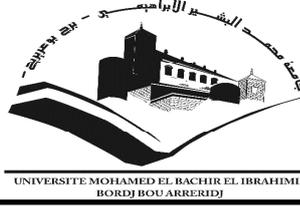


République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed El Bachir Elibrahimi –Bordj  
Bou Arreridj Faculté des Sciences et de la  
Technologie



جامعة محمد البشير الإبراهيمي « برج بوعرييج »

كلية العلوم والتكنولوجيا

قسم علوم المادة

Département Sciences de la Matière

UNIVERSITE MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI  
BORDJ BOU ARRERIDJ

# Mémoire de fin d'étude

PRESENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLOME DE : **Master II**

**Filière : physique**

**Option : Matériaux et modélisation numérique**

**THÈME :**

Etude de quelques potentiels superintégrables par  
l'approche de l'intégrale de chemin

Présentée par :

Souilah Selsabil

Soutenu le : / /2018

Devant le jury :

**Rapporteur :** Mameri Samir                      MCB      Univ. Bordj Bou Arreridj

**Président :** Lebga Noudjoud                      MCB      Univ. Bordj Bou Arreridj

**Examineur :** Benchiheub Nadjet                      MCB      Univ. Bordj Bou Arreridj

## *Remerciements*

*Nous tenons remercier tout d'abord Allah le tout puissant de nous avoir aidés à achever ce modeste travail présenter dans ce mémoire.*

*Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au université de bordj Bou-Arveridj, sous la direction du Pr. Maameri. Samir.*

*Je tiens à lui exprimer mes remerciements les plus sincères pour sa disponibilité constante et pour les encouragements et les conseils qu'il m'a apportés pour la réalisation de ce travail.*

*Nos reconnaissances vont également aux membres de jury d'avoir accepté de juger ce travail.*

*J'adresse mes vifs remerciements à tous les collègues.*

*« Selsabil »*

# Dédicace

-Je te dédie chère et tendre mère, pour  
ton amour, ton affection et ton soutien

Pour ton courage et ton sacrifice.

-Et pour mon père ; sa gentillesse, sa  
compréhension, sa disponibilité.

✓ Aussi à

✓ Ma sœur

✓ Mes frères

✓ mon mari mouhammed,

✓ A toute la famille souilah et Achour.

Et sans oublier mon encadreur Maamrei  
Samir, pour son soutien et sa gentillesse  
incomparable.

Salsabil

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Système super-intégrable dans <math>E_3</math> et intégrale de chemin en coordonnées rotationnelles paraboliques</b> | <b>6</b>  |
| 2.1      | Introduction . . . . .  | 6         |
| 2.2      | Formulation du problème . . . . .   | 7         |
| 2.3      | Propagateur . . . . .   | 11        |
| 2.4      | Fonction de Green . . . . .   | 14        |
| 2.5      | Spectre et fonctions d'onde des états liés . . . . .  | 16        |
| 2.6      | Spectre et fonctions d'onde des états continus . . . . .  | 19        |
| <b>3</b> | <b>Système super-intégrable dans <math>E_3</math> et intégrale de chemin en coordonnées sphériques</b>                  | <b>21</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .  | 21        |
| 3.2      | Hamiltonien à trois dimensions en coordonnées sphériques . . . . .  | 22        |
| 3.3      | Propagateur . . . . .   | 24        |
| 3.4      | Fonction de Green . . . . .   | 30        |
| 3.5      | Spectre d'énergie et fonctions d'onde . . . . .   | 33        |
| <b>4</b> | <b>Conclusion</b>   | <b>35</b> |

# Chapitre 1

## Introduction

La mécanique quantique joue un rôle fondamental pour la description et la compréhension des phénomènes naturels. En effet, dès que ces derniers se produisent dans le monde infiniment petit, ils ne sont explicables que dans le cadre de la

physique quantique. Les lois classiques, celles qui gouvernent notre quotidien macroscopique, cessent d'être valables pour des corps matériels animés de très grandes vitesses, comparables à celles de la lumière ( domaine relativiste ); de plus elles sont aussi en défaut à l'échelle atomique ou subatomique (domaine quantique).

Il est cependant important de remarquer que, dans les deux cas, la physique classique apparaît comme une approximation des nouvelles théories. Nous pouvons situer la naissance de la physique quantique en 1900, année où Max Planck

présenta son célèbre article sur le rayonnement du corps noir. Durant la trentaine d'années qui ont suivi, plusieurs expériences ont démontré l'incapacité de la physique classique ( mécanique, thermodynamique, électromagnétisme ) d'expliquer certains comportements de la matière au niveau microscopique.

Pour parvenir à donner une interprétation cohérente de ces expériences, il a été nécessaire d'introduire des concepts radicalement différents de ceux de la physique classique. Par exemple, on a dû abandonner la notion de trajectoire et considérer que les particules microscopiques ont parfois un comportement semblable à une onde. L'ensemble de ces nouveaux concepts a donné naissance à une nouvelle physique, la "physique quantique", qui s'est développée rapidement puisqu'en 1927, déjà les fondements de la théorie sont achevés. Par son abandon des concepts-clés de la mécanique classique, nous pouvons dire que la physique quantique constitue une véritable révolution dans notre façon d'interpréter les mesures expérimentales.

Avec la relativité introduite par Einstein, la physique quantique est un des piliers de l'édifice théorique de la physique contemporaine du 21<sup>ème</sup> siècle.

La forme mathématique que nous donnons à la plupart des théories et lois physiques a été recherchée dès l'antiquité. La mise en équations est souvent la partie la plus difficile du travail, parfois la plus féconde du point de vue de la compréhension des faits et des lois. Sans doute cette opération est un art qui demande beaucoup de réflexion et de pratique.

Les mathématiques ne sont pas l'affaire des seuls mathématiciens. Elles intéressent, plus ou moins, toutes les autres disciplines scientifiques. Nous en avons besoin, elles s'appliquent, elles se prêtent à la modélisation avec souplesse et efficacité.

Dans l'autre sens, les mathématiques s'enrichissent, plus ou moins, de toutes les autres disciplines scientifiques. Aujourd'hui plus que jamais, des idées, des concepts, des méthodes mathématiques viennent d'ailleurs. Elles sont brassées et travaillées par les mathématiciens, et, sous forme mathématisée, elles irriguent des champs imprévus. En général, un formalisme mathématique se juge par sa simplicité, sa puissance et sa généralité, notamment dans les domaines liés aux applications

récentes. En ce qui concerne la physique théorique, le principe d'action ( principe variationnel associé à la formulation hamiltonienne ) était à l'origine de ses progrès rapides. Il s'est révélé très fécond pour l'étude de toutes les disciplines de la physique théorique de cette époque.

Tout en offrant souvent une aide considérable dans les applications pratiques aux problèmes de la mécanique, cette formulation plus abstraite était surtout d'un haut intérêt à cause du rôle essentiel qu'elle jouait dans l'élaboration des théories plus modernes de la matière. Ainsi cette formulation de la mécanique classique était un tournant exceptionnel parce qu'elle ouvrait la voie à la mécanique statistique et à la théorie quantique. Mais en plongeant dans les eaux obscures et impénétrables de la physique atomique, l'appareil mathématique de la mécanique classique n'arrivait pas à expliquer les observations obtenues des résultats expérimentaux du monde microscopique. Par conséquent, les scientifiques ont tenté l'élaboration de plusieurs formalismes mathématiques qui répondent aux nécessités et exigences modernes suscitées par l'apparition de la physique quantique et relativiste. Ainsi, il y a eu dans l'ordre la mécanique des matrices de Heisenberg[1] et la mécanique ondulatoire de Schrödinger [2]. Ici, les tentatives pour formaliser certaines notions du domaine de la théorie des phénomènes liés aux interactions fortes des particules à partir

des mêmes méthodes de la physique quantique n'ont pas abouti à des résultats physiques réels car la situation est d'un tout autre caractère qui fera appel à des concepts fondamentalement nouveaux.

Ainsi, les travaux de Dirac ont conduit dès 1930 à poser la base d'une nouvelle formulation mathématique [3] plus complète et capable d'inclure certaines grandeurs qui ne possèdent pas d'analogues classiques. En 1942, s'inspirant des idées ingénieuses de Dirac, Feynman propose une nouvelle méthode de quantification qui repose sur le Lagrangien pour pouvoir décrire un système ne possédant pas nécessairement d'hamiltonien. Sa motivation première était de quantifier la nouvelle formulation de l'électrodynamique classique basée sur l'action à distance. Ainsi, il reformule entièrement la mécanique quantique d'une façon naturelle et assez concise avec un outil mathématique remarquablement simple, l'intégrale de chemin.

