.
3. **Tenseur d'ordre 2 (matrice)** : Une matrice est un tenseur d'ordre 2. Elle peut être considérée comme un tableau bidimensionnel de nombres réels organisés en lignes et colonnes. Les matrices sont utilisées pour représenter diverses transformations et relations linéaires.
4. **Tenseur d'ordre supérieur** : Les tenseurs d'ordre supérieur (plus grand que 2) généralisent les notions de vecteurs et de matrices dans des espaces multidimensionnels. Par exemple, les tenseurs d'ordre 3 sont des structures tridimensionnelles, et ainsi de suite.

En résumé, un tenseur est un objet mathématique qui généralise les scalaires, les vecteurs et les matrices pour représenter des quantités multicomposantes dans des espaces multidimensionnels. Les tenseurs sont essentiels pour modéliser et décrire une grande variété de phénomènes physiques et mathématiques.

2.12. Valeur principales et axes principaux d'un tenseur

Les valeurs propres et les vecteurs propres, également appelés axes principaux, d'un tenseur sont des concepts importants en mathématiques et en physique. Ils fournissent des informations cruciales sur la manière dont un tenseur agit sur un espace vectoriel donné. Dans le contexte des tenseurs symétriques, comme les tenseurs de déformation ou les tenseurs de contrainte dans la mécanique des milieux continus, les valeurs propres et les vecteurs propres sont particulièrement significatifs.

2.12.1. Valeurs Propres :

Les valeurs propres d'un tenseur sont les scalaires qui caractérisent les étirements ou les compressions le long de ses axes principaux. Pour un tenseur T , les valeurs propres λ_i sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(T - \lambda I) = 0$$

où I est la matrice identité. Chaque valeur propre λ_i est associée à un vecteur propre correspondant v_i , qui indique la direction de l'axe principal associé à cette valeur propre. Les valeurs propres et les vecteurs propres fournissent des informations sur la magnitude et la direction des déformations ou des contraintes induites par le tenseur.

2.12.2. Axes Principaux (Vecteurs Propres) :

Les vecteurs propres d'un tenseur sont les vecteurs qui restent inchangés en direction lorsqu'ils sont transformés par le tenseur. Les vecteurs propres sont utilisés pour déterminer les directions principales le long desquelles le tenseur agit de manière plus simple. Si λ_i est une valeur propre du tenseur T , alors le vecteur propre v_i associé à cette valeur propre est un vecteur non nul tel que :

$$T v_i = \lambda_i v_i$$

2.13. La matrice d'un tenseur par rapport aux directions principales

Nous avons montré que pour un tenseur réel symétrique, on cherche les composantes de ce tenseur T par rapport à une base composée de ces directions principales $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$, donc on obtient:

$$T_{11} = \vec{n}_1 \cdot T(\vec{n}_1) = \vec{n}_1 \cdot \lambda_1 \vec{n}_1 = \lambda_1$$

$$T_{22} = \vec{n}_2 \cdot T(\vec{n}_2) = \vec{n}_2 \cdot \lambda_2 \vec{n}_2 = \lambda_2$$

$$T_{33} = \vec{n}_3 \cdot T(\vec{n}_3) = \vec{n}_3 \cdot \lambda_3 \vec{n}_3 = \lambda_3$$

$$T_{12} = T_{21} = \vec{n}_1 \cdot T(\vec{n}_2) = \vec{n}_1 \cdot \lambda_2 \vec{n}_2 = \lambda_2 (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = 0$$

$$T_{13} = T_{31} = \vec{n}_1 \cdot \mathbf{T}(\vec{n}_3) = \vec{n}_1 \cdot \lambda_3 \vec{n}_3 = \lambda_3 (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3) = 0$$

$$T_{23} = T_{32} = \vec{n}_2 \cdot \mathbf{T}(\vec{n}_3) = \vec{n}_2 \cdot \lambda_3 \vec{n}_3 = \lambda_3 (\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3) = 0$$

On obtient

$$[T]_{\vec{n}_i} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Donc la matrice est diagonale, et les éléments diagonaux sont les valeurs propres de \mathbf{T} .

1.15. Les invariants scalaires d'un tenseur

L'équation caractéristique d'un tenseur \mathbf{T} , $|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$ est une équation cubique en λ , elle peut être écrite comme:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (4.1) \quad \text{où}$$

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} = \text{tr}(\mathbf{T})$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji}) = \frac{1}{2} ((\text{tr} \mathbf{T})^2 - \text{tr} \mathbf{T}^2)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \det[\mathbf{T}]$$

Puisque par définition les valeurs propres ne dépendent pas du choix des vecteurs de base les coefficients I_1, I_2, I_3 ne dépendent pas du choix de base, ils sont appelés les invariants scalaires du tenseur \mathbf{T} .

En termes de valeurs propres on peut écrire les invariants scalaires comme suit:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Exercice 01:

- Déterminer la transposée des matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/3 & 1/4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

2. Vérifier que : $AB \neq BA$

3. Vérifier que : $(AB)^T \neq B^T A^T$

Exercice 02:

Considérons la matrice \mathbf{C} donnée par :

Vérifier que l'inverse de la matrice \mathbf{C} est :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Exercice 03:

Déterminer la matrice inverse

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercice 04:

Trouvez les produits: $VY, Y^T V, Y^T (VY)$, et $(Y^T V)Y$

Ainsi montrer que :

$$VY = (Y^T V)^T, \text{ et } Y^T (VY) = (Y^T V)Y$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Chapitre 03

Étude de contrainte

3.1. Rappel RDM :

3.2 Description :

L'essai de traction ou de compression d'un matériau occupe une place importante car il permet de caractériser de façon simple son comportement. En principe, il consiste à soumettre une barre faite du matériau étudié, à un effort N de traction ou de compression. Cette barre est droite et possède une section uniforme, sauf éventuellement au voisinage de ses points d'attaches dans la machine d'essai. On supposera également que les dispositions expérimentales sont telles qu'en tout instant la appliquée reste dans l'axe de la barre afin d'éviter toute flexion.

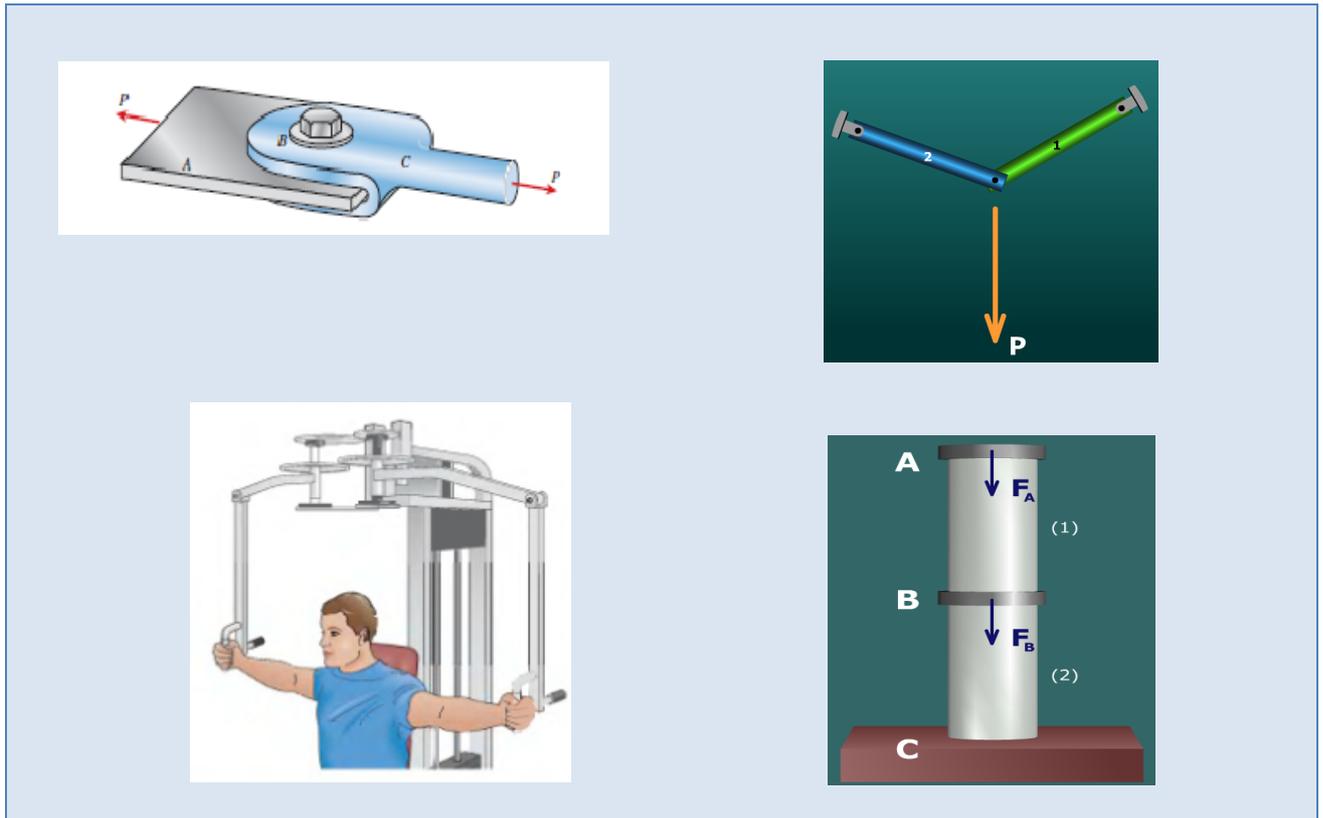


Figure.3.1 : Quelques exemples sur le phénomène de traction-compression.

3.4 Effort normal :

Pour la poutre de la figure 4, faisons une coupure fictive (section droite S située à x de A) entre les deux extrémités A et B pour faire apparaître les efforts intérieurs dans la poutre.

En effet, si on isole le tronçon AG , la résultante des actions $\Delta\vec{f}_1, \Delta\vec{f}_2, \dots, \Delta\vec{f}_n$ exercées en chaque point de la coupure par le tronçon GB se réduit au seul effort \vec{N} en G ('centre de gravité) tel que :

$$\vec{N} = \Delta\vec{f}_1 + \Delta\vec{f}_2 + \dots + \Delta\vec{f}_n = \vec{F} \dots \dots \dots (2)$$

⇒

$$N = F$$

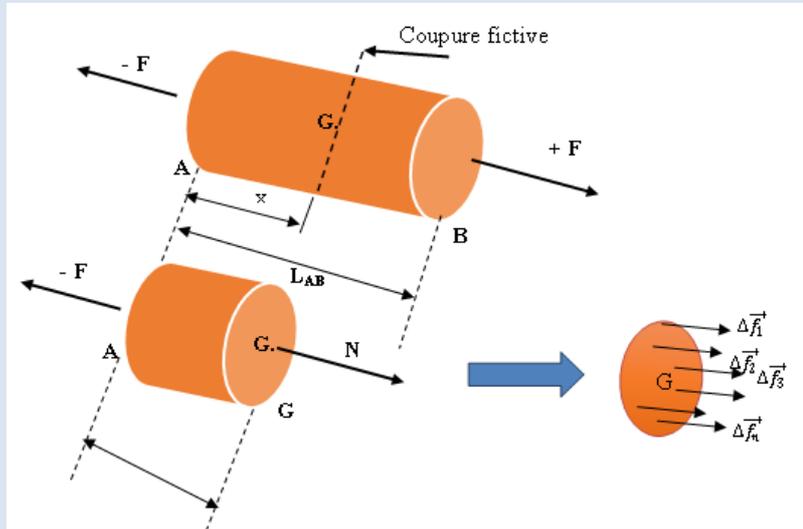


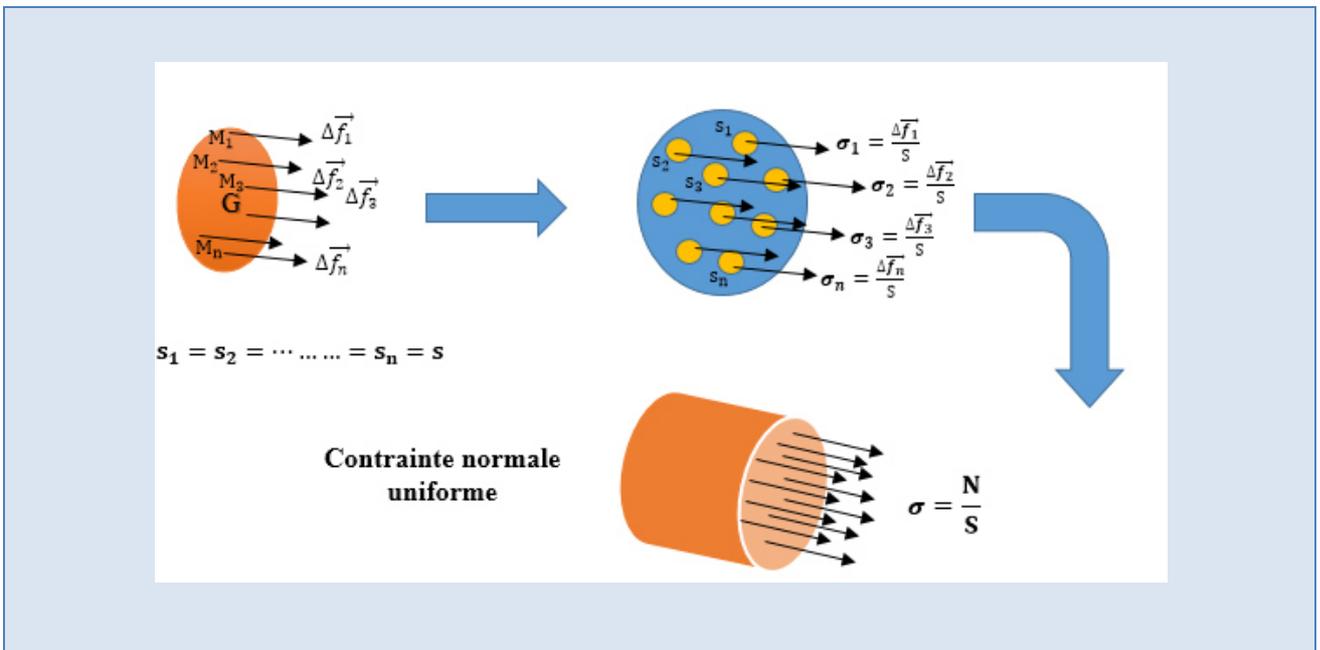
Figure.4 : Coupure fictive dans une poutre.

3.5 Contrainte normale :

Divisons la coupure S précédente en (n) petites surfaces élémentaires $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_n$ telle que : $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \dots + \Delta S_n$.

Chaque élément de surface (ΔS) supporte un effort de traction $\Delta\vec{f}_1, \Delta\vec{f}_2, \dots, \Delta\vec{f}_n$ parallèle à la ligne moyenne AB.

Si M_1, M_2, \dots, M_n sont les centres des petites surfaces ΔS , en chaque point, la contrainte σ est définie comme la limite du rapport du $\Delta\vec{f}$ sur ΔS lorsque ΔS tend vers zéro. (très petit).



Donc la contrainte normale dans le cas général :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ : Contrainte normale [MPa]

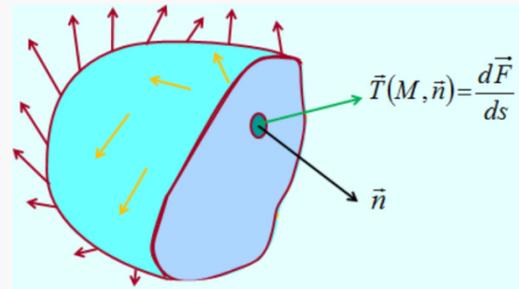
N : Effort normal [N]

s : Aire de la section droite [mm^2]

3.6. Vecteur contrainte:

3.6.1. Définitions :

On appelle « vecteur contrainte » pour une particule, relativement à la surface dS , orientée par la normale extérieure \vec{n} , le vecteur qui représente les forces internes par unité de surface agissant sur cette particule à l'interface avec la surface. En d'autres termes, le vecteur contrainte mesure l'intensité des forces de traction ou de compression que la particule exerce sur la surface dS ou subit de la part de cette surface.

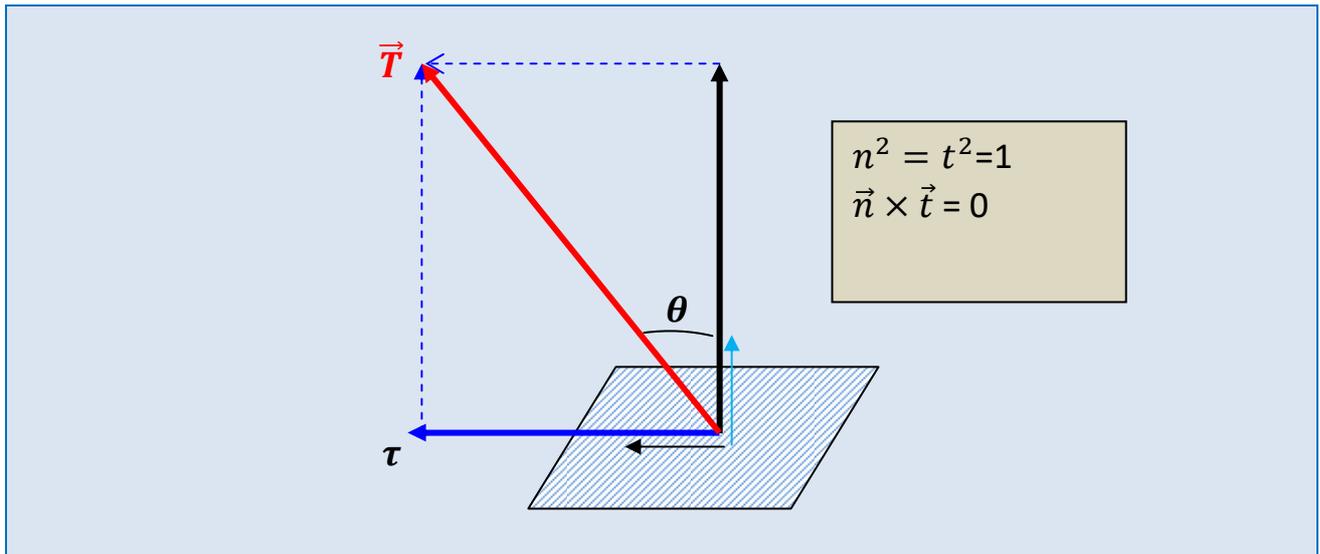


Il est défini comme la limite du rapport entre la force élémentaire ΔF exercée par la particule sur une portion de surface dS lorsque celle-ci tend vers zéro, divisée par la superficie de cette surface dS . Mathématiquement, le vecteur contrainte $\vec{\tau}$ (tau) est exprimé comme suit :

$$\vec{\tau} = \lim(\Delta F / dS)$$

où ΔF est la force élémentaire et dS est la superficie de la surface considérée.

Le vecteur contrainte est essentiel dans l'étude de la mécanique des milieux continus, car il permet de caractériser le comportement mécanique d'un matériau lorsqu'il est soumis à des forces externes. Il est utilisé pour décrire les déformations et les contraintes internes qui se développent à l'intérieur du matériau en réponse aux sollicitations externes. L'analyse des vecteurs contraintes est fondamentale pour comprendre le comportement des solides et des fluides dans diverses situations, telles que les structures mécaniques, les matériaux géologiques, ou encore le comportement des fluides dans les tuyaux et canaux.



- On appelle contrainte normale σ , la projection de \vec{T} sur \vec{n} :

$$\vec{T} \cdot \vec{n} = T \cos \theta = \sigma$$

- On appelle contrainte tangentielle ou de cisaillement τ , la projection de \vec{T} sur \vec{t} :

$$\vec{T} \cdot \vec{t} = T \sin \theta = \tau$$

donc ,on peut écrire :

$$\vec{T} = \sigma \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{t}$$

$$\vec{T} = T_x \cdot \vec{e}_x + T_y \cdot \vec{e}_y + T_z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{T} = \sigma_x \cdot \vec{e}_x + \tau_{xy} \cdot \vec{e}_y + \tau_{xz} \cdot \vec{e}_z$$

Exercice 1 :

Soit un élément de surface ds de normale \vec{n} sur la quelle agit un vecteur \vec{T} :

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ (Pa)} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

- calculer: σ et τ

Solution :

Calcul σ :

$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{n} = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.63 \text{ Pa}$$

Calcul τ :

$$\vec{T} = \sigma \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{t} \Rightarrow T^2 = \sigma^2 + \tau^2 \Rightarrow \tau = \pm \sqrt{T^2 - \sigma^2}$$

Avec :

$$T^2 = 5^2 + 2^2 + 4^2 = 45 \\ \Rightarrow \tau = \pm 6.51 \text{ Pa}$$

\pm parce que \vec{t} n'a pas une direction privilégiée comme \vec{n} .

3.7. Tenseur des contraintes :

Le tenseur des contraintes est une généralisation du concept de vecteur contrainte en trois dimensions. Plutôt que de considérer uniquement une seule direction (représentée par un vecteur), le tenseur des contraintes prend en compte les contraintes dans toutes les directions possibles sur une facette donnée. Il est représenté par une matrice, et chaque élément de cette matrice correspond à une contrainte dans une direction spécifique.

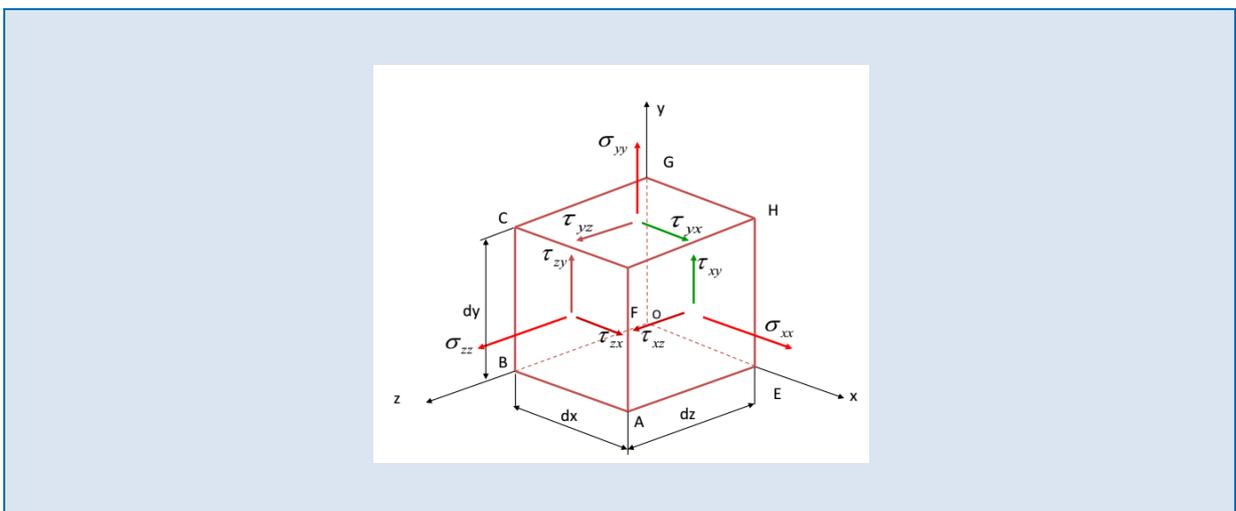
Dans le cas général, une particule peut posséder plusieurs facettes, et chaque facette aura son propre vecteur contrainte (ou élément du tenseur des contraintes) associé. Ainsi, pour une particule donnée, il y aura plusieurs vecteurs contraintes correspondant aux différentes facettes qui l'entourent.

Pour représenter le tenseur des contraintes sur une facette donnée, il faudrait dessiner une matrice, car il contient plusieurs composantes correspondant à différentes directions. La dimension de cette matrice dépend du nombre de dimensions de l'espace dans lequel nous travaillons. Par exemple, en trois dimensions, le tenseur des contraintes est une matrice 3×3 .

Suivons l'ordre proposé pour dessiner convenablement le tenseur des contraintes :

1. Considérons une particule ayant un volume parallélépipédique très petit $dx, dy, dz \rightarrow 0$.

Pour dessiner le tenseur des contraintes, nous devrions d'abord sélectionner une facette spécifique de cette particule. Ensuite, nous représenterions le vecteur contrainte (ou élément du tenseur des contraintes) associé à cette facette, en indiquant les différentes composantes dans les directions de l'espace (par exemple, $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$, etc. en trois dimensions).



