



Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi-

Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département des Sciences de la Matière  
Filière Physique

جامعة محمد البشير الإبراهيمي «برج بوعريريج»  
كلية العلوم والتكنولوجيا  
قسم علوم المادة  
فرع فيزياء

# Mémoire de fin d'études

PRESENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLOME DE : LICENCE

Filière : Physique  
Option : Physique énergétique

## THÈME

*Etude numérique de l'effet du déplacement vertical du cylindre interne sur la convection naturelle laminaire dans un espace annulaire délimité par deux cylindres horizontaux*

Par

ACHACHI Amina  
ADJENEG Sadjia  
BOUHNİK Zohra

Dirigé et encadré par

Dr. TAYEBI Tahar

# *Dédicace*

*Je dédie ce mémoire à :*

*Mes parents*

*Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.*

*Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.*

*Mes frères et ma sœur*

*Qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.*

*Mes professeurs de physique qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis*

*A tous les membres de ma famille, grands et petits.*

*A tous mes amis et mes chers*

*zohra*

## *Dédicace*

*A mon père Abdelhamid et ma mère Warda qui m'est toujours les plus chère*

*A mes grand-père Mohamed Amokrane*

*A mes frères Nadjib, Hasni, Salahedin et Imad et mes sœurs Mira et Hakima*

*A tous les membres de ma famille, grands et petits*

*A tous mes amis*

*A tous mes maitres.*

*Sadjia*

# *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail*

*A ma chère mère*

*En témoignage de ma gratitude; de ma reconnaissance; pour tous ses sacrifices ainsi que pour toute la confiance qu'elle m'a donnée.*

*A Mon cher père*

*Pour ses encouragements; sa confiance et son soutien moral et matériel.*

*A mes chers frères*

*Tahar et Amar et Abd lghani et Kamal et Yousef et Khaled et mes chère sœurs Aicha et son mari; Khadidja et son mari et Afaf. En leur souhaitant plein succès dans leur vie.*

*A mes chères copine Khadidja et Nivine et Ikram*

*A mes binôme Sadjia Adjnek et Zohra bouhnik*

*A toute ma famille et a tous mes amies Imene et Chawki*

*Que Dieu vous garde !*

*Amina*

## *Remerciement*

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur du mémoire, Dr. **TAYEBI TAHAR** maitre de conférences à l'université de MOUHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI - BORDJ BOU ARRERIDJ, pour tous ses efforts, et les mots me manquent pour lui exprimer toute ma profonde gratitude, que ce soit pour sa disponibilité permanente, sa contribution majeure à l'orientation des travaux de recherche et ses idées originales qui ont servi à enrichir le contenu de cette thèse..

Tous mes remerciements à toute personne m'ayant aidé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail

# Nomenclature

## Lettres latines

- $a$  : Diffusivité thermique. [ $m^2/s$ ]  
 $b$  : Terme de source dans le système d'équation algébrique discrétisées.  
 $H$  : La longueur caractéristique.[  
 $h$  : Coefficient métrique.[ $m$ ]  
 $\vec{g}$  : Accélération de la pesanteur.[ $m/s^2$ ]  
 $P$  : Pression.[ $N/m^2$ ]  
 $S_{\Phi}$  : Terme de source.  
 $T$  : Température.[ $K$ ]  
 $T_0$  : Température de référence (constante) associée à  $\rho_0$ . [ $K$ ]  
 $T_f$  : Température de la paroi froide. [ $K$ ]  
 $T_c$  : Température de la paroi chaude. [ $K$ ]  
 $\Delta T$  : Ecart de température ( $T_c - T_f$ ). [ $K$ ]  
 $U, V$  : Composantes de vitesses en coordonnées cartésiennes. [ $m/s$ ]  
 $V_{\theta}, V_{\eta}$  : Composantes de la vitesse suivant les directions  $\theta, \eta$   
 $C_p$  : Chaleur spécifique. [ $J/Kg\ k$ ]  
 $q$  : Densité du flux de la chaleur à travers la paroi de l'enceinte  
 $x, y, z$  : Coordonnées cartésiennes. [ $m$ ]

## Lettres grecques

- $\alpha$  : Angle de l'inclinaison.  
 $\lambda$  : Conductivité thermique. [ $W/m^2K$ ]  
 $\beta$  : Coefficient d'expansion thermique (constant). [ $1/K$ ]  
 $\mu$  : Viscosité dynamique. [ $kg/m^2s$ ]  
           : Viscosité cinématique. [ $m^2/s$ ]  
           : Masse volumique. [ $kg/m$ ]  
 $\rho$  : Masse volumique de référence (constante). [ $kg/m$ ]  
 $\Phi$  : Variable dépendante.  
 $\Gamma_{\Phi}$  : Coefficient de diffusion de  $\Phi$ . [ $m^2/s$ ]

$\omega$  : Vorticité. [1/s]

$\psi$  : Fonction de courant. [m<sup>2</sup>/s]

$\varphi$  : représente une grandeur intensive telle que  $\omega^*$ ,  $T^*$

### Nombres adimensionnels

$Pr$  : Nombre de Prandtl,  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$

$Ra$  : Nombre de Rayleigh,  $Ra = Pr \cdot Gr$

$Nu$  : Nombre de Nusselt,  $Nu = \frac{hH}{\lambda}$

### Exposant

+

: Paramètres adimensionnels.

"

: Estimation initiale

*Liste des tableaux*

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Tableau III.1 : Codes CFD</b>               | <b>18</b> |
| <b>Tableau IV.1 : Indépendance du maillage</b> | <b>28</b> |



|  |           |
|--|-----------|
| <b>Fig. II.1</b> : Système étudié et conditions aux limites  | <b>10</b> |
| <b>Fig. III.1</b> : Volume de contrôle pour la résolution en volumes finis   | <b>20</b> |
| <b>Fig. III.2</b> : Schéma représentatif de l'algorithme SIMPLE  | <b>23</b> |
| <b>Fig. IV.1</b> : Géométrie et maillage construit sous Gambit   | <b>27</b> |
| <b>Fig. IV.2</b> : Evolution des résidus au cours des itérations   | <b>28</b> |
| <b>Fig. IV.3</b> : Comparaison de nos résultats et ceux de Abu-Nad et al. et de Gldstein   | <b>29</b> |
| <b>Fig. IV.4</b> : Isothermes et lignes de courant pour différents nombres de Rayleigh pour $\dagger=0$  | <b>30</b> |
| <b>Fig. IV.5</b> : Isothermes et lignes de courant pour différents nombres de Rayleigh pour $\dagger=0.4$ et $r=0^\circ$                                 | <b>32</b> |
| <b>Fig. IV.6</b> : Isothermes et lignes de courant pour différents nombres de Rayleigh pour $\dagger=0.8$ et $r=0^\circ$                                 | <b>33</b> |
| <b>Fig. IV.7</b> : Isothermes et lignes de courant pour différents nombres de Rayleigh pour $\dagger=0.4$ et $r=180^\circ$                               | <b>35</b> |
| <b>Fig. IV.8</b> : Isothermes et lignes de courant pour différents nombres de Rayleigh pour $\dagger=0.8$ et $r=180^\circ$                               | <b>36</b> |
| <b>Fig. IV.9</b> : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne et externe pour $Ra=10^5$   | <b>39</b> |
| <b>Fig. IV.10</b> : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne et externe pour différents nombres de Rayleigh pour $\dagger=0$            | <b>40</b> |
| <b>Fig. IV.11</b> : <b>Variation</b> du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction des nombres de Rayleigh                                 | <b>41</b> |
| <b>Fig. IV.12</b> : Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction de l'excentricité relative pour différents nombres de Rayleigh | <b>42</b> |

|                           |  |
|---------------------------|--|
| <i>Dédicaces</i>          |  |
| <i>Remerciements</i>      |  |
| <i>Nomenclature</i>       |  |
| <i>Liste des figures</i>  |  |
| <i>Liste des tableaux</i> |  |
| <i>Sommaire</i>           |  |
| <i>Introduction</i>       |  |

|              |   |
|--------------|---|
| Introduction | 1 |
|--------------|---|

## *Chapitre I*

### *Revue Bibliographique*

|   |   |
|---|---|
| I.1. Introduction   | 3 |
| I.2. Cavités rectangulaires                                   | 4 |
| I.3. Cylindre vertical  | 5 |
| I.4. Cavités sphérique  | 6 |
| I.5. Espaces annulaires                                       | 6 |
| • Les espaces annulaires formes par des cylindres elliptiques | 6 |
| • Les espaces annulaires formes par des cylindres             | 7 |

## *Chapitre II*

### *Formulation mathématique*

|   |    |
|---|----|
| II.1. Présentation du problème                                    | 10 |
| II.2. Hypothèses simplificatrices                                 | 11 |
| II.3. Formulation des équations en coordonnées cartésienne        | 11 |
| • Equation de continuité  | 11 |
| • Equation du mouvement   | 11 |
| • Equation de la chaleur  | 11 |
| II.4. Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement | 12 |
| II.5. Formulation des équations en coordonnées bicylindriques     | 12 |
| II.6. Equations adimensionnelles                                  | 14 |
| II.7. Formulation des conditions aux limites                      | 15 |
| II.8. Coefficients d'échange de la chaleur                        | 15 |
| II.8.1. Valeur locale du nombre de Nusselt                        | 15 |
| II.8.2. Nombre de Nusselt moyen                                   | 16 |

## *Chapitre III*

### *Présentation du logiciel de calcul*

|                     |    |
|---------------------|----|
| III.1. Introduction | 17 |
|---------------------|----|

---

|   |    |
|---|----|
| III.2.Principes des codes CFD                             | 18 |
| III.3.Utilisation du FLUENT                               | 19 |
| III.4.Méthode de résolution des équations de transport    | 20 |
| III.4.1. Schéma de discrétisation                         | 20 |
| III.4.2. Choix du schéma d'interpolation de la pression   | 21 |
| III.4.3. Choix de la méthode de couplage Pression-Vitesse | 22 |
| ➤ Algorithme SIMPLE                                       | 22 |
| III.5. Résolution numérique                               | 24 |
| III.5.1. Paramètre de contrôle de la convergence          | 24 |
| III.5.1.1. Critère de convergence                         | 24 |
| III.5.1.2. Sous-relaxation                                | 25 |
| III.6. Étapes de résolution du problème                   | 25 |
| III.7. Conclusion   | 25 |