Cette nouvelle approche qui offre un point de vue alternatif sur la mécanique quantique s'est rapidement imposé en physique théorique avec sa généralisation à la théorie quantique des champs, permettant notamment une quantification des théories de jauge non abéliennes beaucoup moins compliquée que la procédure de la quantification canonique.

Malgré tous ces développements, l'application de cette technique au traitement des potentiels de la mécanique quantique est restée restreinte aux systèmes quadratiques. Cependant, grâce aux travaux remarquables de Duru et Kleinert, plusieurs systèmes quantiques qui sont à l'origine du succès enregistré de l'équation de Schrödinger ont été exactement solutionnés via l'intégrale de chemin. En

l'occurrence, le système coulombien[4] a trouvé la forme Gaussienne dans l'espace des phases à l'aide d'une transformation canonique des variables de Kustaanheimo et Stiefel [5] et en reparamétrisant le parcours d'intégration par un paramètre temps et l'intégrale de chemin de l'atome d'hydrogène en coordonnées polaires dans l'espace  $E_3$  a pu être transformé en une intégrale de chemin dans l'espace  $E_3$  relative à deux oscillateurs harmoniques indépendants à deux dimensions [6].

La technique des transformations spatiales et temporelles a permis à l'intégrale de chemin de jeter des ponts aux domaines contigus de la physique mathématique et de la physique théorique. Elle a été illustrée par la résolution d'une façon particulièrement élégante de plusieurs problèmes importants de la mécanique quantique non-relativiste dans divers systèmes de coordonnées.

L'objet de ce travail concerne le traitement par l'intégrale de chemin du

potentiel coulombien dans l'espace Euclidien à 3 dimensions et dans les systèmes des coordonnées rotationnelles paraboliques et sphériques.

. Ce potentiel est donné par la relation

$$V(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = -\frac{\gamma}{r} \quad (1.1)$$

où  $\gamma$  est une constante réelle et positive et  $r = [x^{(1)2} + x^{(2)2} + x^{(3)2}]^{1/2}$ .

Winternitz et Rodriguez [7] ont étudié récemment une grande famille de potentiels comportant ce dernier en mécanique quantique standard à travers la résolution de l'équation de Schrödinger en coordonnées rotationnelles paraboliques et sphériques.

Ce mémoire comporte quatre chapitres. Nous commençons le premier chapitre par une introduction, en suite nous traitons le potentiel coulombien dans l'espace Euclidien  $E_3$  à trois dimensions dans le système des coordonnées rotationnelles

paraboliques dans le chapitre deux . De la construction de la fonction de Green, nous déduisons le spectre d'énergie et les fonctions d'onde convenablement

normalisées des états liés et des états de diffusion. Dans le chapitre trois , nous discutons l'intégrale de chemin en coordonnées sphériques. Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde normalisées des états liés et continus sont extraits de l'expression de la fonction de Green. .

Le dernier chapitre est consacré à la conclusion.

# Chapitre 2

## Systeme super-integrable dans $E_3$ et integrale de chemin en coordonnees rotationnelles paraboliques

### 2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de traiter, par l'intermediaire de l'integral de chemin, le potentiel de coulomb

$$V(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = -\frac{\gamma}{r} \quad (2.1)$$

où  $\gamma$  est une constante réelle.

Le système est régi par le Hamiltonien

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{LB} + V(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \quad (2.2)$$

avec  $\Delta_{LB}$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami

Les intégrales de mouvement correspondantes sont bien connues [8] [9] et sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (p_k L_{3k} + L_{3k} p_k) + \gamma \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}, \\ X_2 = L_{12}^2, \\ Y_1 = L_{12}^2 + L_{23}^2 + L_{31}^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right) \left( \frac{\beta_1}{\cos^2 \theta^{(1)}} + \frac{\beta_2}{\sin^2 \theta^{(1)}} \right), \\ Y_2 = L_{23}^2 - 2\beta_2 \left[ 1 + \frac{1}{4 \sin^2 \theta^{(1)}} \left( \frac{\xi}{\eta} - \frac{\eta}{\xi} \right)^2 \right], \end{array} \right. \quad (2.3)$$

avec  $L_{ik} = x_i \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Le système gouverné par le Hamiltonien (2.2) est caractérisé par un ensemble de cinq opérateurs algébriquement indépendants  $\{H, X_1, X_2, Y_1, Y_2\}$  vérifiant les relations de commutation :

$$\left\{ \begin{array}{l} [X_1, X_2] = 0, \quad [X_i, H] = 0, \\ [Y_1, Y_2] = 0 \quad [Y_i, H] = 0; \quad i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Le nombre de ces opérateurs étant supérieur au nombre de degrés de liberté, le système est alors super-intégrable "maximally".

Dans le paragraphe 2, nous évaluons l'intégrale de chemin en séparant les variables à l'aide de transformations temporelles appropriées. Le spectre d'énergie et les fonctions d'ondes des états liés sont tirés de la fonction de Green dans le paragraphe 3. La fonction de Green relative aux états continus est aussi calculée et les fonctions d'onde sont déduites dans le paragraphe 4.

## 2.2 Formulation du problème

Considérons le potentiel suivant :

$$V = -\frac{\gamma}{r} = -\frac{2\gamma}{\xi^2 + \eta^2} \quad (2.5)$$

où  $\xi^2 + \eta^2 = 2r$

Ils admet la séparation des variables dans le système des coordonnées rotationnelles paraboliques  $(\xi, \eta, \phi)$  défini par :

$$\begin{cases} x^{(1)} = \xi\eta \cos \phi, \\ x^{(2)} = \xi\eta \sin \phi, \\ x^{(3)} = \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2), \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $0 \leq \xi, \eta < \infty, 0 \leq \phi < 2\pi$ .

En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  la différentielle de l'arc  $ds$  est donnée par la forme quadratique appelée forme métrique ou métrique

$$ds^2 = (dx^{(1)})^2 + (dx^{(2)})^2 + (dx^{(3)})^2 \quad (2.7)$$

En passant aux coordonnées rotationnelles paraboliques, celle-ci devient :

$$ds^2 = g_{\xi\xi}(d\xi)^2 + g_{\eta\eta}(d\eta)^2 + g_{\phi\phi}(d\phi)^2, \quad (2.8)$$

avec

$$g_{\xi\xi} = g_{\eta\eta} = \xi^2 + \eta^2, \quad g_{\phi\phi} = \xi^2\eta^2. \quad (2.9)$$

Le tenseur métrique se met alors sous la forme :

$$g_{ab} = \text{diag}(g_{\xi\xi}, g_{\eta\eta}, g_{\phi\phi}). \quad (2.10)$$

L'élément de volume infinitésimal  $d^3x$  se transforme comme suit :

$$d^3x = \sqrt{g}d\xi d\eta d\phi, \quad (2.11)$$

où

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{ab})} = (\xi^2 + \eta^2) \xi \eta. \quad (2.12)$$

L'inverse du tenseur  $(g_{ab})$  est donné par

$$(g_{ab})^{-1} = (g^{ab}) = \text{diag}(g_{\xi\xi}^{-1}, g_{\eta\eta}^{-1}, g_{\phi\phi}^{-1}) \quad (2.13)$$

Le Hamiltonien quantique est construit au moyen de

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{LB} + V, \quad (2.14)$$

où  $\Delta_{LB}$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami :

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^a} g^{ab} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial q^b}. \quad (2.15)$$

Afin d'exprimer le Hamiltonien quantique à l'aide des opérateurs associés à la position et à la quantité de mouvement, nous construisons les opérateurs associés aux composantes de la quantité de mouvement

$$P_a = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial q^a} + \frac{\Gamma_a}{2} \right); \quad \Gamma_a = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial q^a}, \quad (2.16)$$

qui sont hermétiques par rapport au produit scalaire

$$(f, g) = \int f^*(\xi, \eta, \phi) g(\xi, \eta, \phi) \sqrt{g} d\xi d\eta d\phi. \quad (2.17)$$

En termes des opérateurs quantité de mouvement (2.16), le Hamiltonien s'écrit suivant la forme ordonnée de Weyl [10] ou celle du produit ordonné [11] ainsi :

$$H = \frac{1}{2M} \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} (P_\xi^2 + P_\eta^2) \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right] + V + \Delta V, \quad (2.18)$$

avec la correction quantique bien définie

$$\Delta V = \frac{\hbar}{8M} [g_{ab} \Gamma_a \Gamma_b + 2\partial_a (g^{ab} \Gamma_b) + \partial_a \partial_b (g^{ab})] \quad (2.19)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{8M\xi^2\eta^2}. \quad (2.20)$$

Par conséquent, nous obtenons pour le Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2M} \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} (P_\xi^2 + P_\eta^2) \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 \eta^2}} P_\phi^2 \right] - \frac{2\gamma}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{2M\xi^2\eta^2} \quad (2.21)$$