- considérons un repère orthonormé $(Oxyz)$ de tel sorte que les normales aux facettes de la particule concèdent avec les axes du repéré $\vec{n}_1 = \vec{e}_x, \vec{n}_2 = \vec{e}_y, \vec{n}_3 = \vec{e}_z$

On a :

$$\vec{n}_1 = \vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{n}_2 = \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{n}_3 = \vec{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Notons $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$ les vecteurs contrantes relatives aux facettes orientées respectivement suivant : $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$

On suppose :

$$\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad \vec{T}_3 = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

3.7.1. Théorème de CAVCHY :(sans démonstration)

En toute particule, il existe une matrice carrée 3x3 notée $[\sigma]$, tel qu'on ait :

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}) = [\sigma(\vec{x})] \cdot \vec{n}$$

Ou

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$[\sigma]$: Tenseur de contraintes

Exemple :

Si on connaît alors pour chaque $S(\vec{n}) \rightarrow \vec{T}$

- pour dS_1 : $\vec{n}_1 = \vec{e}_x$

$$\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

- pour dS_3 : $\vec{n}_3 = \vec{e}_z$

$$\vec{T}_3 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

Notions :

- σ_i : contrainte normale suivant la direction $i = x, y, z$
- τ_{xy} : c .tangentielle $\left\{ \begin{array}{l} \text{La face de direction } \vec{n}_i \\ \text{dans le sens } j \end{array} \right. \quad i, j = x, y, z$

Convention de signes :

- $\sigma_i \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{si } \sigma_i : \text{ traction} \\ \text{si } \sigma_i : \text{ compression} \end{array}$

- $\tau_{ij} > \begin{cases} \vec{n}_i = \vec{e}_i \text{ et } \tau_{ij} \text{ orientée dans le sens } \vec{n}_j \\ \vec{n}_i = -\vec{e}_i \text{ et } \tau_{ij} \text{ orientée dans le sens } -\vec{n}_j \end{cases}$

Etudions l'équilibre du tétraèdre :

Vecteur contrainte sur une facette quelconque

Considérons une particule tétraédrique .Appliquons la loi fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{F}^{ext} = m \cdot \gamma$$

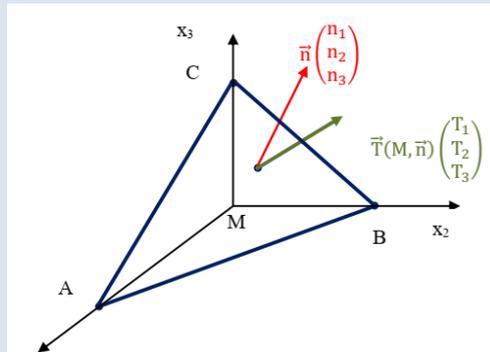


Fig. Composantes du tenseur de contraintes sur une particule de forme quelconque

Facettes	Forces surfaciques				Forces volumiques
	ABC	MCA	MAB	MCB	
Aires	ds	n ₂ .ds	n ₃ .ds	n ₁ .ds	
M \vec{x}_1	T ₁	-σ ₂₁	-σ ₃₁	-σ ₁₁	ρ.γ ₁ .dv
M \vec{x}_2	T ₂	-σ ₂₂	-σ ₃₂	-σ ₁₂	ρ.γ ₂ .dv
M \vec{x}_3	T ₃	-σ ₂₃	-σ ₃₃	-σ ₁₃	ρ.γ ₃ .dv

Soit $d\vec{F}_1$ la résultante suivant l'axe xp1 de toutes les actions s'exerçant sur la particule, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_1 &= \vec{T}_1 ds - (\sigma_{11}n_1 ds + \sigma_{21}n_2 ds + \sigma_{31}n_3 ds) \\ &= \vec{T}_1 ds - (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3) ds \end{aligned}$$

d'autre part: $dF \rightarrow 1 = \rho dV \gamma_1$

Alors:

$$T_1 - (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3) = \frac{\rho dV \gamma_1}{ds}$$

Si la particule est de dimensions très petites le rapport $\frac{dV}{ds}$ tends vers zéro on peut écrire:

$$T_1 = (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3)$$

$$T_2 = (\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3)$$

$$T_3 = (\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3)$$

On peut conclure que le vecteur de contrainte \vec{T} (T1, T2, T2) dépend de la normale unitaire à la

surface sollicitée \vec{n} (n_1, n_2, n_3).

Donc : $\vec{T} = \sigma \times \vec{n}$

σ : Application linéaire qui lie \vec{T} à \vec{n}

En notation indicielle:

$$T_j = \sigma_{ij} \times n_i$$

En écriture matricielle:

$$(\vec{T}) = [\sigma] \times (\vec{n})$$

Exercice 3 :

On suppose que le tenseur de contrainte dans un MC est :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 5x & y-2 & xy \\ y-2 & x^2-y & 0 \\ xy & 0 & x^2-2z \end{bmatrix} \text{ Pa}$$

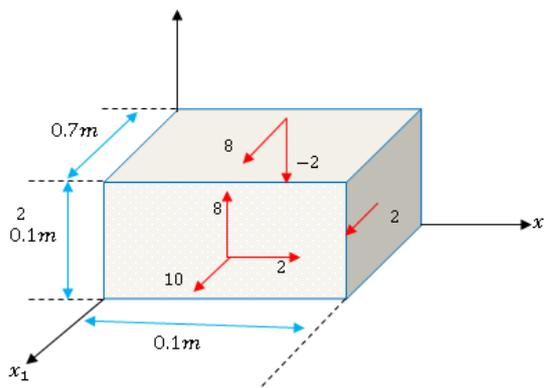
1. calculer \vec{T} sur la face ds de normale $\vec{n}(0.6, 0, -0.8)$ attachée à la particule $M(2, 4, 3)$.
2. Représenter les composantes des contraintes de la particule M supposée cubique d'arrêt 0.1m.

Solution :

1- calcul \vec{T}_M :

$$\vec{T}_M = [\sigma_M] \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ -0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 1.2 \\ 6.4 \end{bmatrix}$$

Représentation des contraintes :

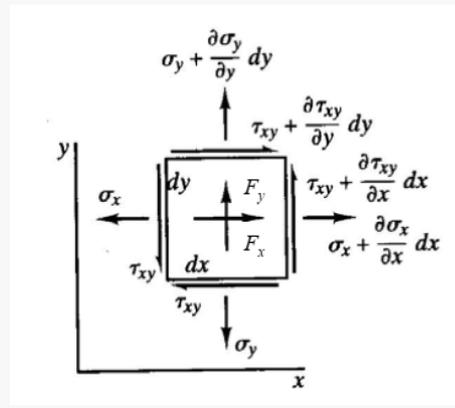


- pour particule adjacente (1.9, 4, 3)

$$\vec{T} = [\sigma] \cdot \vec{n} = [\sigma] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x \\ y-2 \\ xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.5 \\ 2 \\ 7.6 \end{bmatrix}$$

3.9. Equations d'équilibres :

Un corps est dit en équilibre lorsque l'ensemble des forces appliquées à la surface équilibre l'ensemble des forces massiques appliquées à ses éléments de volume.



$$\sum F_x = 0$$

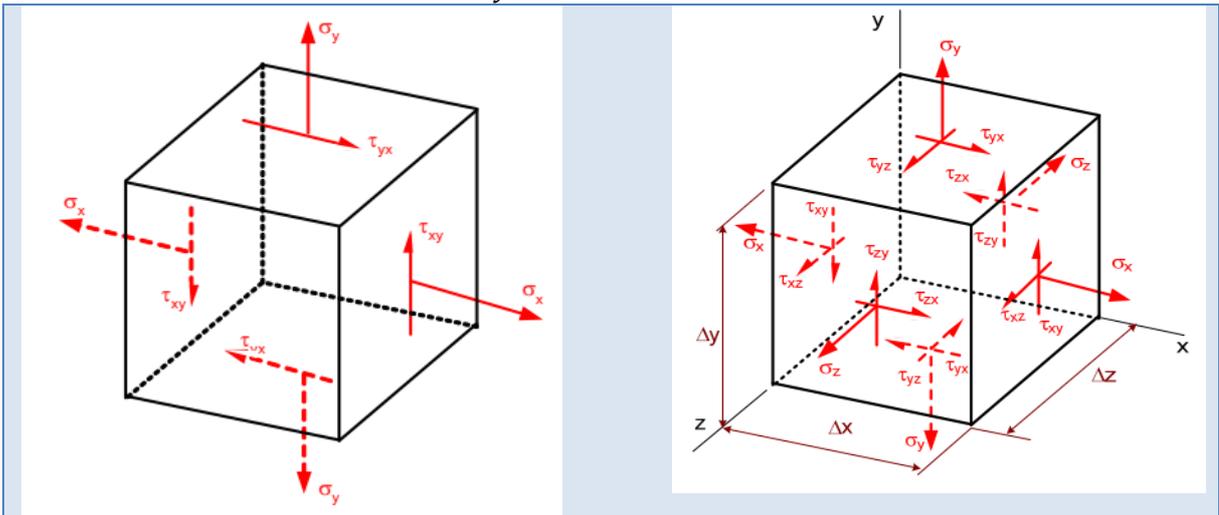
$$\sum F_y = 0$$

$$-\sigma_x dy - \tau_{xy} dx + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx + F_x dx dy = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$-\sigma_y dx - \tau_{xy} dy + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx + F_y dx dy = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$$



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Les équations : (3), (4) et (5) sont les équations d'équilibres.

Exercice 4 :

Soit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x^2 + 2xy - 12,8x & x - x^2 & xz \\ x - y^2 & -8,4y + 6 & -z + y \\ xz & -z + y & -\frac{z^2}{2} - 12,8z \end{bmatrix} \text{ Pa}$$

$$\rho = 2,04 \text{ kg/m}^3$$

- Déterminer les composantes de \vec{g} .

Solution :

$$\text{On a : } \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -x + 2y - 13,8 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = x$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -8,4 \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -1$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = z \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -z - 12,8$$

Si les éqs d'équilibre sont vérifier alors :

$$-x + 2y - 13,8 - 2y + 2,1g_x = 0 \Rightarrow g_x = 6,77 \text{ m/s}^2$$

$$1 - 8,4 - 1 + 2,1g_y = 0 \Rightarrow g_y = 4,12 \text{ m/s}^2$$

$$z + 1 - z - 12,8 + 2,1g_z = 0 \Rightarrow g_z = 5,78 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Vérif. : } g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 = 96,22 \Rightarrow \sqrt{96,22} = 9,81$$

3.10. Tenseurs sphérique et déviatorique :

En M.D.S, il est préférable de décomposer $[\sigma]$ en :

$$[\sigma] = [\sigma^s] + [\sigma^d]$$

Avec :

$[\sigma^s]$: Tenseur sphérique (responsable de la consolidation)

$[\sigma^d]$: tenseur déviatorique (responsable de la Cisaillement)

$$[\sigma^s] = \sigma_m [I] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad \text{et } 3\sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$[\sigma^d] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

3.11. Contraintes principales, Axes principaux :



Il est possible d'écrire $[\sigma]$ dans un repère dit : repère principale tel que :

- sur la face (1) : $\vec{T}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{n}_1 = [\sigma] \cdot \vec{n}_1$
- sur la face (2) : $\vec{T}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{n}_2 = [\sigma] \cdot \vec{n}_2$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$
- sur la face (3) : $\vec{T}_3 = \lambda_3 \cdot \vec{n}_3 = [\sigma] \cdot \vec{n}_3$

$(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ directions des axes principaux ou direction principale

Pour chaque i ($=1,2,3$)

$$[\sigma] \cdot \vec{n}_i = \lambda_i \cdot \vec{n}_i = \lambda_i \cdot [I] \cdot \vec{n}_i \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ([\sigma] \cdot \vec{n}_i - \lambda_i \cdot [I] \cdot \vec{n}_i) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow ([\sigma] - \lambda_i \cdot [I]) \cdot \vec{n}_i = \vec{0}$$

toujours on cherche on cherche \vec{n}_i, λ_i ; c'est un problème aux valeurs propres (3 éqs .et 4 inconnues)

$$\det([\sigma] - \lambda_i \cdot [I]) = |[\sigma] - \lambda_i \cdot [I]| = 0$$

la solution donne :

Vecteurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Contraintes principales $= (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$
---	---

$(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$: vecteurs propres $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \perp \vec{n}_3$

Dans le repère principale $[\sigma]$ de vient :

$$[\sigma_p] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 :

Déterminer les contraintes principale et directions principale de :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad (\text{Pa})$$

Solutions :

1-Contraintes principales :

$$\det([\sigma] - \lambda[I]) = 0$$

$$\Rightarrow \det \left(\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0,5 - \lambda & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (0,5 - \lambda)^3 - 0,5^2 \cdot (0,5 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (0,5 - \lambda)[(0,5 - \lambda)^2 - 0,5^2] = 0 \Rightarrow (0,5 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) \cdot (-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0,5 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 1(Pa)\sigma_2 = 0,5(Pa)\sigma_3 = 0(Pa)$$

2- directions principales :

- direction \vec{n}_1

$$([\sigma] - \sigma_1[I]) \cdot \vec{n}_1 = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0,5 \cdot n_x + 0,5 \cdot n_y \\ 0,5 \cdot n_x - 0,5 \cdot n_y \\ 0,5 \cdot n_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_x = n_y \\ n_z = 0 \end{cases}$$

On $\vec{n}_1^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow 2n_x^2 = 1$

$$\Rightarrow n_x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = n_y$$

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- direction \vec{n}_2 :

$$([\sigma] - \sigma_2[I]) \cdot \vec{n}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} n_y = 0 \\ n_x = 0 \end{cases}$$

Et $\vec{n}_2^2 = 1 \Rightarrow n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z = \pm 1$

Donc :

$$\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- direction \vec{n}_3 :

$$([\sigma] - \sigma_3[I]) \cdot \vec{n}_3 = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,5n_x + 0,5n_y = 0 \\ 0,5 \cdot n_z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow n_x = -n_y \quad \text{et} \quad n_z = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n}_3^2 = 1 \Rightarrow n_x^2 = 1$

$$\Rightarrow n_x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } n_y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{n}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

On peut aisément vérifier $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \perp \vec{n}_3$ et $[\sigma] \cdot \vec{n}_i = \sigma_i \cdot \vec{n}_i$

3.12. Propriétés :

- Invariant linéaire :

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

- Invariant quadratique :

$$\begin{aligned} I_2 &= \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \\ &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 \end{aligned}$$

- Invariant cubique :

$$I_3 = \det [\sigma] = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

On peut écrire :

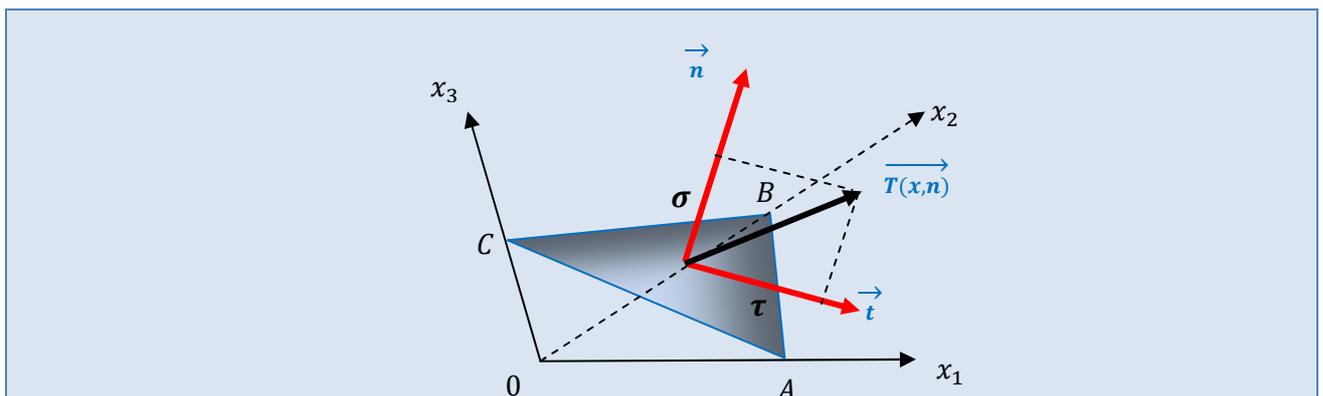
$$\det ([\sigma] - \lambda[I]) = \lambda^3 - I_1 \cdot \lambda^2 + I_2 \cdot \lambda - I_3 = 0$$

3.13. Cercle de Mohr :

Le cercle de Mohr est une représentation graphique utilisée en mécanique des matériaux pour visualiser les états de contrainte à différents angles dans un matériau ou une structure. Il est particulièrement utile pour comprendre les contraintes normales et de cisaillement dans un matériau soumis à des charges externes.

Les cercles de Mohr représentent le tenseur des contraintes dans un point en trois cercles. Plaçons-nous dans les axes propres et prenons une facette quelconque de normale \vec{n} dont les composantes sont n_{x1} , n_{x2} , n_{x3} dans la base propre $\{\vec{e}'_i\}$. Le vecteur contrainte agissant sur cette facette est :

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{x2} \\ n_{x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_{x1} \\ \sigma_2 n_{x2} \\ \sigma_3 n_{x3} \end{bmatrix}$$



Mohr représente les contraintes dans le repère (\vec{n}, \vec{t}) ou (σ, τ) .

Dans le repère principale (1,2,3) :

$$\vec{T} = [\sigma^P].\vec{n}^P = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cdot n_1 \\ \sigma_2 \cdot n_2 \\ \sigma_3 \cdot n_3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cdot n_1^2 + \sigma_2 \cdot n_2^2 + \sigma_3 \cdot n_3^2 \dots \dots \dots (1)$$

$$T^2 = \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 \cdot n_1^2 + \sigma_2^2 \cdot n_2^2 + \sigma_3^2 \cdot n_3^2 \dots \dots \dots (2)$$

$$\vec{n}^P = 1 \Rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \dots \dots \dots (3)$$

On suppose que $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2) \cdot (\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_3) \cdot (\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3) \cdot (\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1) \cdot (\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1) \cdot (\sigma_3 - \sigma_2)}$$

D'autre part , on sait que : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et $n_i^2 \geq 0$ $i=1,2,3$

- Etudions le signe des n_1^2, n_2^2 et n_3^2 !

$$(4) \Rightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_2) \cdot (\sigma - \sigma_3) \geq 0$$

$$\Rightarrow \tau^2 + \sigma^2 - (\sigma_2 + \sigma_3) \cdot \sigma + \sigma_2 \sigma_3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \sigma_2 \sigma_3 - \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + (\tau - 0)^2 \geq \frac{\sigma_2^2}{4} + \frac{\sigma_3^2}{4} + \frac{\sigma_2 \sigma_3}{2} - \sigma_2 \sigma_3$$

$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

➤ pour que $n_1^2 \geq 0$ il faut que couple (σ, τ) soit à l'extérieur du cercle de centre $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$ et

de rayon $= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

De même , on obtient :

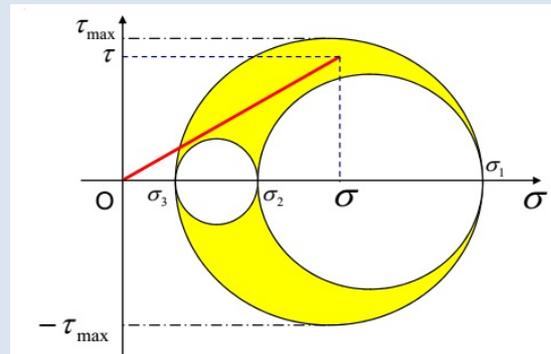
$$(5) \Rightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_3) \cdot (\sigma - \sigma_1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

$$(6) \Rightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_1) \cdot (\sigma - \sigma_2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

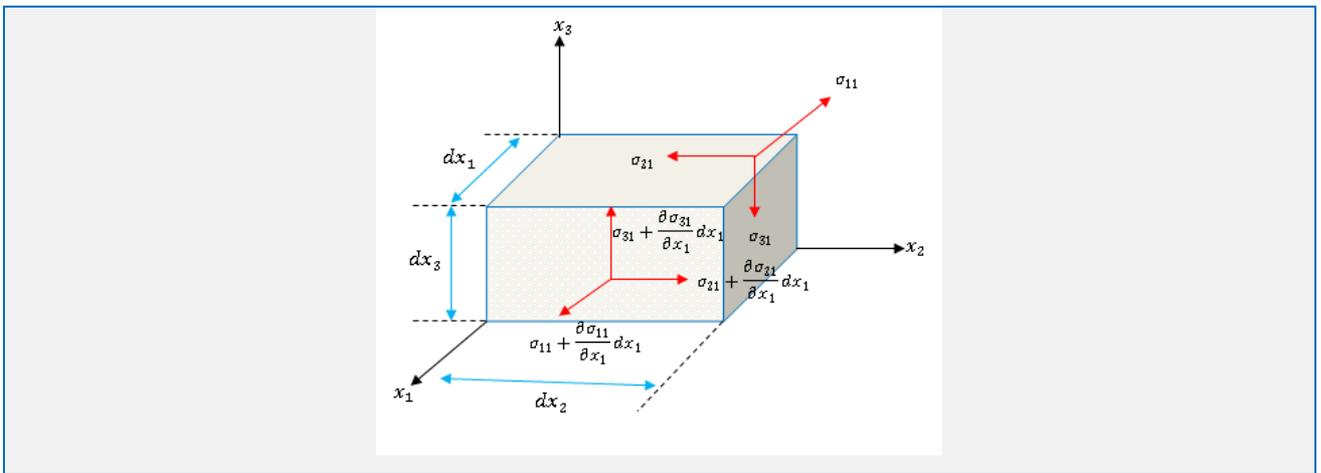


Étapes pour tracer un cercle de Mohr :

1. Déterminez les contraintes principales :
 - *Identifiez les contraintes normales et tangentes dans le cas d'un problème en deux dimensions.*
2. Calculez les contraintes principales :
 - *Pour un problème en $2D$, les contraintes principales σ_1 et σ_2 sont les valeurs propres de la matrice des contraintes.*
3. Calculez la contrainte de cisaillement maximale :
 - *La contrainte de cisaillement maximale τ_{\max} est associée à la différence entre les contraintes principales.*
4. Tracez le cercle :
 - *Placez les contraintes σ_1 et σ_2 sur un graphique avec σ sur l'axe horizontal et τ sur l'axe vertical.*

3.14. Loi fondamentale de la dynamique :

Les composantes du tenseur des contraintes dans un corps en équilibre sous l'action de forces de surface et de forces de volume doivent vérifier les équations d'équilibre indéfini et les équations d'équilibre à la surface. Considérons un parallélépipède élémentaire situé à l'intérieur d'un corps soumis à des contraintes.



Ecrivons que le parallélépipède est en équilibre : on écrit d'abord que la somme des moments des forces par rapport à chacun des axes est nul (mouvement de rotation) et on retrouve le fait qu'en l'absence de champ de moments σ_{ij} est un tenseur symétrique.

On écrit ensuite que la résultante des forces appliquées au parallélépipède est nulle. Considérons la projection de cette résultante sur l'axe Ox_1 . Les forces suivant Ox_1 , qui s'exercent sur les 2 faces perpendiculaires à Ox_1 sont :

$$-\sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3$$

Sur les deux faces perpendiculaires à Ox_2 :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3$$

Sur les deux faces perpendiculaires à Ox_3 :

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3$$

S'il existe un champ de force \vec{F}_V , l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + F_{V1} = \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

ρ = masse volumique

Suivant les deux autres axes, on obtient des équations identiques. Ainsi, l'équation du mouvement de translation prend la forme :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_{Vi} = \frac{d^2 x_i}{dt^2}$$

Si \vec{F}_V est la pesanteur : $F_{Vi} = \rho g_i$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2}$$

C'est l'équation fondamentale qui relie les variations spatiales des contraintes dans un corps

aux accélérations des éléments de volume. Elle constitue, comme nous le verrons ultérieurement, le point de départ de l'étude des oscillations élastiques dans les solides. Dans le cas où le corps est en équilibre statique les équations prennent la forme :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_{vi} = 0 \text{ ou } \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0$$

L'équation fondamentale peut être écrite sous forme vectorielle:

$$\text{div}(\sigma) + \vec{F}_V = \rho \vec{a}$$

3.15. Etats particuliers de contraintes

3.15.1. Traction ou Compression simple

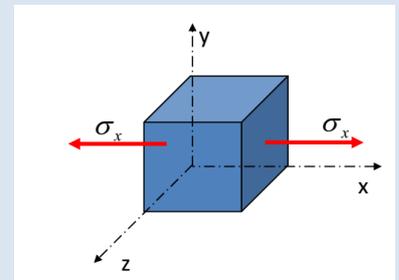
dans la direction x :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans la direction $i \rightarrow \Delta i$ $\sigma_{ij} \neq 0$ et $\sigma_{ij} = 0$

Si $\sigma_x > 0 \rightarrow$ traction

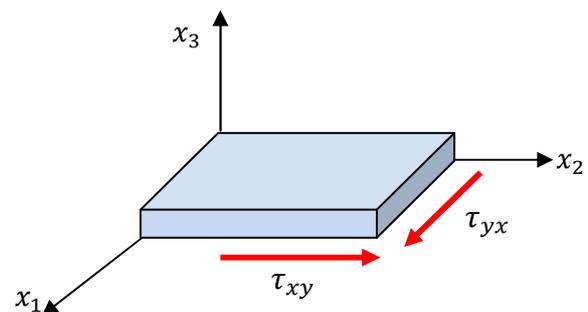
$\sigma_x < 0 \rightarrow$ compression



3.15.2. Cisaillement pour (simple)

dans le plan (Oxy) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



3.15.3. Contraintes triaxial de révolution

Si deux contraintes principales sont égales et

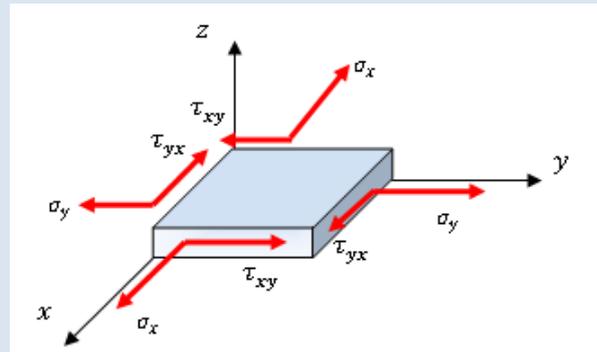
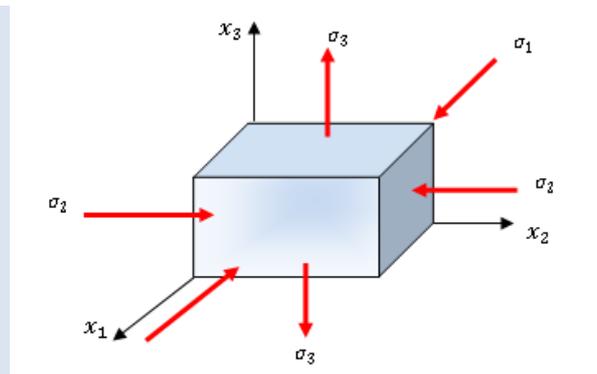
non-nulles.

