République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التـعـلـيـم العـالــي والبـحــث العلـمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed El Bachir Elibrahimi –Bordj Bou Arreridj
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département Sciences de la Matière

جـامعة محمد البشيرالإبراهيمي « برج بوعريريج »
كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم علوم المادة

Mémoire de fin d'études

PRESENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE : Master

Filière : Physique
Option : Physique des Matériaux

THÈME :

La résolution d'un problème de mécanique quantique avec hamiltonien dépendant explicitement du temps.

Préparé par : BENZERTIHA SOMIA

Devant le jury :

Président :	Benchihoub Nadjet	MCB	Université de BBA
Rapporteur :	Berrehail. Mounira	MCB	Université de BBA
Examinateur :	Mameri samir	MCB	Université de BBA

Année Universitaire 2019-2020

Remerciements

Je tien tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui j'ai donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tien à remercier ma directrice de recherche BERAHAIL Mounira pour leur précieux conseil, leur aide durant toute la période du travail, pour sa patience, sa confiance, ses remarques, ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.

Je vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et ceci en acceptant de l'examiner.

Je tien également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail surtout Bennour Zahira.

Enfin, je tiens à remercie vivement tous mes amis (es) et mes collègues.

Dédicace

Je remercie le Dieu pour m'avoir donné la force d'accomplir ce travail pour aller plus loin in Chaa Allah.

Je dédie ce travail à ce travail à mes parents, ma mère pour ses encouragements et ses prières tout au long de mes études, mon père pour tout ce qu'il a fait pour que je puisse avoir ce résultat.

Je le dédie à mes frères et sœur.
A tous qui aiment Somia et ceux que Somia amie.

Sommaire

Introduction générale

Les problèmes dynamiques en mécanique quantique non relativiste et relativiste sont d'un intérêt capital dans différentes branches de la physique et la chimie quantiques. En mécanique quantique non relativiste, il faut résoudre l'équation de Schrödinger associée à un Hamiltonien comme premier pas pour comprendre le comportement quantique du système physique qu'il décrit. Pour les systèmes stationnaires, c'est-à-dire dont l'Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, l'équation de Schrödinger se réduit à une équation aux valeurs propres après séparation des variables d'espace et du temps. Les solutions de l'équation de Schrödinger s'expriment alors comme des fonctions des variables d'espace multipliées par des phases dépendantes du temps.

Pour les Hamiltoniens dépendant explicitement du temps, la séparation des variables spatiales et du temps dans l'équation de Schrödinger associée n'est pas toujours possible et par conséquent la résolution du problème est souvent plus compliquée voire même impossible de façon exacte. En fait, hormis quelques cas extrêmement rares, il n'est en général pas possible de résoudre analytiquement l'équation de Schrödinger dépendante du temps. On est obligé de faire appel à des méthodes approximatives dont chacune peut être mieux adaptée pour certains types de potentiels. La théorie des perturbations, utilisée pour résoudre approximativement une multitude de potentiels connus en physique, peut être appliquée notamment lorsque le terme dépendant du temps est petit devant les écarts entre les niveaux énergétiques [1].L'approximation adiabatique est une méthode qui est relativement valable lorsque le terme dépendant du temps dans l'Hamiltonien varie très lentement par rapport à tous les termes caractéristiques du système [1]. En fin, l'approximation soudaine s'applique notamment pour une certaine catégorie de potentiels où le changement dans l'Hamiltonien occupe un intervalle de temps très court mais fini.

Il est bien connu que la méthode standard pour résoudre exactement l'équation de Schrödinger, pour des Hamiltoniens stationnaires ou dépendants du temps, consiste à chercher l'opérateur d'évolution associé [1]. Cet opérateur satisfait aussi une équation du type Schrödinger dont la résolution (formelle), se fait généralement par l'approche des transformations unitaires. Parmi les méthodes alternatives, débouchant sur des solutions exactes, il y a la méthode des invariants qui a été initiée par Lewis et Riesenfeld[6]. Elle repose sur la résolution d'une équation aux valeurs propres relative à un opérateur dit invariant et satisfaisant certaines conditions requises. Il s’avère parfois que cette approche est plus convenable que la méthode directe reposant sur l’opérateur d’évolution.

Dans ce travail, nous allons nous pencher sur la méthode des invariants en la décrivant en détail, en l’utilisant le problème de l’oscillateur harmonique dépendant du temps [6].

Nous commençons, dans le chapitre 1, par un rappel succinct des éléments fondamentaux de la mécanique quantique et les différentes méthodes utilisées pour la résoudre.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la théorie des invariants de Lewis et Riesenfeld.

Le troisième chapitre est consacré à une présentation détaillée de la résolution du problème d’un oscillateur harmonique unidimensionnel et dépendant du temps, en utilisant la méthode décrite au chapitre 2.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

L'équation de Schrödinger dépendant du temps.

1.1 Introduction

La mécanique quantique non relativiste, qui nous intéresse dans les travaux de cette mémoire, est basée sur plusieurs postulats et principes dont essentiellement le principe de Heisenberg, le double aspect de la matière "onde-corpuscule" de Broglie et l'équation de Schrödinger. Cette dernière qu'on peut qualifier d'équation fondamentale de la physique quantique non relativiste, fut alors proposée en 1925 par Erwin Schrödinger. C'est l'équation d'évolution dans le temps d'une certaine fonction de carrée sommable, dite fonction d'onde, qu'on doit associer à toute particule matérielle pour décrire à la fois ses aspects ondulatoire et corpusculaire. Plus de détails peuvent être trouvés dans les ouvrages élémentaires et spécialisés de la mécanique quantique tels que ceux des références [1],[2].