## 2.3 Propagateur

En utilisant la formule de Trotter :  $\exp[-it(A+B)] = \lim_{N \rightarrow \infty} (\exp(-\frac{itA}{N}) \exp(-\frac{itB}{N}))^N$  voir Réf. [12] et l'approximation du temps infinitésimal pour l'élément de matrice  $\langle \vec{r}_f | \exp(-\frac{i\varepsilon H}{\hbar} | \vec{r}_i \rangle$ , nous obtenons l'intégrale de chemin Hamiltonienne sous forme compacte

$$K(\vec{r}_f, \vec{r}_i; T) = (g_f g_i)^{-\frac{1}{4}} \int D\xi(t) D\eta(t) D\phi(t) D_{p\xi}(t) D_{p\eta}(t) D_{p\phi}(t) \quad (2.22)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left( p_\xi \dot{\xi} + p_\eta \dot{\eta} + p_\phi \dot{\phi} - H \right) dt \right\}$$

ou encore explicitement sous forme discrète

$$K(\vec{r}_f, \vec{r}_i; T) = (g_f g_i)^{-\frac{1}{4}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \prod_{j=1}^{N-1} \int d\xi_j d\eta_j d\phi_j \right] \left[ \prod_{j=1}^N \int \frac{dp_{\xi_j}}{2\pi\hbar} \frac{dp_{\eta_j}}{2\pi\hbar} \frac{dp_{\phi_j}}{2\pi\hbar} \right] \quad (2.23)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ p_{\xi_j} \Delta \xi_j + p_{\eta_j} \Delta \eta_j + p_{\phi_j} \Delta \phi_j - \varepsilon H(j, j-1) \right] \right\},$$

où  $g_i$  et  $g_f$  sont les déterminants du tenseur métrique aux points initial et final respectivement. Ci-dessus nous avons utilisé les notations habituelles :  $\varepsilon = t_j - t_{j-1}$ ,  $T = N\varepsilon = t_f - t_i$ ,  $\vec{r}_f = \vec{r}(t_N)$ ,  $\vec{r}_i = \vec{r}(t_0)$ ,  $u_j = u(t_j)$ ,  $\Delta u_j = u_j - u_{j-1}$ .

Les intégrations par rapport aux impulsions dans (2.23) sont de forme gaussienne et nous obtenons l'intégrale de chemin dans l'espace des configurations

$$K(\vec{r}_f, \vec{r}_i; T) = \int \sqrt{g} D\xi(t) D\eta(t) D\phi(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T (L_{cl} - \Delta V) dt \right\} \quad (2.24)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \left( \frac{M}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{3}{2} N-1} \prod_{j=1}^{N-1} (\xi_j^2 + \eta_j^2) \xi_j \eta_j d\xi_j d\eta_j d\phi_j$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N S(j, j-1) \right\},$$

où l'action élémentaire  $S(j, j - 1)$  est :

$$S(j, j - 1) = \frac{M}{2\varepsilon} \left[ \widehat{(\xi_j^2 + \eta_j^2)} (\Delta\xi_j^2 + \Delta\eta_j^2) + \widehat{(\xi_j^2\eta_j^2)} \Delta\phi_j^2 \right] + \frac{2\xi\gamma}{\widehat{\xi_j^2 + \eta_j^2}} - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon\hbar^2}{2M\widehat{\xi_j^2\eta_j^2}} \quad (2.25)$$

avec  $\widehat{f^2(q_j)} = f(q_j)f(q_{j-1})$  pour toute fonction  $f$  des coordonnées.

Pour séparer la variable  $\phi_j$  nous effectuons la transformation temporelle [13]  $t \rightarrow s$  définie par :

$$\frac{dt}{ds} = \xi^2\eta^2, \quad (2.26)$$

où  $s$  est la nouvelle variable temporelle. Sous forme discrète, la définition symétrique de cette transformation s'écrit :

$$\varepsilon = \widehat{\xi_j^2\eta_j^2}\sigma_j, \quad \sigma_j = s_j - s_{j-1}. \quad (2.27)$$

Nous devons utiliser aussi la contrainte :

$$\xi_f\eta_f\xi_i\eta_i \int_0^\infty dS\delta\left(T - \int_0^S \xi^2\eta^2 ds\right) = 1 \quad (2.28)$$

En insérant la valeur de  $\varepsilon$  donnée par l'équation (2.27) et la contrainte (2.28) dans l'expression (2.24) nous obtenons :

$$K(\vec{r}_f, \vec{r}_i; T) = K(\xi_f, \eta_f, \xi_i, \eta_i; S), \quad (2.29)$$

Pour évaluer la partie du propagateur dépendante des variables  $\xi$  et  $\eta$ , revenons à l'ancienne variable temporelle  $t$  en utilisant l'inverse de l'équation (2.26), c'est à dire la transformation  $s \rightarrow t$  définie par :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\xi^2 \eta^2}, \quad (2.30)$$

accompagnée la contrainte

$$\frac{1}{\xi_f \eta_f \xi_i \eta_i} \int_0^\infty dT \delta \left( S - \int_0^T \frac{1}{\xi^2 \eta^2} dt \right) = 1 \quad (2.31)$$

Nous obtenons alors

$$K \left( \vec{r}_f, \vec{r}_i; T \right) = \sum_{J=0}^{\infty} \Psi_J^{*\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(\phi_i) \Psi_J^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(\phi_f) K_J(\xi_f, \eta_f, \xi_i, \eta_i; T), \quad (2.32)$$

avec les fonctions d'onde normalisées

$$\Psi_J^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(\phi) = \left[ 2(2J) \frac{J! \Gamma(J)}{\Gamma\left(J + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(J + \frac{1}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} P_J^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(\cos 2\phi). \quad (2.33)$$

Les  $P_J^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(\cos 2\phi)$  sont les polynomes de Jacobi [14].

avec

$$\begin{aligned}
 K_J(\xi_f, \eta_f, \xi_i, \eta_i; T) &= \frac{1}{2\sqrt{r_f r_i \xi_f \eta_f \xi_i \eta_i}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \left( \frac{M}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right) (\tilde{\xi}_j^2 + \tilde{\eta}_j^2) \quad (2.34) \\
 &\times \prod_{j=1}^{N-1} d\xi_j d\eta_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{M}{2\varepsilon} (\tilde{\xi}_j^2 + \tilde{\eta}_j^2) (\Delta\xi_j^2 + \Delta\eta_j^2) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{2\varepsilon\gamma}{(\tilde{\xi}_j^2 + \tilde{\eta}_j^2)} - \frac{\varepsilon\hbar^2}{2M} \left[ \frac{2J^{2-\frac{1}{4}}}{\tilde{\xi}_j^2 \tilde{\eta}_j^2} \right] \right] \right\}
 \end{aligned}$$

compte tenu des substitutions suivantes obtenues à l'aide de la procédure de Mc Laughlin et Schulman [15] :

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta\xi_j^2 \rangle &= \frac{i\hbar\varepsilon}{M(\tilde{\xi}_j^2 + \tilde{\eta}_j^2)}, & \langle \Delta\eta_j^2 \rangle &= \frac{i\hbar\varepsilon}{M(\tilde{\xi}_j^2 + \tilde{\eta}_j^2)}, & (2.35) \\
 \langle \Delta\xi_j^4 \rangle &= \frac{3}{(\tilde{\xi}_j^2 + \tilde{\eta}_j^2)^2} \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{M} \right)^2, & \langle \Delta\eta_j^4 \rangle &= \frac{3}{(\tilde{\xi}_j^2 + \tilde{\eta}_j^2)^2} \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{M} \right)^2 \\
 \langle \Delta\xi_j^2 \Delta\eta_j^2 \rangle &= \frac{1}{(\tilde{\xi}_j^2 + \tilde{\eta}_j^2)^2} \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{M} \right)^2.
 \end{aligned}$$