Par exemple : $\sigma_1 > (\sigma_2 = \sigma_3 \neq 0)$

3.15.4. Contraintes plans

dans le plan (Oxy) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x(x, y) & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy}(x, y) & \sigma_y(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

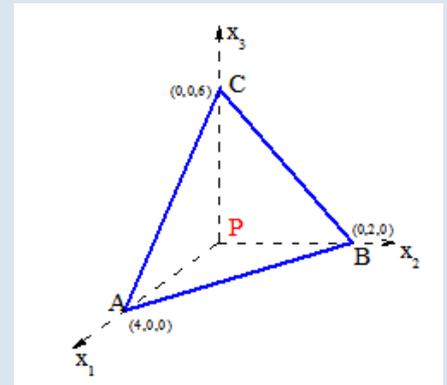


Exercice : 01

Le tenseur de contrainte au point P est donné par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Déterminer le vecteur contrainte dans le plan qui passe par le point p et parallèle au plan ABC



Solution :

L'équation du plan ABC est : $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$

Le vecteur normal au plan ABC est : $n = \frac{3}{7}\vec{e}_1 + \frac{6}{7}\vec{e}_2 + \frac{2}{7}\vec{e}_3$

Donc le vecteur contrainte \vec{T} est :

$$\vec{T} = \sigma_{in}n_i$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$\vec{T} = \frac{-9}{7}\vec{e}_1 + \frac{5}{7}\vec{e}_2 + \frac{10}{7}\vec{e}_3$$

Exercice : 02

Un élément en état de contrainte plane est soumis à $\sigma_x = -3.5 \text{ MPa}$,

$$\sigma_y = 10.5 \text{ MPa}, \tau_{xy} = 7 \text{ MPa}.$$

Solution:

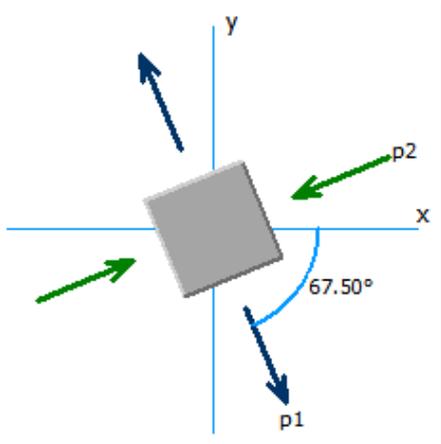
- Calcul les contraintes principales:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 13.4 \text{ MPa}$$

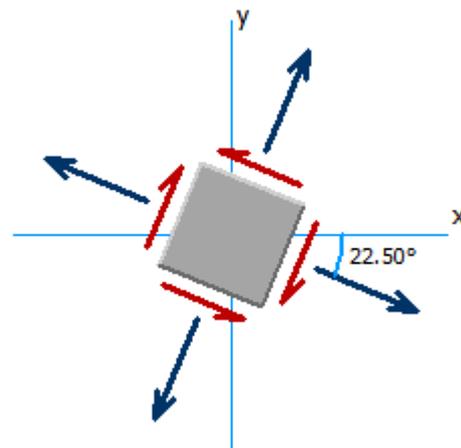
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -6.4 \text{ MPa}$$

- Les directions principales:

- Direction des contraintes principales:



- Direction des contraintes tangentielles max :

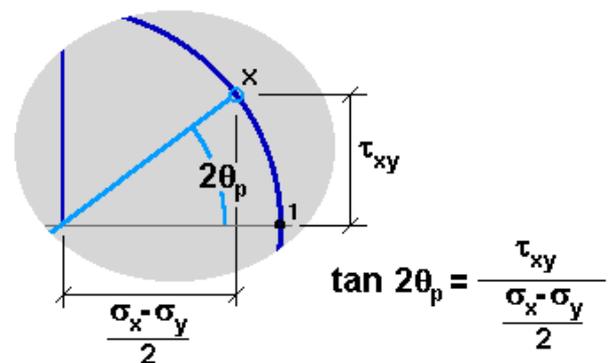


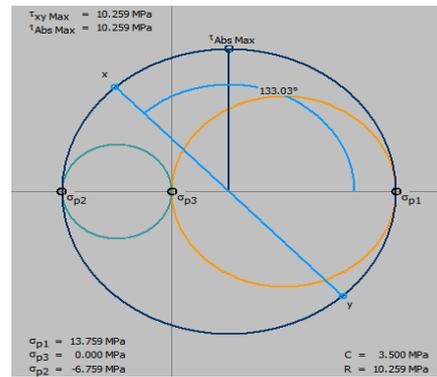
$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{14}{-14} = -1 \Rightarrow \begin{cases} 2\theta_1 = -45^\circ \\ 2\theta_2 = -45^\circ + 180^\circ \end{cases}$$

Donc : $\theta_1 = -22.5^\circ$; $\theta_2 = +67.5^\circ$

- Cisaillement maximum:

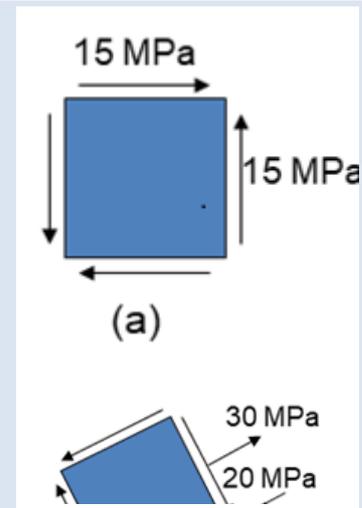
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 9.9 \text{ MPa}$$





Exercice : 03

Un solide en contrainte plane est soumis à 2 chargements différents donnant respectivement, en un point, les états de contraintes (a) et (b). Calculer les directions et contraintes principales lorsque les 2 chargements agissent simultanément (c'est-à-dire, lorsqu'ils sont superposés).



Solution :

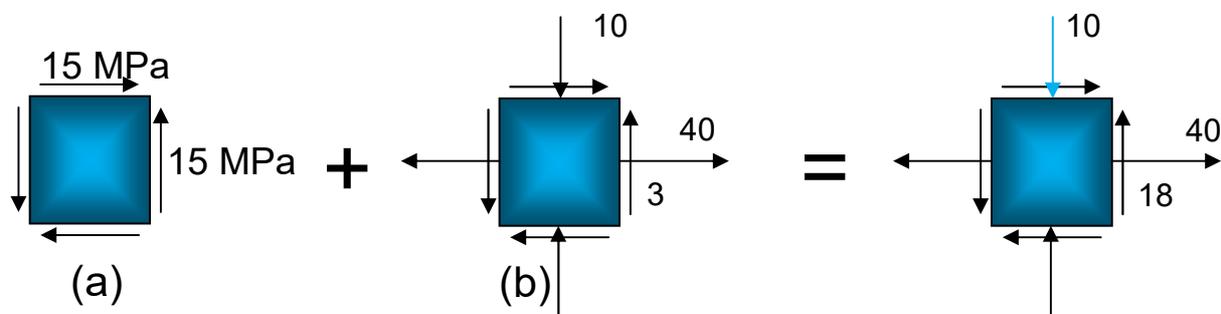
On ramène l'état de contrainte (b) aux axes xy

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{x'} + \sigma_{y'}}{2} + \frac{\sigma_{x'} - \sigma_{y'}}{2} \cos(-60^\circ) + \tau_{x'y'} \sin(-60^\circ) = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_{x'} + \sigma_{y'}}{2} + \frac{\sigma_{x'} - \sigma_{y'}}{2} \cos(120^\circ) + \tau_{x'y'} \sin(120^\circ) = -10 \text{ MPa}$$

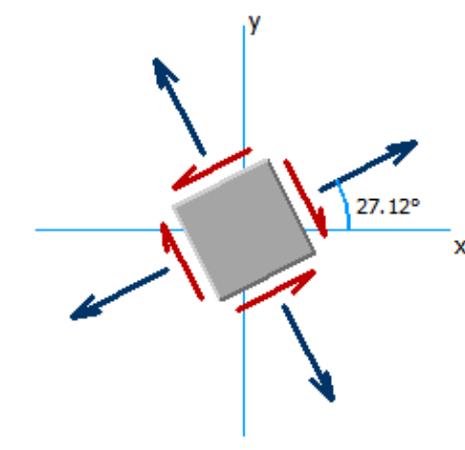
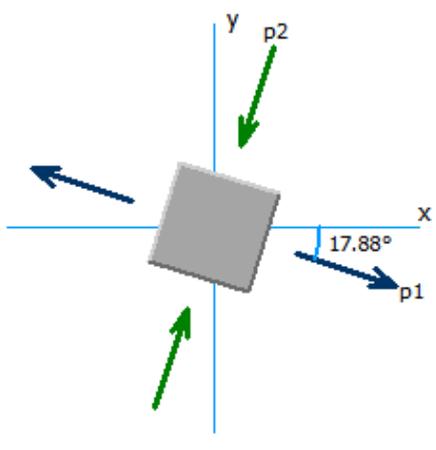
$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_{x'} - \sigma_{y'}}{2} \sin(-60^\circ) + \tau_{x'y'} \cos(-60^\circ) = 3 \text{ MPa}$$

Principe de superposition:



Calcul les contraintes principales:

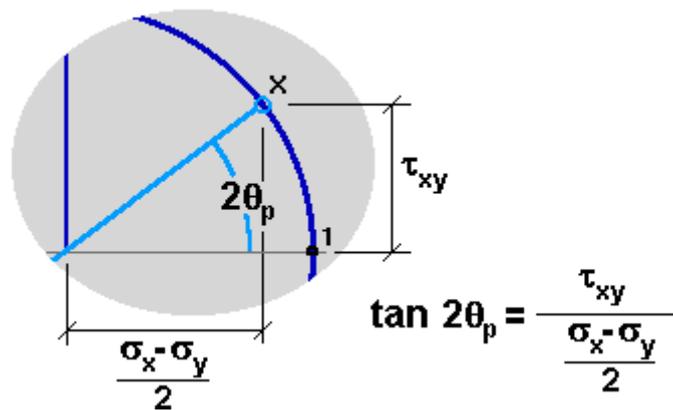
- Direction des contraintes principales:
- Direction des contraintes tangentielles max :



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 15 \pm 30.8$$

$$\sigma_1 = 45.8 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_2 = -15.8 \text{ MPa}$$

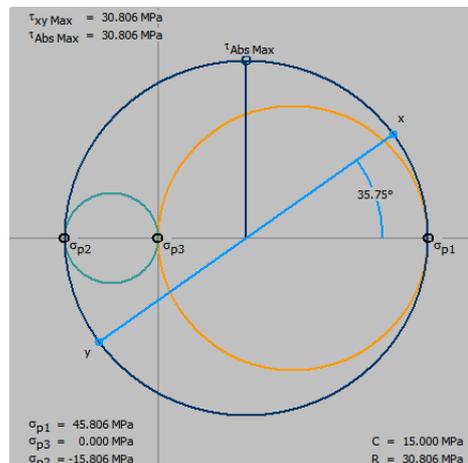
Les directions principales:



$$\text{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 0.725$$

$$\theta_1 = 18^\circ \quad ; \quad \theta_2 = 108^\circ$$

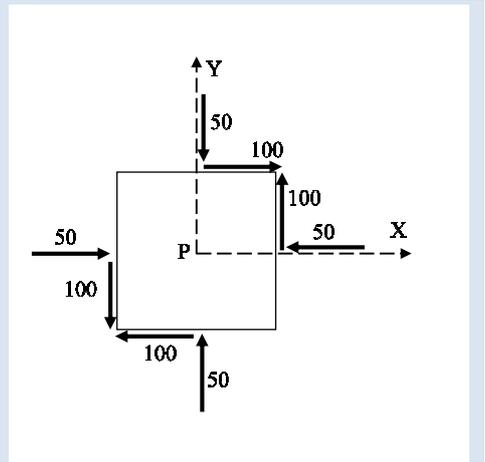
Résolution avec cercle de MOHR :



Exercice : 04

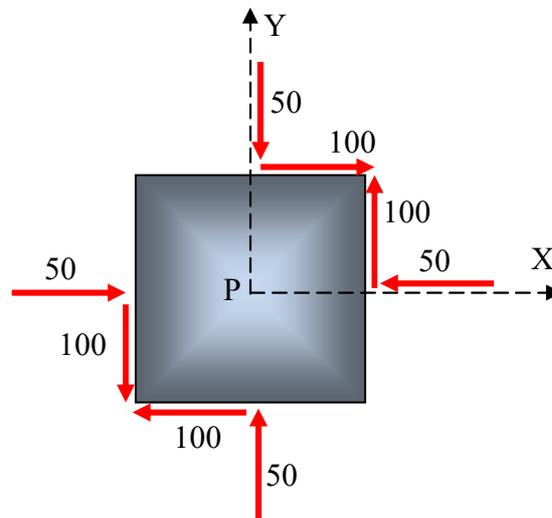
Considérons l'état plan de contraintes au point P représenté sur la figure ci-contre. Les contraintes en (MPa).

- Ecrire la matrice des contraintes en P dans le repère xyz .
- Déterminer les éléments principaux des contraintes. Représenter les éléments principaux des contraintes dans le plan xy
- Tracer le tri-cercle de MOHR. En déduire la valeur du cisaillement maximum. Dans quel plan se trouvent les normales relatives aux plans de coupe soumis au cisaillement maximum ?

**Solution:**

1. Matrice des contraintes en P dans le repère xyz :

$$\sigma = \begin{bmatrix} -50 & 100 & 0 \\ 100 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$



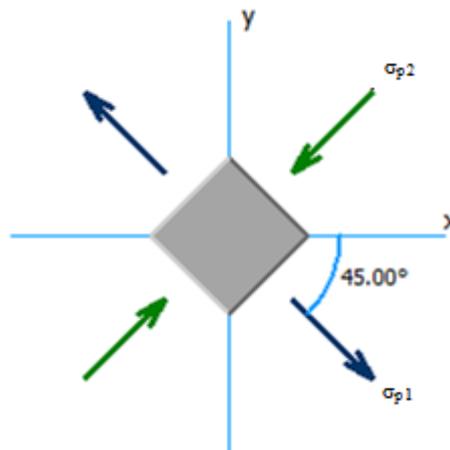
2. Elements principaux de contraintes:

$$\sigma_{p1} = 50 \text{ MPa}, \sigma_{p2} = -150 \text{ MPa}, \text{et } \sigma_{p3} = 0 \text{ MPa}$$

$$\text{tg } 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{(-200)}{200} = -1$$

$$\Rightarrow \theta = -45^\circ$$

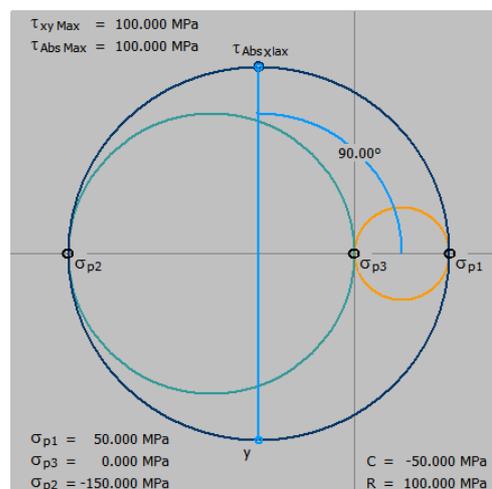
- Représentation les éléments principaux des contraintes dans le plan xy :



- Tricercale de MHOR:

On a $\sigma_{p3} = 0$ MPa, est une contrainte principale, et pour déterminer les deux autres en trace le cercle de MOHR, en utilisant les points : A (σ_{11}, σ_{12}) et B, ($\sigma_{22}, -\rho_{21}$).

$\Rightarrow A (-50, 100)$ et B, ($50, -100$).



- La valeur du cisaillement maximum est donnée par le rayon du plus grand des 3 cercles :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

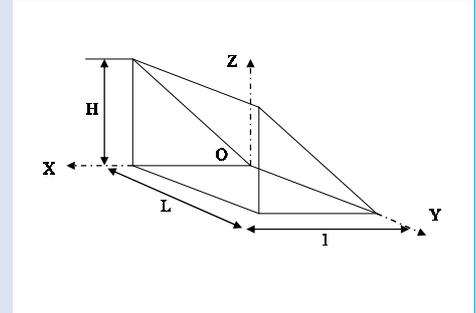
$$\tau_{\max} = \frac{50 + 150}{2} = 100 \text{ MPa}$$

- Les normales relatives aux plans de coupe soumis au cisaillement maximum sont les bissectrices du plan principal XY. $\theta = 45^\circ$. Ce sont donc les facettes x et y.

Exercice : 05

Considérons le solide de la figure1. Ce solide repose simplement sur le sol (plan O_{xy}).

- Déterminer la valeur de la constante α pour que le solide soit en état d'équilibre.
 - On prend : $\rho = 2 \text{ kg/m}^3$
 - la densité surfacique du sol sous le sol est
 - $\vec{r} = \frac{\alpha}{l} \times \vec{e}_z$



Solution :

Etude d'équilibre :

On a : $\int \vec{f} \cdot dv + \oint \vec{T} \cdot ds = \vec{0}$(1)

Les forces agissant sur la structure sont :

1. Force de pesanteur:

$$d\vec{F}_p = \vec{F} \cdot dv = \rho \cdot \vec{g} \cdot dv = -2 \cdot g \cdot \vec{e}_z \cdot dv$$

$$\vec{dF}_p = \oint -2 \cdot g \cdot \vec{e}_z \cdot dv$$

$$\vec{dF}_p = -2 \cdot g \cdot \vec{e}_z \oint dv = -2 \cdot g \cdot \vec{e}_z \cdot v$$

On a : $V = \frac{H \cdot l}{2} \cdot L$

$$\Rightarrow \vec{dF}_p = -H \cdot l \cdot L \cdot g \cdot \vec{e}_z$$

Réaction du sol sur la base :

$$\vec{dF}_s = \vec{T} \cdot ds = \vec{r} \cdot ds = \frac{\alpha}{l} \cdot x \cdot \vec{e}_z \cdot ds$$

$$\vec{dF}_s = \int \frac{\alpha}{l} \cdot x \cdot \vec{e}_z \cdot ds$$

$$\vec{dF}_s = \frac{\alpha}{l} \vec{e}_z \int x \cdot ds$$

$$\int x \cdot ds : \text{moment statique} = \frac{l}{2} \cdot l \cdot L$$

$$\Rightarrow \vec{dF}_s = \frac{\alpha}{l} \vec{e}_z \cdot \frac{l^2}{2} \cdot l = \frac{\alpha}{2} \cdot l \cdot L \cdot \vec{e}_z$$

Ainsi (1) s'écrit : $-H \cdot l \cdot L \cdot g \cdot \vec{e}_z + \frac{\alpha}{2} \cdot l \cdot L \cdot \vec{e}_z$

$$(1) \Rightarrow (-H \cdot l \cdot L \cdot g + \frac{\alpha}{2} \cdot l \cdot L) \cdot \vec{e}_z$$

$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot g \cdot H \rightarrow$ pour que la structure soit en équilibre.

Exercice : 06

Soit ds un élément de surface de normale \vec{n} , sur laquelle agit un vecteur contrainte \vec{T} .

1. Déterminer les composantes de \vec{n} , si on connaît :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 4 \\ -1.8 \end{pmatrix} \vec{t} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = 4 \text{ Pa}$$

Solution:

1. Calcul \vec{n} :

$$\text{On a : } \vec{T} = \sigma \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{t} \Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\sigma} \cdot \vec{T} - \frac{\tau}{\sigma} \cdot \vec{t}$$

$$\vec{T} \cdot \vec{t} = \tau = (2.4 \times 0.8) + (-1.8 \times 0.6) = 3 \text{ Pa}$$

$$\text{Et } \tau = \sqrt{T^2 - \sigma^2} = \sqrt{25 - 16} = \pm 3 \rightarrow \text{On travail avec les deux !!!}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{4} \cdot \vec{T} - \frac{3}{4} \cdot \vec{t} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2.4 \\ 4 \\ -0.6 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{n} = \vec{e}_y$$

Exercice : 07

Soit ds un élément de surface de normale \vec{n} ,

1. sur laquelle agit un vecteur contrainte \vec{T} .
2. Déterminer les composantes de \vec{n} , si on connaît :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = 0.5 \text{ Pa et } \tau = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Solution :

3. Calcul \vec{n} :

$$\text{On a : } \vec{T} = \sigma \cdot \vec{n} \Rightarrow \begin{cases} T_x = 0.5 \cdot n_x + 0.5 \cdot n_y \\ T_y = 0.5 \cdot n_x + 0.5 \cdot n_y \\ T_z = 0.5 \cdot n_z \end{cases}$$

$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{n} = 0.5 \Rightarrow 0.5(n_x + n_y)n_x + 0.5(n_x + n_y)n_y + 0.5n_z^2 = 0.5$$

$$\text{Et puisque : } n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

$$n_y n_x = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$D'autre part : \tau^2 = T^2 - \sigma^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \Rightarrow 2(0.5n_x + 0.5n_y)^2 + 0.25n_z^2 - (0.5)^2 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 0.25(n_x^2 + n_y^2) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow n_x^2 + n_y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow n_x^2 + n_y^2 = 0.5 \dots \dots \dots (2)$$

On sait que :

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow 0.5 + n_z^2 = 1$$

$$\Rightarrow n_z = \pm\sqrt{0.5}$$

d'après l'équation (1): $n_y n_x = 0$, $\Rightarrow n_y = 0$ ou, $n_x = 0$ ($n_x = n_y = 0$ Non, puisque $n_z \neq 0$)

Si : $n_x = 0 \Rightarrow (2): n_y = \pm\sqrt{0.5}$

Si : $n_y = 0 \Rightarrow (2): n_x = \pm\sqrt{0.5}$

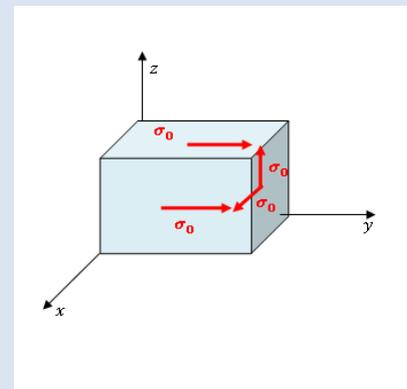
Le vecteur \vec{n} prend les valeurs: $\vec{n} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \end{pmatrix}$

Exercice : 08

La distribution des contraintes sur un cube élémentaire est donnée par le tenseur $\bar{\sigma}$.

- D'après ce schéma déduire la matrice du tenseur de contrainte $\bar{\sigma}$.
 - Déterminer les contraintes et les directions principales normalisés de $\bar{\sigma}$.
 - Déduire les invariants du tenseur $\bar{\sigma}$.

$$\sigma_0 = 2MPa$$



Solution

1. D'après le schéma on déduit que le tenseur de contraintes est :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ Mpa}$$

2. Contraintes principales et les directions principales :

$$|\sigma - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 8)$$

Donc les solutions de ce polynôme caractéristique (les valeurs principales) :

$$\sigma_1 = 2\sqrt{2}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -2\sqrt{2}$$

Détermination des axes principaux : on a $(\sigma - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\sigma_1 = 2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2 & -2\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 2 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{\sqrt{2}} \text{ et } x_3 = \frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc } \vec{v}_1 = x_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{On déduit } \vec{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

De la même façon on obtient

$$\vec{v}_2 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \dots 0,5 \text{ et } \vec{e}'_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \vec{v}_3 = x_2 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ et } \vec{e}'_3 = \begin{bmatrix} -1/2\sqrt{2} \\ 1/2 \\ -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

3- Les invariants

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 = -8$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0$$

Exercice : 09

Le tenseur de contrainte est donné par rapport à la

base $Ox_1x_2x_3$

Avec b inconnu, si la contrainte principale $\sigma_3 = 3$ Mpa et

$$\sigma_1 = 2\sigma_2,$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & b & b \\ b & 7 & 2 \\ b & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ Mpa}$$

- Déterminer les contraintes principales.
- Déduire la contrainte de cisaillement maximale.
 - Calculer la valeur de b .
- Déterminer la direction principale correspondante à σ_2 .