## ***Chapitre IV***

### ***Résultats et interprétations***

|   |           |
|---|-----------|
| IV.1. Introduction                        | 26        |
| IV.2. Géométrie et maillage               | 26        |
| IV.3. Test du maillage                    | 27        |
| IV.4. Convergence des résultats           | 28        |
| IV.5. Validation des résultats            | 28        |
| IV.6. Discussion des résultats            | 29        |
| IV.6.1. Champ dynamique et thermique      | 29        |
| IV.6.2. Nombre de Nusselt                 | 38        |
| • Nusselt local                           | 38        |
| • Nusselt moyen                           | 40        |
| <b><i>Conclusion</i></b>                  | <b>43</b> |
| <b><i>Annexe</i></b>                      | <b>45</b> |
| <b><i>Références Bibliographiques</i></b> | <b>55</b> |

# *Introducción*

# **Introduction**

L'étude de la convection naturelle dans les cavités a été le foyer de nombreuses études pendant ces trois dernières décennies et cela en raison de multiples applications dans l'ingénierie (Croissance des cristaux destinés à l'industrie des semi-conducteurs, collecteurs d'énergie solaire, double vitrage pour les habitations, refroidissement des instruments électroniques, Isolation des bâtiments.....etc.). Ce mode de transfert d'énergie (convection) peut être naturel ou forcé selon le mécanisme du mouvement du fluide. Si le mouvement du fluide est dû uniquement aux différences de température le mode de transfert est appelée convection naturelle, et si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est alors appelé convection forcée. Ce mode de transfert apparaît chaque fois qu'il y a des différences de température au sein d'un fluide induisant des différences de densités susceptibles de mettre le fluide en mouvement donc transport et transfert.

La cavité annulaire, en particulier, est souvent utilisée comme échangeur dans la conversion énergétique. Comme exemples d'applications, on peut citer le chauffage industriel de l'eau et la stérilisation médicale.

L'objectif du travail entrepris, concerne la simulation numérique de la convection naturelle bidimensionnelle laminaire et permanente dans une cavité annulaire cylindrique délimitée par deux cylindres excentriques et orientée d'un angle par rapport à l'horizontale, les deux parois cylindrique (intérieur et extérieur) sont maintenues isothermes.

Le travail sera présenté comme suit :

Nous illustrons dans le premier chapitre, une riche étude bibliographique qui nous a permis de situer notre travail et de dégager une problématique.

Dans le deuxième chapitre, après avoir bien posé le problème, nous établissons les équations du mouvement et du transfert de chaleur à l'aide de la fonction de courant et de la vorticité. Pour cela nous adoptons les hypothèses de bidimensionnalité de l'écoulement et les simplifications classiques de Boussinesq. Pour faciliter l'écriture des

conditions aux limites, nous utilisons une représentation conforme qui transforme le domaine curviligne en un domaine rectangulaire.

Dans le troisième chapitre, nous avons donné une idée brève sur le code de simulation FLUENT. C'est un code CFD (Computational Fluid Dynamics commercial très utilisé dans l'industrie et dans différents domaines de recherche. Il permet de résoudre les écoulements de fluides internes et externes en plus de la combustion.

Dans le quatrième chapitre, nous commençons par la présentation d'une étude du maillage, ensuite nous validons notre code de calcul par un résultat numérique et un autre expérimental issu de la littérature et enfin nous présentons les résultats des simulations numériques effectuées. Les lignes de courant et les isothermes au sein du fluide étudié, ainsi que les nombres de Nusselt locaux et moyens sur les parois actives de l'enceinte, sont représentés et analysés, en fonction du nombre de Rayleigh et des facteurs géométriques caractérisés notre système.

Enfin, nous avons résumé en conclusion les principaux résultats obtenus.

# *Chapitre I*

*Revue Bibliographique*

# Chapitre I

## Revue Bibliographique

### I.1. Introduction

La théorie de transfert de la chaleur est une science, qui étudie la façon, dont la chaleur se propage d'une région à une autre, sous l'influence d'une différence de température. Elle a subit une étude intensive pour satisfaire les exigences des autres technologies nucléaires, solaires...etc.

Avec le développement prodigieux des techniques modernes, il est devenu indispensable à tout ingénieur, quel que soit le domaine où il sera appelé, à posséder de bonnes connaissances des lois fondamentales de transfert thermique.

Ce phénomène est très important dans les domaines des sciences technologiques, des conceptions techniques et de l'industrie, il existe dans chaque aspect de la vie et a un grand champ d'application. C'est un processus complexe, qui est réalisé sur la base des différents modes fondamentaux à savoir : la conduction, la convection et le rayonnement.

Le mécanisme le plus important de transfert d'énergie est représenté par le mode de convection, qui s'effectue par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. C'est un phénomène fréquent dans l'atmosphère terrestre. Elle peut être déclenchée par un réchauffement du sol par le soleil, par le mouvement d'une masse d'air froid au-dessus d'un plan d'eau relativement chaude, ou par d'autres phénomènes, qui provoquent le réchauffement relatif du bas d'une couche atmosphérique par rapport à son sommet.

Compte tenu des forces, qui produisent le mouvement du fluide, on distingue deux types de convection : forcée et naturelle ou libre.

La convection naturelle dans laquelle le mouvement résulte de la variation de la masse volumique du fluide avec la température.

Dans de nombreuses applications d'ingénierie et de processus, qui se produisent naturellement, la convection naturelle joue un rôle important en tant que mécanisme dominant.



Les études de la convection naturelle dans des cavités confinées constituent depuis plusieurs années, l'objet de plusieurs recherches, du fait de son implication dans de nombreux phénomènes naturels et applications industrielles.

L'étude de ce phénomène a suscité et suscite encore aujourd'hui l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels. Les recherches menées dans ce domaine, s'étendent sur un peu plus d'un siècle. Un nombre considérable de travaux a été entrepris, suite à la découverte du phénomène par les expériences de **Bénard** [1] et l'analyse théorique de **Rayleigh** [2] au début du XXème siècle jusqu'à présent.

## I.2. Cavités rectangulaires

Parmi les travaux concernant les enceintes rectangulaires, citons celui de **Vahl Davis** [3] a présenté une solution numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée chauffée différemment, où les deux surfaces supérieure et inférieure sont adiabatiques, tandis que les surfaces verticales sont chauffées différemment.

**Shigeo et Bejan** [4] qui ont synthétisé les résultats expérimentaux, et présenté les simulations numériques et les études analytiques. Le comportement général du nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport de forme de l'enceinte pour différents nombres de Rayleigh a ainsi été obtenu. Les résultats expérimentaux ont effectivement démontré que l'effet du Hnombre de Prandtl est négligeable lorsque ce dernier est de l'ordre de l'unité ou plus. De cette synthèse, il apparaît clairement que pour un nombre de Rayleigh donné, le transfert de chaleur atteint un maximum pour un certain rapport de forme optimal. Pour  $Ra = 10^5$ , le maximum se trouve autour de  $A = 1$  ( $A$  représente la hauteur de l'enceinte sur sa largeur) et il se déplace vers des valeurs plus faibles du rapport de forme lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté.

**Novembre et Nansteel** [5] qui ont étudié analytiquement et numériquement, la convection naturelle dans une enceinte carrée avec chauffage au-dessous et refroidissement le long d'un côté. Dans cette étude des expressions asymptotiques ont été trouvées pour les taux de transfert de chaleur.

**Aydin et Yang** [6] qui ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire d'air dans une cavité bidimensionnelle et rectangulaire avec le chauffage localisé au-dessous et le refroidissement symétrique des côtés. Leur analyse a inclus l'influence de la longueur de la partie chauffée et du  $Ra$  sur le transfert de chaleur. Ils ont trouvé que les champs d'écoulement et de température sont symétriques à cause de la symétrie des conditions aux limites.

**Sarris et al.** [7] qui ont effectué une étude numérique de la convection naturelle dans les réservoirs rectangulaires chauffés localement au-dessous. Basé sur des prévisions numériques, les effets du  $Ra$  et la géométrie de la source de chauffage et du réservoir sur les structures d'écoulement et le transfert thermique ont été étudiés pour le nombre de Rayleigh dans la gamme  $10^2$  à  $10^7$ . Leur étude a indiqué que l'augmentation de l'intensité de circulation d'écoulement augmente avec une augmentation de longueur de la source de chauffage.

**Bourich et al.** [8] qui ont étudié numériquement la convection naturelle double-diffusive bidimensionnelle dans une enceinte poreuse carrée chauffée partiellement au-dessous et refroidies par les côtés à une température constante. Leur analyse a inclus l'influence de la partie chauffée sur le transfert de chaleur.

**Sharif et Mohammad** [9] qui ont étudié la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire, par une méthode informatique basée sur les volumes finis. Ils ont considéré un chauffage par flux constant au fond et un refroidissement isotherme des parois latérales tandis que le mur supérieur était adiabatique. La longueur de la source de chaleur a été variée de 20% à 80% de la longueur du fond de l'enceinte pour la gamme du nombre de Grashof de  $10^3$  à  $10^6$ . Ils ont constaté que le nombre moyen de Nusselt et la température maximale sont des fonctions de l'allongement de l'enceinte et de la longueur de la source de chaleur.

**Sharma et al.** [10] qui ont étudié numériquement la convection naturelle turbulente dans une enceinte carrée avec le chauffage localisé au-dessous et le refroidissement symétrique des murs latéraux verticaux, Leur analyse a inclus l'influence de la partie chauffée et du  $Ra$  sur le transfert de chaleur. Ils ont trouvé les champs d'écoulement et de température pour différents nombres de Rayleigh et différentes largeurs de la partie chauffée.