1.2 L'équation de Schrödinger dépendant du temps

L'équation dévolution de l'état dynamique d'un système quantique (particule élémentaire) représenté par la fonction d'onde $\Psi(\vec{r},t)$ a été formulée en 1925 par Erwin Schrödinger [2]. Depuis, cette équation est considérée comme un postulat fondamental de la mécanique quantique non relativiste .Il s'agit d'une équation du premier ordre par rapport au temps et du second ordre par rapport aux coordonnées spatiales, faisant intervenir l'opérateur Hamiltonien du système. Elle prend la forme suivante :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = H(t)\Psi(\vec{r},t) \qquad (1.1)$$

Où H(t) est l'opérateur Hamiltonien qui est un opérateur linéaire et Hermitien, éventuellement dépendant du temps, tiré de la fonction Hamiltonienne classique du système Considéré. Cette équation s'écrit aussi, dans la notation dite de Dirac, sous la forme :

$$H(t)|\Psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(\mathrm{t})\rangle \qquad (1.2)$$

Où $|\Psi(\mathrm{t})\rangle$ est un vecteur abstrait, appelé état du système. L'hamiltonien H peut être exprimé comme la somme de deux opérateurs : l'un qui correspond à l'énergie cinétique et l'autre à l'énergie potentielle

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + V(r,t) \qquad (1.3)$$

Avec $p = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ ou $\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient et $V(r,t)$ étant l'opérateur d'énergie

Potentielle associée au potentiel d'interaction, éventuellement dépendant du temps.

L'opérateur hamiltonien dépend donc du temps si les potentiels qui entrent en jeu dépendent eux-mêmes explicitement du temps. Lorsque l'opérateur H ne dépend pas du temps, on est ramené par séparation des variables spatiales et temporelle à une équation aux valeurs propres, appelée équation de Schrödinger stationnaire [5]. Par contre si l'hamiltonien est fonction du temps, on est obligé de résoudre l'équation de Schrödinger dépendant du temps.

1.2.1 Superposition d'états

On peut faire un constations très importante en regardant l'équation de Schrödinger c'est qu'elle linéaire. C'est à la base de méthodes puissantes de résolution de l'équation, qui si $\Psi_1(r,t)$ et $\Psi_2(r,t)$ sont deux solution de l'équation (1.1), alors $\alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2$ est aussi solution de l'équation, ($\alpha_1$et $\alpha_2$peuvent être deux constantes complexes quelconques). [1] C'est ce que l'on appelle le principe de superposition, qui est l'un des principes fondamentaux de la mécanique quantique. Ceci permet d'essayer d'écrire la solution générale sous la forme d'une combinaison linéaire de solutions ayant certaines propriétés qui simplifient l'équation.

1.2.2 Evolution temporelle d'un système quantique

On postule que l'évolution temporelle d'un système quantique [1] est linéaire de sorte qu'il existe un opérateur $U(t,t_0)$ de l'espace de Hilbert H appelé opérateur d'évolution tel que :

$$\psi(\vec{r},t) = U(t,t_0)\psi(\vec{r},t_0) \qquad (1.4)$$

Par ailleurs, afin d'assurer la normalisation de la fonction d'onde, l'opérateur d'évolution doit être unitaire

$$U^{+}(t,t_0)\, U(t,t_0) = I \qquad (1.5)$$

OùI est l'opérateur identité.

La définition (1.4) permet de montrer que l'équation de Schrödinger est également satisfaite par l'opérateur d'évolution

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\, U(t,t_0) = H(t)\, U(t,t_0) \qquad (1.6)$$

Le calcul exact de l'opérateur $U(t,t_0)$ dans le cas ou l'hamiltonien dépend du temps est en général impossible, hormis quelque cas simples mais exemplaires, et on recourt le plus souvent aux méthodes perturbation. En revanche. Si H est constant, on a

$$U(t,t_0) = e^{\frac{1}{i\hbar}H(t-t_0)} \qquad (1.7)$$

1.2.3 Incertitudeset Mesure d'une état quantique

Chaque grandeur physique mesurable A est dite observable. Les résultats possibles de la mesure de$A$ sont les valeurs propres de l’opérateur (observable). La probabilité de trouver la valeur lors d’une mesure de A, effectuée sur un système dans l’état quelconque $|\Psi(t)\rangle$ est alors [1].

$$P(\alpha) = |\langle\alpha|\Psi(t)\rangle|^2 \qquad (1.8)$$

où$\langle\alpha|$est le vecteur propre de $\hat{A}$, associé à la valeur propre α.

En fait , il existe des observables qui ne peuvent pas être mesurées simultanément avec précision. Dans ce cas, les opérateurs associés ne commutent pas. En réalité, la mesure d’une observable modifie l’état du système. C’est le cas par exemple de la position et de l’impulsion d’une particule. Plus on augmente la précision sur la mesure de l’une d’elles, plus on perturbela valeur de l’autre. Plus précisément , si on déffinit les incertitudes sur les mesures de la coordonnée x et l’impulsion correspondante p_zd’une particule quantique par les écart-types$\Delta x et \Delta p_z$, elles devront satisfaire l’inégalité de Heisenberg

$$\Delta x . \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (1.9)$$

Et de méme pour les composante sur les axes $yetz$. Quantitativement les sont généralement identifiés avec les écarts-types , (écarts quadratiques),déffinis par

$$\Delta x = \sqrt{\langle x\rangle^2 - \langle x\rangle^2} \qquad (1.10)$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p\rangle^2 - \langle p\rangle^2} \qquad (1.11)$$

Où $\langle \quad \rangle$désigne la valeur moyenne dans un état du système. Par exemple, dans l’état $|\Psi(t)\rangle$, supposé normalisé , d’un système évoluant à une dimension, les valeurs moyennes des puissances de $x \;\; et \;\; p$, se calculent par :

$$\langle x\rangle = \int \Psi^*(x,t) x \Psi(x,t) dx \qquad (1.12)$$

$$\langle p\rangle = \int \Psi^*(x,t) \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi(x,t) dx \qquad (1.13)$$

1.3 Les méthodes la résolution de l’équation de Schrödinger

Généralement, il existe très peu de systèmes physiques d'ont on sait résoudre exactement leurs équations de Schrödinger et notamment lorsqu'il s'agit de systèmes régis par des hamiltoniens dépendant explicitement du temps.