Solution

1. Calcul des contraintes principales:

On a : $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ (invariant) avec $\sigma_1 = 2\sigma_2$ et $\sigma_3 = 3$ MPa

$$\text{donc } 15 = 3\sigma_2 + 3$$

On obtient : $\sigma_2 = 4$ MPa et $\sigma_1 = 8$ MPa

1. $\tau_{\max} = (\sigma_1 - 2\sigma_3)/2 = 2.5 \text{ MPa}$
2. $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \det(\bar{\sigma})$ (invariant)
Donc $I_3 = 96 = 96 - 7b^2$ on déduit $b=0$
3. Détermination de l'axe principale pour σ_2 :

$$\sigma_2 = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_3 = x_2 = 0 \text{ et } x_1 = 0$$

$$\text{Donc } \vec{v}_2 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{On déduit } \vec{e}'_2 = \vec{e}_1$$

Exercice : 10

Au point M d'un matériau, et dans le repère $\{\vec{e}_i\}$ le tenseur de contrainte s'écrit :

1. Calculer les contraintes principales et les axes principaux en fonction de α .
2. Déduire les scalaires invariants de ce tenseur. Dans la suite en prend $\alpha = 1$.
3. Calculer le vecteur contrainte sur la facette de normale \vec{n}_1 et \vec{n}_2 tel que :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{n}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2 \\ \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{e}_1 \end{cases}$$

Solution

- 1- Calcul des contraintes principales en fonction de α :

$$|\sigma - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -12\alpha - \lambda \end{vmatrix} = -(12\alpha + \lambda)(4 - 2\alpha - \lambda)(4 + 2\alpha - \lambda)$$

Donc les solutions de ce polynôme caractéristique (les valeurs principales) :

$$\sigma_1 = 4 + 2\alpha, \sigma_2 = 4 - 2\alpha, \sigma_3 = -12\alpha$$

Détermination des axes principaux :

$$\sigma_1 = 4 + 2\alpha \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -12\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 \text{ et } x_3 = 0$$

$$\text{Donc } \vec{v}_1 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On déduit $\vec{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

De la même façon on obtient $\vec{v}_2 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{e}'_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_3 = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{e}'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2- Les invariants:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 8 - 12\alpha$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 = 16 - 96\alpha - 4\alpha^2$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 12\alpha(4\alpha^2 - 16)$$

3- La matrice de passage Q entre $\{\vec{e}_i\}$ et $\{\vec{e}'_i\}$

On a $\vec{e}_1(1,0,0)$, $\vec{e}_2(1,0,0)$, $\vec{e}_3(1,0,0)$ et $\vec{e}'_1(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $\vec{e}'_2(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\vec{e}'_3(1,0,0)$

Avec $Q_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j$

Donc on obtient:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4- Calcul le vecteur contrainte

5- : pour $\alpha = 1$ on a

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\vec{T}_1 = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}_1 \Rightarrow \vec{T}_1(2 + \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}, 0)$$

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{T}_2 = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{T}_2 = 6\sqrt{3} \vec{e}_3$$

Exercice :11

Soit le tenseur de contrainte suivant en coordonnées sphérique

$$(r, \theta, \varphi)$$

1. Calculer les scalaires invariants, la partie sphérique et le déviateur de ce tenseur.
2. Déterminer le vecteur contrainte au point M (1, 0,0) appartenant à la sphère de rayon $r=1$.
3. Si on fait rotation des vecteurs de base d'un angle de 45° autour de l'axe des x quel sont les nouvelles composantes du tenseur de contrainte et du vecteur de contrainte au point M.
4. Dédurre les contraintes principales de ce tenseur.

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2r \\ 0 & 2r & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

1. Les scalaires invariants la partie sphérique et le déviateur

$$I_1 = 4, I_2 = 5 - 4r^2, I_3 = 2(1 - 4r^2)$$

$$\bar{\sigma}^S = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}, \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2r \\ 0 & 2r & -1/3 \end{bmatrix}$$

2. Calcul le vecteur contraint au point M (r=1, 0,0) :

La sphère a une équation r=1 (f(r,θ,φ)=r-1) en coordonnées sphériques donc la normale :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}f}{\|\vec{\nabla}f\|} = \vec{e}_r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{T} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{e}_r$$

3. Calcul du tenseur de contraintes transformé au point M.

Le tenseur de rotation des vecteurs de base est :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Donc on a $\sigma' = R^T \sigma R$

$$\bar{\sigma}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

On obtient:

$$\bar{\sigma}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Les contraintes principales

Nous remarquons que dans le nouveau repère la matrice du tenseur est diagonale dont les éléments représentent les contraintes principales, finalement on a :

$$\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = -1$$

Exercice :12

En un point M de coordonnées x_1, x_2, x_3 , on se donne

le tenseur de contrainte suivant :

$$\sigma = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha x_2^2 & \gamma x_2 x_3 \\ 0 & \gamma x_2 x_3 & \beta x_3^2 \end{bmatrix}$$

5. Quelles sont les conditions sur α, β, γ pour

respecter les conditions d'équilibre ($\vec{F}_V = \vec{0}$). $(Mpa)(x_2 \neq 0, x_3 \neq 0)$

6. Sur plan $x_3 = x_2$, la contrainte est $\vec{f}(0, x_2^2, -x_3^2)$, déterminer les constantes α, β, γ .
7. Au point $M_1 (1, 3, 3)$ déterminer graphiquement les contraintes principales.
8. Dédurre la contrainte de cisaillement maximale.

Solution :

L'équation d'équilibre ($\vec{F}_V = 0$) $div(\vec{\sigma}) = \vec{0}$

A l'équilibre en absence des forces extérieures on a $div(\vec{\sigma}) = \vec{0}$, on obtient :

$$2\alpha x_2 + \gamma x_2 = 0, 2\beta x_3 + \gamma x_3 = 0$$

On obtient : $\alpha = -\gamma/2, \beta = -\gamma/2$

2-détermination de α, β, γ :

Sur le plan $x_3 = x_2, \vec{n}(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\begin{aligned} \vec{T} = \vec{f} &\Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{f} \\ \Rightarrow \alpha - \gamma &= \sqrt{2}, \beta - \gamma = -\sqrt{2} \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{2\sqrt{2}}{3}, \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \beta = -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

3. les contraintes principales :

$$\text{On a } \vec{\sigma}(P) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \\ 0 & 6\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Donc $\sigma_2 = 6$ MPa, est une contrainte principale, et pour déterminer les deux autres en trace le cercle de MOHR en utilisant les point $A(-3\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$, et $B(-3\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$.

On obtient $\sigma_3 = -9\sqrt{2}$ MPa

Exercice : 13

L'état des contraintes en un point M d'un milieu continu est donné dans une base orthonormée ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) par le tenseur :

- Quel est l'état des contraintes en M pour $\alpha = 0$.
- Pour $\alpha = 1$, calculer les composantes normales et tangentielles des vecteurs contraintes agissant en M sur les deux facettes de normale

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} 7\alpha & 36\alpha & 0 \\ 36\alpha & 7\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}$$

α : constante réelle, paramètre de charge.

$$\vec{n}_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \text{ et } \vec{n}_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

- Déterminer en fonction de α , les contraintes principales et les directions principales correspondantes ?
- Déterminer la partie sphérique et le déviateur de ce tenseur.
- Déterminer les valeurs de α , pour que l'état des contraintes au point M soit une pression superposée à un cisaillement pur.

Solution

1- Pour $\alpha=0$ l'état de contraintes devient une traction suivant z

2- pour $\alpha=1$ on a $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}$

$$\vec{T}_1 = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}_1 \Rightarrow \vec{T}_1 \begin{bmatrix} \frac{7\sqrt{3}}{2} + 18 \\ 18\sqrt{3} + \frac{7}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Contrainte normale } \sigma_1 = \vec{T}_1 \cdot \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} \frac{7\sqrt{3}}{2} + 18 \\ 18\sqrt{3} + \frac{7}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 7 + 18\sqrt{3}$$

$$\text{Contrainte tangentielle } \tau_1 = \sqrt{T^2 - \sigma_1^2} = 18 \text{ (Mpa)}$$

$$\vec{T}_2 = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{T}_2 \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{2}} + 6\sqrt{6} \\ 18\sqrt{2} + \frac{7}{\sqrt{6}} \\ \frac{70}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Contrainte normale } \sigma_2 = \vec{T}_2 \cdot \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{2}} + 6\sqrt{6} \\ 18\sqrt{2} + \frac{7}{\sqrt{6}} \\ \frac{70}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = 28 + 12\sqrt{3}$$

$$\text{Contrainte tangentielle } \tau_2 = \sqrt{T^2 - \sigma_2^2} = 21 \text{ (Mpa)}$$

3- Calcul des contraintes principales en fonction de α :

$$|\sigma - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7\alpha - \lambda & 36\alpha & 0 \\ 36\alpha & 7\alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 70 - \lambda \end{vmatrix} = -(-70 + \lambda)(29\alpha + \lambda)(43\alpha - \lambda)$$

Donc les solutions de ce polynôme caractéristique (les valeurs principales) :

$$\sigma_1 = 70, \sigma_2 = 43\alpha, \sigma_3 = -29\alpha$$

Détermination des axes principaux :

$$\sigma_1 = 70; \begin{bmatrix} 7\alpha - 70 & 36\alpha & 0 \\ 36\alpha & 7\alpha - 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ et } x_3 \text{ qcq}$$

Donc $\vec{v}_1 = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ On déduit $\vec{e}'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ De la même façon on obtient $\vec{v}_2 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{e}'_2 =$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}; \vec{v}_3 = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{e}'_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

4- la partie sphérique et le déviateur :

$$\bar{\sigma}^S = \begin{bmatrix} \frac{14\alpha + 70}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{14\alpha + 70}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14\alpha + 70}{3} \end{bmatrix} \quad \bar{\sigma}^D = \begin{bmatrix} (7\alpha - 70)/3 & 36\alpha & 0 \\ 36\alpha & (7\alpha - 70)/3 & 0 \\ 0 & 0 & (140 - 14\alpha)/3 \end{bmatrix}$$

5- Il faut que $7\alpha = 70$ donc $\alpha = 10$ dans ce cas $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 70 & 360 & 0 \\ 360 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}$

Exercice : 14

L'état de contraintes en (M) est donné par le tenseur suivant

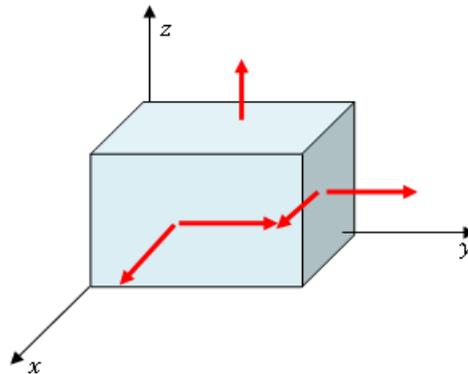
$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{bmatrix}$$

Ou a, b, c sont des réels et σ est une valeur de contrainte.

- Déterminer les valeurs de a, b, c pour que le vecteur de contrainte agissant sur le plan de normale $\vec{n}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, Soit nul.
- Maintenant on suppose que $a = 2$, et $\sigma = 2$ MPa, $b = c = 0$.
- Représenter cet état de contraintes sur un cube unitaire.
- Tracer le cercle de MOHR et déduire les contraintes principales
- Soit le plan (Δ) dont la normale fait un angle $\theta = 30^\circ$ avec le premier axe principal.
- Déduire la contrainte normale et la contrainte tangentielle.

Solution

1- On a $\vec{T} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n} = 0$



2- avec $\vec{n}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ a + c + 1 = 0 \\ b + c + 1 = 0 \end{cases}$$

On obtient la solution $a=b=c=-1/2$

3- Dans ce cas on a

$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ Qu'on peut représenter comme suit :

4- Les contraintes principales

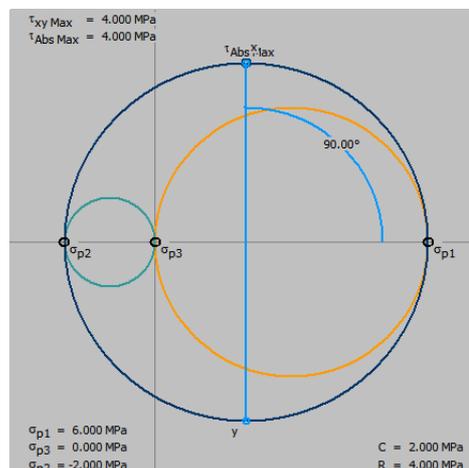
Donc $\sigma_2=2$ est une contrainte principale, et pour déterminer les deux autres en trace le cercle de MOHR en utilisant les point A et B.

A (σ_{11}, σ_{12}) ou A (2,4), B ($\sigma_{22}, -\sigma_{12}$) ou B (2,-4)

L'intersection du cercle de MOHR avec l'axe des abscisses donne les contraintes principales :

$\sigma_1=6, \sigma_3=-2$

5- Contrainte normale et tangentielle:

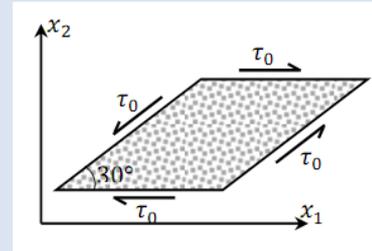


On déduit de ce schéma $\sigma = 4 \text{ MPa}, \tau = -3.46 \text{ MPa}$.

Exercice : 15

Une plaque quadrilatérale sous forme de losange d'angle 30° au coin est soumise à un cisaillement uniforme τ_0 tel que montré sur la figure ci-contre.

- Déterminer le tenseur des contraintes rapporté au repère (x_1, x_2)
- Calculer les composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte agissant sur un plan de coupe inclinée de 20° par rapport à l'axe x_1 .
- Déterminer les contraintes principales et le cisaillement maximal que subit la plaque.
- Faire une représentation dans le plan de MOHR .

**Solution**

1) Tenseur de contraintes:

D'après la relation tenseur – vecteur contrainte :

Sous forme notation indicielle : $T_i = \sigma_{ij}n_j$

$$\text{Donc : } \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

Sur le plan horizontal de normale $n = [0 \ 1]$, L'angle = 90°

Le vecteur contrainte n'a que la composante $T_1 = \tau_0$ Ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_0 \\ \tau_0 & 0 \end{bmatrix}$$

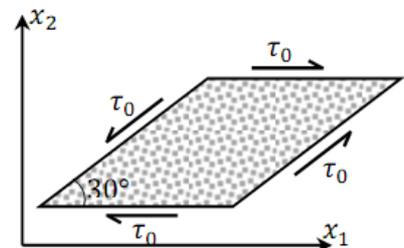
Sur le plan incliné de 30° de normale $n = \frac{1}{2} \cdot [1 \ \sqrt{3}]$, la composante normale du vecteur contrainte est nulle

Sous forme indicielle : $\sigma_{nn} = \sigma_{ij}n_i n_j = \sigma_n$

$$\sigma_n = \frac{1}{2} [-1 \ \sqrt{3}] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_0 \\ \tau_0 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = 0$$

$$\sigma_{11} = 2\sqrt{3} \times \tau_0$$

$$\text{Finalement : } \sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \times \tau_0 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0 \end{bmatrix}$$



2. Contraintes normale et tangentielle sur le plan incliné de 20°

$$\text{Le vecteur normal : } n = \begin{bmatrix} -0.34202 \\ 0.93969 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vecteur contrainte : } (T) = \begin{bmatrix} 3.34641 \times \tau_0 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.34202 \\ 0.93969 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2410 \times \tau_0 \\ -0.34202 \times \tau_0 \end{bmatrix}$$

3. Composantes normale et tangentielle

$$\sigma_n = -0.23756 \times \tau_0$$

$$\tau = 0.3473 \times \tau_0$$

4. Contraintes principales:

$$\det(\sigma - \lambda I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \times \tau_0 - \lambda & \tau_0 \\ \tau_0 & 0 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\sqrt{3} \times \tau_0 \times \lambda + \tau_0^2 = 0$$

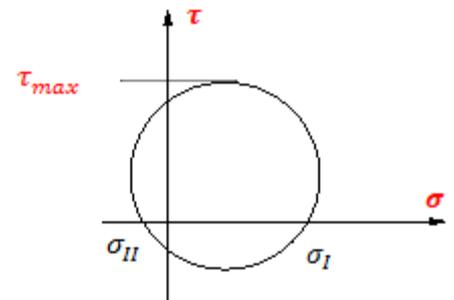
$$\text{La solution est : } \lambda = (\sqrt{3} \mp 2) \times \tau_0$$

✓ Les contraintes principales : $\sigma_I = (\sqrt{3} + 2) \times \tau_0$

$$\sigma_{II} = (\sqrt{3} - 2) \times \tau_0$$

✓ La contrainte de cisaillement maximale :

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) = 2 \times \tau_0$$

**Exercice : 16**

Le champ des contraintes dans un solide élastique isotrope en absence de forces de volume est

défini par le tenseur suivant :

- Ecrire les équations d'équilibre et trouver les valeurs des constantes a , b et c .
- Ecrire le tenseur des contraintes au point $M(1, 1, 0)$ (remplacer les valeurs de a , b et c).
- Déterminer graphiquement les contraintes

(avec $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0$) :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} a(x_1^2 - 4) & 4x_1x_2 - 1 & -6x_1x_3 \\ 4x_1x_2 - 1 & b(x_2^2 - 1) & 0 \\ -6x_1x_3 & 0 & c(x_3^2 + 1) \end{bmatrix} (10^6 \text{ Pa}) ;$$

a , b et c des constantes réelles.

principales au point M.

- Déterminer la partie sphérique et le déviateur de $\bar{\sigma}_M$.
- Ecrire le tenseur de déformation au point M. et déduire l'allongement unitaire suivant le vecteur $\vec{n} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$
- ($E = 2.5 \cdot 10^9 \text{Pa}$, $\nu = 0.3$).

Solution

1- Calcul des constantes a , b , c .

L'équation d'équilibre ($\vec{F}_V = 0$) $div(\bar{\sigma}) = \vec{0}$

$$\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} = 2ax_1 + 4x_1 - 6x_1 = 2ax_1 - 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} = 2bx_2 + 4x_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} = 2cx_3 - 6x_3 = 0$$

On déduit : $a=1$, $b=-2$, $c=3$

2- Le tenseur $\bar{\sigma}$ au point M

$$\bar{\sigma}_M = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

3- Donc $\sigma_1=3$ est une contrainte principale, et pour déterminer les deux autres en traçant le cercle de MOHR en utilisant les points A et B

A (σ_{11}, σ_{12}) ou A (-3,3), B ($\sigma_{22}, -\sigma_{21}$) ou B (0,-3)

L'intersection du cercle de MOHR avec l'axe des abscisses donne les valeurs principales :

$$\sigma_2=1.8, \sigma_3=-4.8$$

4- La partie sphérique et le déviateur :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^S + \bar{\sigma}^D \Rightarrow \bar{\sigma}^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma}^D = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5- Le tenseur de déformation au point M on a

$$\bar{\varepsilon}_M = 10^{-3} \begin{bmatrix} -1.56 & 1.56 & 0 \\ 1.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.56 \end{bmatrix}$$

L'allongement unitaire suivant \vec{n}

$$\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{ij}n_i n_j = \vec{n} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{n} \text{ Donc :}$$

$$\varepsilon_{nn} = 0.96 \cdot 10^{-3}$$

Exercices non corrigé

Exercice : 17

Un solide est soumis à un état de contraintes dont les composantes cartésiennes

sont :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -2x & 3z^2 \\ -2x & 0 & 0 \\ 3z^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

- Calculer les composantes des forces de volume
- Déterminer, par leurs normales, les facettes sur lesquelles le vecteur contrainte agissant est nul. Donner l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale de la facette passant par le point M (1.0.1).
 - Déterminer les contraintes principales.
- A quel état pour de contraintes correspond ce point.

Exercice : 18

L'état de contrainte dans une pièce rapportée à un système d'axes (\overline{X}_i) en un point

M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) est représenté par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 400 & 100 & 0 \\ 100 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

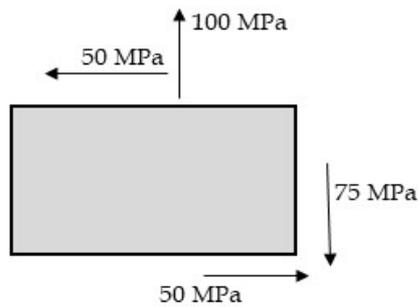
- Trouver les contraintes σ_i et directions principales associées X_i
 - Déduire la contrainte tangentielle maximale.
- Déduire les composantes du tenseur sphérique et déviatoriques.

Exercice : 19

Un élément plan est soumis aux contraintes représentées sur la figure ci-dessous :

En utilisant uniquement le cercle de MOHR, déterminez :

- Les contraintes principales et leurs directions correspondantes.
- La contrainte de cisaillement maximale et le plan sur lequel elle agit.

**Exercice : 20**

Soit dans un repère orthonormé (e_1, e_2, e_3) . On considère le champ de contraintes homogène défini par (en MPa)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & 5\sqrt{3} & 0 \\ 5\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les contraintes principales σ_I, σ_{II} et σ_{III} dans l'ordre décroissant ainsi que les directions principales associées ($n_{PI}, n_{PII}, n_{PIII}$)
2. Vérifier que les trois invariants du tenseur restent inchangés.
3. Pour une direction quelconque \vec{n} , déterminer les composantes normales, t_n , et tangentielle t_τ , de la densité de force t . Dessiner le cercle de Mohr.
4. Déterminer les parties hydrostatiques et déviatorique du tenseur σ dans (e_1, e_2, e_3) .

Exercice : 21

Un point p d'un solide élastique agit un vecteur contraintes T sur un plan défini par sa normale n inclinée de 38° par rapport à la direction de la contrainte majeure $\sigma_1 = 126$ MPa. La seconde contrainte principale vaut $\sigma_2 = 53$ MPa et les composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte T valent $\sigma_n = 36$ MPa et

$$\tau = 92 \text{ Mpa.}$$

- Trouver la valeur de la troisième contrainte principale ainsi que l'angle que fait la normale n avec les deux autres directions principales.

Chapitre 04

Tenseur de déformation

1.1. Introduction

La déformation d'un milieu continu fait référence aux changements de forme, de taille et de volume d'un matériau sous l'influence de contraintes ou de forces appliquées. Cela concerne principalement les solides et les fluides. Les déformations d'un milieu continu sont étudiées dans le domaine de la mécanique des milieux continus, qui englobe la mécanique des solides déformables (élasticité, plasticité) et la mécanique des fluides.

Il existe plusieurs types de déformations dans un milieu continu :

1. Déformation linéaire :
 - Extension ou compression : Changement de longueur d'un matériau le long d'une direction donnée en réponse à une force axiale.
 - Cisaillement : déplacement relatif des couches d'un matériau le long d'une direction parallèle à une surface donnée.
2. Déformation angulaire :
 - Déformation de torsion : Rotation d'un segment de matériau autour de son axe longitudinal.
3. Déformation volumétrique :
 - Dilatation : augmentation du volume d'un matériau en réponse à des forces extérieures.

Les déformations peuvent être élastiques ou plastiques, en fonction des propriétés du matériau. Dans les déformations élastiques, le matériau retrouve sa forme d'origine une fois que les contraintes cessent d'agir. Dans les déformations plastiques, le matériau subit des changements permanents de forme après le retrait des contraintes.

La déformation d'un milieu continu est décrite mathématiquement par des grandeurs telles que le déplacement, la déformation et la contrainte. Les lois de comportement des matériaux, comme la loi de Hooke pour les matériaux élastiques linéaires, permettent de relier les contraintes appliquées aux déformations résultantes.

En mécanique des fluides, les déformations d'un fluide sont généralement exprimées en termes de taux de déformation et de taux de rotation. Les fluides newtoniens obéissent à la loi de Newton de la viscosité, qui relie le taux de déformation au taux de contrainte pour décrire le comportement du fluide.

En résumé, la déformation d'un milieu continu englobe les changements de forme et de volume d'un matériau en réponse à des contraintes ou des forces appliquées. Cette notion est cruciale pour comprendre le comportement des matériaux dans diverses situations et est largement étudiée dans les domaines de la mécanique des solides et de la mécanique des fluides.

1.2. Définitions : considérons dans un référentiel cartésien, la position du point P d'un corps continu avant et après la déformation (déformation infinitésimale). On dit qu'une particule s'est déplacée si elle change de position.

On dit qu'un milieu continu est déformé lorsqu'il y a un changement de distance entre deux particules.