### I.3. Cylindre vertical

**Lee Jong Ho notamment** [11], a étudié numériquement, à l'aide d'une méthode aux différences finies, la convection naturelle instationnaire qui se développe dans l'enceinte à partir d'un état d'équilibre lorsque les parois sont: soit portées à une température plus élevée, soit traversées par un flux de chaleur de densité constante. Dans les deux cas, des états multicellulaires apparaissent au bout d'un certain temps lorsque le nombre de Grashof (ou le nombre de Grashof modifié) ainsi que le rapport  $R_0/b$  du rayon du cylindre sur sa hauteur sont suffisamment grands. La convection naturelle transitoire dans un cylindre vertical a également été étudiée analytiquement par **Sakurai et Matsuda** [12], Ils considèrent que l'enceinte est remplie d'un fluide dont la distribution de température varie linéairement avec la hauteur du cylindre, la température externe de la paroi étant la même que celle du fluide à la même hauteur.

Ils présentent des équations de transfert lorsque la température externe de la paroi est soudainement modifiée, la distribution restant linéaire. Les termes non linéaires ne sont pas pris en compte et le nombre de Prandtl pris voisin de l'unité. Cette étude a été généralisée par **Jischke et Doty** [13] à une cavité fermée, de forme quelconque, quand la température de la paroi subit une modification. **Hyun** [14] a utilisé la méthode des variables primitives pour étudier la convection naturelle à l'intérieur d'un cylindre vertical où la température initiale est uniforme, les conditions pariétales étant les mêmes que celles considérées par **Sakurai et Matsuda** [12]. La même configuration géométrique a été étudiée numériquement, par **Lin et Akins** [15] qui ont utilisé la formulation en variables primitives aussi, ils ont pu établir une corrélation entre le nombre de Nusselt moyen et le nombre de Rayleigh pour une convection dominante. Pour la même géométrie, **Lin et Akins** [16] ont étudié le comportement transitoire de la convection naturelle, la température du fluide étant initialement uniforme. Le régime transitoire est créé par un changement de la température sur toute la paroi du cylindre. Ils ont présenté les lignes de courant, la localisation de la température minimale, les coefficients de transfert thermique et la température moyenne pour un rapport hauteur/diamètre égal à 1, un nombre de Prandtl égal à 7 et un nombre de Rayleigh de  $10^5$ . Ils ont également établi une corrélation entre le nombre de Nusselt moyen et le temps adimensionnel.

#### **I.4. Cavité sphérique**

La convection naturelle à l'intérieur d'une cavité sphérique, qui a fait l'objet de moins de travaux que dans le cas d'autres enceintes, a été étudiée expérimentalement par **Tyler et Tuck** [17], Ils ont déterminé la variation de la température au centre de la sphère en fonction du temps pour différents gaz. **Moshimaru** [18] a étudié aussi numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle à l'intérieur d'une cavité sphérique quand la paroi est portée à une température constante.

#### **I.5. Espaces annulaires**

- **Les espaces annulaires formés par des cylindres elliptiques**

Les espaces annulaires formés par des cylindres elliptiques d'axes horizontaux centrés ou excentrés ont aussi donné matière à plusieurs travaux, citons comme exemple **Schreiber et Shingh** [19] qui ont fait une étude dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques maintenus à des températures constantes, ils ont utilisé la méthode du développement spectral en séries, pour réduire les équations aux dérivées partielles à trois systèmes d'équations différentielles du second ordre. **Djezzar et al** [20-23] quant à eux, ont étudié numériquement

la convection naturelle dans un espace annulaire formé de deux cylindres elliptiques d'axes horizontaux et confocaux en utilisant la formulation en variables primitives, ils ont pu déceler des écoulements multicellulaires, pour certaines géométries quand le nombre de Grashof augmente, ceci pour les trois conditions thermiques pariétales utilisées.

- **Les espaces annulaires formés par des cylindres**

La première étude sur le transfert de chaleur dans un fluide compris entre deux cylindres horizontaux et coaxiaux a été faite par **Beckmann** [24] qui a évalué les taux de transfert de chaleur pour l'air, l'hydrogène et le dioxyde de carbone. Pour le même problème, **Eckert et al.** [25] ont déterminé les taux locaux de transfert de chaleur en utilisant un interféromètre Mach-Zehnder. **Grigull et Haut** [26] ont utilisé la même technique pour visualiser les différentes structures de l'écoulement et étudier l'influence du rapport des rayons. **Powe et al.** [27] ont mené une étude plus complète dans ce domaine. Ils ont pu distinguer quatre régimes d'écoulement en utilisant l'air comme fluide test. Le même problème a été étudié expérimentalement par **Kuehn et Goldstein** [28] dans le cas de l'air et de l'eau pour un nombre de Rayleigh de  $4,7 \cdot 10^4$  et un rapport de rayons égal à 2,6. Ils ont obtenu des résultats en accord avec ceux de l'analyse numérique qu'ils ont réalisée et qui est basée sur la méthode des différences finies et la technique de relaxations successives. Dans un autre travail [29], ils ont introduit le concept de la couche limite pour étudier des écoulements laminaires et turbulents, dans le cas de cylindres horizontaux concentriques ou excentrés et de rangées de cylindres situés à l'intérieur d'une enceinte cylindrique. Les mêmes auteurs [30] ont étudié expérimentalement l'influence de l'excentricité sur le transfert de chaleur. Ils ont présenté des interférogrammes qui permettent de bien visualiser le champ de température et de déterminer les taux de transfert de chaleur. Ils ont mis en évidence un écoulement secondaire localisé au-dessus du cylindre interne quand il est proche du sommet du cylindre externe. Cette structure d'écoulement est confirmée par l'étude numérique de **Projahn et al.** [31] lorsque les cylindres sont concentriques. Dans leur deuxième étude [32], il semble que ces écoulements persistent même lorsque le nombre de Prandtl est élevé. **Quant à Fant et al.** [33], ils précisent dans leur étude que le régime bicellulaire n'est obtenu, pour un rapport de rayons de 1.2, que pour des nombres de Rayleigh supérieurs à 2808, alors que pour un rapport de 1.1, c'est un régime tricellulaire qui se développe avec une valeur de transition du nombre de Rayleigh sensiblement plus faible. **Naylor et al.** [34] ont mené conjointement une étude expérimentale et une étude numérique basée sur une méthode variationnelle d'éléments finis. Ils ont étudié l'effet de l'excentricité du tube interne et de l'angle azimutal sur le champ thermique dans l'espace annulaire pour de faibles nombres de

Rayleigh (500-1500). D'autres travaux sur l'effet de l'excentricité sur la convection naturelle entre deux cylindres horizontaux et isothermes, sont disponibles dans la littérature (**Rao et al.** [35]. **Bau** [36], Himasekhar et Bau [37],...). Prusa et Pao [38] ont examiné l'effet du déplacement vertical du cylindre interne dans un espace annulaire de rapport de rayons 2,6. Ils ont utilisé une transformation radiale pour faciliter l'écriture des conditions aux limites. Malgré les nombreux tests effectués sur l'affinement du maillage, ils n'ont observé aucun écoulement multicellulaire. **Kuehn et Goldstein** [39] ont mené une étude numérique dans le but de déterminer les effets du nombre de Prandtl et du rapport des rayons sur le transfert de chaleur. Ils ont utilisé la méthode des différences finies et la méthode de relaxations successives pour résoudre les équations de la convection naturelle, laminaire et bidimensionnelle en régime permanent. Pour éliminer les instabilités numériques dues au schéma décentré utilisé dans leur première étude [28], ils ont appliqué une technique hybride lorsque le nombre de Prandtl est faible ou le rapport de rayons est élevé. Ils ont établi une corrélation entre le nombre de Nusselt et deux nombres de Rayleigh basés sur les diamètres des cylindres interne et externe. **Mack et Bishop** [40] ont étudié la convection naturelle stationnaire entre deux cylindres horizontaux coaxiaux pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh lorsque les deux cylindres sont maintenus à des températures uniformes et différentes. Ils ont utilisé un développement en séries entières du nombre de Rayleigh. Ils ont donné les champs des vitesses et des températures ainsi que les nombres de Nusselt locaux et moyens. Ils ont également montré que l'influence du nombre de Prandtl est faible dans le cas d'un gaz ou d'un liquide non métallique mais qu'elle est importante pour un liquide métallique. **Huetz et al.** [41] ont utilisé la même méthode dans le cas où le cylindre interne est soumis à un flux de chaleur alors que le cylindre externe est isotherme. Cette configuration géométrique a été étudiée expérimentalement par **Liu et al.** [42] et une description photographique et qualitative a été présentée par **Bishop et Carley** [43]. **Crawford et al.** [44] ont étudié numériquement la convection naturelle entre deux cylindres coaxiaux et horizontaux, en utilisant la méthode des différences finies et une procédure itérative de type Gauss-Seidel. **Powe et al.** [45] ont utilisé la même méthode afin d'examiner la transition vers un écoulement instationnaire pour l'air, en déterminant le nombre de Rayleigh correspondant au début de formation d'une cellule contrarotative. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les expérimentations de **Powe et al.** [27]. **Quant à Abbott** [46], il a utilisé la technique d'inversion de matrices pour obtenir des solutions dans des couches de fluide très minces. Une étude plus récente sur la convection naturelle transitoire entre deux cylindres horizontaux, coaxiaux et isothermes a été réalisée par **Cheddadi** [47]. Il a déterminé les champs de température et de vitesse en utilisant un schéma implicite aux directions alternées. D'autres

types de conditions aux limites sont étudiés dans la littérature. **Kumar** [48] a étudié le cas où le cylindre interne est soumis à un flux de chaleur constant alors que le cylindre externe est isotherme. Les équations de la vorticité et de la chaleur sont r solv es par la méthode des différences finies avec un schéma implicite aux directions alternées. Ils ont étudié l'effet de la variation du rapport de rayons et du nombre de Rayleigh sur la température du cylindre interne. Ils ont constaté qu'une croissance du nombre de Rayleigh basé sur la même différence de température pour la condition de flux de chaleur constant ou de température uniforme sur le cylindre interne, augmente le transfert de chaleur. Pour des rapports de rayons élevés (supérieurs à 10), les taux de transfert de chaleur sont identiques pour les mêmes types de chauffage. **Bishop et al.** [49,50] ont étudié expérimentalement la convection naturelle entre deux sphères concentriques ; chacune étant maintenue à une température constante. Les distributions de température, les données du transfert thermique ainsi que deux corrélations entre le nombre de Grashof et le nombre de Nusselt ont été données par **Bishop et al.** [51], **Singh et Ellipt** [52] ont étudié le problème de la convection naturelle d'un fluide thermiquement stratifié, compris entre deux sphères concentriques.