Dans ce cas, il existe maintenant différentes techniques, pour résoudre l'équation de Schrödinger dans des cas relativement simples, principalement à une dimension. Parmi ces techniques, il existe des méthodes approximatives et des approches exactes.

1.3.1 Méthodes approximatives

Tous ces méthode se ressemblent dans le fait qu'elles sont soit formelle soit elles ne sont applicables que pour des cas limités. Pour cette raison, on fait appel à des méthodes d'approximation. Bien qu'elles ne donnent pas des solutions analytiques, ces dernières sont généralement très puissantes et applicables à de nombreux systèmes physiques, selon la méthode, ou elles offrent des résultats à un ordre de précision élevé. Ces méthodes sont surtout utilisées dans les domaines de la physique appliquée ; tels que la physique du solide, physique des plasmas l'information quantique [3]. Entre autres, on cite :

-La théorie des perturbations dépendant du temps

-l'approximation soudaine

-l'approximation adiabatique

1.3.2 Méthodes exactes

1. L'opérateur d'évolution

En général, résoudre l'équation de Schrödinger (1.2) revient de trouver un opérateur linéaire, soit $U(t,t_0)$[4] qui vérifie :

$$U(t,t_0) = U^{+}(t,t_0) \tag{1.14}$$

Et qui est définit comme suit :

$$|\Psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle \tag{1.15}$$

Avec $|\Psi(t_0)\rangle$ représente l'état initial du système.

Par définition, le rôle de cet opérateur est de déterminer l'évolution de l'état $|\Psi(t_0)\rangle$ à tout l'instant t,

En injectant (1.15) dans l'équation de Schrödinger (1.2), $U(t,t_0)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H(t)U(t,t_0) \qquad (1.16)$$

Avec la condition initiale :

$$U(t_0,t_0) = 1 \qquad (1.17)$$

La méthode standard pour obtenir des solutions exactes de l'équation de Schrödinger repose essentiellement sur l'obtention de l'opérateur d'évolution, satisfaisant à l'équation (1.16).lorsque l'Hamiltonien dépend explicitement du temps, cette équuation peut etre intégrée formellement entre t_0 et t et mise sous la forme

$$U(t,t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')U(t',t_0)dt' \qquad (1.18)$$

2. Les transformations unitaires

En appliquant des transformations unitaire sur un système dépendant du temps on peut le rendre indépendant du temps [5]. Il est important de se rappeler que pour décrire l'évolution du vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ dans l'espace de Hilbert, on doit choisir un système d'axes ou un référentiel. Le choix de référentiel n'a pas de raison d'être unique, c'est-à-dire que l'on est libre de passer à un autre système d'axes, chaque fois que l'on change de référentiel, on change de point de vue et par conséquent on observe le système physique sous un angle différent. En pratique, pour passer d'un référentiel à un autre, on utilise des opérateurs unitaires T qui peuvent être indépendants ou dépendants du temps et qui satisfont à la condition :

$$TT^{+} = T^{+}T = 1 \qquad (1.19)$$

Un opérateur T est unitaire si. Son inverse T^{-1} est égal à son adjoint T^{+1}.

T^{+}Est l'opérateur adjoint de$T$. Généralement, pour un hamiltonien dépendant du temps, on utilise des opérateurs unitaires dépendants du temps qui transforment le vecteur d'état de la façon suivant :

$$|\widetilde{\Psi}(t)\rangle = T^{-1}|\Psi(t)\rangle \qquad (1.20)$$

Dans le nouveau référentiel, le nouvel hamiltonien s'écrit :

$$H(t) = T(t)^{-1}H(t)T(t) - i\hbar T(t)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}T(t) \qquad (1.21)$$

Le but général d'un changement de référentiel est de trouver une représentation dans laquelle l'évolution temporelle du système physique parait plus simple. Souvent, un changement de représentation peut nous apporter de nouvelles interprétations physiques ou des avantages techniques comme par exemple la qualité de convergence numérique d’un calcul. Donc les transformations unitaires servent d’outils de recherche de nouvelles représentations. Par exemple, dans le nouveau référentiel, on aurait être capable d’effectuer une séparation de variables entre la partie temporelle et la partie spatiale du vecteur d’état$|\widetilde{\Psi}(t)\rangle$. On pourrait intégrer analytiquement l’équation de Schrödinger impliquant $H(t)$ pour obtenir l’opérateur d’évolution temporelle dans le nouveau référentiel [5].

3. La théorie des invariants

La théorie des invariants représente l'un des piliers fondamentaux dans l'étude des systèmes dépendant du temps [6]. Cette importance de la théorie des invariants relie au langage mathématique puissant qui l'a caractérisé, et sur sa souplesse dans la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. L'idée de base de la théorie des invariants est la dérivation d'une relation simple entre les états propres de l'invariant et la solution de l'équation Schrödinger.

L'utilisation de la théorie des invariants de Lewis-Riesenfeld dépendants explicitement du temps en théorie quantique a été faite pour la première fois sur l'oscillateur harmonique de fréquence dépendante du temps et sur une particule chargée dans un champ électromagnétique [6]. A cause de son importance dans ce travail, on va l'étudier avec plus de détails dans le chapitre2.

Chapitre 2

La Méthode des invariants

2.1 Introduction

Parmi les méthodes les plus puissantes et qui donnent des solutions exactes de l'équation de Schrödinger dépendante du temps, nous avons la méthode des invariants. L'idée de base de la théorie des invariants est la dérivation de la relation entre les états propres de l'invariant et la solution de l'équation Schrödinger. On peut trouver une transformation de phase dépendante du temps pour chaque état propre d'un invariant telle que la fonction propre devient une solution de l'équation de Schrödinger, et la phase est déterminée en résolvant une simple équation différentielle du premier ordre.

2.2 Les invariants

2.2.1 Exposition de la théorie des invariants

La théorie des invariants pour Hamiltoniens Hermitiens a été introduite par Lewis et Riesenfeld(1969) [6], ou ils ont dérivé une simple relation entre les vecteurs propre de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger.

On considère l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle \tag{2.1}$$

Où H est l'hamiltonnien du système, c'est un opérateur hermétique explicitement dépendant du temps.