	<p>\vec{u} : vecteur de déplacement</p> <p>P : $\vec{u}_p = \overrightarrow{P_0P_1} = \vec{u}$</p> <p>Q : $\vec{u}_Q = \overrightarrow{Q_0Q_1} = \vec{u}'$</p> <p>$\overrightarrow{P_0Q_0} \neq \overrightarrow{P_1Q_1}$</p> <p>$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{P_0Q_0}}{\overrightarrow{P_1Q_1}} \neq 1$</p> <p>$\overrightarrow{P_1Q_1} \neq \overrightarrow{P_0Q_0}$</p>
--	--

- **Extension** (noté ε) : c'est la variation de la distance entre deux points P et Q

$$\varepsilon = \frac{\overrightarrow{P_1Q_1} - \overrightarrow{P_0Q_0}}{\overrightarrow{P_0Q_0}} \quad (\text{sans unité})$$

- **Distorsion** (noté δ) : c'est la variation de l'angle formé par 3 point P Q et n

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{l'angle externe}$$

1.3. Déplacement est déformation d'un MC :

Supposons :

1- P et Q sont très voisins

$$P_0 : \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$q_0: \begin{bmatrix} x_0 + dx \\ y_0 + dy \\ z_0 + dz \end{bmatrix}$$

2- configuration Ω_0 et Ω_f sont très voisines :

$$P_0P_1: \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \vec{u}$$

$$\vec{u}' = \overrightarrow{Q_0Q_1} = \begin{bmatrix} u'_x = u_x + du_x \\ u'_y = u_y + du_y \\ u'_z = u_z + du_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \vec{u} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot dx & \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot dy & \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot dz \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot dx & \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot dy & \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot dz \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot dx & \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot dy & \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot dz \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Q_0Q_1} = \vec{u} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \vec{u} + [\text{grad } \vec{u}] \cdot \vec{dx}$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \overrightarrow{P_0P_1} + [\text{grad } \overrightarrow{P_0P_1}] \cdot \overrightarrow{P_0Q_0}$$

Propriété :

Tout tenseur d'ordre deux (matrice) peut se décomposer en un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique, tel que :

$$[M] = [M^s] + [M^a]$$

Avec :

$$[M^s] = \frac{1}{2} ([M] + [M]^T)$$

$$[M^a] = \frac{1}{2} ([M] - [M]^T)$$

C'est clair, sans faire de démonstration, faisant le \hat{m} pour $[\text{grad } \overrightarrow{P_0P_1}]$

On a donc

$$[\text{grad } \overrightarrow{P_0P_1}] = [\Omega] + [\varepsilon]$$

Tel que:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} ([\text{grad } \overrightarrow{P_0P_1}] + [\text{grad } \overrightarrow{P_0P_1}]^T)$$

$$[\Omega] = \frac{1}{2} ([\text{grad } \overline{P_0 P_1}] - [\text{grad } \overline{P_0 P_1}]^T)$$

Soit:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$\overline{Q_0 Q_1} = \overline{P_0 P_1} + [\Omega] \cdot \overline{P_0 Q_0} + [\varepsilon] \cdot \overline{P_0 Q_0}$$

$$\vec{u}' = \underbrace{\vec{u}}_{\text{Translation}} + \underbrace{[\Omega] \cdot \vec{dx}}_{\text{Déformation}} + \underbrace{[\varepsilon] \cdot \vec{dx}}_{\text{Rotation autour de } P_0}$$

d'autre part :

$$[\Omega] \cdot \vec{dx} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \vec{\omega} \cdot \vec{dx}$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{dx} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ dx & dy & dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 \cdot dz - \omega_3 \cdot dx \\ -\omega_1 \cdot dz + \omega_3 \cdot dx \\ \omega_1 \cdot dy - \omega_2 \cdot dx \end{bmatrix}$$

Finalement:

$$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{\omega} \cdot \vec{dx} + [\varepsilon] \cdot \vec{dx}$$

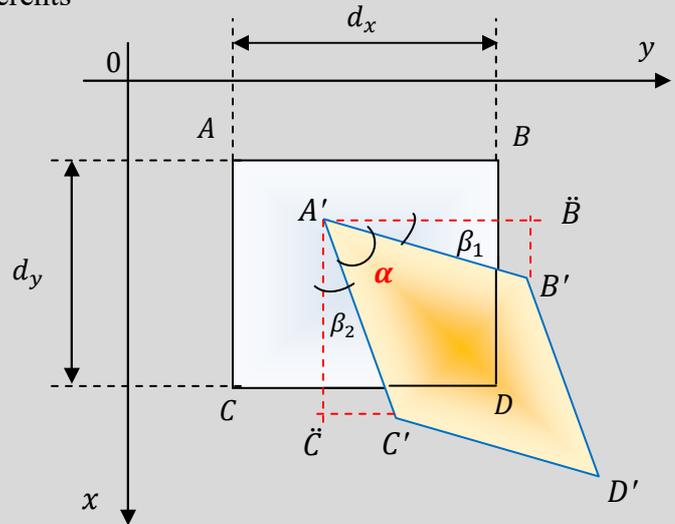
$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{Vecteur de rotation}$$

1.4. Calcul la distorsion

- Calculons la distorsion dans le plan (oxy) .
- Déterminons les coordonnées des différents points :

$$A : \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \quad A' : \begin{cases} x + u_x \\ y + u_y \\ z + u_z \end{cases}$$

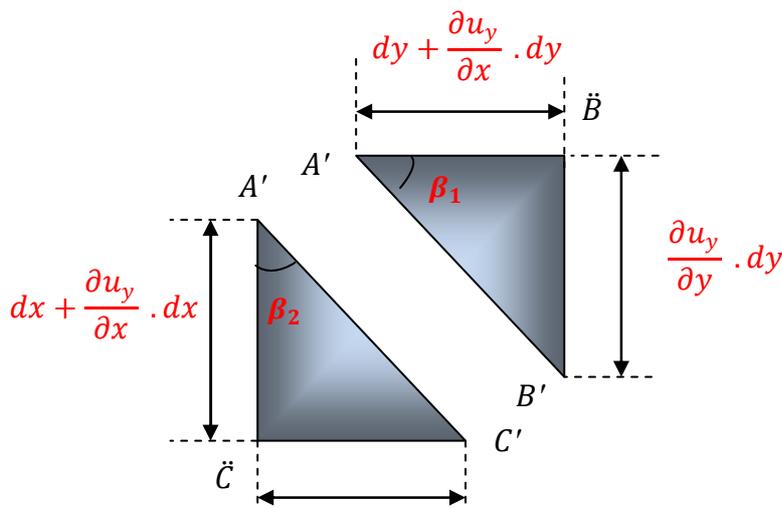
$$B : \begin{cases} x \\ y + dy \end{cases} \quad B' : \begin{cases} x_B + du_x + u_x \\ y_B + du_y + u_y \end{cases}$$



$$\text{Et } B' : \begin{cases} x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot dy = x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot dy + u_x \\ y + dy + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot dy = y + dy + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot dy + u_y \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} x + dx \\ y \end{cases} \quad C' : \begin{cases} x_c + du_x = x + dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot dx + u_x \\ y_c + dy = y + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot dx + u_y \end{cases}$$

$$D : \begin{cases} x + dx \\ y + dy \end{cases} \quad D' : \begin{cases} x_D + du_x = x + dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot dy + u_x \\ y_D + dy = y + dy + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot dy + u_y \end{cases}$$



$$\text{On a: } \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta_1 + \beta_2$$

$$\tan \beta_1 \approx \beta_1 = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot dy}{dy + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot dx} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u_y}{\partial x}}$$

$$\tan \beta_2 \approx \beta_2 = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot dx}{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot dx} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}}$$

Dans le cadre de l'hypothèse: $\frac{\partial u_x}{\partial x} \ll 1$ et $\frac{\partial u_y}{\partial y} \ll 1$

$$\text{donc : } \beta_1 = \frac{\partial u_x}{\partial y} \text{ et } \beta_2 = \frac{\partial u_y}{\partial x} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 2\varepsilon_{xy}$$

Le même, on obtient :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 2\varepsilon_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 2\varepsilon_{yz}$$

Conclusion :

On appelle tenseur des déformations

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & & \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & & \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Avec :

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: extensions

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: distortions

On peut écrire :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), i, j = x, y, z$$

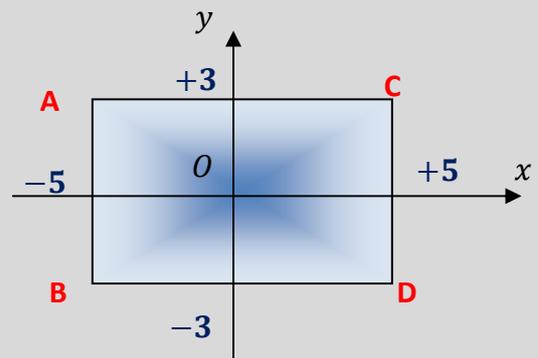
Exercice 1: Soit une plaque :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot x + \beta \cdot y \\ \sigma \cdot y \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 1- Calculer $[\varepsilon]$, $[\Omega]$.
- 2- Donner la signification physique des constantes α, β, σ .

$$\text{Si } \alpha = \frac{1}{5}\beta = \frac{1}{3}\sigma = \frac{-1}{3}$$

- 3- Calculer les coordonnées de A, B, C, D après déformation.
- 4- Tracer la configuration finale de la plaque.



Solution :1- ε et $[\Omega]$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & 0 \\ \frac{\beta}{2} & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta}{2} & 0 \\ -\frac{\beta}{2} & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2- signification physique :

 α, σ : Extensions β : Distorsion.

3- Coordonnées des bornes après déformation :

Après déformation:

$$\Omega_0 \rightarrow \Omega_f$$

$$M(x, y) \rightarrow M'(x', y')$$

$$\begin{cases} x' = x + u_x = \frac{6}{5}x + \frac{1}{3}y \\ y' = y + u_y = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

donc :

$$A(-5, 3) \rightarrow A'(-5 + 0, 3 - 1) = (-5, 2)$$

$$B(-5, -3) \rightarrow B'(-5 - 2, -3 + 1) = (-7, -2)$$

$$C(5, 3) \rightarrow C'(5 + 2, 3 - 1) = (7, 2)$$

$$D(5, -3) \rightarrow D'(5 + 0, -3 + 1) = (5, -2)$$

- Calculons B' en fonction de A :

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + [\Omega] \cdot \overline{AB} + [\varepsilon] \cdot \overline{AB}$$

Avec :

$$\vec{u}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \overline{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\vec{u}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4- Configuration déformée :

On a :

$$\begin{cases} x' = \frac{6}{5}x + \frac{1}{3}y \\ y' = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

- Droite AC : $y = 3 \Rightarrow \frac{2}{3}y' = 3 \Rightarrow y' = 2$

\Rightarrow - éq. de $A'C'$: $y = 2$

- Droite BD : $y = -3 \Rightarrow \frac{2}{3}y' = -3 \Rightarrow y' = -2$

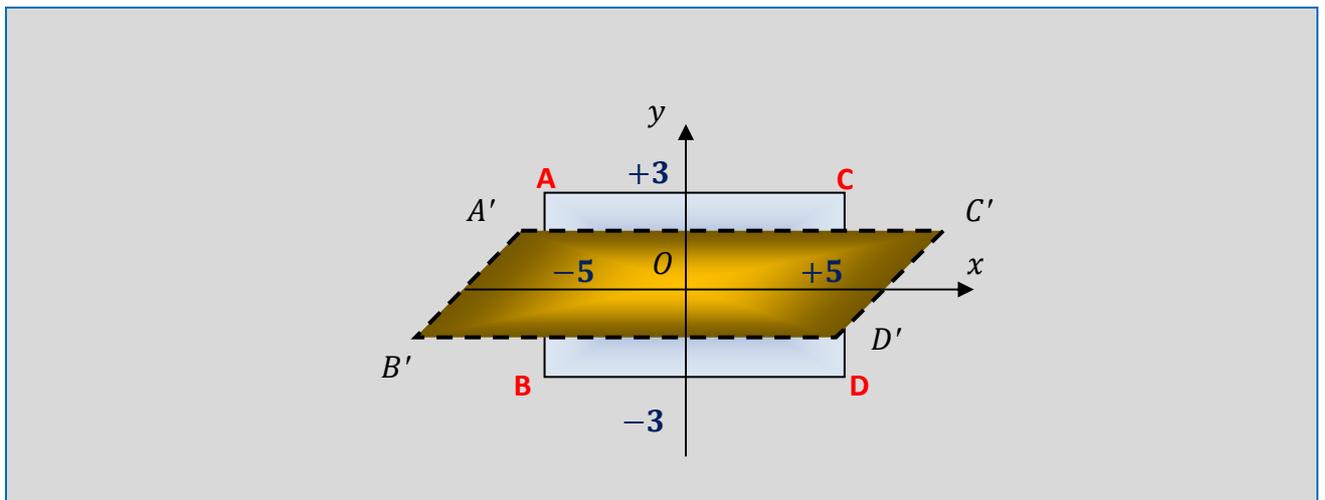
\Rightarrow - éq. de $B'D'$: $y = -2$

- Droite AB : $x = -5 \Rightarrow \frac{5}{6}x' - \frac{5}{12}y' = -5 \Rightarrow 2x' - y' = -12$

\Rightarrow - éq. de $A'B'$: $y = 2x + 12$

- Droite CD : $x = 5 \Rightarrow \frac{5}{6}x' - \frac{5}{12}y' = 5 \Rightarrow y' = 2x' - 12$

- éq. de $C'D'$: $y = 2x - 12$



1.5. Propriétés :

1.5.1. Les invariants

Les invariants d'un tenseur de déformation sont des quantités scalaires qui restent constants lorsque le tenseur est soumis à une transformation de coordonnées. En mécanique des solides, les invariants du tenseur de déformation permettent de caractériser les propriétés physiques d'un matériau.

Pour un tenseur de déformation 3×3 , les trois principaux invariants sont généralement notés comme suit :

1. Le premier invariant est la trace du tenseur de déformation, qui est la somme des éléments diagonaux du tenseur.

2. Le deuxième invariant est la moitié de la somme des carrés des valeurs propres du tenseur de déformation. Les valeurs propres sont les solutions de l'équation caractéristique du tenseur.
3. Le troisième invariant est le déterminant du tenseur de déformation.

Pour décrire les changements de forme subis par un matériau en réponse à des contraintes mécaniques.

Supposons que nous ayons le tenseur de déformation suivant (en notation tensorielle) :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det([\varepsilon] - \lambda[I]) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - I'_1 \lambda^2 + I'_2 \lambda - I'_3 = 0$$

Avec

$$* I'_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \text{ (inv. Linéaire)}$$

$$* I'_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2$$

$$= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

$$* I'_3 = \det([\varepsilon]) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

Calculons les trois principaux invariants :

1. Le premier invariant (I_1) est la somme des éléments diagonaux du tenseur de déformation :

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

2. Le deuxième invariant (I_2) peut être calculé en utilisant les valeurs propres du tenseur.

Supposons que les valeurs propres soient λ_1 , λ_2 et λ_3 .

$$\text{Alors : } I_2 = (1/2) \times [(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2 + 2 \times (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)]$$

3. Le troisième invariant (I_3) est le déterminant du tenseur de déformation :

$$I_3 = \varepsilon_{11} \times \varepsilon_{22} \times \varepsilon_{33} + 2 \times \varepsilon_{12} \times \varepsilon_{23} \times \varepsilon_{31} - \varepsilon_{11} \times \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22} \times \varepsilon_{31}^2 - \varepsilon_{33} \times \varepsilon_{12}^2$$

Cet exemple montre comment les invariants sont calculés à partir des composantes du tenseur de déformation. Les invariants sont utiles pour caractériser les propriétés mécaniques d'un matériau et pour formuler des lois de comportement appropriées.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.04 & 0.06 \\ 0.04 & 0.03 & 0.05 \\ 0.06 & 0.05 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Calculons les trois principaux invariants :

1. Le premier invariant (I_1) est la somme des éléments diagonaux du tenseur de déformation :

$$I_1 = 0.02 + 0.03 + 0.01 = 0.06$$

2. Le deuxième invariant (I_2) nécessite de calculer les valeurs propres du tenseur. Supposons que les valeurs propres soient $\lambda_1 \approx 0.0953$, $\lambda_2 \approx 0.0114$ et $\lambda_3 \approx -0.0272$. Alors :

$$I_2 = (1/2) \times [(0.0953 - 0.0114)^2 + (0.0114 - (-0.0272))^2 + ((-0.0272) - 0.0953)^2 + 2 \times (0.04^2 + 0.05^2 + 0.06^2)] \approx 0.0203$$

3. Le troisième invariant (I_3) est le déterminant du tenseur de déformation :

$$I_3 = 0.02 \times 0.03 \times 0.01 + 2 \times (0.04 \times 0.05 \times 0.06) - 0.02 \times (0.05)^2 - 0.03 \times (0.06)^2 - 0.01 \times (0.04)^2 \approx 0.000106$$

Cet exemple montre comment effectuer les calculs pour obtenir les invariants à partir des composantes du tenseur de déformation donné.

1.6. Cercle de MOHR

Le cercle de Mohr est un outil graphique utilisé pour représenter les transformations de contrainte ou de déformation dans un matériau. Dans le cas du tenseur de déformation, le cercle de Mohr permet de visualiser les changements de forme subis par un matériau en réponse à des contraintes mécaniques.

Exemple:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.04 & 0 \\ 0.04 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour construire le cercle de Mohr à partir d'un tenseur de déformation 2D (ou en réduisant un tenseur 3D en 2D), voici les étapes générales :

1. Identifiez les composantes principales du tenseur de déformation. Pour un tenseur 2D, vous auriez ε_{11} et ε_{22} , par exemple.
2. Placez les composantes principales sur un graphique avec l'axe horizontal représentant les déformations normales et l'axe vertical représentant les déformations de cisaillement.
3. Tracez un point pour chaque composante principale à la position correspondante sur le graphique.
4. Tracez un cercle en utilisant ces points comme extrémités du diamètre du cercle. Le centre du cercle sera au point moyen entre les déformations normales maximale et minimale.
5. Le rayon du cercle représente la moitié de la différence entre les déformations normales maximale et minimale. Les points sur le cercle représentent les déformations normales et les déformations de cisaillement pour différentes orientations du plan.
6. Vous pouvez également tracer des lignes radiales à partir du centre du cercle pour visualiser les changements de direction de la contrainte et de la déformation.

Le cercle de Mohr est utile pour comprendre comment les contraintes et les déformations évoluent en fonction des changements d'orientation du plan dans un matériau. Cela permet aux ingénieurs et aux scientifiques de prendre des décisions éclairées lors de l'analyse des matériaux soumis à des charges mécaniques.

Voici comment construire le cercle de Mohr :

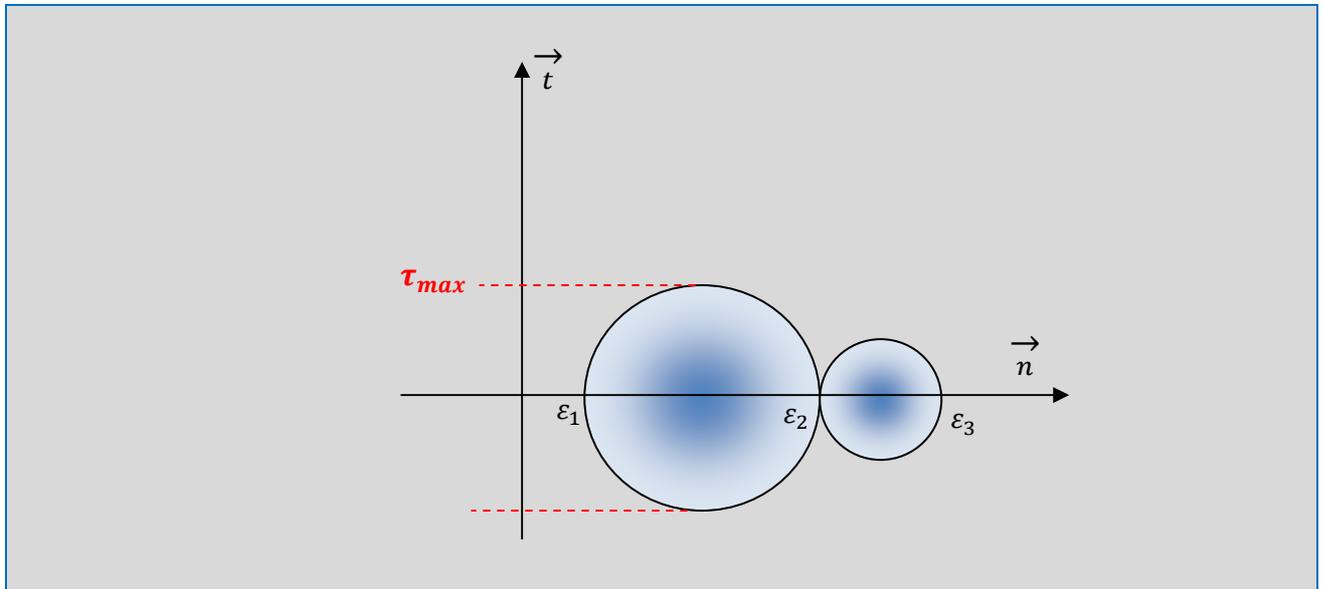
1. Identifiez les composantes principales du tenseur de déformation : $\varepsilon_{11} = 0.02$ et $\varepsilon_{22} = 0.03$.
2. Placez les composantes principales sur un graphique. Les points correspondants sont $(0.02, 0)$ et $(0.03, 0)$.
3. Tracez un point pour chaque composante principale à la position correspondante sur le graphique.
4. Calculez le point moyen entre les deux points : $((0.02 + 0.03) / 2, 0) = (0.025, 0)$.
5. Tracez un cercle avec le centre à $(0.025, 0)$ et un rayon égal à la moitié de la différence entre les déformations normales maximale et minimale : $(0.03 - 0.02) / 2 = 0.005$.
6. Tracez des lignes radiales à partir du centre du cercle vers les points où les composantes principales ont été placées. Ces lignes représentent les déformations normales et de cisaillement pour différentes orientations du plan.

Visuellement, vous obtenez le cercle de Mohr qui illustre comment les déformations normales et les déformations de cisaillement varient en fonction des orientations du plan dans le matériau. Ce cercle permet de visualiser intuitivement comment le matériau réagit aux contraintes appliquées.

1 Les déformations principales et leurs directions se calculent de la même manière que les contraintes :

2- La même chose avec les cercles de Mohr :

$$\tau_{max} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leftarrow \frac{\tau_{max}}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$



3- On appelle dilatation volumique e :

$$e = \frac{dv}{v} = I'_1 \quad (\text{sans démonstration})$$

Exercice 2 :

$$\text{Soit le tenseur : } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- Calculer les invariants de déformation
- Calculer les déformations principales.
- Calculer le volume final si le volume initial $v_0 = 0.5 \text{ m}^3$

Solution :

1. Calcul des invariants :

- $I'_1 = 1.5$
- $I'_2 = 0.25 \cdot 3 - 0.25 = 0.5$
- $I'_3 = \text{Det}([\varepsilon])$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = 0.5^3 - 0.5^3 = 0$$

2. On a :

$$\det([\varepsilon] - \lambda[I]) = \lambda^3 - 1.5\lambda^2 + 0.5\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda (\lambda^2 - 0.5\lambda + 0.5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 - 0.5\lambda + 0.5 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 1.5^2 - 4 \cdot 0.5 = 0.25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 0.5 \Rightarrow \lambda = \frac{1.5 \pm 0.5}{2} = 1 \text{ ou } 0.5$$

donc :

$$\varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = 0.5 \quad \varepsilon_3 = 0$$

$$3/ \quad e = I'_1 = 1.5 = \frac{dv}{0.5} \Rightarrow dv = 0.75$$

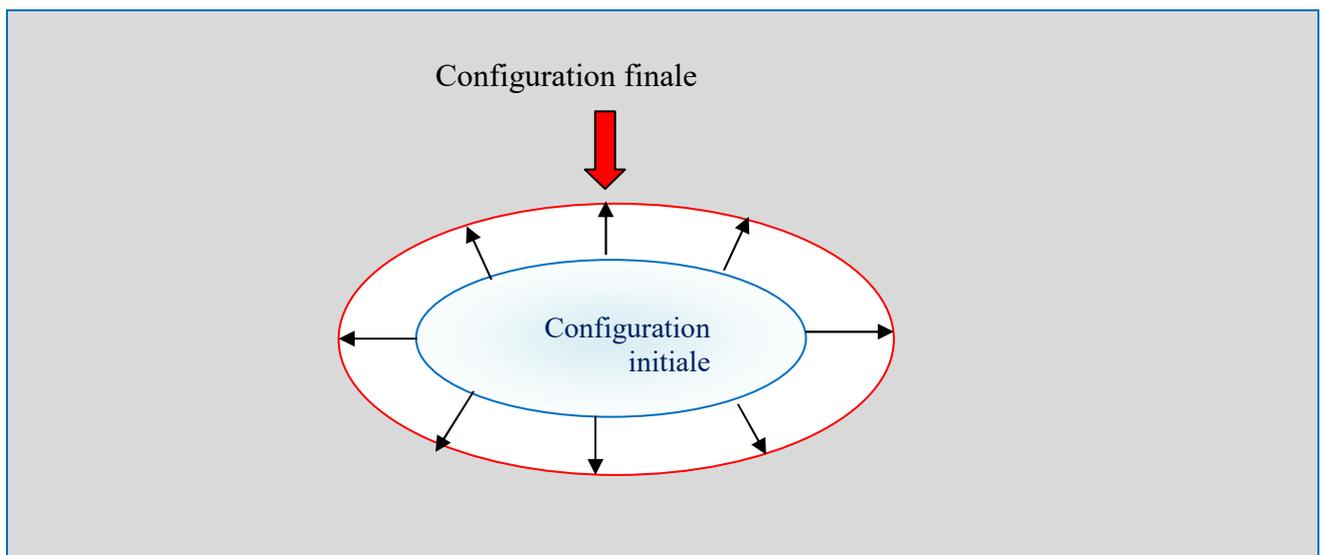
$$v_f = 0.5 + 0.75 = 1.25m^3$$

1.7. État particularisé de déformation :

1.7.1. Dilatation Uniforme :

Elle est définie par :