## 2.4 Fonction de Green

L'évaluation du propagateur (2.34) n'est pas immédiate du fait que les mouvements suivant les axes des variables  $\xi$  et  $\eta$  sont pas séparés. Introduisons la fonction de Green  $G_j(\xi_f, \eta_f, \xi_i, \eta_i; E)$  (transformée de fourier du propagateur)

$$G_J(\xi_f, \eta_f, \xi_i, \eta_i; E) = \int_0^\infty dT \exp\left(\frac{iET}{\hbar}\right) K_J(\xi_f, \eta_f, \xi_i, \eta_i; T), \quad (2.36)$$

et effectuons une nouvelle transformation temporelle  $t \rightarrow \tau$  définie par :

$$\frac{dt}{d\tau} = 2r = \xi^2 + \eta^2. \quad (2.37)$$

En utilisant la contrainte

$$2\sqrt{r_f r_i} \int_0^\infty dS \delta \left( T - \int_0^S 2r d\tau \right) = 1, \quad (2.38)$$

la fonction de Green (2.36) s'écrit ainsi :

$$G_J (\xi_f, \eta_f, \xi_i, \eta_i; E) = \int_0^\infty dS \exp \left( \frac{2i\gamma S}{\hbar} \right) K_J (\xi_f, \xi_i; S) K_J (\eta_f, \eta_i; S), \quad (2.39)$$

avec

$$K_J (u_f, u_i; S) = \frac{1}{\sqrt{u_f u_i}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \left( \frac{M}{2\pi i \hbar \tau_j} \right) \prod_{j=1}^{N-1} du_j \quad (2.40)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{M}{2\tau_j} \Delta u_j^2 + \tau_j E u_j^2 - \tau_j \frac{\hbar^2}{2M u_j^2} \left( (2J)^2 - \frac{1}{4} \right) \right] \right\},$$

$(u_j \equiv \xi_j \text{ ou } \eta_j)$ . le propagateur  $K_J (u_f, u_i; S)$  peut être identifié avec le propagateur d'un oscillateur harmonique placé dans un potentiel quadratique inverse. Ce propagateur a déjà été évalué par l'intégrale de chemin [16] [17] [18] et peut donc être exprimé comme une fonction de la fonction de Bessel modifiée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 K_J(u_f, u_i; S) &= \frac{1}{\sqrt{u_f u_i}} \int Du(\tau) \\
 &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^S \left[ \frac{M}{2} \dot{u}^2 + Eu^2 - \frac{\hbar^2}{2Mu^2} \left( (2J)^2 - \frac{1}{4} \right) \right] d\tau \right\} \\
 &= \frac{M\omega}{i\hbar \sin(\omega S)} \exp \left[ \frac{iM\omega}{2\hbar} (u_f^2 + u_i^2) \cot(\omega S) \right] I_{2J} \left( \frac{M\omega u_f u_i}{i\hbar \sin(\omega S)} \right),
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

avec

$$\omega = \sqrt{-\frac{2E}{M}} \tag{2.42}$$

En utilisant(2.41) dans l'expression (2.39) nous aurons :

$$\begin{aligned}
 G_J(\xi_f, \eta_f, \xi_i, \eta_i; E) &= \left( \frac{M\omega}{i\hbar} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dS \exp\left(\frac{2i\gamma S}{\hbar}\right)}{\sin^2(\omega S)} \\
 &\times \exp \left\{ \frac{iM\omega}{2\hbar} ((\xi_f^2 + \xi_i^2 + \eta_f^2 + \eta_i^2) \cot(\omega S)) \right\} \\
 &\times I_{2J} \left( \frac{M\omega \xi_f \xi_i}{i\hbar \sin(\omega S)} \right) I_{2J} \left( \frac{M\omega \eta_f \eta_i}{i\hbar \sin(\omega S)} \right).
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

## 2.5 Spectre et fonctions d'onde des états liés

Pour déterminer le spectre discret de l'énergie et la partie en  $\xi$  et  $\eta$  des fonctions d'onde normalisées du système physique, posons  $\omega' = i\omega$ ,  $z = e^{-2\omega' S}$ ,  $x = \frac{iM\omega'}{\hbar} u_i$ ,  $y = \frac{iM\omega'}{\hbar} u_f$ ,  $p = -\frac{\gamma}{\hbar\omega'}$  et utilisons la formule de Hille et Hardy (voir Réf[19] ,p.1038 ,éq. (8.976.7))

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y) z^n = \frac{(xyz)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-z} \exp\left(-z \frac{x+y}{1-z}\right) I_\alpha\left(\frac{2\sqrt{xyz}}{1-z}\right); |z| < 1, \quad (2.44)$$

qui permet la séparation des variables  $\xi_f, \xi_i, \eta_f, \eta_i$ . les  $L_n^\alpha(x)$  sont des polynômes de laguerre.

L'équation (2.43) se réécrit ainsi :

$$G_J(\xi_f, \eta_f, \xi_i, \eta_i; E) = i\hbar \sum_{n_1 n_2} \frac{\Psi_{n_1 n_2}^*(\xi_i, \eta_i) \Psi_{n_1 n_2}(\xi_f, \eta_f)}{E - E_{n_1, n_2}} \quad (2.45)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1, n_2}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(-\frac{2ME_N}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{n_1! n_2!}{\Gamma(n_1 + 2J + 1) \Gamma(n_2 + 2J + 1)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\sqrt{-\frac{2ME_N}{\hbar^2}} \xi^2\right)^{\frac{2J}{2}} \left(\sqrt{-\frac{2ME_N}{\hbar^2}} \eta^2\right)^{\frac{2J}{2}} \exp\left[-\sqrt{-\frac{2ME_N}{\hbar^2}} \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right] \\ &\times L_{n_1}^{2J} \left(\sqrt{-\frac{2ME_N}{\hbar^2}} \xi^2\right) L_{n_2}^{2J} \left(\sqrt{-\frac{2ME_N}{\hbar^2}} \eta^2\right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

et

$$E_{n_1 n_2} = -\frac{M\gamma^2}{2\hbar^2 (n_1 + n_2 + 2J + 1)^2} \quad (2.47)$$

En tenant compte de la partie angulaire (2.33), la fonction d'onde complète est donnée par :

$$\Psi_{n_1, n_2, J}(\xi, \eta, \phi) = \Psi_{n_1, n_2}(\xi, \eta) \Psi_J^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\phi). \quad (2.48)$$

La fonction d'onde de l'atome d'Hydrogène en coordonnées rotationnelles paraboliques dans l'espace Euclidien  $E_3$  est :

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1, n_2, 2J}(\xi, \eta, \phi) &= \left( -\frac{2ME_N}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{4}} \left( \frac{n_1! n_2!}{2\pi \Gamma(n_1 + 2J + 1) \Gamma(n_2 + 2J + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left( \sqrt{-\frac{2ME_N}{\hbar^2}} \xi^2 \right)^{\frac{2J}{2}} \left( \sqrt{-\frac{2ME_N}{\hbar^2}} \eta^2 \right)^{\frac{2J}{2}} \exp \left[ -\sqrt{-\frac{2ME_N}{\hbar^2}} \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right] \\ &\times L_{n_1}^{2J} \left( \sqrt{-\frac{2ME_N}{\hbar^2}} \xi^2 \right) L_{n_2}^{2J} \left( \sqrt{-\frac{2ME_N}{\hbar^2}} \eta^2 \right) e^{i2J\phi} \end{aligned} \quad (2.49)$$

La partie angulaire de la fonction, d'onde devient :

$$\Psi_J^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\phi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (e^{i2J\phi} + e^{-i2J\phi}), \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}. \quad (2.50)$$

dans le cas de potentiel Coulombien, la variable angulaire  $\phi$  varie entre 0 et  $2\pi$ . Donc en étendant la variation de cette variable  $\phi$  de  $(0, 2\pi)$ , la fonction (2.49) est remplacée par :

$$\Psi_J^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\phi) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{i2J\phi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{i2J\phi}), \quad (2.51)$$

## 2.6 Spectre et fonctions d'onde des états continus

Pour déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états continus, revenons à l'expression (2.43) et utilisons la formule de dispersion (voir Réf.[19] , p. 884, Eq. (7.694))

$$\frac{1}{\sin \alpha} \exp [-(x+y) \cot \alpha] I_{2\mu} \left( \frac{2\sqrt{xy}}{\sin \alpha} \right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{xy}} \int_R dp \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu + ip) \Gamma(\frac{1}{2} + \mu - ip)}{\Gamma^2(1 + 2\mu)} \times e^{-2\alpha p + \pi p} M_{ip, \mu}(-2ix) M_{-ip, \mu}(2iy). \quad (2.52)$$

Les  $M_{\lambda, \mu}(z)$  sont les fonctions de Whittaker (voir Réf.[19] , p.158). Il est facile de montrer que les pôles de la fonction de Green des états continus seront obtenus par intégration sur la variable temporelle  $S$ . Ils sont définis par :

$$\omega(p_\xi + p_\eta) - \frac{i\gamma}{\hbar} = 0 \quad (2.53)$$

En convertissant ceci en énergie en utilisant (2.42), les valeurs de l'énergie sont :

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2M} p^2, \text{ avec } p = \frac{1}{a(p_\xi + p_\eta)} \quad (2.54)$$

et où  $a = \frac{\hbar^2}{M\gamma}$  est le rayon de Bohr.