Supposons l'existence d'un autre opérateur hermitien dépend explicitement du temps qui vérifie la condition:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0 \tag{2.2}$$

Tel que

$$I(t) = I^{+}(t) \tag{2.3}$$

En multipliant l'équation (2.2) par$|\Psi(t)\rangle$, utilisant l'équation de Schrödinger (2.1) nous permettra de déduire une relation importante

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(I|\Psi(t)\rangle) = H(t)(I|\Psi(t)\rangle) \tag{2.4}$$

Ce qui implique que l'action de l'opérateur invariant sur le vecteur d'état de Schrödinger produit une autre solution de l'équation de Schrödinger. Ce résultat est valable quel que soit la forme de l'invariant.

Pour un opérateur hermétique quelconque, on peut espérer pouvoir trouver plusieurs invariants vérifiant (2.2). Tous ces invariants justifient certaines propriétés qu'on va introduire dans ce chapitre. Puis on va essayer dans certains cas de donner des invariants intéressants de point de vue pratique. En disant comment ces invariants peuvent être utile.

2.2.2 Valeurs propres de l'invariant $I(t)$

On suppose que l'invariant I(t) est un opérateur d'un ensemble complet d'opérateurs qui commutent (ECOC) [1], Donc il existe un ensemble complet des états propres de I(t). On note les valeurs propres de I(t) par λ[6], et les états propres orthonormés associés à λ par $|\lambda, k\rangle$où k signifie tous les autres nombres quantiques nécessaires pour spécifier les états propres de ce système. Cependant l'équation aux valeurs propres de cet invariant s'écrit :

$$\begin{aligned} I(t)|\lambda,k\rangle &= \lambda|\lambda,k\rangle \\ \langle\lambda,k|\lambda',k''\rangle &= \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Où est $\langle\lambda,k|\lambda' k'\rangle$le produit scalaire sur l'espace d'état.

Ces invariants I(t) ont un spectre constant au cours de temps. C'est à dire que les valeurs propres de ces opérateurs sont indépendantes de temps. Pour prouver cette indépendance en différentiant l'équation (2.5) par rapport à t on obtient:

$$\frac{\partial I}{\partial t}\Big|\lambda,k\rangle + I\frac{\partial}{\partial t}\Big|\lambda,k\rangle = \frac{\partial\lambda}{\partial t}\Big|\lambda,k\rangle + \lambda\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,k\rangle \tag{2.6}$$

En multipliant (2.2) à gauche par $|\lambda,k\rangle$ il vient

$$\frac{\partial I}{\partial t}\Big|\lambda,k\rangle + \frac{1}{i\hbar}[I,H(t)]|\lambda,k\rangle = 0 \tag{2.7}$$

Le produit scalaire de l'équation (2.7) par $\langle\lambda',k'|$ donne :

$$\Big\langle\lambda',k'\Big|i\hbar\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathrm{t}}\Big|\lambda,k\Big\rangle + \langle\lambda',k'|IH|\lambda,k\rangle - \langle\lambda',k'|\lambda H|\lambda,k\rangle = 0 \tag{2.8}$$

$$i\hbar\Big\langle\lambda',k'\Big|\frac{\partial I}{\partial t}\Big|\lambda,k\Big\rangle + (\lambda'-\lambda)\langle\lambda',k'|H|\lambda,k\rangle = 0 \tag{2.9}$$

Pour : $\lambda' = \lambda$

$$\left\langle \lambda', k' \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle = 0 \qquad (2.10)$$

En prenant le produit scalaire de l'équation (2.6) avec l'état propre $\langle \lambda, k|$, on obtient :

$$\left\langle \lambda, k \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \lambda, t \right\rangle + \left\langle \lambda, k \middle| I \frac{\partial}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle = \left\langle \lambda, k \middle| \frac{\partial \lambda}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle + \lambda \left\langle \lambda, k \middle| \frac{\partial}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle \qquad (2.11)$$

$$\left\langle \lambda, k \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle + \lambda \left\langle \lambda, k \middle| \frac{\partial}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle = \left\langle \lambda, k \middle| \frac{\partial \lambda}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle + \lambda \left\langle \lambda, k \middle| \frac{\partial}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle \qquad (2.12)$$

$$\left\langle \lambda, k \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle = \left\langle \lambda, k \middle| \frac{\partial \lambda}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle \qquad (2.13)$$

Alors :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \left\langle \lambda, k \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle \qquad (2.14)$$

Ce qui implique :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \left\langle \lambda, k \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle = 0 \qquad (2.15)$$

2.2.3 Vecteurs propres de l'invariant $I(t)$

Notre but est biens sur de trouver la relation entre la solution de l'équation de Schrödinger et les états propres de l'opérateur invariant [6], pour ce faire, écrivons l'équation de mouvement pour le vecteur à partir de l'équation (2.6) et appliquons la formule (2.15) on obtient :

$$(\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} \big| \lambda, k \rangle = \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k\rangle \qquad (2.16)$$

Le produit scalaire de l'équation avec le vecteur propre $\langle \lambda', k'|$ est :

$$\left\langle \lambda', k' \middle| (\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle = \left\langle \lambda', k' \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle \qquad (2.17)$$

On obtient:

$$(\lambda - \lambda') \langle \lambda', k' | H | \lambda, k \rangle + I\hbar \left\langle \lambda', k' \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \lambda, k \right\rangle = 0 \qquad (2.18)$$

Donc :

$$(\lambda-\lambda')\langle\lambda',k'|H|\lambda,k\rangle = I\hbar(\lambda-\lambda')\left\langle\lambda',k'\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle \qquad (2.19)$$

Pour $\lambda \neq \lambda'$on déduit :

$$\langle\lambda',k'|H|\lambda,k\rangle = I\hbar\left\langle\lambda',k'\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle \qquad (2.20)$$

Si l'équation (2.19) est valable pour $\lambda = \lambda'$aussi bien que pour $\lambda \neq \lambda'$ alors on déduit immédiatement que$|\lambda,k\rangle$ satisfait l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire,$|\lambda,k\rangle$ est une solution particulière de l'équation de Schrödinger.