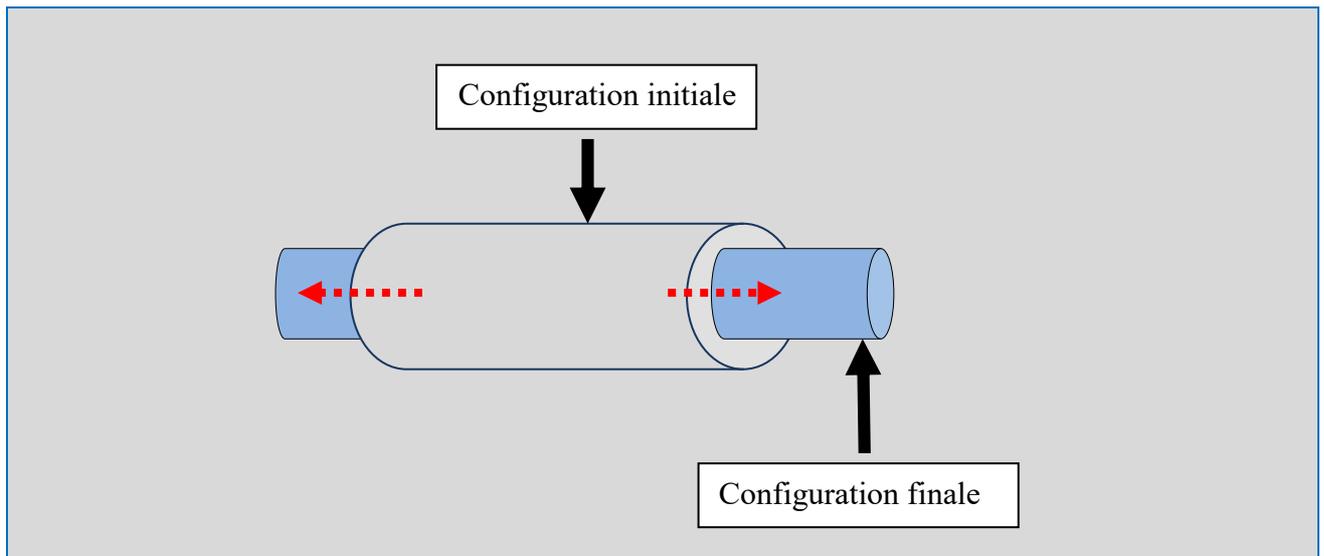
$$\alpha \neq 0 \Rightarrow [\varepsilon] = \alpha [I] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$



1.7.2. Extension Simple :

Dans la direction Ox (par exemple) :

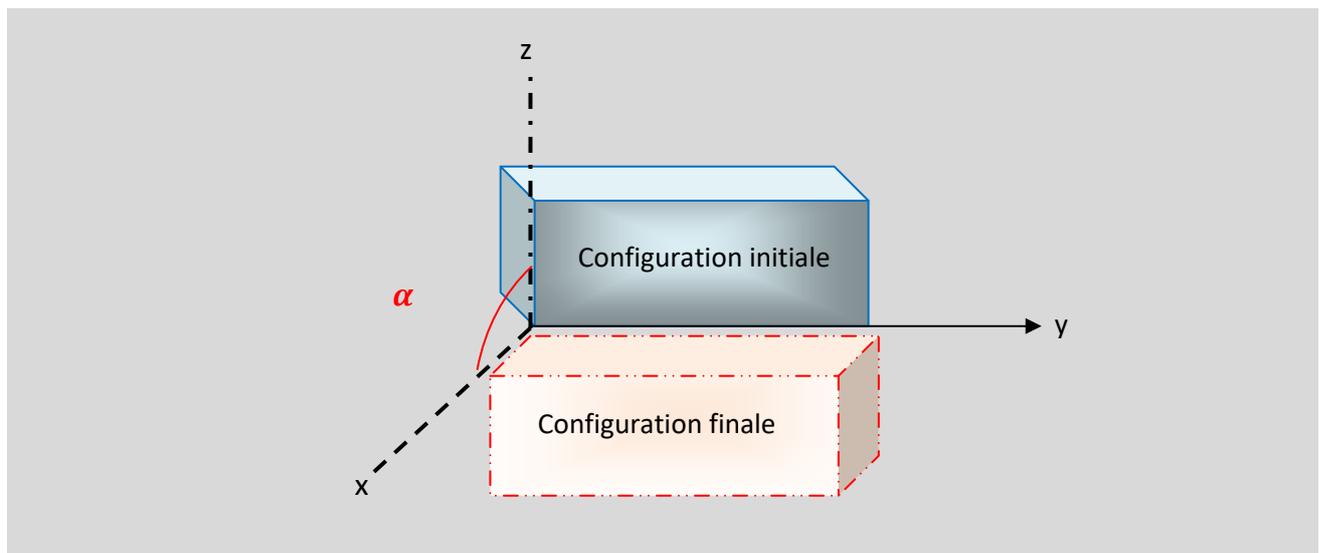
$$\alpha \neq 0 \Rightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



1.7.3. Glissement Simple :

Dans ce plan Oxy (par exemple) :

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



1.7.4. Déformation plans :

Dans le plan Oxy (par exemple) :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y) & \varepsilon_{xy}(x, y) & 0 \\ \varepsilon_{xy}(x, y) & \varepsilon_y(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice : 01

Soit un corps de hauteur H et de diamètre D (figure 01). Sous l'action de charges extérieures, les déplacements en tous points de ce cylindre sont définis par :

$$u_x = \frac{-1}{4}x$$

$$u_y = \frac{-1}{4}y$$

$$u_z = \frac{1}{7}z$$

1. Calculer le tenseur de déformations.
2. Calculer les déformations principales et les directions principales.
3. Déterminer la hauteur du cylindre déformé.
4. Déterminer le diamètre du cylindre déformé.

Solution:

1. Calcul le tenseur de déformations :

On a :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{-1}{4}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{-1}{4}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{7}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

2. Calcul les déformations principales :

On a :

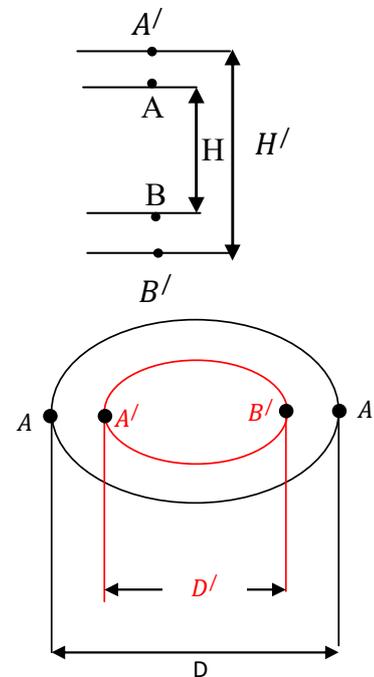
$$\varepsilon_{p1} = \frac{-1}{4}, \quad \varepsilon_{p2} = \frac{-1}{4}, \quad \varepsilon_{p3} = \frac{1}{7}$$

Détermination de \vec{n}_1 :

$$\text{D'après la formule : } (\varepsilon_{xyz} - \varepsilon_{p_i}) \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-11}{28} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-11}{28} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} n_x = 0 \\ n_y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Et } n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z = \pm 1$$



Ainsi : $n_1 = \pm \vec{e}_z$

3. Calcul la hauteur du cylindre déformé H'

Par définition $\varepsilon_z = \frac{\Delta H}{H} = \frac{H' - H}{H} = \frac{1}{7}$

$$\Rightarrow H' = \frac{8}{7} \times H$$

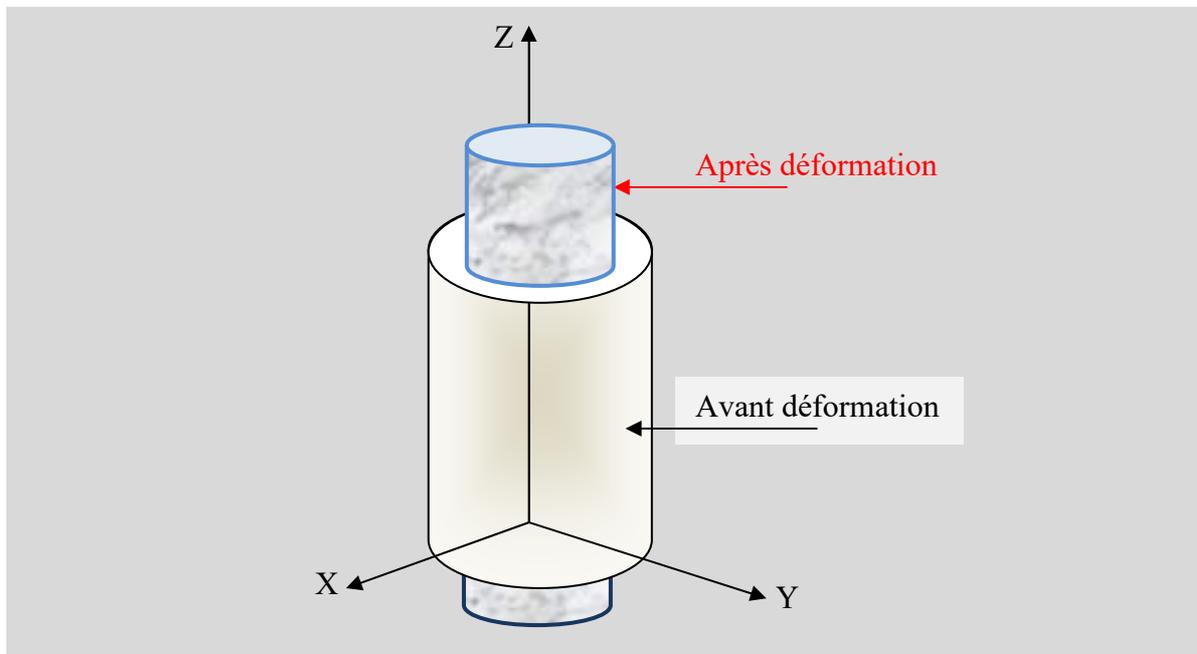
4. Calcul le diamètre du cylindre déformé D' :

Par définition $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_r = \frac{\Delta D}{D} = \frac{D' - D}{D} = -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow D' = \frac{3}{4} \times D$$

5. Calcul la dilatation volumique du cylindre

On a : $e = e_1 + e_2 + e_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{-5}{14}$



Exercice: 02

Soit le vecteur de déplacements de composantes :

$$u_x = 2\alpha x - \alpha\beta x + 2\alpha\beta y - 2\alpha y$$

$$u_y = \beta^2 y - 2\beta x + 2x$$

$$u_z = \alpha\beta z$$

1. Calculer le tenseur des déformations.
2. Ecrire les conditions α et β pour que le tenseur des déformations décrit une dilatation uniforme.
3. Écrire les conditions sur α et β pour que le tenseur des déformations décrit un glissement simple dans le plan (o_{xyz}) .

Solution :

1. Calcul tenseur de déformation :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 2\alpha - \alpha\beta$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \beta^2$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \alpha\beta$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (2\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 2) = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 2\alpha - \alpha\beta & \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 & 0 \\ \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix}$$

2. Détermination de α, β pour une dilatation unique :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

On doit avoir :

$$2\alpha - \alpha\beta = \beta^2 = \alpha\beta \neq 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) \Rightarrow \beta^2 = \alpha\beta \Rightarrow \alpha = \beta \neq 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha - \alpha^2 = \alpha^2 \Rightarrow \alpha \neq 0 \text{ ou bien } \alpha = 1$$

$$(2) \Rightarrow \alpha = \beta = 1$$

3. Détermination de α, β pour un glissement simple dans le plan (o_{xyz}) :

$$4. \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On doit avoir :

$$2\alpha - \alpha\beta = \beta^2 = \alpha\beta = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 \neq 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$(3) \Rightarrow \beta^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha - \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

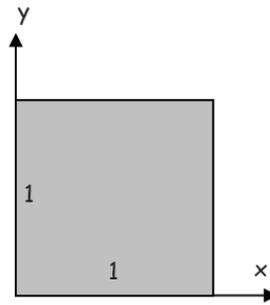
Exercice : 03

Considérons le carré infiniment petit, du côté unité, dans les axes xy .

Les déformations dans le plan x, y valent :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 50 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{xy} = -100 \times 10^{-6}$$



1. Tracer la figure déformée du carré.
2. Déterminer les éléments principaux de la déformation.
3. Tracer la figure déformée d'un carré isolé dans les axes principaux et de côté $\sqrt{2}$

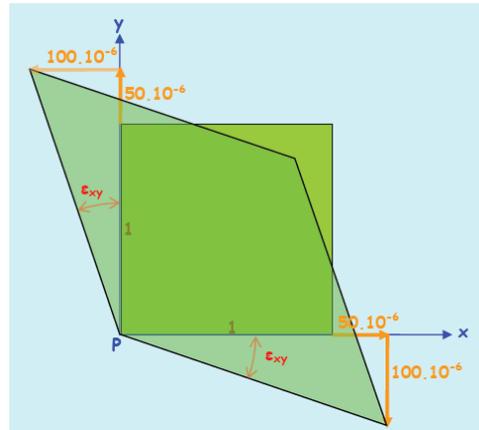
Solution :

Matrice de déformation

$$[\varepsilon]_{xyz}^p = a \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Dans notre cas

$$[\varepsilon]_{xyz}^p = a \begin{bmatrix} 50 & -100 & 0 \\ -100 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} \text{ avec } l = 1 \Rightarrow \Delta l = \varepsilon_{xx} \times 1$$

De même pour ε_{yy}

Le carré se transforme après déformation en un parallélogramme.

L'angle initialement droit entre les axes x et y vaut après déformation :

$$\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon_{xy}$$

Éléments principaux de la déformation :

$$[\varepsilon]_{xyz}^p = \begin{bmatrix} 50 & -100 & 0 \\ -100 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

La direction z est principale et $\varepsilon_z = \varepsilon_{xx}$

Les autres valeurs propres sont données par :

$$\varepsilon_X^Y = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}$$

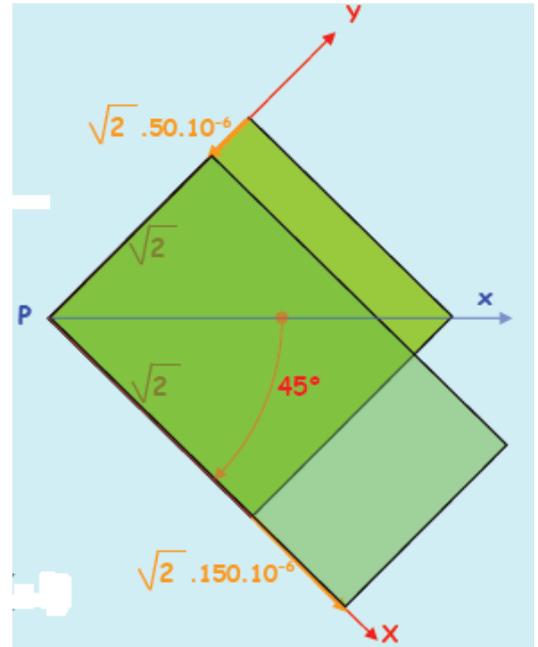
$$\varepsilon_X = 150$$

$$\varepsilon_Y = -50$$

La direction propre X est calculée par :

$$\tan \varphi = \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} = -1 \Rightarrow \varphi = -45^\circ$$

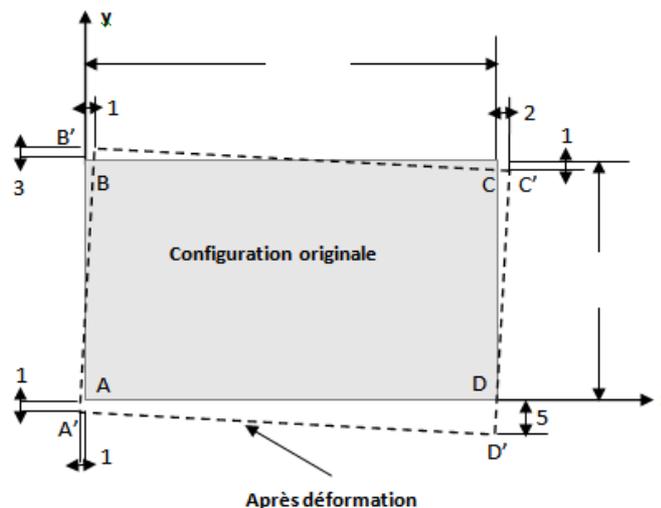
$$[\varepsilon]_{XYZ}^p = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



Exercice 6

Une plaque mince rectangulaire ABCD se déforme uniformément dans son propre plan en A'B'C'D'.

1. Déterminer l'état de déformation au point A en relation avec le système d'axes (x, y).
2. Quelle est la déformation normale maximale au point A.



Solution :

1. l'état de déformation au point A

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_D - u_A}{AD} = \frac{0 - (-1)}{150} = \frac{1}{150}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_B - v_A}{AB} = \frac{3 - (-1)}{100} = \frac{4}{100}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v_D - v_A}{AD} + \frac{u_B - u_A}{AB} = \frac{-5 - (-1)}{150} + \frac{1 - (-1)}{100} = -\frac{1}{150}$$

2. déformations principales :

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{150} + \frac{4}{100} \right) = \frac{7}{300}$$

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{150} - \frac{4}{100} \right) = \frac{-5}{300}$$

$$\varepsilon_{P1} = \frac{7}{300} + \sqrt{\left(\frac{5}{300}\right)^2 + \left(\frac{-1}{300}\right)^2} = 40.33 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{P2} = 6.34 \cdot 10^{-3}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-1}{\frac{300}{-5}} = 0.20 \Rightarrow 2\theta_p = 11.3^\circ - 180^\circ = -168.7^\circ$$

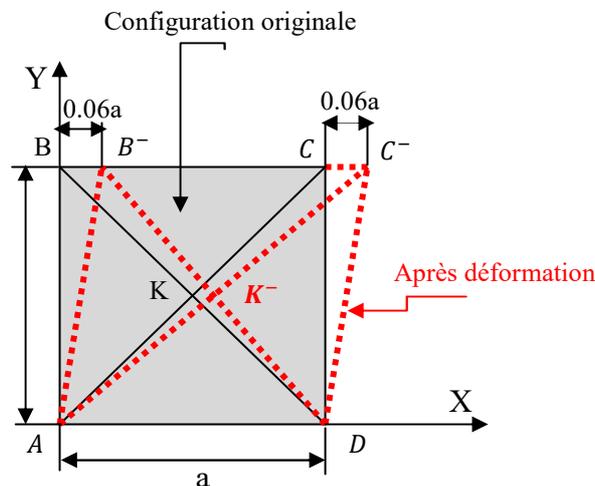
$$\Rightarrow \theta_p = -84.3^\circ$$

Exercice : 04

On trace deux lignes diagonales sur un bloc de caoutchouc ABCD de section carrée (côté = a).

Le bloc se déforme uniformément en AB^-C^-D .

1. Déterminer la déformation normale subie par chaque diagonale ainsi que la longueur finale qui y correspond.
2. Déterminer le changement d'angle entre les diagonales après déformations.



Solution :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 + \frac{0.06a}{a} = 0.06 \text{ m/m}$$

a) Déformation normale de AC

$$\varepsilon_{AC} = 0 + 0 + \frac{0.06}{2} \sin(2 \times 45^\circ) = 0.03 \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

$$\varepsilon_{BD} = 0 + 0 - \frac{0.06}{2} \sin 90^\circ = -0.03 \text{ m/m}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{AC} + \varepsilon_{BD} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

$$AC^- = AC + \varepsilon_{AC} \times AC = AC \times (1 + \varepsilon_{AC}) = a\sqrt{2} \times (1 + 0.03) = 1.4566a$$

$$B^-D = BD + \varepsilon_{BD} \times BD = BD \times (1 + \varepsilon_{BD}) = a \times \sqrt{2}(1 - 0.03) = 1.371a$$

b) Le changement d'angle est calculé à partir de γ_{nt} :

$$\frac{\gamma_{nt}}{2} = 0 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \times \cos(2 \times 45^\circ) = 0$$

Donc il n'y a pas de changement d'angle entre les deux diagonales après déformation.

Exercice : 05

Les composantes du champ de déplacements en un point $P(x_1, x_2, x_3)$ sont :

$$u_1 = ax_1,$$

$$u_2 = a(3x_2^2 + x_3^2),$$

$$u_3 = a(x_2^2 + 4x_3^2)$$

(a un réel)

1. Définir les composantes du tenseur gradient de déformations $\bar{\bar{G}}$.
2. En déduisant les tenseurs de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}$, et de rotation $\bar{\bar{\omega}}$.
3. Obtenir le tenseur de contraintes pour un solide isotrope au point $P_1(1,0,1)$.

$$(\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk})$$

4. Pour $a=0.02$ et au point P_1 déterminer graphiquement les déformations principales. (Sans tracer)
5. Quel est l'allongement unitaire au point P_1 suivant le vecteur $\vec{n}(0.6,0,0.8)$
6. Quelles est la variation d'angle au point P_1 entre les vecteurs \vec{n} et $\vec{t}(-0.8,0,0.6)$

Solution

Les composantes du champ de déplacements en un point $P(x_1, x_2, x_3)$ sont :

$$u_1 = ax_1,$$

$$u_2 = a(3x_2^2 + x_3^2),$$

$$u_3 = a(x_2^2 + 4x_3^2) \quad (a \text{ un réel})$$

- 1) Définir les composantes du tenseur gradient de déformations $\bar{\bar{G}}$.

$$G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6x_2 & 2x_3 \\ 0 & 2x_2 & 8x_3 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6x_2 & 2x_3 \\ 0 & 2x_2 & 8x_3 \end{bmatrix}$$

- 2) Le tenseur de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}$, et de rotation $\bar{\bar{\omega}}$

On a :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{G + G^T}{2}$$

$$\bar{\bar{\omega}} = (G - G^T)/2$$

On obtient :

- 3) Tenseur de contrainte pour un solide isotrope au point $P_1(1,0,1)$:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\text{On a } \bar{\bar{\varepsilon}}(P) = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ on aboutit à : } \bar{\bar{\sigma}}(P) = a \begin{bmatrix} 2\lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 2\mu \\ 0 & 2\mu & 2\lambda + 16\mu \end{bmatrix}$$

Pour $a=0.02$ et au point P_1 déterminer graphiquement les déformations principales.

$$\text{Pour } B=0.1 \text{ on a : } \bar{\bar{\varepsilon}}(P) = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0.16 \end{bmatrix}$$

Donc $\varepsilon_1=0.02$ est une déformation principale, $A(\varepsilon_{22}, \varepsilon_{23})$ ou $A(0,0.02)$, $B(\varepsilon_{33}, -\varepsilon_{23})$ ou $B(0.16, 0.02)$

L'intersection du cercle de MOHR avec l'axe des abscisses donne les valeurs principales :

$$\varepsilon_1 = 0.1624$$

$$\varepsilon_3 = -2.46 \cdot 10^{-3}$$

- 4) l'allongement unitaire au point P_1 suivant le vecteur $\vec{n}(0.6,0,0.8)$:

$$\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{ij} n_i n_j = \vec{n} \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{n}$$

$$\text{Donc : } \varepsilon_{nn} = 0.1096$$

- 5) la variation d'angle au point P_1 entre les vecteurs \vec{n} et $\vec{t}(-0.8,0,0.6)$:

$$\text{On a } \vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \text{ donc } \delta\theta = 2\vec{t} \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{n} \text{ on obtient } \delta\theta = -0.13 \text{ rad}$$

Exercice : 06

Le vecteur de déplacement en un point quelconque $M(x, y, z)$ d'un corps est donné par ses composantes.

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = 6z - 2xy \\ w = -z^2 \end{cases}$$

Déterminer les déformations et les directions principales.

Exercice : 07

Les composantes du champ de déplacements en un point $P(x_1, x_2, x_3)$ sont :

$$u_1 = ax_1, u_2 = a(3x_2^2 + x_3^2), u_3 = a(x_2^2 + 4x_3^2) \quad (a \text{ un réel})$$

1. Définir les composantes du tenseur gradient de déformations $\bar{\bar{G}}$.
2. En déduire les tenseurs de déformation $\bar{\bar{\epsilon}}$, et de rotation $\bar{\bar{\omega}}$.
3. Pour $a=0.02$ et au point $P_1(1, 0, 1)$, déterminer graphiquement les déformations principales.
4. Quel est l'allongement unitaire au point P_1 suivant le vecteur $\vec{n}(0.6, 0, 0.8)$?

Quelles est la variation d'angle au point P_1 entre les vecteurs \vec{n} et $\vec{t}(-0.8, 0, 0.6)$?

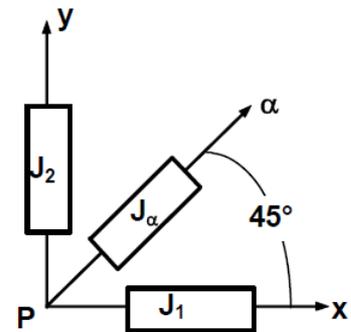
Exercice : 08

On considère un point P à la surface d'un corps en un endroit où ne s'applique aucune force extérieure. Les résultats enregistrés sur chaque jauge d'une rosette à 45° collée dans le plan tangent en P sont respectivement :

Jauge J_1 : $950 \mu\text{d}$

Jauge J_α : $-175 \mu\text{d}$

Jauge J_B : $-475 \mu\text{d}$



1. Quels sont les éléments principaux de la déformation.
2. Dans quelle direction α' enregistrerait-on une dilatation linéaire nulle ?
3. Dans quel système d'axes enregistrerait-on une distorsion extremum ?

Chapitre 05

Relations contraintes-déformations

5.1. Introduction

Les lois de comportement, également appelées lois de matériaux, décrivent mathématiquement le comportement d'un matériau en réponse à des contraintes externes telles que la tension, la compression, la torsion, etc. La loi de comportement la plus fondamentale est la loi de Hooke, qui s'applique aux matériaux élastiques et énonce que la contrainte est proportionnelle à la déformation (contrainte = module de Young \times déformation). L'actuel chapitre s'intéresse au développement de ces relations généralement appelées les lois de comportement ou équations de constitution du milieu élastique où les déformations sont généralement petites, permettant ainsi l'utilisation de l'approximation des petites déformations.

5.2. Rappel

- **Essai de traction**

L'essai consiste à exercer sur une éprouvette de forme cylindrique ou parallélépipède (plate) des forces croissantes qui vont la déformer progressivement, puis la rompre.