# *Chapitre II*

## *Formulation Mathématique*

# Chapitre II

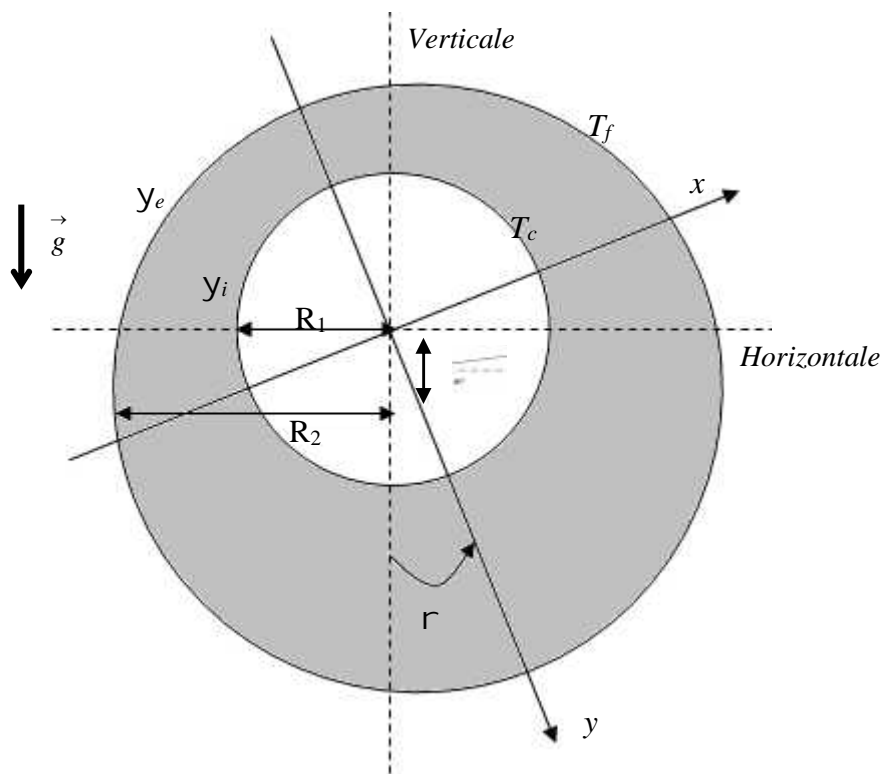
## Formulation mathématique

### II.1. Présentation du problème

Considérons un espace annulaire, rempli d'un fluide newtonien (l'air), situé entre deux cylindres horizontaux. La figure(II.1) représente une section droite du système.

Les deux parois cylindriques interne et externe sont isothermes maintenues respectivement aux températures  $T_c$  et  $T_f$  avec  $T_c > T_f$ , dans un premier cas de chauffage, ensuite la paroi cylindrique interne est soumise à une densité de flux de chaleur constante.

Il se produit, dans l'enceinte une convection naturelle que nous nous proposons d'étudier numériquement.



**Fig. II.1.** Système étudié et conditions aux limites



## II.2. Hypothèses simplificatrices

- On considère un **écoulement de fluide incompressible**
- les propriétés **physiques constantes**
- nous supposons être dans le cadre de l'**approximation de Boussinesq**. Celle-ci consiste à considérer les variations de la masse volumique  $\rho$  négligeables au niveau de tous les termes des équations de la quantité de mouvement hormis dans le terme de pesanteur dont les variations avec la température, supposées linéaires, engendrent la convection naturelle. Ces variations sont alors traduites par une équation d'état qui relie la masse volumique à la température.

L'équation d'état est donc :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_0 (T - T_0)] \quad (\text{II.1})$$

Où :  $\beta_0$  est le coefficient d'expansion thermique (constant).

$\rho_0$  est la masse volumique de référence (constante).

$T_0$  est la température de référence (constante) associée à  $\rho_0$ .

Au niveau de tous les autres termes, la masse volumique est constante et égale à  $\rho_0$ .

- La dissipation visqueuse et le travail des forces de pression sont négligeables dans l'équation de la chaleur, le rayonnement n'est pas pris en considération (les propriétés émissives des deux parois étant négligées).
- Nous admettons que le problème est bidimensionnel, permanent et laminaire.

## II.3. Formulation des équations en coordonnées cartésiennes

### ➤ Equation de continuité

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.2})$$

### ➤ Equation du mouvement

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + g \cdot \sin(\alpha) + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.3.a})$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + g \cdot \cos(\alpha) + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.3.b})$$

### ➤ Equation de la chaleur

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{c_p \rho_0} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.4})$$

#### II.4. Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement

En dérivant les équations du mouvement (II.3.a) et (II.3.b) respectivement par rapport à  $y$  et à  $x$ , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (g - g_d \sin(\alpha)) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.5.a})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (g - g_d \cos(\alpha)) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.5.b})$$

En soustrayant l'équation (II.5.a) de (II.5.b) et en utilisant l'équation de continuité ainsi que la définition de la fonction de vortacité  $\tilde{S}$ , nous obtenons :

$$U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} = g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

Avec :

$$\tilde{S} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{II.7.a})$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{II.8.a})$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{II.8.b})$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.8.c})$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.8.d})$$

#### II.5. Formulation des équations en coordonnées bicylindriques

Il est commode de définir un référentiel tel que les limites du système se traduisent par des valeurs constantes des coordonnées. Les coordonnées dites « bicylindriques », permettent, précisément dans notre cas, d'obtenir ce résultat.

Dans le système de coordonnées  $(r, \theta, z)$ , les surfaces  $r = \text{constante}$  sont des cylindres circulaires avec des axes dans le plan  $xz$ , les surfaces  $\theta = \text{constante}$  sont les portions des cylindres circulaires avec des axes dans le plan  $yz$ , et les surfaces  $z = \text{constante}$  sont des plans parallèles.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées bicylindriques s'effectue à l'aide des relations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \cdot \text{sh}(\eta)}{\text{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ y &= \frac{a \cdot \sin(\theta)}{\text{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.9})$$

Les équations (II.2), (II.4), et (II.6) s'écrivent alors respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta) = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$V \frac{\partial T}{\partial \eta} + V \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{1}{c_p} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{II.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{V}{h} \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{g}{h} \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\theta) + G(\eta, \theta) \sin(\theta)] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\ &\left. + [F(\eta, \theta) \sin(\theta) - G(\eta, \theta) \cos(\theta)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} + \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

$$a = r_1 \text{sh}(\eta_1) = r_2 \text{sh}(\eta_2)$$

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{a}{\text{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ F(\eta, \theta) &= \frac{a(1 - \cos(\theta) \text{ch}(\eta))}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))} \\ G(\eta, \theta) &= \frac{a \sin(\theta) \text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.13})$$

Où :

$V_\eta, V_\theta$  sont les composantes de la vitesse suivant les directions  $\eta, \theta$ .

En introduisant la fonction de courant  $\psi$ , de façon à vérifier identiquement l'équation de continuité, il vient :

$$\left. \begin{aligned} V_\eta &= \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ V_\theta &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.14})$$

Nous en déduisons :

$$= - \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

## II. 6. Equations adimensionnelles

L'adimensionnalisation a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser le problème.

En posant les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} D_h &= a, & H &= \frac{h}{D_h} \\ V^+ &= V \frac{D_h}{a} & V^+ &= V \frac{D_h}{a} \\ + &= \frac{+}{a} & + &= \frac{D_h^2}{a} \end{aligned}$$

Avec :

La température adimensionnelle pour la paroi interne est donnée selon la condition pariétale thermique imposée :

$$T^+ = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}, \text{ donc le nombre de Rayleigh est : } Ra = \frac{g D_h^3 T^+}{a \epsilon}$$

Introduisons aussi le nombre de Prandtl :  $Pr = \frac{c_p}{\epsilon}$

En portant les quantités adimensionnelles définies précédemment on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial} (H V^+) + \frac{\partial}{\partial} (H V^+) = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$H V^+ \frac{\partial T^+}{\partial} + H V^+ \frac{\partial T^+}{\partial} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T^+}{\partial^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial^2} \right) \quad (\text{II.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{V^+}{H} \frac{\partial +}{\partial} + \frac{V^+}{H} \frac{\partial +}{\partial} &= \frac{Gr}{H} \left\{ [F(, ) \cos( ) - G(, ) \sin( )] \frac{\partial T^+}{\partial} \right. \\ &\left. - [F(, ) \sin( ) + G(, ) \cos( ) + ] \frac{\partial T^+}{\partial} \right\} + \frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 +}{\partial^2} + \frac{\partial^2 +}{\partial^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Ou les composantes  $V^+, V^+$  de la vitesse et de la vorticité  $+$  adimensionnelles sont définies par :

$$V^+ = \frac{1}{H} \frac{\partial +}{\partial} \quad (\text{II.19.a})$$

$$V^+ = - \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial r} \quad (\text{II.19.b})$$

$$\psi^+ = - \frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.20})$$

## II.7. Formulation des conditions aux limites

Puisqu'il n'y a pas d'impulsion qui traverse les parois, la fonction de courant s'annule sur celle-ci. Nous déterminons la valeur de la vorticité en appliquant la relation (II.20) directement sur la paroi ou la dérivée de la fonction de courant par rapport à l'azimut s'annule.