Alors :

$$|\lambda,k\rangle_a = e^{i\alpha(t)_{\lambda k}}|\lambda,k\rangle \qquad (2.21)$$

2.2.4 La phase totale

Nous avons vu que la fonction d'onde du système, peut être cherché, à une phase globale prés sous la forme d'un produit de deux fonctions chacune est relative à une variable.

Dans l'approche de Reisenfeld[6], nous supposons que le vecteur $|\lambda,k\rangle$ est multiplié par un facteur arbitraire dépendant du temps. Alors, on peut défini un nouveau ensemble de vecteurs propres de l'invariant I(t) défini par:

$$|\lambda,k\rangle_a = e^{i\alpha(t)_{\lambda k}}|\lambda,k\rangle \qquad (2.22)$$

Où $\alpha(t)_{\lambda k}$ est une fonction réelle de temps arbitrairement choisie. $|\lambda,k\rangle_a$Cesont des états propres orthonormales de I(t) associés àλ , aussi bien que les$|\lambda,k\rangle$. Si on choisit bien les phases $\alpha(t)_{\lambda k}$l'équation (2.20) sera vérifiée pour $\lambda = \lambda'$et donc l'objectif sera atteint. Il faut juste avoir:

$$\hbar\frac{\partial\alpha_{\lambda k}}{\partial t}\delta_{\lambda'\lambda}\delta_{k'k} = \langle\lambda',k'|[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H]|\lambda,k\rangle \qquad (2.23)$$

Donc on obtient :

$$\hbar\frac{\partial\alpha_{\lambda k}}{\partial t} = \langle\lambda,k|[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H]|\lambda,k\rangle \qquad (2.24)$$

Mise à part ces changements de phase, on peut introduire la deuxième propriété importante de cet invariant : tous les états propres de ces invariants sont aussi les solutions particulières de l'équation du Schrödinger (2.1).

2.2.5 Solution général de l'équation de Schrödinger

Du fait que chacun de ces nouveaux états propres satisfait l'équation de Schrödinger [6], la solution générale est donnée par :

$$\left|\Psi(r,t)\right\rangle = \sum_{\lambda k} C_{\lambda k} e^{i\alpha(t)_{\lambda k}} |\lambda, k\rangle \qquad (2.25)$$

Où $C_{\lambda k}$ sont des coefficients indépendants du temps et correspondent $|\Psi(r,t_0)\rangle$.

$$\left|\Psi(r,t_0)\right\rangle = \sum_{\lambda k} C_{\lambda k} e^{i\alpha(t_0)_{\lambda k}} |\lambda, k\rangle \qquad (2.26)$$

Donc,$|\Psi(t)\rangle$ est la solution générale de l'équation générale de l'équation de Schrödinger et sont les états propres de l'invariant.

2.2.6 Comment trouver un invariant

Dans le cas d'un système de dimension finie, il y a un résultat dû au [7] qui a confirmé qu'un système de la forme (1.3) soit exactement soluble, si et seulement si, l'algèbre de Lie engendrée par l'opérateur H(t) soit de dimension finie. Cependant, plusieurs exemples d'intérêt physique (comme l'oscillateur harmonique), ont une algèbre de Lie de dimension finie. Donc on se met là, dans le cas d'un système de dimension finie, sous l'hypothèse d'avoir une algèbre de Lie, engendrée par$H$(t), de dimension finie. On va voir, comment cette hypothèse peut nous aider à trouver l'ensemble des invariants de notre système de Schrödinger.

Supposons par exemple que l'algèbre de Lie engendrée par$H$(t) est donnée par l'ensemble des opérateurs hermitiens

$$\mathrm{E} = \{O_1, O_2, ...O_N\} \qquad (2.27)$$

Avec l'opérateur hamiltonien H(t) s'écrit comme

$$H = \sum_{i=1}^{M} h_i O_i \qquad (2.28)$$

Où les h_i sont des coefficients qui peuvent dépendre du temps. EtO_i sont des opérateurs. Maintenant ou construit l'opérateur invariant :

$$I(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) 0_i \tag{2.29}$$

Où les paramètres$\{\alpha_i(t)\}$ sont des fonctions réelles du temps. On exige que l'ensemble des N opérateurs $\{O_i\}_N (N \geq M)$ satisfasse les équations :

$$[H, O_i] = \sum_{j=1}^{N} g_{ij} O_j, j = 1,2, \dots., N \tag{2.30}$$

C'est –à-dire qu'une quasi-algèbre est fermée avec des constantes de structure g_{ij}.en remplaçant l'équation (2.29) dans l'équation (2.2) et en utilisant les relations (2.30), l'opérateur$I(t)$ devient un invariant si l'ensemble suivant d'équations du premier ordre a une solution :

$$\alpha_i^{\cdot} + i\hbar^{-1} \sum_{j=1}^{N} g_{ji} \alpha_i = 0, i = 1,2, \dots., N \tag{2.31}$$

Chapitre 3

oscillateurs harmoniques dépendant du temps

3.1 Introduction

L'oscillateur harmonique dépendant du temps est un modèle exactement soluble et qui a une large application dans différents domaines de la physique, par exemple en physique moléculaire, chimie quantique, physique quantique de champs. Plusieurs méthodes ont été proposés pour déterminer les solutions exactes telle que, la méthode des invariants [6], la méthode des intégrales de chemins et la méthode algébrique. Le but du travail de ce chapitre est de présenter la méthode des invariants pour résoudre l'équation de Schrödinger d'un système d'oscillateur harmonique avec fréquence dépendant du temps à une dimension, ou on a présenté les valeurs propres de l'invariant quadratique choisie et on a calculé aussi la phase à partir de l'article de Lewis Riesenfeld [6]

3.2 Oscillateur harmonique unidimensionnelle dépendante du temps

3.2.1 Hamiltonien du système

Un oscillateur harmonique unidimensionnel dépendant du temps c'est un système qui correspond à l'oscillateur classique avec fréquence qui est une fonction de temps et dont l'operateur hamiltonien est de la forme [6] :

$$H(t) = \left(\frac{1}{2M}\right)\left[p^2 + \Omega^2(\mathrm{t})\mathrm{q}^2\right] \tag{3.1}$$