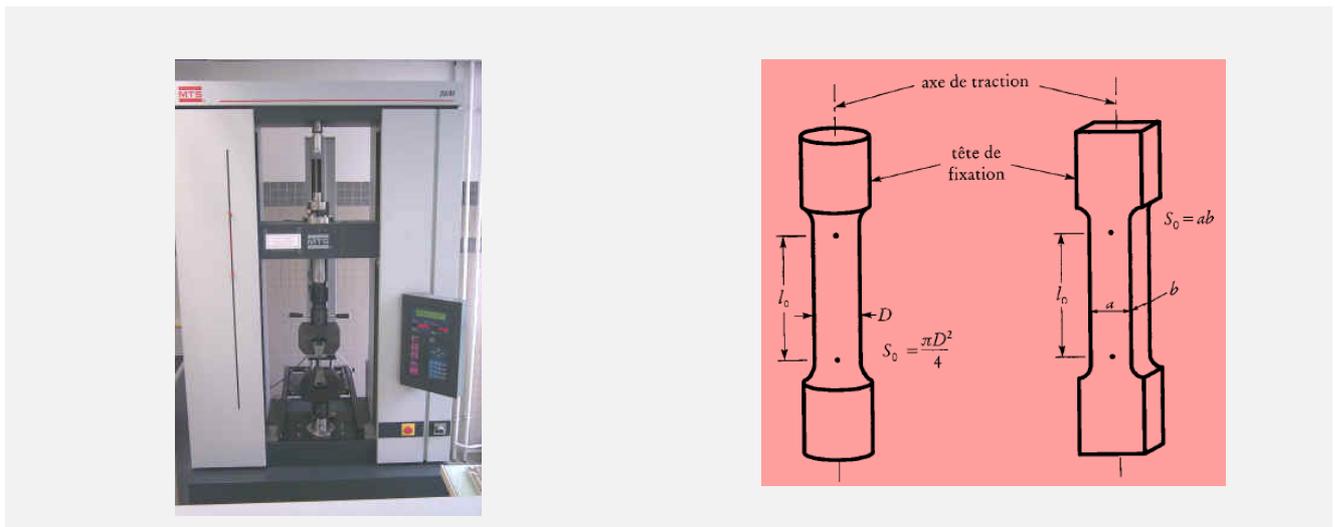


Figure.1 : Machine de traction

5.2.1 Courbe contrainte – déformation

L'essai de traction fournit un diagramme donnant la force appliquée à l'éprouvette en fonction de son allongement (Figure 2), et cela d'habitude pour une vitesse de traverse constante. Dans le cas général, on observe une partie rectiligne correspondant au domaine d'élasticité, le domaine de déformation plastique uniforme, un maximum correspondant à la charge maximale supportée par l'éprouvette, appelée couramment charge de rupture, le domaine de striction dans lequel les déformations se localisent dans une zone limitée dont la section diminue rapidement, et finalement la rupture de l'éprouvette.

Cet essai permet de définir les paramètres importants que sont la limite élastique R_e , conventionnelle à 0,2 % ou non (MPa), la résistance à la traction R_m (MPa) et l'allongement A (élongation) (%) (Figure 2).

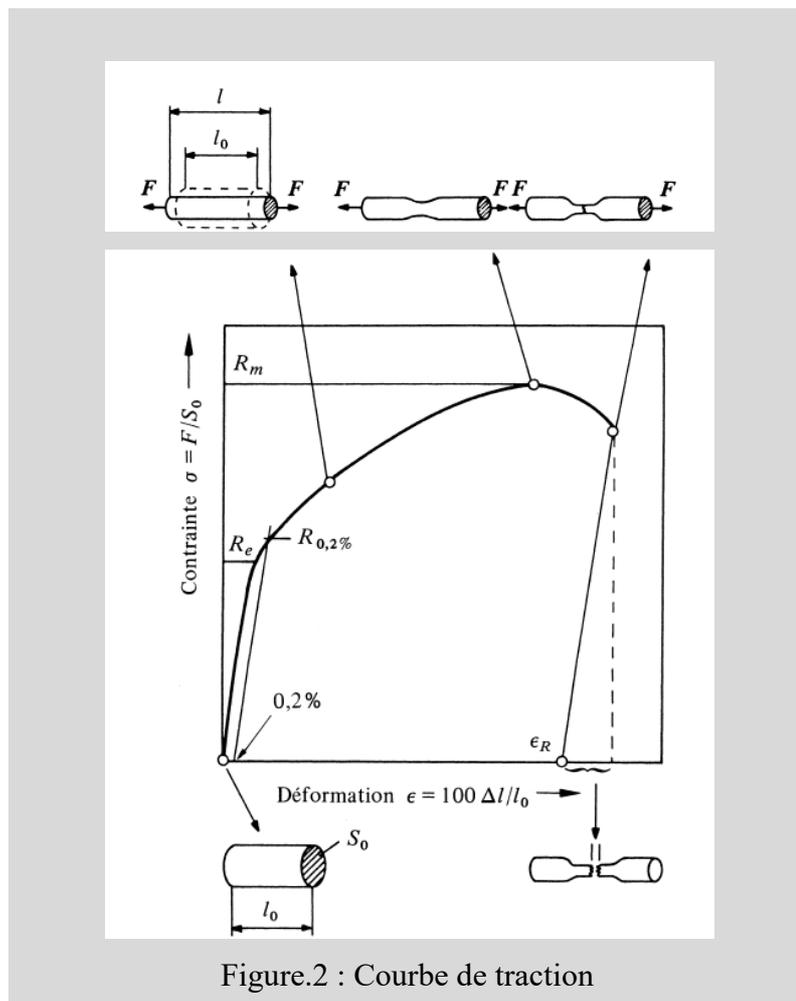
Une courbe de traction (Figure 1 a, cas d'un acier doux) se compose de deux parties.

- La première rectiligne correspond au domaine élastique ; la contrainte varie linéairement avec la déformation suivant la loi de Hooke :

$$\sigma = k \times \epsilon \dots\dots\dots(1)$$

Le coefficient de proportionnalité K étant, à une constante près, le module élastique E ou module de Young.

- La seconde partie est le domaine plastique : la courbe a souvent une allure parabolique, sans que cela soit général. L'essai se termine par la rupture (R) de l'éprouvette. La vitesse de déformation doit être lente (une déformation rationnelle ne pouvant dépasser 0,1).



5.2.2. Relation entre contraintes et déformations

Dans ce qui suit, nous étudierons la relation entre contraintes et déformations. Pour de très petites déformations. Cette relation est traduite par l'expression qui connaît le nom de la loi de Hooke :

$$\sigma = E \times \varepsilon$$

Avec :

σ : contrainte (Mpa)

ε : Déformation

E : Module de young (Mpa)

Remarque :

1. Il est noté que cette relation n'est valable que dans le domaine de l'élasticité.
2. Dans le cas d'un élément à 3 dimensions soumis à une contrainte uniaxiale suivant l'axe (o_x). La loi de Hooke sera donnée par l'expression suivante :

Loi de Hooke

$$\sigma_x = E \times \varepsilon_x$$

- selon (o_y): $\sigma_y = E \times \varepsilon_y$
- selon (o_z): $\sigma_z = E \times \varepsilon_z$

On réalité la déformation ε dans le cas tridimensionnels est toujours accompagnée des déformations latérale par la relation :

Déformation ε

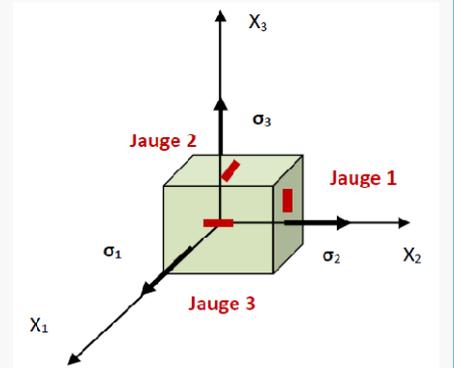
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Avec ν : coefficient de poisson

5.3. Loi de Hooke généralisée

Approche expérimentale :

Considérons un barreau conçu à partir d'un matériau élastique isotrope. On le soumet à un essai de traction triaxial. Ce barreau est équipé de 3 jauges extensiométriques qui ont pour but de mesurer les déformations selon les trois directions (x_1, x_2, x_3) .



- **Jauge 1** : enregistre les déformations suivant la direction 3
- **Jauge 2** : enregistre les déformations suivant la direction 1
- **Jauge 3** : enregistre les déformations suivant la direction 2

Constatations

Jauge N° 2 : Le matériau s'allonge dans la direction (\vec{x}_1) selon le principe de la loi de Hooke :

$$\sigma_x = E \times \varepsilon_x$$

$$\text{Ainsi : } \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

On remarque aussi des contractions enregistrées par les deux autres jauges latérales (**Jauge n° 1** et **Jauge n° 3**).

Alors :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

On peut conclure qu'une contrainte (σ_x) provoque à la fois les déformations (ε_x) , (ε_y) et (ε_z) .

Dans ce cas, le tenseur de contrainte dû à la première sollicitation (σ_x) est de la forme :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur de déformation engendré est de la forme :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \times \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \sigma_x \end{bmatrix}$$

Si on réalise des essais dans les deux autres directions (\vec{x}_2) et (\vec{x}_3) on obtient un résultat similaire à un indice près, et la superposition des trois essais de traction donne :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

Ces équations traduisent la loi de Hooke en axes principaux.

De même, une contrainte de cisaillement τ_{ij} qui agit seule sur une facette quelconque d'un corps produira une déformation angulaire γ_{ij}

Ces équations traduisent la loi de Hooke en axes principaux.

$$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$$

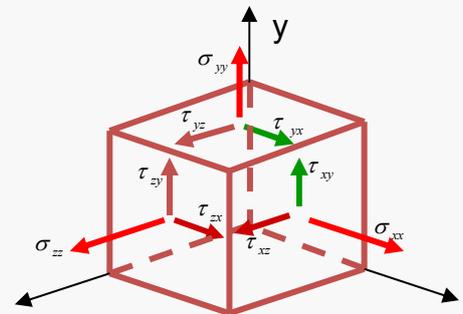
Où G est le module d'élasticité en cisaillement.

$$\text{On a en général } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Finalement, les relations entre contraintes et déformations pour un solide élastique linéaire sont données par les 6 équations suivantes, qui représentent la **loi de Hooke généralisée** :

5.4. Loi de Hooke Généralisée

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{aligned}$$



Si on additionne membre à membre ces équations on aura :

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Si on pose $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \theta$ représente la trace du tenseur des contraintes et $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_v$ représente la dilatation cubique on aura :

$$\varepsilon_v = \theta \frac{(1 - 2\nu)}{E}$$

Dans le cas d'une pression hydrostatique uniforme de valeur P on a :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$$

$$\text{Et } \varepsilon_v = -3 \frac{(1-2\nu)}{E} P$$

Qui représente la relation entre la dilatation cubique ε_v et la pression hydrostatique P .

La quantité : $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ est alors appelée module de dilatation cubique (*Bulk modulus*)

5.5. Représentation matricielle :

Les 6 équations données $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ et γ_{zx} peuvent être réduites à une seule équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

5.6. Relations contraintes - déformations

On inverse les équations ci-dessus, on obtient :

$$\sigma_x = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right] \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\sigma_z = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right] \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v \dots \dots \dots (1)$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 2G\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_v \dots \dots \dots (2)$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_v \dots \dots \dots (3)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \dots \dots \dots (4)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \dots \dots \dots (5)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \dots \dots \dots (6)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Les six (06) équations sont appelés 'équations de LAME

λ et G Sont appelées constantes de LAME

ε_v Représente la dilatation cubique où bien l'invariant des déformations.

En additionnant membre à membre les équations (1.à 6), on aura :

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda\varepsilon_v + 2G (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\theta = (3\lambda + 2G)\varepsilon_v$$

En posant $K = \frac{(3\lambda+2G)}{3}$ on aura :

$$\theta = 3K\varepsilon_v$$

Cette équation exprime la relation entre la trace du tenseur des contraintes et celle du tenseur des déformations.

K est appelé module d'expansion volumique.

5.7. Représentation matricielle

$$[\sigma] = 2G[\varepsilon] + \lambda \text{tr}(\varepsilon)[I]$$

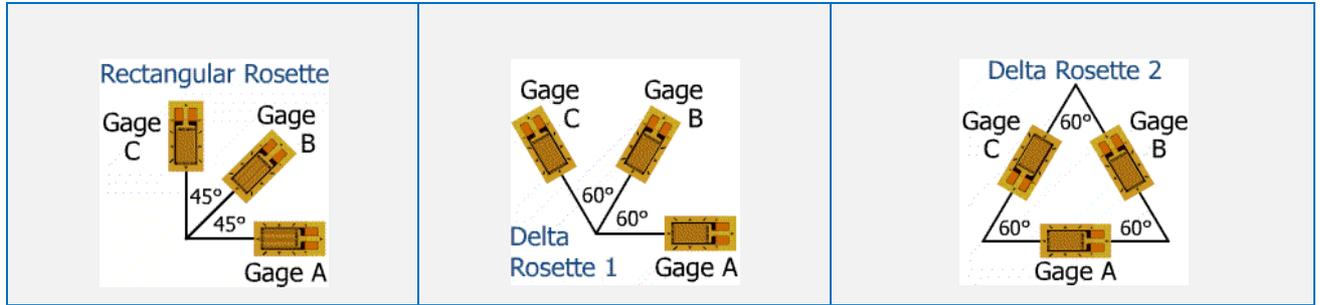
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2G + \lambda) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (2G + \lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (2G + \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

5.8. Jauges de contraintes

La mesure des déformations en un point (M) est généralement réalisée par un ensemble de trois jauges (A, B, C) encore appelées **rosette**. Les jauges sont collées sur la surface (libre) de la structure ou de l'objet et, sous charge, suivent les déformations de celui-ci. Les déformations mesurées sont uniquement celles du plan des jauges. S'il n'y a pas de contraintes en surface (pression superficielle, etc.), les jauges supportent un état de contraintes planes et non pas un état de déformations planes (voir figure). De plus, la normale (ou la perpendiculaire) à la surface est l'axe principal des déformations.

Si les jauges ne mesurent pas les déformations selon cet axe, néanmoins ces déformations n'affectent pas celles réalisées dans le plan des jauges.

Dans le cas général, les jauges sont orientées dans trois directions définies par les angles $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ et permettent de mesurer les déformations $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ et ε_C suivant ces directions. À partir de ces valeurs et des équations de transformation du paragraphe II, il est possible d'obtenir les déformations $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ et γ_{xy} et les déformations principales au point M. On obtient :



$$\varepsilon_A = \varepsilon_x \cos^2\theta_A + \varepsilon_y \sin^2\theta_A + \gamma_{xy}\theta_A \cos\theta_A \dots \dots \dots (1)$$

$$\varepsilon_B = \varepsilon_x \cos^2\theta_B + \varepsilon_y \sin^2\theta_B + \gamma_{xy}\theta_B \cos\theta_B \dots \dots \dots (2)$$

$$\varepsilon_C = \varepsilon_x \cos^2\theta_C + \varepsilon_y \sin^2\theta_C + \gamma_{xy}\theta_C \cos\theta_C \dots \dots \dots (3)$$

Les valeurs de $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ et ε_z , sont obtenues en résolvant le système de trois équations (1) (2) et (3) à trois inconnues. Les jauges sont souvent collées dans des directions à 45° ou à 60°, ce qui simplifie les équations précédentes.

Exercice 01 :

En un point de la surface d'un solide soumis à un chargement, on a mesuré les déformations suivantes, dans deux directions perpendiculaires O_x et O_y :

$$\varepsilon_x = 210 \times 10^{-6} m/m \quad (210 \mu m/m)$$

$$\varepsilon_y = -400 \times 10^{-6} m/m \quad (-400 \mu m/m)$$

$$\gamma_{xy} = 180 \times 10^{-6} m/m \quad (180 \mu m/m)$$

1. En déduire, pour l'acier ($E = 200 GPa, \nu = 1/3$), les contraintes correspondantes :

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}$$

2. Trouver les directions et contraintes principales ainsi que le cisaillement maximum.

Solution :

1. Les lois constitutives donnent les contraintes en fonction des déformations :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = 17.25 \text{ MPa} \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = -74.2 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = 13.5 \text{ MPa} \end{cases}$$

2. Directions et contraintes principales ainsi que le cisaillement maximum :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -28.475 \pm 47.67$$

$$\text{Soit } \sigma_1 = 19.2 \text{ MPa} ; \quad \sigma_2 = -76.1 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 47.67 \text{ MPa}$$

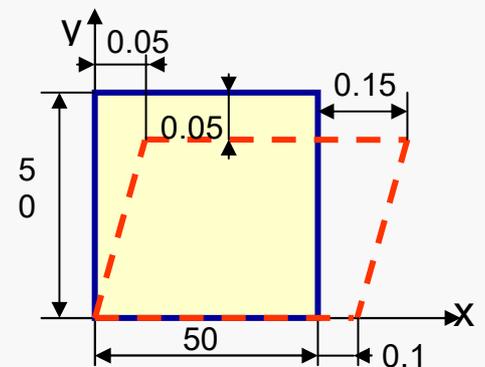
$$\text{tg } 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 0.295 \Rightarrow \theta_1 = 8.22^\circ ; \quad \theta_2 = 98.22^\circ$$

Exercice 01 :

On a dessiné sur une plaque mince un carré de 50 mm x 50 mm .

Après déformation le carré a la forme ci-contre (fortement exagérée).

1. Calculer les déformations unitaires
2. En déduire les contraintes au point en question pour calculer les directions et les contraintes principales.

**Solution :**

$$\varepsilon_x = \frac{0.1}{50} = 0.002$$

$$\varepsilon_y = -\frac{0.05}{50} = -0.001$$

$$\gamma_{xy} = \frac{0.05}{50} = 0.001$$

1. Calcul des contraintes en un point :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = 131 \text{ MPa} \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = -26.25 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = 26.25 \text{ MPa} \end{cases}$$

2. Directions et contraintes principales :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 52.37 \pm 82.89$$

$$\text{Soit } \sigma_1 = 135.26 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_2 = -30.52 \text{ MPa}$$

$$\text{tg}2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 0.333 \Rightarrow \theta_1 = 9.23^\circ \quad ; \quad \theta_2 = 99.23^\circ$$

Exercice 3 :

A l'aide d'une rosette delta (à 120°) collée à la surface d'une pièce, on a trouvé les déformations suivantes:

$$\varepsilon_0 = 0.001 \quad ; \quad \varepsilon_{60} = -0.003 \quad ; \quad \varepsilon_{120} = 0.007 \quad (m/m)$$

1. Calculer les déformations et les directions principales. Représenter le cercle de MOHR au point considéré.

Solution:

a) Solution analytique :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \times 0^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \times 0^\circ) = \varepsilon_x = 0.001 \\ \varepsilon_{60} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \times 60^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \times 60^\circ) = -0.003 \\ \varepsilon_{120} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \times 120^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \times 120^\circ) = 0.007 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -0.003 \\ \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.007 \end{cases}$$

On remplace ε_x par sa valeur 0.001, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon_x + 3\varepsilon_y + \sqrt{3}\gamma_{xy} = -0.012 \\ \varepsilon_x + 3\varepsilon_y - \sqrt{3}\gamma_{xy} = 0.028 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\varepsilon_y + \sqrt{3}\gamma_{xy} = -0.013 \\ 3\varepsilon_y - \sqrt{3}\gamma_{xy} = 0.027 \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} \varepsilon_x = 0.00100 \\ \varepsilon_y = 0.00233 \\ \gamma_{xy} = -0.01154 \end{cases}$$

b) Directions et déformations principales :

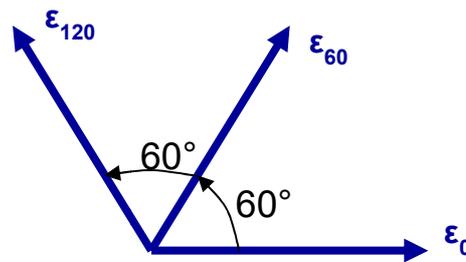
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = 1.665 \times 10^{-3} \pm 5.808 \times 10^{-3}$$

$$\text{Soit } \varepsilon_1 = 7.473 \times 10^{-3} \quad ; \quad \varepsilon_2 = -4.143 \times 10^{-3}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = 8.677 \Rightarrow \theta_1 = 41.71^\circ \quad ; \quad \theta_2 = 131.71^\circ$$

$$\gamma_{xy} = -0.01154 \text{ (négatif) donc } \theta = \theta_2 = 131.7^\circ = -48.3^\circ$$

b) Solution géométrique :



Plan physique

D'après les mesures on a :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 0.001 \\ \varepsilon_{60} = -0.003 \\ \varepsilon_{120} = 0.007 \end{cases}$$

D'après les formules de rosettes delta on a le cercle de MOHR de centre C et de rayon R avec :

$$\overline{OC} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{60} + \varepsilon_{120}}{3} = 1.67 \times 10^{-3}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon_0 - \varepsilon_{60} - \varepsilon_{120}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{120} - \varepsilon_{60}}{3}\right)^2} = 5.81 \times 10^{-3}$$

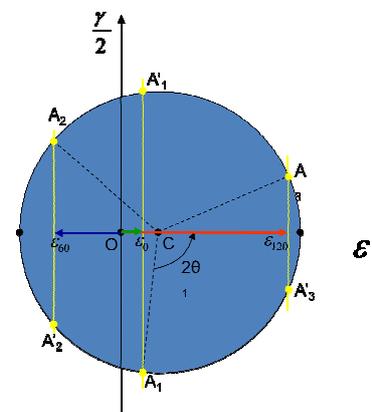
Déformations principales :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \overline{OC} + R = 7.48 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_2 = \overline{OC} - R = -4.14 \times 10^{-3} \end{cases}$$

Cercle de MOHR : (propriétés du cercle de MOHR)

Deux solutions possibles A_1, A_2, A_3 et A'_1, A'_2, A'_3 .

On choisit celle qui correspond au sens de rotation inverse du plan physique.



Plan physique :

$$0^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow 120^\circ \text{ sens trigon.}$$

Cercle de MOHR :

$$0^\circ \rightarrow 120^\circ \rightarrow 240^\circ \text{ sens horaire}$$

donc la solution est A_1, A_2, A_3

La direction principale est obtenue par rotation de $2\theta_1$ à partir de A_1 dans le sens trigo.

$$\cos 2\theta_1 = \frac{-\overline{OC} + \varepsilon_0}{R} = \frac{-1.67 + 1}{5.81} = -0.1153 \Rightarrow 2\theta_1 = 96.62^\circ \Rightarrow \theta_1 = 48.31^\circ$$

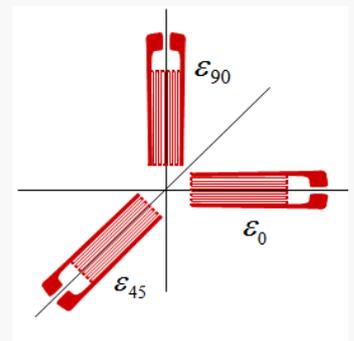
Exercice 04 :

Pour une rosette à 45° , trouver la relation entre les valeurs mesurées ($\varepsilon_0, \varepsilon_{45}, \varepsilon_{90}$) et les déformations principales ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) ainsi que les directions principales et le glissement maximum.

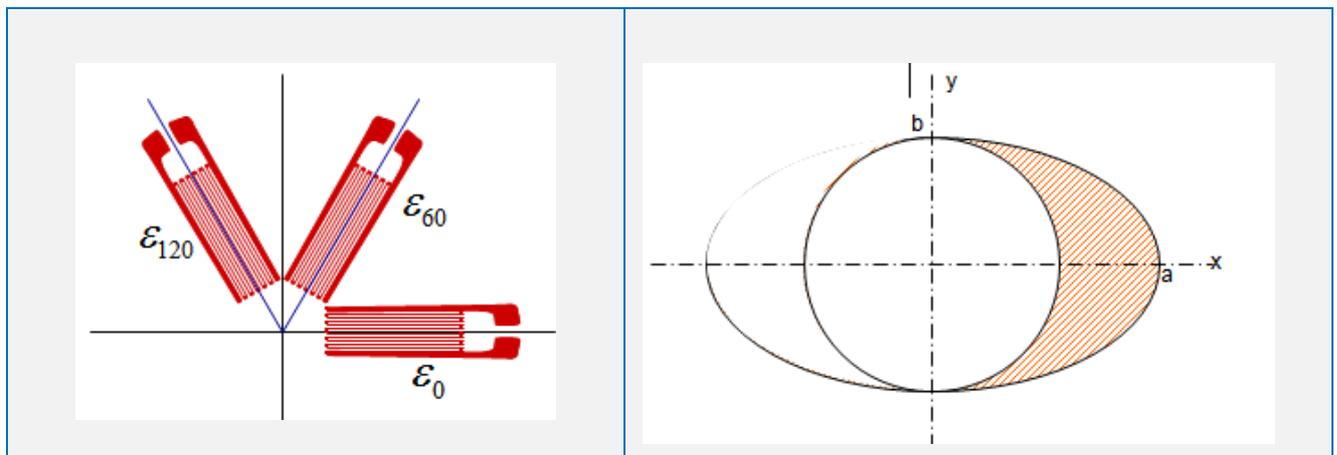
Application : si la rosette est collée sur une pièce en aluminium ($E = 71 \text{ GPa}, \nu = 1/3$)

- Calculer les contraintes principales σ_1 et σ_2 , si l'on a mesuré :

$$\varepsilon_0 = -3 \times 10^{-4} ; \varepsilon_{45} = 3.4 \times 10^{-4} ; \varepsilon_{90} = 6.1 \times 10^{-4} \text{ (m/m)}$$

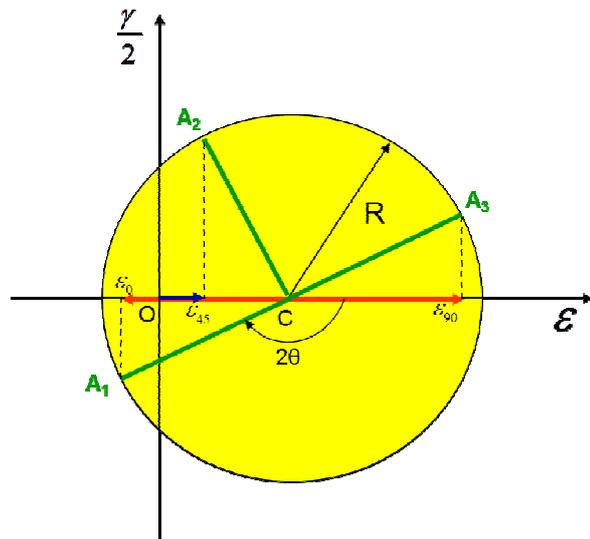


On suppose le problème résolu et on trace le cercle de MOHR du centre C et de rayon R. On place ε_0 correspond au point figuratif A_1 situé par l'angle 2θ . On en déduit les points figuratifs A_2 et A_3 qui sont respectivement à 90° et 180° de A_1 dans le sens horaire.