-Conditions sur la paroi du cylindre intérieur ( $r = r_i = \text{constant}$ ) :

$$V^+ = V^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial z} = \frac{\partial \psi^+}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.21.a})$$

$$\psi^+ = - \frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.21.b})$$

$$T^+ = 1 \quad (\text{II.21.c})$$

- Conditions sur la paroi du cercle extérieur ( $r = r_e = \text{constant}$ ) :

$$V^+ = V^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.22.a})$$

$$\psi^+ = \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial r^2} \quad (\text{II.22.b})$$

$$T^+ = 0 \quad (\text{II.22.c})$$

## II.8. Coefficients d'échange de la chaleur

### II.8.1. Valeur locale du nombre de Nusselt

La définition générale du nombre de Nusselt est :

$$Nu = \frac{qa}{T} \quad (\text{II.23})$$

$q$  : densité du flux de la chaleur à travers la paroi de l'enceinte.

$\Delta T$  : écart de température  $T_c - T_f$ .

Soit :

$$q = - \left. \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{=cste}$$

et en utilisant les définitions des températures adimensionnelles dans les deux conditions pariétales thermiques, il vient :

$$Nu = - \frac{1}{h^+} \frac{\partial T^+}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (\text{II.24})$$

### II.8.2. Nombre de Nusselt moyen

Le nombre de Nusselt moyen s'exprime à partir de la relation suivante :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{NN} \int_0^{NN} Nu dy \quad (\text{II.26})$$

# *Chapitre III*

*Présentation du logiciel de  
calcul*

# Chapitre III

## Présentation du logiciel de calcul

### III.1. Introduction

Avant d'entreprendre la simulation numérique de la convection naturelle laminaire dans une enceinte chauffée partialement à l'aide d'un code de simulation numérique, il est utile de préciser ce qu'on peut attendre d'une telle méthode.

La simulation numériques en mécanique des fluides (CFD ; Computational Fluid Dynamics) est reconnue aujourd'hui comme l'un des outils incontournables de conception et est largement utilisée dans l'industrie. Le choix de l'utilisation de telle méthode numérique va dépendre essentiellement du type et de la complexité du problème à résoudre : la nature du fluide, le comportement thermodynamique, la modélisation du milieu et le problème stationnaire ou in stationnaire.

Les codes de simulation numérique des écoulements, ou codes CFD (Computational Fluid Dynamics), résolvent les équations régissant les mouvements d'un fluide. Ces équations traduisent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement du fluide (équations de Navier-Stokes), ainsi que la conservation de l'énergie. Certains codes sont aussi en mesure de décrire le transport de polluant ou les réactions chimiques au sein d'un fluide. Il existe un grand nombre de codes CFD disponibles (plus d'une centaine), qu'ils soient commerciaux, du domaine public ou encore propres à certaines institutions. Le Tableau III-1 recense les codes de calcul les plus répandus. On peut observer que l'essentiel des codes utilisent la méthode des volumes finis.

Pour notre travail, nous aurons recours au code CFD FLUENT, commercialisé par Fluent Incorporated 2006. Nous disposons de la version 6.3.26. Pour l'usage que nous en avons, il permet de résoudre les équations régissant les mouvements laminaires et turbulents d'un fluide, en 2D ou 3D. Les problèmes à résoudre peuvent être en régime permanent et stationnaire.



| Nom du code | Origine                 | Type              | Méthode       |
|-------------|-------------------------|-------------------|---------------|
| ARIA        | Abacus, Royaume-Uni     | code commercial   | volumes finis |
| ASTEC       | Harwell, Royaume-Uni    | code commercial   | volumes finis |
| CALC-BFC    | Chalmers, Suède         | code de recherche | volumes finis |
| CHAMPION    | TUD, Pays-Bas           | code de recherche | volumes finis |
| EOL-3D      | INRS, France            | code de recherche | volumes finis |
| EXACT3      | NIST, Etats-Unis        | code de recherche | volumes finis |
| FEAT        | Royaume-Uni             | code commercial   | volumes finis |
| FIDAP       | FDI, Etats-Unis         | code commercial   | volumes finis |
| FIRE        | AVL, Allemagne          | code commercial   | volumes finis |
| FLOTRAN     | Computflow              | code commercial   | volumes finis |
| FLOVENT     | FLOMERICS, Royaume Uni  | code commercial   | volumes finis |
| FLOW-3D     | Harwell, Royaume Uni    | code commercial   | volumes finis |
| FLUENT      | Fluent Inc., Etats-Unis | code commercial   | volumes finis |
| JASMINE     | BRE-FRS, Royaume Uni    | code de recherche | volumes finis |
| KAMELEON    | SINTEF, Norvège         | code de recherche | volumes finis |
| PHOENICS    | CHAM, Royaume Uni       | code commercial   | volumes finis |
| SIMULARAIR  | AVL, Allemagne          | code commercial   | volumes finis |
| STAR-CD     | CD, Royaume Uni         | code commercial   | volumes finis |
| TEACH-3D    | Aalborg, Danemark       | code de recherche | volumes finis |
| TEMPEST     | Battelle, Etats-Unis    | code de recherche | volumes finis |
| WISH-3D     | TNO, Pays-Bas           | code de recherche | volumes finis |

**Tableau III.1.** Codes CFD [53].

### III.2. Principes des codes CFD

Les logiciels de simulation numérique des écoulements basés sur la méthode des volumes finis peuvent maintenant être considérés comme de véritables «expériences numériques », lorsqu'elles sont faites avec soin. L'avantage des « méthodes numériques » est que toutes les quantités physiques liées à l'écoulement (champ de vitesse, champ de pression, contraintes etc.), sont immédiatement disponibles en tout point de l'écoulement.

Dans une expérimentation, l'obtention de ces quantités physiques en tout point du champ est souvent impossible ou très difficile en pratique. Cependant, la simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes est encore limitée à des nombres de Reynolds modéré. Les méthodes CFD (Computational Fluid Dynamics) ont l'avantage de mettre en œuvre les équations générales de la mécanique des fluides avec un minimum des hypothèses. Elles résolvent notamment les équations non-linéaires instationnaires et compressibles. La discrétisation des équations de Navier-Stokes et de conservation de la masse est faite sur des éléments quadrilatéraux ou triangulaires, réguliers ou non selon la complexité de la géométrie. Elle conduit à un système d'équations non-linéaires couplées. Ce système est résolu de manière itérative. Le premier travail à accomplir dans la réalisation d'une simulation numérique est la définition d'un maillage adapté à la nature de l'écoulement. En particulier, le maillage doit être fin dans les zones où l'on atteint des gradients physiques très importants. Une connaissance à priori du champ de vitesse tiré d'expériences sur des écoulements similaires est donc utile pour l'établissement du maillage. Le maillage peut être raffiné à partir des résultats obtenus en identifiant les zones de l'écoulement dans lesquelles le calcul ne converge pas parfaitement (par exemple les éléments dans lesquels la condition d'incompressibilité n'est pas complètement satisfaite).

Avant d'entamer la résolution de ces équations, nous devons identifier le régime de l'écoulement laminaire ou turbulent. Il est donné par la valeur du nombre de Rayleigh dans le cas de la convection naturelle. Dans ce travail le régime de l'écoulement est laminaire.

### **III.3. Utilisation du FLUENT**

Pour réaliser nos simulations, nous avons choisi d'utiliser le code de calcul FLUENT, ce code est développé pour modéliser les écoulements des fluides et transfert thermique, est écrit en langage de programmation C. Ce logiciel utilise la méthode des volumes finis pour résoudre les équations.

Le solveur FLUENT permet de définir numériquement les conditions opératoires (gravité, pression...) dans lesquelles, est effectuée la simulation, ainsi que la spécification des conditions aux limites, il permet de choisir le processus itératif, en proposant plusieurs schémas numériques pour la discrétisation spatiale et temporelle, et pour le couplage de vitesse et de pression.

### III.4. Méthode de résolution des équations de transport

#### III.4.1. Schéma de discrétisation

Notre code emploie la méthode des volumes finis pour la résolution des systèmes d'équations utilisés pour modéliser les mouvements des fluides. En fait, avec la méthode des volumes finis, un problème physique donné est résolu suivant trois principales étapes :

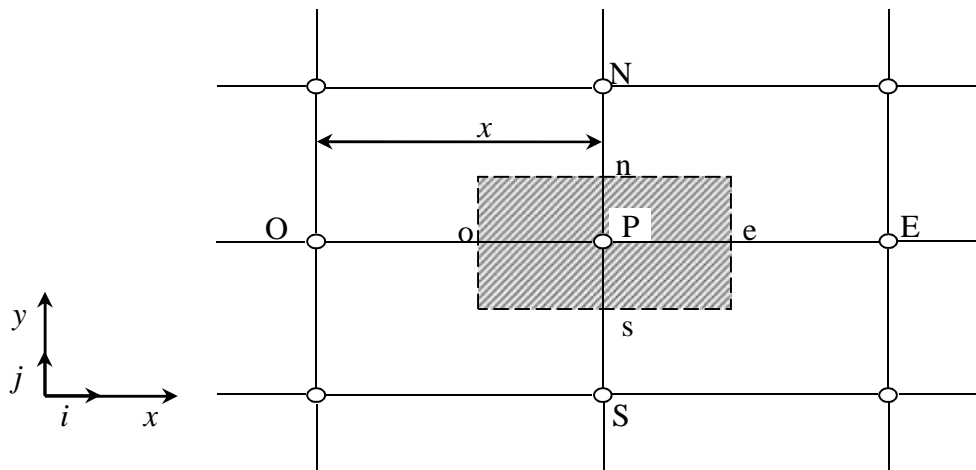
- Division du domaine de calcul en volumes de contrôle via un maillage.
- Intégration des équations sur chaque volume de contrôle afin de les transformer en équations algébriques,
- Résolution des équations ainsi discrétisées.

Ces équations sont mises sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dots \xi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\dots U_i \xi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma_{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right) + S_{\xi} \quad (\text{III.1})$$

où  $\xi$  représente une grandeur intensive telle que  $T^*$  et  $\omega^*$ .

$\Gamma_{\xi}$  est un coefficient de diffusion et  $S_{\xi}$  un terme de source. Sous cette forme générale, tous les termes non-convectifs ou non-diffusifs sont inclus dans le terme source  $S_{\xi}$ .