Où $p = -i\frac{\partial}{\partial q}$ est l'opérateur de l'impulsion, q est la position et la fonction $\Omega(t)$ est une fonction du temps arbitraire, et$M$est un paramètre de masse positive réel. Les variables $q$et$p$ satisfont la relation de commutation canonique :

$$[q, p] = i\hbar \tag{3.2}$$

Et équations canoniques du mouvement sont :

$$q^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{i\hbar}[q, H] = \frac{1}{M}p \tag{3.3}$$

Et

$$p^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{1}{i\hbar}[p, H] = -\frac{1}{M}\Omega^2(t)q \tag{3.4}$$

3.2.2 Opérateur invariant

Nous supposons l'existence d'un invariant hermitien de la forme quadratique homogène suivante :

$$I(t) = \frac{1}{2}[\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma(t)\{q, p\}_+] \tag{3.5}$$

Où$\{q, p\}_+ = qp + pq$ et $\alpha(t), \beta(t)$ et $\gamma(t)$sont des fonctions réelles dépendant du temps qui seront fixés à partir de l'équation :

$$I^{\cdot} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0 \tag{3.6}$$

En tenant compte de la relation de commutation (3.2), il vient que :

$$\frac{1}{i\hbar}[I, H] = \frac{1}{i4\hbar M}\left[\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma(t)(qp + qp), p^2 + \Omega^2(\mathrm{t})\mathrm{q}^2\right]$$

$$= \frac{1}{i4\hbar M}\{\alpha(t)[q^2, p^2] + \alpha(t)\Omega^2(\mathrm{t})[q^2, q^2] + \beta(t)[p^2, p^2] + \beta(t)\Omega^2(\mathrm{t})[p^2, q^2] + \gamma(t)[(qp + pq), p^2] + \gamma(t)\Omega^2(\mathrm{t})[(qp + pq), q^2]\}$$

$$\frac{1}{i\hbar}[I, H] = \frac{1}{2M}\{\alpha(t)(qp + pq) - \beta(t)\Omega^2(\mathrm{t})(qp + pq) + \gamma(t)2p^2 - 2\gamma(t)\Omega^2(\mathrm{t})q^2\} \tag{3.7}$$

Et par dérivation (3.5) par rapport à t nous avons encore :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{2}[\alpha^{\cdot}(t)q^2 + \beta^{\cdot}(t)p^2 + \gamma^{\cdot}(t)(qp + pq)] \tag{3.8}$$

En insérant les deux équations (3.7) et (3.8) dans (3.6) et par identification des termes de même puissance. On obtient ainsi un système d'équations différentielles couplées du premier ordre appelé équation auxiliaire :

$$\alpha^{\cdot}(t) = \frac{2\Omega^2(t)}{M}\gamma(t) \tag{3.9a}$$

$$\beta^{\cdot}(t) = -\frac{2}{M}\gamma(t) \tag{3.9b}$$

$$\gamma^{\cdot}(t) = -\frac{1}{M}\alpha(t) + \frac{\Omega^2(t)}{M}\beta(t) \tag{3.9c}$$

Il convient d'introduire une autre fonction $\sigma(t)$définie par :

$$\beta(t) = \sigma^2(t) \tag{3.10}$$

Ou$\sigma^2(t)$ est une fonction réelle du temps.

L'équation (3.9b) devient alors :

$$\gamma = -\frac{M}{2}\beta^{\cdot} \tag{3.11}$$

Et d'après l'équation (3.10) l'équation (3.11) devienne :

$$\gamma = -M\sigma\sigma^{\cdot} \tag{3.12}$$

Nous substituons l'équation (3.12) dans (3.9c), on trouve :

$$\alpha = \sigma(\Omega^2\sigma + M^2\sigma^{\cdot\cdot}) + M^2\sigma^{\cdot^2} \tag{3.13}$$

L'équation (3.9a) Impose un contraint sur $\sigma(t)$qui peut exprimer sons la forme :

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} - \frac{2\Omega^2\gamma(t)}{M} = 0 \tag{3.14}$$

Nous substituons l'équation (3.12) dans (3.14), on obtient :

$$\frac{d\alpha}{dt} + 2\Omega^2\sigma^{\cdot}\sigma = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sigma(\Omega^2\sigma + M^2\sigma^{\cdot\cdot}) + M^2\sigma^{\cdot^2}\right) + 2\Omega^2\sigma^{\cdot}\sigma = 0$$

$$\sigma\frac{d}{dt}\left(M^2\sigma^{\cdot\cdot} + \Omega^2\sigma\right) + \sigma^{\cdot}\left(M^2\sigma^{\cdot\cdot} + \Omega^2\sigma\right) + 2M^2\sigma^{\cdot\cdot}\sigma^{\cdot} + 2\Omega^2\sigma\sigma^{\cdot} = 0$$

$$\sigma\frac{d}{dt}\left(M^2\sigma^{\cdot\cdot} + \Omega^2\sigma\right) + \sigma^{\cdot}\left(M^2\sigma^{\cdot\cdot} + \Omega^2\sigma\right) + 2\sigma^{\cdot}\left(M^2\sigma^{\cdot\cdot} + \Omega^2\sigma\right) = 0$$

$$\sigma\frac{d}{dt}\left(M^2\sigma^{\cdot\cdot} + \Omega^2\sigma\right) + 3\sigma^{\cdot}\left(M^2\sigma^{\cdot\cdot} + \Omega^2\sigma\right) = 0 \tag{3.15}$$

On pause : $M^2\sigma^{\cdot\cdot} + \Omega^2\sigma = y$,

$$\sigma\frac{d}{dt}(y) + 3\sigma^{\cdot}(y) = 0 \tag{3.16}$$

En intégrant une fois, cette équation on trouve :

$$M^2\sigma^{\cdot\cdot} + \Omega^2\sigma = \frac{C}{\sigma^3} \tag{3.17}$$

Où c est une constante d'intégration réelle arbitraire.