Effectuons maintenant le changement de variables défini par :

$$p_\xi = \frac{1}{2p} \left( \frac{1}{a} + \kappa \right), p_\eta = \frac{1}{2p} \left( \frac{1}{a} - \kappa \right). \quad (2.55)$$

Pour des raisons de convergence,  $p > 0$  et  $\frac{M\omega}{\hbar} = -ip$ . Dans ce cas la fonction de Green prend la forme :

$$\begin{aligned}
 G_J^c(\xi_f, \eta_f, \xi_i, \eta_i; E) &= \frac{i\hbar}{(2\pi)^2 \xi_f \eta_f \xi_i \eta_i \Gamma^2(1+2J)} \int_0^\infty dp \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \quad (2.56) \\
 &\times \left| \Gamma \left[ \frac{1+2J}{2} + i \frac{\frac{1}{a} + \kappa}{2p} \right] \Gamma \left[ \frac{1+2J}{2} + i \frac{\frac{1}{a} - \kappa}{2p} \right] \right|^2 \\
 &\times \frac{e^{\frac{\pi}{ap}}}{p} M_{\frac{i}{2p}(\frac{1}{a} + \kappa), \frac{2J}{2}}(ip\xi_i^2) M_{-\frac{i}{2p}(\frac{1}{a} + \kappa), J}(-ip\xi_f^2) \\
 &M_{\frac{i}{2p}(\frac{1}{a} - \kappa), \frac{2J}{2}}(ip\eta_i^2) M_{-\frac{i}{2p}(\frac{1}{a} - \kappa), \frac{2J}{2}}(ip\eta_f^2)
 \end{aligned}$$

Les fonctions d'onde sont alors :

$$\begin{aligned}
 \Psi_{p,\kappa,J}(\xi, \eta, \phi) &= \Psi_{p,\kappa}(\xi, \eta) \Psi_J^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\phi) \quad (2.57) \\
 &= \frac{\left| \Gamma \left[ \frac{1+2J}{2} + i \frac{\frac{1}{a} + \kappa}{2p} \right] \Gamma \left[ \frac{1+2J}{2} + i \frac{\frac{1}{a} - \kappa}{2p} \right] \right| e^{\frac{\pi}{2ap}}}{2\pi \Gamma(1+2J) \xi \eta \sqrt{p}} \\
 &\times M_{\frac{-i}{2p}(\frac{1}{a} + \kappa), \frac{2J}{2}}(-ip\xi^2) M_{\frac{-i}{2p}(\frac{1}{a} - \kappa), \frac{2J}{2}}(ip\eta^2) \\
 &\times \Psi_J^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\phi).
 \end{aligned}$$

# Chapitre 3

## Systeme super-integrable dans $E_3$ et integrale de chemin en coordonnees spheriques

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre , nous allons presenter la solution du potentiel coulombien (.2.1) via les integrales de chemin en coordonnees spheriques . Le potentiel (.2.1) admet aussi la separation des variables dans le systeme des coordonnees spheriques defini par :

$$\begin{cases} x^{(1)} = r \sin \theta^{(1)} \cos \theta^{(2)}, \\ x^{(2)} = r \sin \theta^{(1)} \sin \theta^{(2)}, \\ x^{(3)} = r \cos \theta^{(1)} \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $r > 0, 0 \leq \theta^{(1)} < \pi$  et  $0 \leq \theta^{(2)} < 2\pi$ .

Les integrales de mouvement correspondantes sont aussi connues [20] [21] et sont donnees par :

$$\begin{cases} X_1 = L_{12}^2 + L_{23}^2 + L_{31}^2, & X_2 = L_{12}^2 \\ Y_1 = L_{12}^2 + L_{23}^2 + L_{31}^2 - \frac{2}{\sin^2 \theta^{(1)}} \left( \frac{\beta_1}{\cos^2 \theta^{(2)}} + \frac{\beta_2}{\sin^2 \theta^{(2)}} \right) \\ Y_2 = L_{23}^2 - 2\beta_2 \left[ 1 + \frac{\cot^2 \theta^{(1)}}{\sin^2 \theta^{(2)}} \right] \end{cases} \quad (3.2)$$

avec  $L_{ik} = x_i \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Le système est "maximally" super-intégrable puisqu'il possède un ensemble de cinq opérateurs algébriquement indépendants  $\{H, X_1, X_2, Y_1, Y_2\}$ .

Dans le paragraphe suivant, nous construisons la fonction de Green par

l'approche des intégrales de chemin dans le système des coordonnées sphériques en appliquant les techniques de l'intégration des chemins en coordonnées sphériques. Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde normalisées des états liés sont déduits de l'expression de la fonction de Green dans le paragraphe 3. la partie continue de la fonction de Green, le spectre et les fonctions d'onde des états continus sont donnés dans le paragraphe 4.

### 3.2 Hamiltonien à trois dimensions en coordonnées sphériques

si nous utilisons les coordonnées sphériques  $(r, \theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ , la métrique est donnée par :

$$ds^2 = g_{rr}(dr)^2 + g_{\theta^{(1)}\theta^{(1)}}(d\theta^{(1)})^2 + g_{\theta^{(2)}\theta^{(2)}}(d\theta^{(2)})^2 \quad (3.3)$$

où

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta^{(1)}\theta^{(1)}} = r^2, \quad g_{\theta^{(2)}\theta^{(2)}} = r^2 \sin^2 \theta^{(1)} \quad (3.4)$$

le tenseur métrique se met alors sous la forme :

$$(g_{ab}) = \text{diag}(g_{rr}, g_{\theta^{(1)}\theta^{(1)}}, g_{\theta^{(2)}\theta^{(2)}}), \quad (3.5)$$

avec

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{ab})} = r^2 \sin \theta^{(1)}, \quad (3.6)$$

et son inverse  $(g^{ab})$

$$(g_{ab})^{-1} = (g^{ab}) = \text{diag} \left( g_{rr}^{-1}, g_{\theta^{(1)}\theta^{(1)}}^{-1}, g_{\theta^{(2)}\theta^{(2)}}^{-1} \right) \quad (3.7)$$

Les opérateurs associés aux composantes de la quantité de mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} p_r = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Gamma_r}{2} \right); \Gamma_r = \frac{2}{r}, \\ p_{\theta^{(1)}} = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial \theta^{(1)}} + \frac{\Gamma_{\theta^{(1)}}}{2} \right); \Gamma_{\theta^{(1)}} = -\cot \theta^{(1)}, \\ p_{\theta^{(2)}} = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial \theta^{(2)}} + \frac{\Gamma_{\theta^{(2)}}}{2} \right); \Gamma_{\theta^{(2)}} = 0, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

construits à partir de l'équation (2.17) sont hermitiques par rapport au produit scalaire

$$(f, g) = \int r^2 \sin^2 \theta^{(1)} f^* \left( r, \theta^{(1)}, \theta^{(2)} \right) g \left( r, \theta^{(1)}, \theta^{(2)} \right) dr d\theta^{(1)} d\theta^{(2)}, \quad (3.9)$$

et le potentiel quantique  $\Delta V$  déduit de (2.19) est de la forme :

$$\Delta V = -\frac{\hbar^2}{8M} \left( 1 + \frac{1}{\sin^2 \theta^{(1)}} \right). \quad (3.10)$$

Le potentiel (2.1) s'écrit

$$V = -\frac{\gamma}{r}. \quad (3.11)$$

Des relations (2.15), (3.8), (3.10) et (3.11) nous obtenons le Hamiltonien quantique

$$H = \frac{1}{2M} \left[ P_r^2 + \frac{1}{r^2} \left( P_{\theta^{(1)}}^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta^{(1)}} P_{\theta^{(2)}}^2 \right) \right] - \frac{\hbar^2}{8Mr^2} \left( 1 + \frac{1}{\sin^2 \theta^{(1)}} \right) - \frac{\gamma}{r}. \quad (3.12)$$