**Fig. III.1.** Volume de contrôle pour la résolution en volumes finis

La **Fig. III.1** représente la discrétisation en volumes finis des équations de transport. Les différentes grandeurs de l'écoulement sont calculées au centre de chaque volume de contrôle, aux points  $P$ ,  $E$ ,  $O$ ,  $N$  et  $S$ . L'intégration de l'équation III.1 dans un volume de contrôle fait intervenir les valeurs, ainsi que les flux de diffusion et de convection de ces grandeurs aux frontières du volume de contrôle. Ainsi, pour le calcul des grandeurs au

point P, leurs valeurs aux interfaces  $e$ ,  $o$ ,  $n$  et  $s$  sont également nécessaires. Plusieurs méthodes d'interpolation peuvent alors être utilisées connaissant leurs valeurs au centre des volumes de contrôle adjacents.

FLUENT propose plusieurs schémas discrétisation dépende de la nature de l'écoulement et la géométrie adoptée.

- ✓ Schéma du Premier Ordre Upwind : Ce schéma permet une certaine stabilité dans les calculs mais est responsable de diffusion numérique. Il est fortement recommandé dans les écoulements de dominance convective.
- ✓ Schéma de Seconde Ordre Upwind : est à utiliser pour les écoulements compressibles et pour améliorer la précision en écoulements incompressibles. .
- ✓ Le schéma « QUICK » (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinetics) : Il procure une meilleure précision que le schéma au Second Ordre pour les écoulements rotationnels et tourbillonnaires (Swirling) avec un maillage régulier. Cependant, il ne s'applique pas à un maillage triangulaire.
- ✓ Le schéma « Power Law » est plus précis que le Schéma du premier ordre pour les écoulements à très bas nombres de Reynolds. Sinon, il procure en général le même degré de précision.
- ✓ Le schéma « third-order MUSCL » : il donne plus de précision que les autres schémas

Dans ce travail nous avons choisi le schéma Upwind en deuxième ordre. [54].

#### III.4.2. Choix du schéma d'interpolation de la pression

Pour la plupart des cas, le schéma « Standard » est acceptable. Pour des écoulements spécifiques, on peut choisir parmi les options suivantes :

- ✓ Le schéma force de volume pondéré « Body Force Weighted » est recommandé dans les cas où l'effet des forces de gravité sont importantes.
- ✓ Le schéma « PRESTO ! » (Pressure Staggering Option) est approprié pour les écoulements hautement tourbillonnaires, à grande vitesse de rotation ou les écoulements dans des domaines fortement courbés.
- ✓ Le schéma au second ordre est à utiliser pour les écoulements compressibles et pour améliorer la précision en écoulements incompressibles.
- ✓ Le schéma linéaire « Linear » est disponible comme alternative au cas où les autres options ont des difficultés de convergence ou génèreraient des comportements non physiques.

Le schéma « *Standard* » est choisi pour notre cas.

### III.4.3. Choix de la méthode de couplage Pression-Vitesse

Trois algorithmes sont disponibles dans le logiciel de calcul :

- SIMPLE: le plus robuste.
- SIMPLEC : il donne une convergence plus rapide pour les problèmes simples.
- PISO : il est utile pour des problèmes des écoulements instables.

L'algorithme choisi dans notre étude est l'algorithme SIMPLE [55]. A l'initialisation du calcul, un champ de pression fixé *a priori* est introduit dans l'équation de bilan de la quantité de mouvement, permettant de calculer un premier champ de vitesse. La combinaison des équations de bilan de masse et de quantité de mouvement permet ensuite de corriger ces premiers champs de pression et de vitesse. Les autres équations de transports sont ensuite résolues et le champ de pression corrigé est utilisé pour initialiser le calcul à l'itération suivante. Cette succession d'opération est répétée jusqu'à ce que les critères de convergences soient atteints.

#### ➤ Algorithme SIMPLE

La discrétisation d'une équation de transport diffusion sur un volume de contrôle par la méthode des volumes finis fait intervenir les valeurs des vitesses aux interfaces des volumes ( $U_e, U_w, U_n, U_s$ ). Il est donc intéressant de calculer ces vitesses directement sur les interfaces (sans avoir à effectuer d'interpolations). D'autre part, la discrétisation de l'équation de continuité et du gradient de pression avec l'utilisation d'une interpolation linéaire peut induire des erreurs importantes du fait qu'une répartition de pression ou de vitesse en "damier" est vue comme un champ uniforme. Pour contourner ces difficultés on préfère utiliser des grilles décalées "staggered grid". Une grille principale est construite sur laquelle on calcule la pression, la température et la concentration. Deux grilles décalées vers la droite et vers le haut respectivement sont utilisées pour le calcul des vitesses horizontale et verticale.

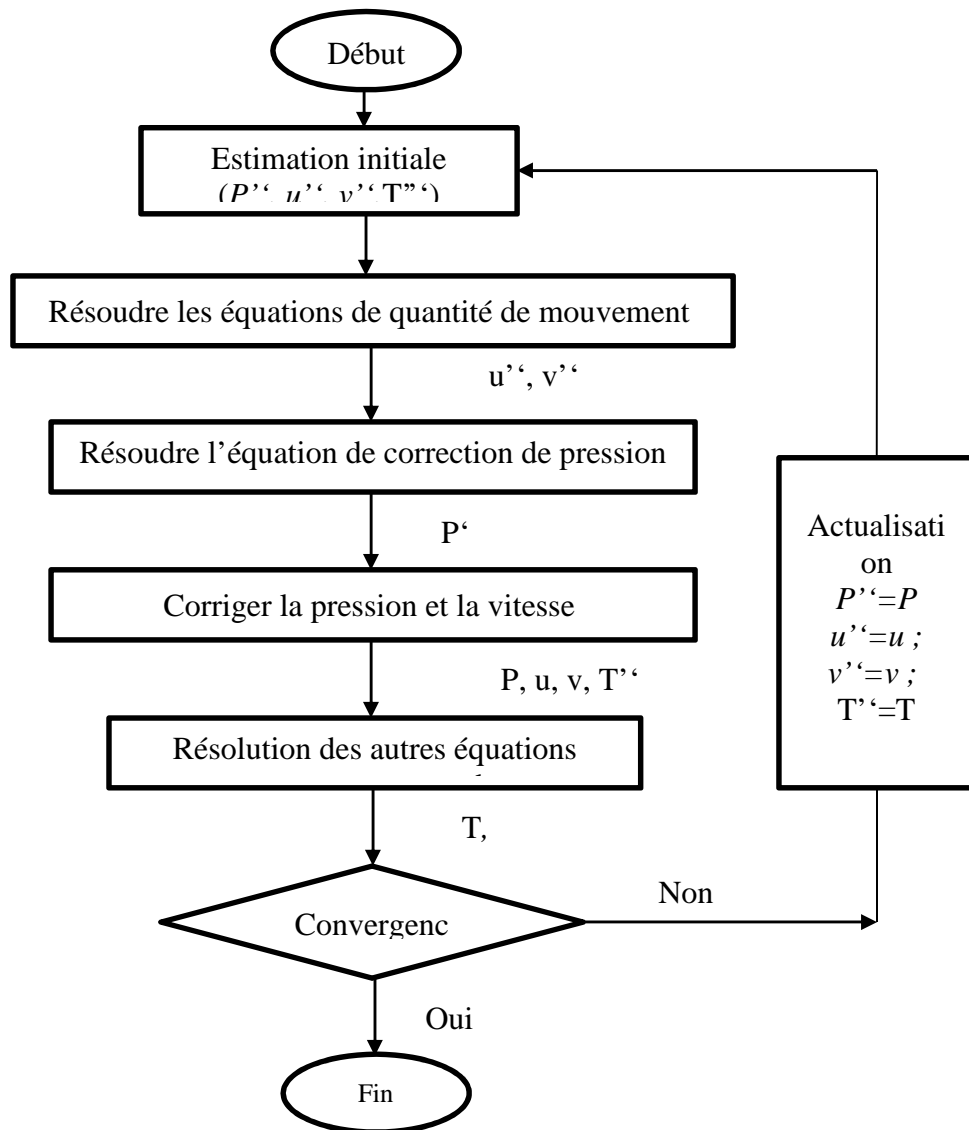
L'algorithme SIMPLE, acronyme pour « Semi-Implicit Method for Pressure Linked-Equations » permet de résoudre le système d'équations discrétisées. Cet algorithme stipule l'existence d'une relation entre les vitesses corrigées et les pressions corrigées, en vue de vérifier l'équation de conservation de la masse.

La séquence des opérations de calcul de la méthode SIMPLE est la suivante :

1. Estimer un champ de pression  $P'$ .

2. Résoudre les équations de quantité de mouvement pour en tirer les champs de vitesses  $V'$  (vitesse estimée).
3. Résoudre l'équation de correction de pression  $P'$
4. Corriger la pression  $P=P'+ P''$ .
5. Corriger les champs de vitesses.
6. Prendre le champ  $P$  comme une nouvelle estimation et recommencer la séquence à partir de l'étape 2, jusqu'à la convergence.

Le schéma représentatif de ce processus itératif est le suivant :



**Fig.III.2.**Schéma représentatif de l'algorithme SIMPLE

### III.5. Résolution numérique

#### III.5.1 Paramètre de contrôle de la convergence

La façon d'obtenir une solution convergée est un des éléments essentiels de prédiction d'écoulement au moyen des codes CFD. Le code "FLUENT" propose différentes techniques pour accélérer le processus de convergence est augmentée si une bonne estimation de la solution est donnée comme condition initiale. Nous avons recours à plusieurs techniques décrites ci-dessous :

##### III.5.1.1. Critère de convergence

La résolution numérique des problèmes de type CFD nécessite un processus itératif. Pour apprécier la convergence du processus itératif, des critères de convergence doivent être pris en compte. Ainsi, la convergence du processus itératif est déterminée par le concept de résidu.