Alors l'équation (3.13) devienne :

$$\alpha = M^2\sigma^{\cdot 2} + \frac{C}{\sigma^2} \qquad (3.18)$$

A partir de l'équation (3.5) l'invariant peut donc être exprimé sons la forme :

$$I(t) = \frac{1}{2}\left[\left(M^2\sigma^{\cdot 2} + \frac{C}{\sigma^2}\right)q^2 + \sigma^2p^2 - \sigma^{\cdot}\sigma M\{q,p\}_+\right]$$

$$I(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{C}{\sigma^2}\right)q^2 + (\sigma p - M\sigma^{\cdot}q)^2\right] \qquad (3.19)$$

En prenant :

$$\sigma(t) = C^{1/4}\rho(t) \qquad (3.20)$$

Avec $\rho(t)$ Une nouvelle fonction du temps.

L invariant $I(t)$devient :

$$I(t) = \frac{1}{2}c^{1/2}\left[\left(\frac{1}{\rho^2}\right)q^2 + (\rho p - M\rho^{\cdot}q)^2\right] \qquad (3.21)$$

Eliminant la constant $c^{1/2}$ nous pouvons écrire l'invariant $I(t)$sous la forme :

$$I(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\rho^2}\right)q^2 + (\rho p - M\rho^{\cdot}q)^2\right] \qquad (3.22)$$

et la condition auxiliaire donnée par l'équation. (3.17) devienne :

$$M^2\rho^{\cdot\cdot} + \Omega^2(t)\rho - \frac{1}{\rho^3} = 0 \qquad (3.23)$$

Pour avoir un opérateur $I(t)$ hermitien, il faut prendre des solutions réelles de l'équation (3.23). Toutes les solutions de l'équation (3.23) peuvent être utilisées pour trouver un invariant $I(t)$ de ce système.

3.2.3 Etats propres et valeurs propres de $I(t)$

Le but est de résoudre l'équation aux valeurs propres de l'opérateur invariant quadratique $I(t)$[6].

$$I(t)|\lambda\rangle = \lambda_s|\lambda\rangle \qquad (3.24)$$

Pour des valeurs propres λ_s indépendantes du temps.

Pour accomplir ce but, utilisons les opérateurs de créations et d'annihilation$a$ eta^+comme :

$$a = (2\hbar)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(1/_{\rho}\right)q + i(\rho p - M\dot{\rho} q)\right] \tag{3.25a}$$

$$a^+ = (2\hbar)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(1/_{\rho}\right)q - i(\rho q - M\dot{\rho} q)\right] \tag{3.25b}$$

Ces opérateurs vérifient bien :

$$[a, a^+] = 1 \tag{3.26}$$

L'opérateur invariant $I(t)$ donné par l'équation (3.22) peut alors être écrit sous la forme :

$$I(t) = \hbar\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) \tag{3.27}$$

On voie que les états propres $|\lambda\rangle$de $I(t)$ sont les même que les états propres normalisés $|s\rangle$de a^+a :

$$a^+a = s|s\rangle s = 0,1,2,3,\cdots\cdots \tag{3.28}$$

Et on voit bien que :

$$a\big|s\rangle = \sqrt{s}|s-1\rangle \tag{3.29a}$$

$$a^+|s\rangle = \sqrt{s+1}|s+1\rangle \tag{3.29b}$$

Les valeurs propres de $I(t)$sont données donc par :

$$I|s\rangle = \lambda_s|s\rangle \tag{3.30}$$

$$I|s\rangle = \left(a^+a + \frac{1}{2}\right)\hbar|s\rangle \tag{3.31}$$

$$\lambda_s = \left(s + \frac{1}{2}\right)\hbar s = 0,1,2,\ldots.. \tag{3.32}$$

3.2.4 Calcul de la phase totale

Pour obtenir les solutions de l'équation de Schrödinger (3.9), les phases α_s(t) sont obtenues à partir del'équation (2.24) (voir chapitre 2), qui s'écrit ici comme :

$$\hbar\frac{\partial\alpha_s}{\partial t} = \langle s|[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H]|s\rangle \tag{3.33}$$

Pour trouver l'expression des phasesα_s, nous devons calculer les éléments de matrice diagonale des opérateurs$\frac{\partial}{\partial t}$ etH, les premiers sont obtenus en utilisant les équations (3.41).On va exprimer H en termes de a eta^+, puis en appliquant les équations (3.33) :

$$\langle s|H|s\rangle = \frac{\hbar}{4M}\left(M^2\dot{\rho}^2 + \Omega^2\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\langle s|\{a,a^+\}_+|s\rangle$$

$$\langle s|H|s\rangle = \frac{1}{2M}\left(M^2\dot{\rho}^2 + \Omega^2\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)\hbar \qquad (3.34)$$

Prenant maintenant la dérivée partielle par rapport àt de l'équation (3.29b) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(a^+|s-1\rangle) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{s}|s\rangle\right)$$

$$\frac{\partial a^+}{\partial t}|s-1\rangle + a^+\frac{\partial}{\partial t}|s-1\rangle = \sqrt{s}\frac{\partial}{\partial t}|s\rangle \qquad (3.35)$$

Le produit scalaire de l'équation (3.35) par $\langle s|$ donne :

$$\left\langle s\left|\frac{\partial a^+}{\partial t}\right|s-1\right\rangle + \left\langle s\left|a^+\frac{\partial}{\partial t}\right|s-1\right\rangle = \sqrt{s}\left\langle s\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|s\right\rangle$$

$$\left\langle s\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|s\right\rangle = s^{-\frac{1}{2}}\left\langle s\left|\frac{\partial a^+}{\partial t}\right|s-1\right\rangle + \left\langle s\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|s-1\right\rangle \qquad (3.36)$$