### 3.3 Propagateur

En répétant les étapes de calculs qui nous ont conduits aux expression (2.22) et (2.23), nous obtenons l'intégrale de chemin dans la formulation Hamiltonienne

$$\begin{aligned} K(\vec{r}_f, \vec{r}_i; T) &= (g_f g_i)^{-\frac{1}{4}} \int Dr(t) D\theta^{(1)}(t) D\theta^{(2)} Dp_r(t) Dp_{\theta^{(1)}}(t) Dp_{\theta^{(2)}}(t) \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int \left( p_r \dot{r} + p_{\theta^{(1)}} \dot{\theta}^{(1)} + p_{\theta^{(2)}} \dot{\theta}^{(2)} - H \right) dt \right\} \\ &= (g_f g_i)^{-\frac{1}{4}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \prod_{j=1}^{N-1} \int dr_j d\theta_j^{(1)} d\theta_j^{(2)} \right] \left[ \prod_{j=1}^N \int \frac{dp_{r_j}}{2\pi\hbar} \frac{dp_{\theta_j^{(1)}}}{2\pi\hbar} \frac{dp_{\theta_j^{(2)}}}{2\pi\hbar} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N S(j, j-1) \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où l'action élémentaire  $S(j, j-1)$  est de la forme :

$$\begin{aligned} S(j, j-1) &= p_{r_j} \Delta r_j + p_{\theta_j^{(1)}} \Delta \theta_j^{(1)} + p_{\theta_j^{(2)}} \Delta \theta_j^{(2)} \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2M} \left[ P_{r_j}^2 + \frac{1}{\widehat{r_j^2}} P_{\theta_j^{(1)}}^2 + \frac{1}{\widehat{r_j^2 \sin^2 \theta_j^{(1)}}} P_{\theta_j^{(2)}}^2 \right] \\ &\quad + \frac{\varepsilon \hbar^2}{8M \widehat{r_j^2}} \left( 1 + \frac{1}{\sin^2 \theta_j^{(1)}} \right) + \frac{\varepsilon \gamma}{r_j}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec les notations habituelles :  $\varepsilon = t_j - t_{j-1}$ ,  $T = N\varepsilon = t_f - t_i$ ,  $\Delta u_j = u_j - u_{j-1}$ ,  $u_f = u(t_f)$ ,

$u_i = u(t_i)$ ,  $\widehat{r}_j^2 = r_j r_{j-1}$ ,  $\widehat{\sin^2 \theta_j^{(1)}} = \sin \theta_j^{(1)} \sin \theta_{j-1}^{(1)}$ ;  $g_i$  et  $g_f$  sont les déterminants du tenseur métrique (3.5) aux point initial et final respectivement. En effectuant les intégrations par rapport aux composantes de la quantité de mouvement  $P_{r_j}$ ,  $P_{\theta_j^{(1)}}$  et  $P_{\theta_j^{(2)}}$  le propagateur (3.13) acquiert la forme :

$$K(\vec{r}_f, \vec{r}_i; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \left( \frac{M}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{3}{2} N-1} \prod_{j=1}^{N-1} r_j^2 \sin \theta_j^{(1)} dr_j d\theta_j^{(1)} d\theta_j^{(2)} \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N A(j, j-1) \right\}, \quad (3.15)$$

avec l'action élémentaire

$$A(j, j-1) = \frac{M}{2\varepsilon} \left( \Delta^2 r_j + \widehat{r}_j^2 \Delta^2 \theta_j^{(1)} + \widehat{r}_j^2 \widehat{\sin^2 \theta_j^{(1)}} \Delta^2 \theta_j^{(2)} \right) + \frac{\varepsilon \gamma}{r_j} \quad (3.16)$$

D'abord, notons qu'en utilisant la transformation temporelle définie  $t \rightarrow s$  ainsi :

$$\frac{dt}{ds} = r^2 \sin^2 \theta^{(1)} \quad (3.17)$$

ou sous la forme discrète

$$\varepsilon = \widehat{r}_j^2 \widehat{\sin^2 \theta_j^{(1)}} \sigma_j; \quad \sigma_j = s_j - s_{j-1}, \quad (3.18)$$

et en incorporant la contraire

$$T = \int_0^S r^2 \sin^2 \theta^{(1)} ds, \quad (3.19)$$

au moyen de l'identité

$$r_f r_i \sin \theta_f^{(1)} \sin \theta_i^{(1)} \int_0^\infty ds \delta \left( T - \int_0^S r^2 \sin^2 \theta^{(1)} ds \right) = 1, \quad (3.20)$$

le propagateur (3.15) se met sous la forme :

$$K(\vec{r}_f, \vec{r}_i; T) = K(r_f, \theta_f^{(1)}, r_i, \theta_i^{(1)}; S) K(\theta_f^{(2)}, \theta_i^{(2)}; S), \quad (3.21)$$

avec

$$K(r_f, \theta_f^{(1)}, r_i, \theta_i^{(1)}; S) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \left( \frac{M}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d\theta_j^{(2)} \quad (3.22)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{M}{2\sigma_j} \Delta^2 \theta_j^{(2)} \right] \right\}$$

C'est le propagateur associé à un potentiel du type de Pöschl-Teller. Sa solution est connue et peut être déduit de (2.31). le résultat est :

$$K(\theta_f^{(2)}, \theta_i^{(2)}; S) = \int D\theta^{(2)}(s) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^s \left[ \frac{M}{2} \left( \dot{\theta}^{(2)} \right)^2 \right] ds \right\}$$

$$\sum_{J_2=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{i\hbar}{2M} (2J_2)^2 \right\}$$

$$\times \Psi_{J_2}^{*(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\theta_i^{(2)}) \Psi_{J_2}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\theta_f^{(2)}) \quad (3.23)$$

avec les fonctions d'onde convenablement normalisées données par

$$\Psi^{(-\frac{1}{2}, p_2 - \frac{1}{2})}(\theta^{(2)}) = \left[ 2(2J_2) \frac{J_2! \Gamma(J_2)}{\Gamma(J_2 + \frac{1}{2}) \Gamma(J_2 + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

$$\times P_{J_2}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\cos 2\theta^{(2)}).$$

En substituant (3.23) dans (3.21) et en retournant à l'ancienne variable temporelle en effectuant la transformation inverse  $s \rightarrow t$  :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta^{(1)}}, \quad (3.25)$$

accompagnée de la contrainte

$$\frac{1}{r_f r_i \sin \theta_f^{(1)} \sin \theta_i^{(1)}} \int_0^\infty dT \delta \left( S - \int_0^T \frac{dt}{r^2 \sin \theta^{(1)}} \right) = 1, \quad (3.26)$$

le propagateur (3.21) s'écrit :

$$K(r_f, r_i, T) = \sum_{J_2=0}^{\infty} \Psi_{J_2}^{*\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)} \left( \theta_i^{(2)} \right) \Psi_{J_2}^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)} \left( \theta_f^{(2)} \right) K_{J_2} \left( r_f, \theta_f^{(1)}, r_i, \theta_i^{(1)}; T \right), \quad (3.27)$$

où

$$K_{J_2} \left( r_f, \theta_f^{(1)}, r_i, \theta_i^{(1)}; T \right) = \int \prod_{j=1}^N \left( \frac{M}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{N-1} \prod_{j=1}^N r_j dr_j d\theta_j^{(1)} \quad (3.28)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N W(j, j-1) \right\},$$

avec

$$W(j, j-1) = \frac{M}{2\varepsilon} \left( \Delta^2 r_j + \widehat{r}_j^2 \Delta^2 \theta_j^{(1)} \right) + \frac{\varepsilon \gamma}{r_j} \quad (3.29)$$

Nous remarquons que les variables  $r_j$  et  $\theta_j^{(1)}$  ne sont pas séparées. Il est donc nécessaire d'effectuer la transformation temporelle  $t \rightarrow s$  définie par

$$\frac{dt}{ds} = r^2 \quad (3.30)$$

ou sous la forme discrète

$$\varepsilon = \widehat{r}_j^2 \sigma_j; \quad \sigma_j = s_j - s_{j-1}, \quad (3.31)$$

ou d'utiliser la contrainte

$$T = \int_0^S r^2 ds, \quad (3.32)$$

à l'aide de l'identité

$$r_f r_i \int_0^\infty dS \delta \left( T - \int_0^S r^2 ds \right) = 1. \quad (3.33)$$

Dans ces conditions, nous pouvons écrire le propagateur (3.28) sous forme d'un produit de deux noyaux

$$K_{J_2} \left( r_f, \theta_f^{(1)}, r_i, \theta_i^{(1)}; T \right) = K_{J_2} (r_f, r_i; S) K_{J_2} \left( \theta_f^{(1)}, \theta_i^{(1)}; S \right), \quad (3.34)$$

où

$$\begin{aligned} K_{J_2} \left( \theta_f^{(1)}, \theta_i^{(1)}; S \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \left( \frac{M}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d\theta_j^{(1)} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{M}{2\sigma_j} \Delta^2 \theta_j^{(1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sigma_j \hbar^2}{2M} \left( \frac{(2J_2)^2 - \frac{1}{4}}{\widehat{\sin^2 \theta_j^{(1)}}} \right) \right] \right\} \\ &= \int D\theta^{(1)}(s) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^S \left[ \frac{M}{2} \left( \dot{\theta}^{(1)} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{(2J_2)^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \theta^{(1)}} \right) \right] ds \right\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