À partir du cercle de MOHR, on peut écrire

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \overline{OC} + R \cos 2\theta \\ \varepsilon_{45} = \overline{OC} + R \cos(2\theta + 90) \\ \varepsilon_{90} = \overline{OC} + R \cos(2\theta + 180) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \overline{OC} + R \cos 2\theta \\ \varepsilon_{45} = \overline{OC} - R \sin 2\theta \\ \varepsilon_{90} = \overline{OC} - R \cos 2\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{OC} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2} = 1.55 \times 10^{-4} \\ R = \sqrt{(\varepsilon_0 - \overline{OC})^2 + (\overline{OC} - \varepsilon_{45})^2} \end{cases}$$

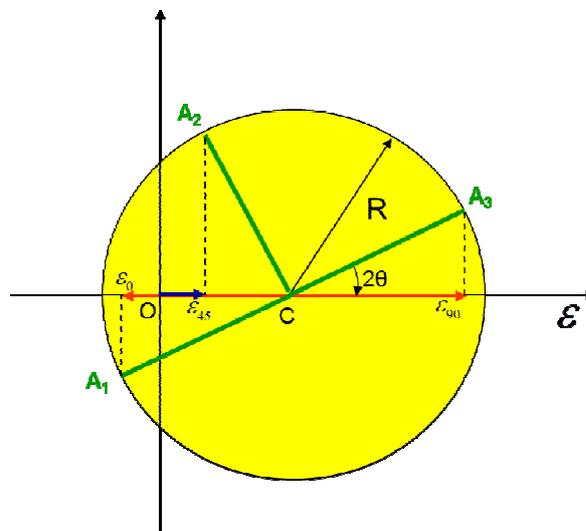
D'où $R = \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{90})^2 + (\varepsilon_0 + \varepsilon_{90} - 2\varepsilon_{45})^2} = 4.91 \times 10^{-4}$

Déformations principales:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \overline{OC} + R = 6.46 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_2 = \overline{OC} - R = -3.36 \times 10^{-4} \end{cases}$$

La direction principale est obtenue par rotation de 2θ à partir de A_3 dans le sens horaire.

$$\cos 2\theta = \frac{\varepsilon_{90} - \overline{OC}}{R} = \frac{6.1 - 1.55}{4.91} = 0.9267 \Rightarrow 2\theta = 22.076^\circ \Rightarrow \theta = 11.03^\circ$$



Calcul des contraintes principales :

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = 42.6 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) = -9.64 \text{ MPa}$$

Exercice 05

Une plaque mince en acier est dans un état de contrainte plane

donné par : $\sigma_x = 140 \text{ MPa}$; $\sigma_y = 55 \text{ MPa}$; $\tau_{xy} = 0$

Calculer la diminution d'épaisseur de la plaque Δe .

($E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$)

Epaisseur $e = 5 \text{ mm}$

Solution :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\Delta e}{e} \end{cases}$$

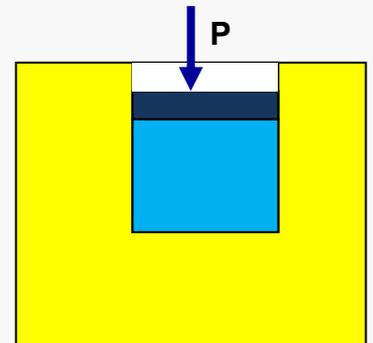
Donc :

$$\Delta e = e\varepsilon_z = -\frac{\nu e}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{5 \times 0.3}{200000}(140 + 55) = -1.46 \mu\text{m}$$

Exercice 06 :

Un cylindre de caoutchouc, de diamètre $d = 50 \text{ mm}$ est contenu dans un cylindre d'acier et soumis à une charge axiale $P = 5 \text{ kN}$ répartie uniformément sur la face supérieure.

Calculer la pression p entre caoutchouc et acier si l'on néglige la déformation de l'acier et si le coefficient de poisson du caoutchouc est ($\nu = 0.45$)



Solution :

Le bloc de caoutchouc est soumis à une pression uniforme p_0 sur ses faces planes et à une pression radiale p sur sa paroi cylindrique.

$$p_0 = \frac{P}{A} = \frac{4 \times 5000}{\pi \times 50^2} = 2.546 \text{ MPa}$$

$$\text{donc: } \sigma_z = -p_0 = -2.546 \text{ MPa}$$

La déformation transversale du bloc est empêchée par la paroi d'acier.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

Les axes x et y jouent le même rôle, donc $\sigma_x = \sigma_y$

La loi de Hooke en 3 dimensions:

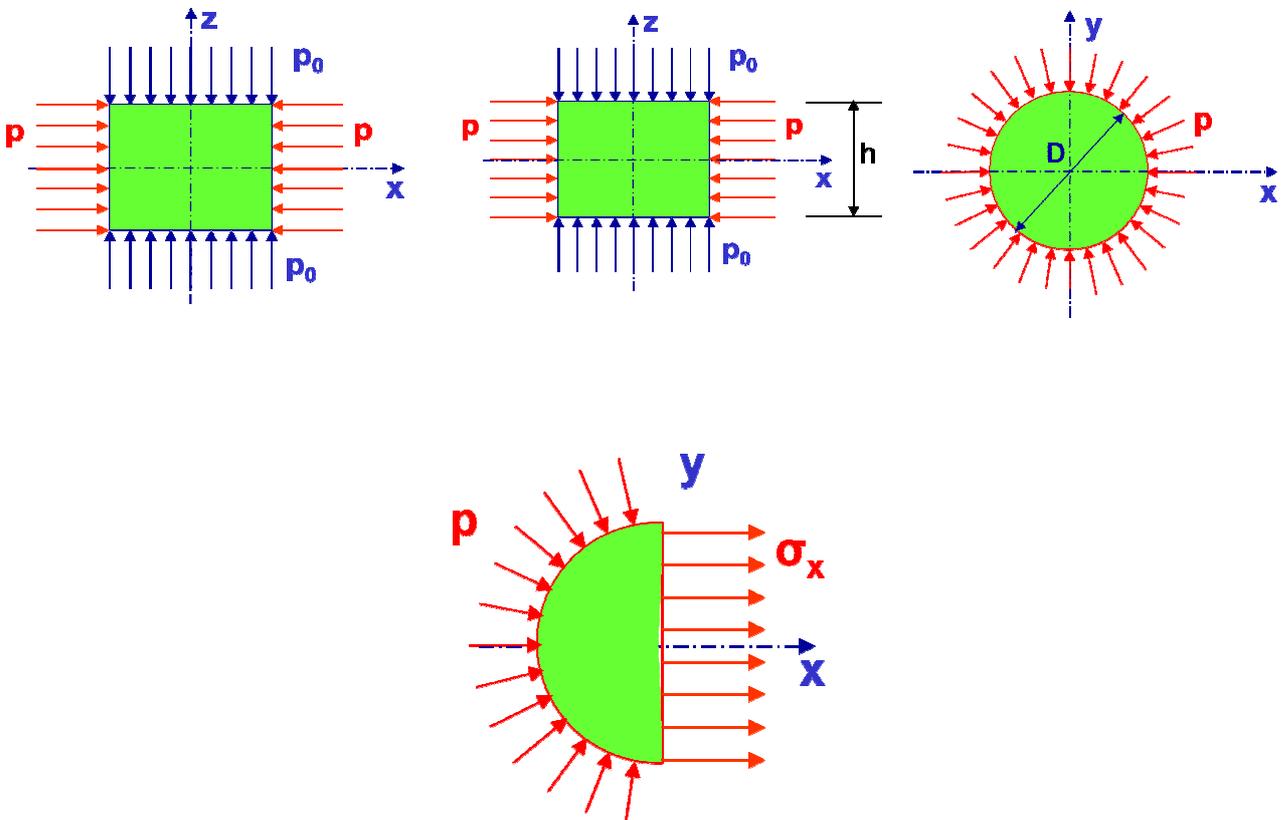
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

$$\text{Donc } \sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu\sigma_z}{1-\nu} = \text{cste}$$

L'équilibre du demi-cylindre suivant x donne:

$$\sigma_x \cdot D \cdot h + p \cdot D \cdot h = 0 \Rightarrow \sigma_x = -p$$

$$p = \frac{\nu}{1-\nu} p_0 = \frac{0.45}{1-0.45} 2.546 = 2.08 \text{ MPa}$$



Exercice 7:

Le bloc carré $abcd$, d'épaisseur e , est en aluminium ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) est soumis à un cisaillement uniforme τ sur chacune de ses faces ab , bc , cd et da . La face cd est fixe.

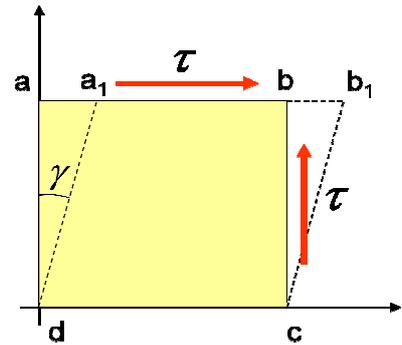
1. Calculer γ et l'allongement unitaire de la diagonale bd si $\tau = 70 \text{ MPa}$
2. Si $ad = 50 \text{ mm}$, calculer le glissement du côté ab par rapport à cd .
3. Montrer que la variation de volume ΔV du bloc $abcd$ est du 2^{ème} ordre par rapport aux déformations unitaires.

Solution:

a) Calcul de γ

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau = \frac{2(1+0.3)}{70 \times 10^9} 70 \times 10^6 = 2.6 \times 10^{-3}$$

$$\gamma = 2.6 \times 10^{-3} \text{ rad}$$



Cercle de MOHR des déformations :

La diagonale bd est à 45° des facettes sous cisaillement pur, sur le cercle de MOHR le point figuratif est à 90°.

$$\varepsilon_{bd} = \frac{\gamma}{2} = 1.3 \times 10^{-3}$$

b) Glissement du côté ab :

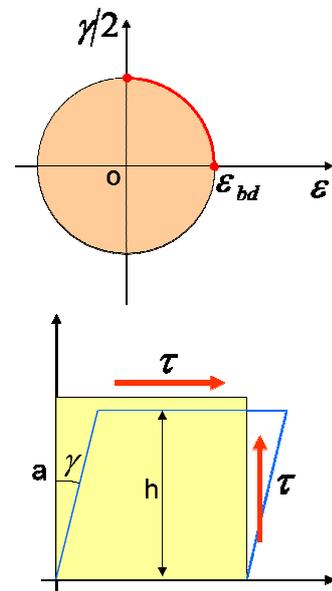
$$aa_1 = ad \times \gamma = 2.6 \times 10^{-3} \times 50 = 0.13 \text{ mm}$$

c) Changement de volume du bloc du côté a :

Volume initial: $V_i = ea^2$; Volume final: $V_f = ea^2 \cos \gamma$

$$\frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{\Delta V}{V_i} = -\frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow \Delta V = -\frac{\gamma^2}{2} V_i$$

La variation ΔV du volume est du 2^{ème} ordre par rapport à γ



Exercice 8 :

On a collé 2 jauges de déformation à la surface d'un joint de tuyauterie fileté. Une fois le joint serré, la jauge axiale donne $\varepsilon_x = 0.001$, et la jauge circonférentielle $\varepsilon_y = 0.0004$.

- Pour de l'acier ($E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$), calculer la contrainte circonférentielle.

Solution:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \end{cases}$$

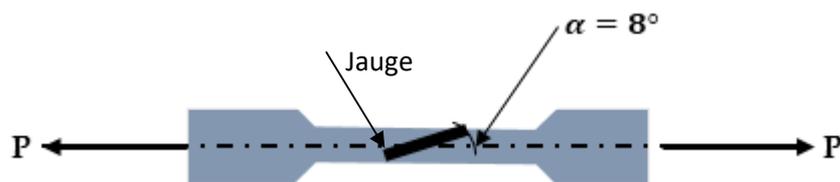
Donc contrainte circonférentielle

$$\sigma_y = \frac{200 \times 10^9}{1-0.09} (4+3) \times 10^{-4} = 154 \text{ MPa}$$

Exercice 9 :

Une jauge d'extensomètre doit être collée sur la surface d'un échantillon de section rectangulaire en tension. La jauge est orientée à 8° par rapport à l'axe de l'échantillon.

Exprimer la contrainte normale σ en fonction de la déformation mesurée par la jauge ε_j et des propriétés du matériau E, ν

**Solution :**

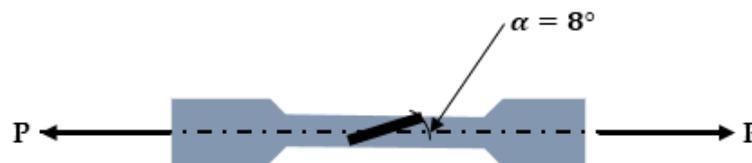
Etat de contraintes dans le plan de la jauge j

$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \times \sigma_x \\ \varepsilon_y = -\nu \times \varepsilon_x \end{cases} \quad \text{et } \gamma_{xy} = 0$$



En appliquant les équations de transformation de coordonnées, on obtient :

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{\sigma_x(1 - \nu)}{2E}$$

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \frac{\sigma_x(1 + \nu)}{2E}$$

$$\varepsilon_j = \frac{\sigma_x(1 - \nu)}{2E} + \frac{\sigma_x(1 + \nu)}{2E} \cos(2 \times 8^\circ)$$

$$\varepsilon_j = \frac{\sigma_x}{2E} (1.9613 - 0.194\nu)$$

Ce qui donne :

$$\sigma_x = \frac{E}{0.9807 - 0.194\nu} \times \varepsilon_j$$

Exercice 10 :

En un point d'un solide élastique isotrope, le tenseur des contraintes rapporté au repère orthonormé est :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

La mesure des déformations principales donne $\varepsilon_1 = 1.36 \cdot 10^{-3}$ et $\varepsilon_2 = 0.32 \cdot 10^{-3}$.

- 1- Déterminer les contraintes principales du tenseur $\bar{\sigma}$.
- 2- Ecrire le tenseur de contraintes, puis celui de déformations dans le repère principal.
- 3- Calculer le module d'élasticité E et le coefficient de Poisson ν du solide.
- 4- Dédire la déformation principale ε_3 .

Solution :

1- Contraintes principales

$$\det(\sigma - \lambda I) = (2 - \lambda) [(2 - \lambda)2 - 3] - (2 - \lambda) = 0 ;$$

$$-\lambda (2 - \lambda)(4 - \lambda) = 0$$

On obtient:

$$\sigma_1 = 4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

2- le tenseur de contrainte en repère principal :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur de déformation en repère principal

$$\bar{\varepsilon} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0.32 & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

3-Module d'élasticité et coefficient de Poisson

On a dans le repère principal $E \varepsilon_i = \sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)$;

$$E \varepsilon_1 = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \Rightarrow 13.6 \cdot 10^{-4} E = 4 - 2 \nu$$

$$E \varepsilon_2 = \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \Rightarrow 3.2.10^{-4} E = 2 - 4 \nu$$

Ce qui donne: $E = 2500 \text{ MPa}$

et $\nu = 0.3$

4- La déformation principale ε_3 :

$$\varepsilon_3 = -0.3/2500 (2 + 4) = -0.72.10^{-3}$$

Exercice 11 :

Un milieu élastique d'un matériau de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν est en équilibre par rapport à un repère orthonormé direct absolu (O, e_1, e_2, e_3) . Dans ce repère le tenseur des contraintes est :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Trouver les forces extérieures de volume \vec{f} pour que le solide soit en équilibre statique.
2. Déterminer la contrainte normale et tangentielle au point $P = (0.1, \sqrt{3})$ s'exerçant sur le cylindre d'équation : $x_2^2 + x_3^2 = 4$
3. Déterminer les contraintes principales au point P . En déduire le cisaillement maximal en ce point.
4. Déterminer, dans le repère principal, le tenseur des déformations principales au point P . en déduire le glissement maximal en ce point ainsi que la dilatation volumique relative.

Exercice12

(Concours d'accès à la poste-Graduation Génie civil-Année 2004. (Université de Bejaia)

Un solide de module d'élasticité $E = 250 \text{ KN/mm}^2$ et de coefficient de poisson $\nu = 0.2$ est soumis un état de contraintes uniforme dont les composantes cartésiennes sont :

$$\sigma = \begin{bmatrix} -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

1. Déterminer les contraintes principales.
2. Déterminer les directions principales normalisées.
3. Écrire la matrice C des cosinus directeurs des axes principaux.
4. Calculer la contrainte normale et la contrainte tangentielle maximale.
5. Vérifier les invariants des contraintes I_1 et I_2

6. Calculer le tenseur des déformations ε
7. Vérifier à l'aide de la matrice C que ε possède les mêmes directions principales que σ , déduire les déformations principales.
8. Calculer la variation relative de volume $\frac{\Delta V}{V}$.

Références Bibliographiques

- [1] **Deghboudj. S.** Polycopie de cours, mécanique des milieux continus, cours et applications, université Larbi Tébessi de Tébessa, 2016.
- [2] **Nicolas Moës.** Mécanique des milieux continus et discrets. Engineering school. École Centrale de Nantes, pp.125. cel-00612360v1, 2011.
- [3] **Lecornu. L.** Théorie mathématique de l'élasticité, Mémorial des sciences mathématiques, Gauthier-Villars, 1929.
- [4] **Laroze. S.** Mécanique des structures, Tome 1, Solides élastiques, plaques et coques, cépaduès éditions, Toulouse, France, 2014.
- [5] **Hecini. M.** Polycopie mécanique des milieux continus, exercices corrigés avec résumé du cours, université de Biskra, 2015.
- [6] **Seghir.A.**Cours de mécanique des milieux continus (MMC), Université A.Mira de Béjaia, 2014.
- [7] **Debard. Y.** Elasticité, Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique, 2006.
- [8] **Ringot.E.** Polycopie de mécanique des milieux continus élasticité linéaire, Université Paul Sabatier,Toulouse 3, France, 2010.
- [9] **Debih. A.** Cours Elasticité, Université de M'sila, 2018.
- [10] **Florence. E.** Elasticité Notes de cours, université de paris, 2017
- [11] **FANCHON J.L.** Guide de mécanique : Sciences et technologie industrielle, Statique, Cinématique, Dynamique, Résistance des matériaux, Elasticité, Mécanique de fluides. Editions Nathan, Paris, 1998.
- [12] **FERDINAND P.BEER E. RUSSELL JOHNSON, JR.** Mécanique à l'usage des ingénieurs Statique. Mc GRAW-HILL, Editeurs.
- [13] **ZAMILA HARICHANE.** Polycopié de Résistance des Matériaux RDM-I. Université Hassiba Ben Bouali de Chlef-Septembre 2011.
- [14] **JAMES M. GERE,** Mechanics of Materials. Library of Congress Control Number: 2008923451-ISBN-13: 978-0-534-55397-5 -ISBN-10: 0-534-55397-4.
- [15] **TIMOSHENKO S.** Résistance des matériaux – Tome 1 : Théorie élémentaire et problèmes. 3^{ème} Ed. Dunod, Paris, 1968.
- [16] **P. AGATI, N. MATTERA.** Mécanique appliquée. ISBN: 2100032178. Dunod, Paris, 1996
- [17] **R. C. HIBBELER.** Mechanics of materials. Eighth edition. ISBN 10: 0-13-602230-8

ISBN 13: 978-0-13-602230-5 Pearson Prentice Hall.

[18] **NASH W. A.**, "Résistance des matériaux 1". Cours et Problèmes. Série Schaum. Edition française : Henri le boiteux et Robert Boussard, 1985.

[19] **NASH W. A.**, "Résistance des matériaux". Cours et problèmes, série Schaum, 2e édition, 1994.

[20] **Timoshenko S.** Résistance des matériaux – Tome 1 : Théorie élémentaire et problèmes. 3ème Ed. Dunod, Paris, 1968, 420p.

[21] **Timoshenko S.** Résistance des matériaux – Tome 2 : Théorie développée et problèmes, Dunod, Paris, 1968. 3ème Ed. Dunod, Paris, 1968, 464p.

[22] **J. L. Meriam, L. G. Kraige.** Engineering Mechanics' o l u m e 1 Statics-Seventh Edition. John Wiley & Sons, Inc.

Les unités de mesure

Le système international d'unités

Tableau des unités fondamentales du SI

Grandeur	Nom	Symbole	Dimension
Longueur	mètre	m	L
Masse	kilogramme	kg	M
Temps	seconde	s	T
Intensité du courant électrique	ampère	A	I
Température thermodynamique	kelvin	K	Θ
Quantité de matière	mole	mol	N
Intensité lumineuse	candela	cd	J

Grandeurs supplémentaires du système international

Deux grandeurs supplémentaires ont été introduites pour assurer la cohérence du système

Grandeur	Nom	Symbole	Dimension
Angle plan	radian	rad	
Angle solide	stéradian	sr	(Ω)

Quantité de matière

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Quantité de matière	N	mole	mol	

Espace

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Longueur	L	mètre	m	mille marin = 1852 m
Nombre d'onde	L^{-1}		m^{-1}	
Aire	L^2	mètre carré	m^2	are (a) = 100 m^2 hectare (ha) = 10 000 m^2
Volume	L^3	mètre cube	m^3	litre (l) = 1 $10^{-3} m^3$
Angle plan		radian	rad	tour (tr) = 2π rad degré (°) = $\pi/180$ rad minute (') = $\pi/10\ 800$ rad seconde (") = $\pi/648\ 000$ rad grade = $\pi/200$ rad

Masse

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Masse	M	kilogramme	kg	gramme (g) = 10^{-3} kg tonne (t) = 10^3 kg
Masse volumique	$M.L^{-3}$	kilogramme par mètre cube	$kg.m^{-3}$	

Temps

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Temps	T	seconde	s	minute (min) = 60 s heure (h) = 3600 s jour (d) = 86400 s
Fréquence	T^{-1}	hertz	Hz	

Mécanique

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Vitesse	LT^{-1}	mètre par seconde	m/s	kilomètre par heure (km/h) nœud (mille par heure)
Accélération	LT^{-2}	mètre par seconde carrée	m/s^2 ms^{-2}	
Force	MLT^{-2}	newton	N	
Moment de force	ML^2T^{-2}	newton-mètre	N.m	
Tension superficielle	MT^{-2}	newton par mètre	N/m	
Travail Energie	ML^2T^{-2}	joule	J	wattheure (Wh) = $3,610^3$ J kilowattheure (kWh) = $3,610^6$ J
Puissance	ML^2T^{-3}	watt	W	
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$	pascal	Pa	bar (bar) = 10^5 Pa
Moment d'inertie	ML^2	kilogramme-mètre carré	$kg.m^2$	
Quantité de mouvement	MLT^{-1}	newton-seconde	N.s	
Viscosité dynamique	$ML^{-1}T^{-1}$	pascal-seconde	Pa.s	
Viscosité cinématique	L^2T^{-1}	mètre carré par seconde	m^2/s	

Les unités de pression :

Le **pascal** est l'une des rares unités du SI qui n'est pas adaptée à la vie courante. De ce fait on utilise toujours des unités hors système.

Le **bar** ($1 \text{ bar} = 10^5$ pascals) est très utilisé dans l'industrie.

L'hectopascal est utilisé en météorologie.

Il se trouve que le bar correspond pratiquement à la valeur de l'atmosphère normale :

$$1 \text{ atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,01325 \text{ bar}$$

L'hectopascal est utilisé en météorologie.

La pression atmosphérique a longtemps été mesurée avec des baromètres à mercure. On utilise toujours le **torr** (mm de Hg à 0°C) qui correspond à 133,3 pascals et le cm de mercure (1333 Pa).

Dans certaines industries on utilise aussi le psi (pound per square inch) $1 \text{ psi} = 6,89476 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.

Multiples et sous-multiples des unités

Facteur	Nom	Symbole
10^1	déca	da
10^2	hecto	h
10^3	kilo	k
10^6	méga	M
10^9	giga	G
10^{12}	téra	T

Facteur	Nom	Symbole
10^{-1}	déci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