Après l'étape de discrétisation, l'équation de conservation d'une variable  $w$  donnée sur une cellule de centre  $P$  peut s'exprimer comme suit :

$$a_p \cdot w_p = \sum_{nb} a_{nb} w_{nb} + b \quad (III.2)$$

où :  $a_p$  et  $a_{nb}$  représentent les contribution convectives et diffusives, l'indice  $nb$  est lié aux centre de cellules adjacentes.  $b$  représente la contribution de partie constante du terme source  $w$ .

Le résidu normalisé a alors pour expression :

$$R^w = \frac{\sum_{\text{Domaine}} \left| \sum_{nb} a_{nb} \cdot w_{nb} + b - a_p \cdot w_p \right|}{\sum_{\text{Domaine}} |a_p \cdot w_p|} \quad (III.3)$$

Ces expressions des résidus sont valables pour toutes les grandeurs sauf la pression, dans le cas de cette grandeur, le résidu est déterminé à partir de l'équation de continuité :

$$R^C = \sum_{\text{Domaine}} |taux\ de\ création\ de\ matière\ dans\ le\ domaine| \quad (III.4)$$

### **III.5.1.2 Sous-relaxation**

A cause de la non linéarité des équations résolues, il est possible, pour atténuer les fluctuations de la solution, de réduire les variations des variables d'une itération à une autre en introduisant une sous-relaxation. Il n'existe pas des règles générales concernant des meilleures valeurs des coefficients de sous-relaxation, mais il existe des recommandations pour chacune des grandeurs, généralement basé sur des connaissances empiriques.

### **III.6. Étapes de résolution du problème**

Les principales étapes utilisées dans notre simulation sont les suivantes :

1. Détermination du domaine de calcul (construction de la géométrie).
2. Discrétisation du domaine de calcul (maillage).
3. Identification des conditions aux limites.
4. Choix du modèle mathématique.
5. Choix de l'algorithme de solution.
6. Solution du modèle mathématique.
7. Visualisation et interprétation des résultats.

### **III.7. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons élaboré les hypothèses considérées dans notre travail. Nous avons ainsi, défini les méthodes numériques d'une part, et la présentation du code de calcul d'autre part.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les dernières étapes de notre processus CFD, à savoir le calcul numérique de la solution, la visualisation des résultats et la validation.



# *Chapitre IV*

## *Résultats et Interprétations*

# Chapitre IV

## Résultats et interprétations

### IV.1. Introduction

La simulation numérique de la convection naturelle laminaire dans un espace annulaire bidimensionnelle délimité par deux cylindres excentriques et concentriques remplie d'eau ( $Pr=6.21$ ) est faite en utilisant le logiciel FLUENT. La construction des géométries et leurs maillages sont faits à l'aide du logiciel GAMBIT. Nous considérons un espace annulaire formé par les deux cylindres excentrés caractérisé respectivement par les excentricités relatives ( $\sigma=0.1-0.8$ ) et le rapport des rayons  $RR=2$ . La paroi cylindrique externe est maintenue isotherme à la température  $T_f$  et la paroi cylindrique interne (est maintenue isotherme à la température  $T_c > T_f$ ).

Dans cette étude, les principaux résultats obtenus reflétant le comportement des champs dynamiques et thermiques et le taux de transfert de chaleur dans le système.

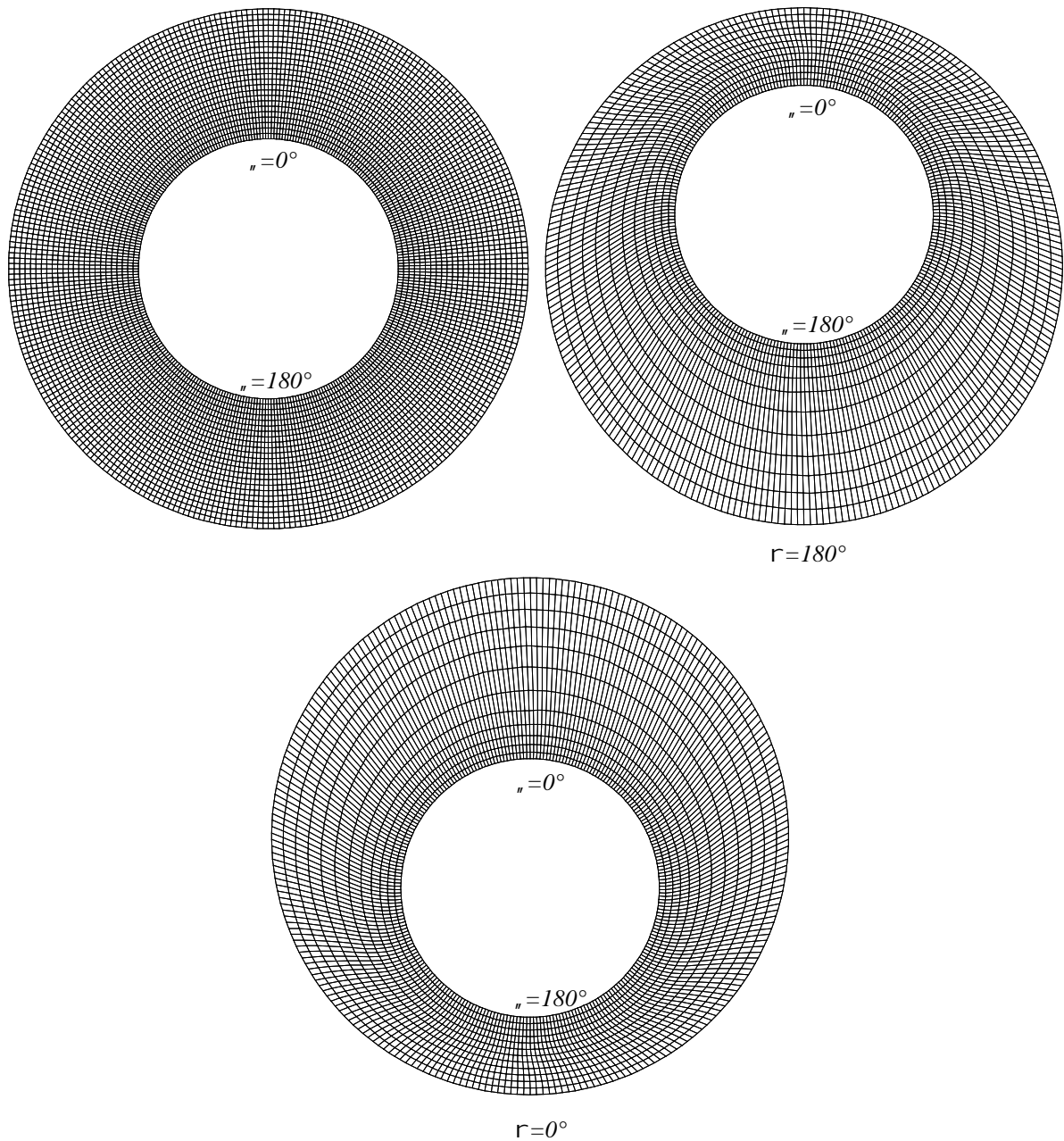
Nous avons étudié l'influence de plusieurs paramètres sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans espace annulaire :

- Effet de nombre de Rayleigh  $Ra$
- Effet de l'excentricité relative  $\sigma$
- Effet de l'angle d'inclinaison

### IV.2. Géométrie et maillage

Dans cette étude on a construit plusieurs configurations du system, en faisant varier l'excentricité  $\sigma$  relative.

Les configurations construites par GAMBIT sont montrées sur la **Fig.IV.1**.



**Fig. IV.1 :** Géométrie et maillage construit sous Gambit

### IV.3. Test du maillage

Pour vérifier l'effet du maillage sur les résultats numériques, plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour la configuration suivante : ( $\theta = 0^\circ$ ,  $\sigma = 0.4$  et  $Ra = 10^4$ ) pour voir leurs effets sur les résultats, le tableau VI.1 nous montre donc, la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de nœuds, et nous a permis de choisir le maillage avec 48000 nœuds.

|                  |      |      |      |      |       |       |        |
|------------------|------|------|------|------|-------|-------|--------|
| Nombre des nœuds | 120  | 480  | 1920 | 3250 | 12000 | 48000 | 192000 |
| $Nu_{avg}$       | 9.88 | 7.96 | 6.67 | 6.27 | 6.09  | 5.87  | 5.87   |

Tableau IV.1 Indépendance du maillage

#### IV.4. Convergence des résultats

Pour s'assurer de la convergence de calcul, nous nous aidons de critère visuel consiste à observer les courbes des résidus (**Fig. IV.2**). Lorsque les résidus sont faibles ( $10^{-6}$  pour l'équation d'énergie et  $10^{-3}$  pour les autres équations), nous pouvons considérer que la solution est atteinte.

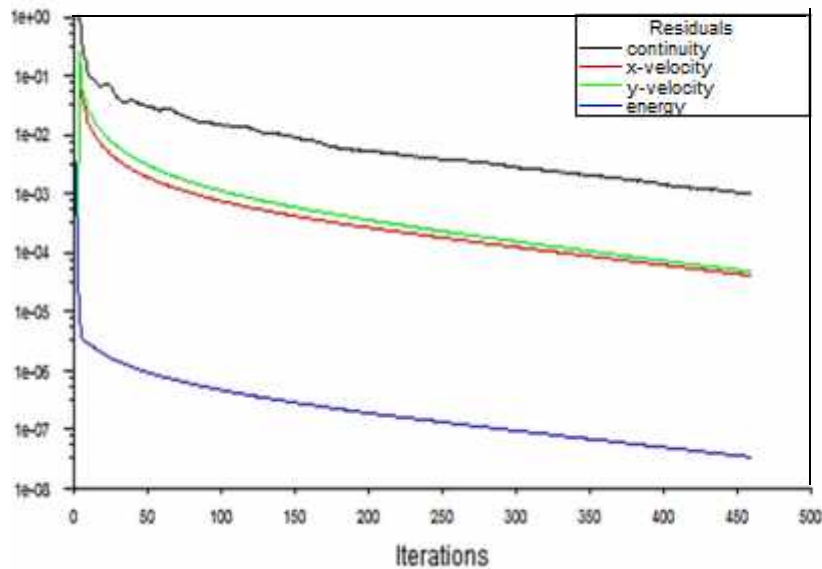


Fig.IV.2. Evolution des résidus au cours des itérations

#### IV.5. Validation des résultats

De manière à vérifier l'exactitude des résultats numérique obtenus dans le présent travail avec le code FLUENT, une validation de notre simulation numérique a été faite en comparant nos résultats (profil de température à la position angulaire „ $1=90^\circ$ ) avec ceux de l'études numérique de **Abu-Nad et al.**[56] et expérimentale de **Kuhen and Goldstein** [57] pour le cas de l'écoulement par convection naturelle entre deux cylindres coaxiaux rempli d'air ( $Pr=0.706$ ).