En l'équation (2.30) ,le propagateur (3.35) s'écrit

$$K_{J_2} \left( \theta_f^{(1)}, \theta_i^{(1)}; S \right) = \sum_{J_1=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{i\hbar S}{2M} \left( 2J_1 + 2J_2 + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \quad (3.36)$$

$$\times \Psi_{J_1}^{*(2J_2, -\frac{1}{2})} \left( \theta_i^{(1)} \right) \Psi_{J_1}^{(2J_2, -\frac{1}{2})} \left( \theta_f^{(1)} \right),$$

avec les fonctions d'onde normalisées données par :

$$\Psi_{J_1}^{(2J_2, -\frac{1}{2})} \left( \theta^{(1)} \right) = \left[ 2 \left( 2J_1 + 2J_2 + \frac{1}{2} \right) \right. \quad (3.37)$$

$$\left. \frac{J_1! \Gamma \left( J_1 + 2J_2 + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( p_1 + J_1 + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left( 2J_2 + \frac{1}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left( \sin \theta^{(1)} \right)^{2J_2 + \frac{1}{2}} \left( \cos \theta^{(1)} \right) P_{J_1}^{(2J_2, -\frac{1}{2})} \left( \cos 2\theta^{(1)} \right).$$

Reportons le noyaux (3.36) dans l'expression du propagateur (3.34) et revenons à l'ancienne variable temporelle  $t$  par application de la transformation inverse  $s \rightarrow t$  :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r^2}, \quad (3.38)$$

ou bien

$$\sigma_j = \frac{\varepsilon}{r_j^2}, \quad (3.39)$$

et en tenant compte de la contrainte  $S = \int_0^T \frac{dt}{r^2}$  à l'aide de l'identité

$$\frac{1}{r_f r_i} \int_0^{\infty} dT \delta \left( S - \int_0^T \frac{1}{r^2} dt \right) = 1, \quad (3.40)$$

nous pouvons réexprimer le noyau (3.34) sous la forme

$$K_{J_2} \left( r_f, \theta_f^{(1)}, r_i, \theta_i^{(1)}; T \right) = \sum \Psi_{J_1}^{*(2J_2, -\frac{1}{2})} \left( \theta_i^{(1)} \right) \Psi_{J_1}^{(2J_2, -\frac{1}{2})} \left( \theta_f^{(1)} \right) \times K_{J_1} (r_f, r_i; T), \quad (3.41)$$

où le noyau radial  $K_{J_1} (r_f, r_i; T)$  est donné par :

$$K_{J_1} (r_f, r_i; T) = \frac{1}{r_f r_i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \left( \frac{M}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \Pi dr_j \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum \left[ \frac{M}{2\varepsilon} \Delta^2 r_j + \frac{\varepsilon \gamma}{r_j} \right] \right\} \quad (3.42)$$

### 3.4 Fonction de Green

Pour évaluer ce propagateur, introduisons l'énergie  $E$  à l'aide de la fonction de Green

$$G_{J_1} (r_f, r_i; E) = \int_0^\infty dT \exp \left( \frac{iET}{\hbar} \right) K_{J_1} (r_f, r_i; E), \quad (3.43)$$

et effectuant une dernière transformation spatio-temporelle [22] [23]  $(r, t) \rightarrow (u, s)$  définie par

$$r = u^2, \quad \frac{dt}{dr} = 4u^2 (s) \quad (3.44)$$

ou par discrétisation,

$$r_j = u_j^2, \quad r_{j-1} = u_{j-1}^2, \quad \varepsilon = 4 (s_j - s_{j-1}) u_j u_{j-1} = 4\sigma_j u_j u_{j-1}. \quad (3.45)$$

symétrisons la mesure

$$\prod_{j=1}^N \left( \frac{M}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} dr_j = \frac{1}{(4u_f u_i)^{\frac{1}{2}}} \prod_{j=1}^N \left( \frac{M}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} du_j, \quad (3.46)$$

et l'action élémentaire dans l'expression du propagateur (3.42) :

$$\begin{aligned} S(j, j-1) &= \frac{M}{2\epsilon} \Delta^2 r_j + \frac{\epsilon \gamma}{r_i} \\ &= \frac{M}{2\sigma_j} (\Delta^2 u_j) + 4\sigma_j \gamma + \frac{M}{8\sigma_j} \frac{(\Delta u_j)^4}{u_j^2}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

et appliquant pour la dernière fois la procédure de Mc Laughlin et Schulman qui consiste à remplacer  $\frac{M}{8\sigma_j} \frac{(\Delta u_j)^4}{u_j^2}$  par la correction quantique  $\left( \frac{3\hbar^2}{8Mu_j^2} \right)$ . La fonction de Green (3.34) peut alors être ramenée à une appropriée [16] [23] [24] [25] [26] :

$$\begin{aligned} G_{J_1}(r_f, r_i; E) &= \frac{1}{2u_f u_i} \int_0^\infty dS e^{\frac{i}{\hbar} 4\gamma S} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \left( \frac{M}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} du_j \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{M}{2\sigma_j} (\Delta^2 u_j) + 4Eu_j^2 \sigma_j \right] \right\} \\ &= \frac{2M\omega}{i\hbar u_f u_i} \int_0^\infty dS \frac{e^{\frac{i}{\hbar} 4\gamma S}}{\sin(\omega S)} \exp \left\{ \frac{iM\omega}{2\hbar} ((u_f^2 + u_i^2) \cot(\omega S)) \right\} \\ &\quad \times I_{2(2J_1+2J_2+\frac{1}{2})} \left( \frac{M\omega u_f u_i}{i\hbar \sin(\omega S)} \right) \\ &\quad + \frac{2M\omega}{i\hbar \sqrt{r_f r_i}} \int_0^\infty dS \frac{e^{\frac{i}{\hbar} 4\gamma S}}{\sin(\omega S)} \exp \left\{ \frac{iM\omega}{2\hbar} ((r_f + r_i) \cot(\omega S)) \right\} \\ &\quad \times I_{2(2J_1+2J_2+\frac{1}{2})} \left( \frac{M\omega \sqrt{r_f r_i}}{i\hbar \sin(\omega S)} \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

où

$$\omega = \sqrt{\frac{-8E}{M}} \quad (3.49)$$

Pour effectuer l'intégration sur la variable temporelle  $S$ , nous utiliserons la formule suivante (voir ([13]), p.729, Eq.(6.699.4)) :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dq \frac{e^{-2pq}}{\sinh q} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x+y) \coth q \right] I_{2\lambda} \left( \frac{\sqrt{xy}}{\sinh q} \right) \\ &= \frac{\Gamma(p + \lambda + \frac{1}{2})}{\sqrt{xy} \Gamma(2\lambda + 1)} M_{-p, \lambda}(x) W_{-p, \lambda}(y); y > x, \end{aligned} \quad (3.50)$$

où  $M_{-p, \lambda}(x)$  et  $W_{-p, \lambda}(y)$  sont les fonctions de Whittaker.

Par conséquent, en tenant compte de (3.27), (3.41) et (3.43) nous obtenons la fonction de Green pour le potentiel en question dans le système des coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} G(r_f, r_i; E) &= \sum \Psi_{J_2}^{*(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\theta_i^{(2)}) \Psi_{J_2}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\theta_f^{(2)}) \\ &\times \Psi_{J_1}^{*(2J_2, -\frac{1}{2})}(\theta_i^{(1)}) \Psi_{J_1}^{(2J_2, -\frac{1}{2})}(\theta_f^{(1)}) \\ &\times \frac{2}{i\omega r_f r_i} \frac{\Gamma(p + 2J_1 + 2J_2 + 1)}{\Gamma[2(J_2 + 1)]} \\ &\times M_{-p, 2J_1 + 2J_2 + \frac{1}{2}}\left(\frac{M\omega}{\hbar} r_i\right) W_{-p, 2J_1 + 2J_2 + \frac{1}{2}}\left(\frac{M\omega}{\hbar} r_f\right), \end{aligned} \quad (3.51)$$

où  $r_f > r_i$  et  $p = -\frac{2\gamma}{\hbar\omega}$ .