Et d'après (3.25b) :

$$\frac{\partial a^+}{\partial t} = (2\hbar)^{-1/2}\left[\left(-\frac{\dot{\rho}}{\rho^2}\right)q - i(\dot{\rho}p - M\ddot{\rho}q)\right]$$

$$\frac{\partial a^+}{\partial t} = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-2\dot{\rho}}{\rho} + iM\left(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2\right)\right]a + iM\left(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2\right)a^+\right\} \qquad (3.37)$$

Et alors :

$$\frac{\partial a^+}{\partial t}|s-1\rangle = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-2\dot{\rho}}{\rho} + iM\left(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2\right)\right]a + iM\left(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2\right)a^+\right\}|s-1\rangle$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-2\dot{\rho}}{\rho} + iM\left(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2\right)\right]a|s-1\rangle + iM\left(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2\right)a^+|s-1\rangle\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-2\dot{\rho}}{\rho} + iM\left(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2\right)\right]\sqrt{s-1}|s-2\rangle + iM\left(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2\right)\sqrt{s}|s\rangle\right\} \qquad (3.38)$$

Le produit scalaire de l'équation (3.35) par $\langle s|$ donne :

$$\langle s|\frac{\partial a^{+}}{\partial t}|s-1\rangle = \frac{iM}{2}\left(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^{2}\right)s^{1/2}$$

$$s^{-1/2}\langle s|\frac{\partial a^{+}}{\partial t}|s-1\rangle = \frac{iM}{2}\left(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^{2}\right) \tag{3.39}$$

Et alors :

$$\left\langle s\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|s\right\rangle = \left\langle s-1\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|s-1\right\rangle + i\frac{M}{2}\left(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^{2}\right)$$

$$= \left\langle 0\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|0\right\rangle + i\frac{s}{2}M\left(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^{2}\right) \tag{3.40}$$

Un choix qu'on peut effectuer dans ce cas est le choix qui annule $\left\langle 0\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|0\right\rangle$ à la limite où ρ devient constante :

$$\left\langle 0\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|0\right\rangle = i\frac{M}{4}\left(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^{2}\right) \tag{3.41}$$

L'équation (3.40) devienne :

$$\left\langle s\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|s\right\rangle = i\frac{M}{4}\left(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^{2}\right) + i\frac{s}{2}M\left(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^{2}\right)$$

$$\left\langle s\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|s\right\rangle = i\frac{M}{2}\left(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right) \tag{3.42}$$

En se servant maintenant de (3.34) et (3.42), on obtient donc :

$$\hbar\frac{d\alpha_s}{dt} = \left\langle s\left|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right|s\right\rangle$$

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = \frac{-1}{2M}\left[M^{2}\left(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^{2}\right)+M^{2}\dot{\rho}^{2}+\Omega^{2}\rho^{2}+\frac{1}{\rho^{2}}\right]\left(s+\frac{1}{2}\right) \tag{3.43}$$

On utilise la condition (3.23), on trouve :

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = -\frac{1}{M}\left(s+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\rho^{2}} \tag{3.44}$$

De sorte qu'après intégration on trouve :

$$\alpha_s(t) = -\frac{1}{M}\left(s+\frac{1}{2}\right)\int^{t} dt'\frac{1}{\rho^{2}(t')} \tag{3.45}$$

Conclusion générale

Nous avons présenté la méthode exacte de résolution de l'équation de Schrödinger dépendant du temps, introduite par Lewis Riesenfeld dans son article. La particularité de cette méthode est qu'elle est simple et elle s'applique principalement dans les problèmes à une ou deux dimensions. Cette étude a révélé une relation simple entre les états propres de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger.

Dans cette mémoire, nous avons déterminé la solution exacte de l’équation de Schrödinger d’un oscillateur harmonique dépendant du temps après le calcul de la phase associé aux états de l’invariant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.C.Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, Mécanique quantique (Collection Enseignement des Sciences. Hermann, éditeur des sciences et des arts, Paris, 1996).

[2] E. Schrödinger, “The non-relativisticequation of the de Broglie waves,” Ann. Physis 79(1926)361-376.

[3] Y. Saadi, mémoire de Magister (université de Sétif, 2007).

[4] N.Chaabi, mémoire de Magister (université de Sétif, 2007).

[5] S .Menouar, Thèse de Doctorat ès sciences, (université de Sétif, 2009).

[6] H.R.Lewis and W.Riesenfeld. J. Math Phys.10 (1969) 1458.

[7] S. S. Mizrahi, Phys. Lett A 138. 465 (1989).

ملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة معادلة شرود نجر التي لعب دورا أساسيا في الميكانيكا الكمي لأنها تتحكم في التطور الزمني للنظام الفيزيائي، لحل هذه المعادلة المتعلقة بالزمن، توجد عدة طرق ومن بينها طريقة الثابت.
من خلال تطبيق نظرية الثوابت ، تمكنا من الحصول على حل دقيق للهزاز التوافقي أحادي البعد المتعلق بالزمن. اين وجدنا القيم الذاتية للثابت وكذلك الطور .
الكلمات المفتاحية:طريقة الثابت،شرود نجر،الهزاز التوافقي المتعلق الزمن.

Résumé :

Dans ce travail, nous avons présenté l'équation de Schrödinger, qui joue un rôle fondamental en mécanique quantique car elle contrôle l'évolution temporelle du système physique. Pour résoudre cette équation dépendante du temps, il existe plusieurs méthodes, parmi lesquelles la méthode des invariant de Lewis Riesenfeld.
Par l'application de la théorie des invariants, Nous avons obtenir la solution exacte pour un oscillateur harmonique unidimensionnel dépendante du temps ou on a pu trouver les valeurs propre de l'invariant et la phase

Mots clés

La théorie des invariants, Schrödinger, Oscillateur harmonique dépendant du temps

Abstract:

In this work, we have presented the Schrödinger equation, which plays a fundamental role in quantum mechanics because it controls the temporal evolution of the physical system. To solve this time dependent equation there are several methods, among which the method of Lewis Riesenfeld invariant.
By applying the theory of invariants, we have obtained the exact solution for a time-dependent one-dimensional harmonic oscillator where we could find the eigenvalues of the invariant and the phase.
Key words: invariant method, Schrödinger ,time-dependant harmonic oscillator.