### 3.5 Spectre d'énergie et fonctions d'onde

Pour déterminer le spectre de l'énergie et les fonctions d'onde du système physique, revenons à l'expression (3.48) de la fonction de Green radiale et au moyen de la formule de Hille et Hardy (voir ([13]), 1038, Eq.8.976), et de la formule de dispersion (voir ([13]), p. 844, Eq. 7.694), l'expression (3.48) s'écrit sous la forme d'un développement spectrale ainsi :

$$G_{J_1}(r_f, r_i; E) = i\hbar \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi^*(r_i) \Psi(r_f)}{E - E_n} + \int_0^{\infty} dk \frac{\Psi_k^*(r_i) \Psi(r_f)}{E - E_k} \right). \quad (3.52)$$

Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés sont donnés par :

$$E_{n_1, n_2} = -\frac{M\gamma^2}{2\hbar^2 (n_1 + n_2 + 2J + 1)^2}, \quad (3.53)$$

où  $J = J_1 + J_2$  ,  $n = n_1 + n_2$

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1, n_2}(r) = & \frac{1}{a [n + 2J_1 + 2J_2 + 1]^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{n!}{\Gamma(n + 2(2J_1 + 2J_2) + \frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left[ -\frac{2r}{a(n + 2J_1 + 2J_2 + 1)} \right]^{2J_1 + 2J_2} \\ & \times \exp \left[ -\frac{r}{a(n + 2J_1 + 2J_2 + 1)} \right] \\ & \times L_n^{(2J_1 + 2J_2 + \frac{1}{2})} \left( \frac{2r}{a(n + 2J_1 + 2J_2 + 1)} \right), \end{aligned} \quad (3.54)$$

avec  $a = \frac{\hbar^2}{M\gamma}$ .

pour le spectre continu avec  $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$  on a

$$\Psi_k = \frac{\Gamma\left(1 + 2J_1 + 2J_2 - \frac{i}{ak}\right)}{\sqrt{2\pi}\Gamma(4J_1 + 4J_2 + 2)} \exp\left(\frac{\pi}{2ak}\right) M_{\frac{i}{ak}, 2J_1 + 2J_2 + \frac{1}{2}}(-2ikr). \quad (3.55)$$

Donc, en coordonnées sphériques les fonctions d'onde de notre système physique à trois dimensions sont :

$$\Psi_{n, J_1, J_2}(\vec{r}) = \Psi_n(r) \Psi_{J_1}^{(2J_2, -\frac{1}{2})}(\theta^{(1)}) \Psi_{J_2}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\theta^{(2)}) \quad (3.56)$$

pour les états liés, et

$$\Psi_{k, J_1, J_2}(\vec{r}) = \Psi_k(r) \Psi_{J_1}^{(2J_2, -\frac{1}{2})}(\theta^{(1)}) \Psi_{J_2}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\theta^{(2)}) \quad (3.57)$$

pour les états continus.

# Chapitre 4

## Conclusion

Dans ce travail, nous avons d'abord traité le cas du système dynamique super-intégrable commandé par le potentiel  $V(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = -\frac{\gamma}{r}$  dans l'espace Euclidien à trois dimensions.

Dans le système des coordonnées rotationnelles paraboliques, l'évaluation de la fonction de Green est rendue possible en séparant les variables au moyen de la technique de reparamétrisation des chemins introduite en 1979 par Duru et Kleinert.

L'intégrale de chemin associée à la partie angulaire est ramenée à celle relative au potentiel de Pöschl-Teller et dont la solution dans ce cadre a été donnée par plusieurs auteurs.

La partie dépendante des variables  $\xi$  et  $\eta$  est identifiée pour chaque coordonnée au propagateur d'un oscillateur harmonique placé dans un potentiel quadratique inverse.

Le spectre d'énergie du système a été obtenu ainsi que les fonctions d'onde normalisées des états liés et continus.

En coordonnées sphériques, nous avons appliqué la technique précédente pour séparer et évaluer la partie dépendante des angles azimuthal et polaire.

La partie radiale de l'intégrale de chemin est identique à celle de la partie radiale associée au potentiel Coulombien.

Le spectre d'énergie des états liés et de diffusion ont été extraits de l'expression de la fonction de Green.

# Bibliographie

- [1] W. Heisenberg, *Zeitsch. f. Phys.* 33 (1925) 879.
- [2] E. Schrödinger, *Ann. der Phys.* 79 (1925) 361-489; 80 (1926) 437; 81 (1926) 109.
- [3] P.M.A. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*. (Oxford Clarendon Press, 1958).
- [4] I. H. Duru et H. Kleinert, *Phys. Lett. B* 84 (1979) 185.
- [5] P. Kustaanheimo et E. Stiefel, *J. Reine Angew; Math.* 218 (1965) 204.
- [6] I. H. Duru et H. Kleinert, *Fortschr. Phys.* 30 (1982) 401.
- [7] P. Winternitz, M. A. Rodriguez, *J. Math. Phys.* 43 (2002) 1309.
- [8] T. Negadi, *Thèse de doctorat d'état Es – sciences*, N° 88-09, Université Claude Bernard Lyon, France.
- [9] M. Kibler and P. Winternitz, *J. Phys. A : Math. Gen.* 20 (1987) 4097.
- [10] M. Mizrahi, *J. Math. Phys.* 16 (1975) 2201.
- [11] C. Grosche and F. Steiner, *Zeitschr. Phys. C* 36 (1987) 699.
- [12] L. D. Schulman, *Techniques and applications of path integration*, (John Wiley, New york, 1981).
- [13] I. H. Duru and H. Kleinert, *Phys. Lett. B* 84 (1979); *Fortschr. Phys.* 30 (1982) 401.
- [14] H. Kleinert and I. Mustapic, *J. Math. Phys.* 33 (1992) 643.
- [15] D.C. Mc Laughlin, L.S. Schulman, *J. Math. Phys.* 12 (1971) 2520.
- [16] D. Peak and A. Inomata, *J. Math. Phys.* 10 (1969) 1422.
- [17] W. Langguth and A. Inomata, *Math. Phys.* 20 (1979) 499.
- [18] L. Chetouani, L. Guechi and T. F. Hammann, *Phys. Lett. A* 125 (1987) 277.

- 
- [19] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, Series and products*, ( Academic Press, New york, 1965 ).
- [20] T . Negadi, Thèse de Doctorat d'état Es-sciences, N° 88–09, Université Claude Bernard Lyon, France.
- [21] M. Kibler and P. Winternitz, J. Phys. A : Math. Gen. 20 ( 1987 ) 4097.
- [22] L. Chetouani and T. F . Hammann, J. Math. Phys. 27 ( 1986 ) 2944; L. Chetouani, L. Guechi and T. F . Hammann, J. Math. Phys .30 ( 1989 ) 655.
- [23] L. Chetouani, L. Guechi, T. F. Hammann and M. Letlout, Nuovo Cimento B 105 ( 1990 ) 387.
- [24] F. Steiner, *Path Integrals From mev to Mev*, ed. M. I. Gutzwiller, A. Inomata, J. Klauder and L. Streit ( World Scientific, Singapore, 1986 ) p. 335.
- [25] I. H Duru, Phys. Lett. A 112 ( 1985 ) 421.
- [26] M. J. Goovaerts, J. Math. Phys. 16 ( 1975 ) 720.

# Résumé

Ce mémoire concerne une discussion complète du problème d'un système coulombien de l'atome d'Hydrogène dans un espace plat par l'approche de l'intégrale de chemin de Feynman.

Nous avons d'abord traité le cas du potentiel Coulombien dans l'espace Euclidien à trois dimensions.

Dans le système des coordonnées rotationnelles paraboliques, l'évaluation de la fonction de Green est rendue possible en séparant les variables au moyen de la technique de reparamétrisation des chemins introduite par Duru et Kleinert.

L'intégrale de chemin associée à la partie dépendante des variables est identifiée pour chaque coordonnée au propagateur d'un oscillateur harmonique placé dans un potentiel quadratique inverse.

Dans le spectre d'énergie du système a été obtenu ainsi que les fonctions d'onde normalisées des états liés et continus.

En coordonnées sphériques, nous avons appliqué la technique précédente pour séparer et évaluer la partie dépendante des angles azimuthal et polaire.

La partie radiale de l'intégrale de chemin est identique à celle de la partie radiale associée au potentiel Coulombien.

Le spectre d'énergie des états liés et de diffusion ont été extraits de l'expression de la fonction de Green.

## ملخص

تتعلق هذه الرسالة بمناقشة كاملة لجملة كمون كولومب لذرة الهيدروجين في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد المسطح من خلال تقريب تكامل المسار ل فاينمان.

انطلاقاً من حساب دالة جرين عن طريق فصل المتغيرات بتقنية إعادة المعالجة التي أدخلها كل من دورو وكليزرت في نظام الإحداثيات الدورانية المكافئة تحصلنا على طيف الطاقة التام و كذا دوال الموجة المتعلقة بالحالات المرتبطة و المستمرة.

كذلك وفيما يتعلق بالجزء المرتبط بالإحداثيات الدورانية المكافئة تم تحديد الناشر لكل إحدائية بواسطة ناشر مذبذب توافقي خاضع لكمون تربيعي معكوس .

في الإحداثيات الكروية طبقنا التقنية السابقة لفصل وحساب الجزء المرتبط من الزوايا السميتية والقطبية أين وجدنا طيف الطاقة في ودالة الموجات المقيدة للحالات المرتبطة والمستمرة.

يتطابق الجزء المركزي من تكامل المسار مع الجزء المركزي لكمون كولومب. تم استخراج طيف الطاقة للحالات المرتبطة وحالات الانتشار من دالة جرين.