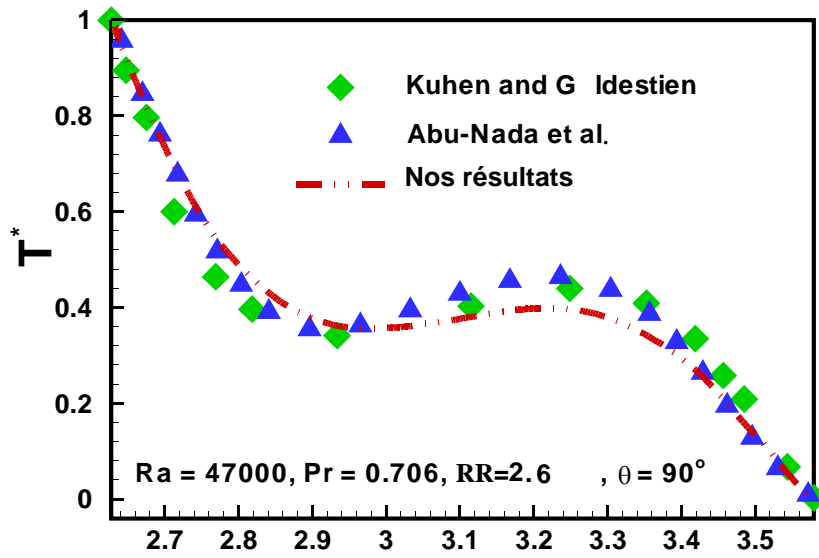
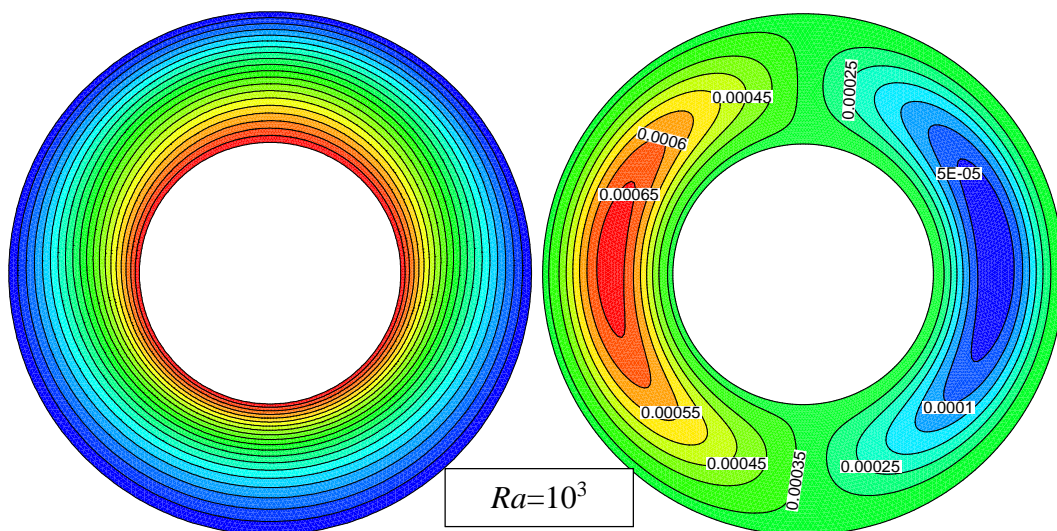


Fig.IV.3. Comparaison de nos résultats et ceux de Abu-Nad et al. [56] **Kuhlen and Goldstein** [28]

#### IV.6. Discussion des résultats

##### IV.6.1. Champ dynamique et thermique



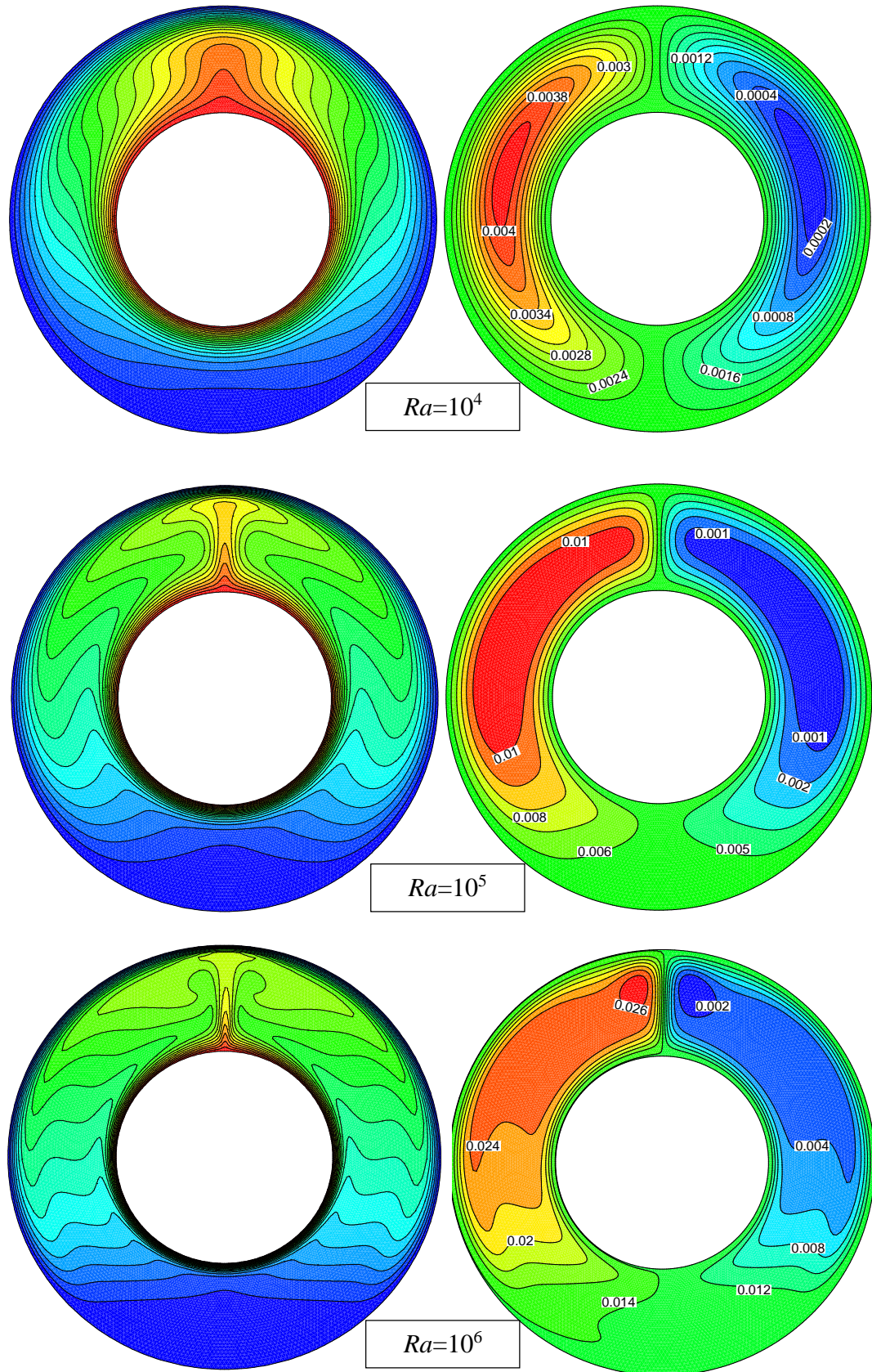
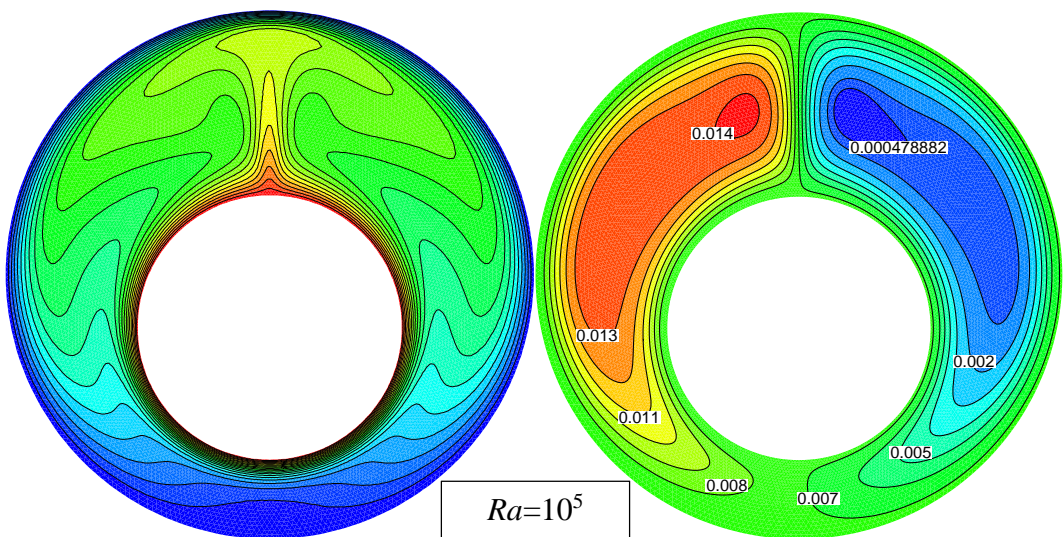
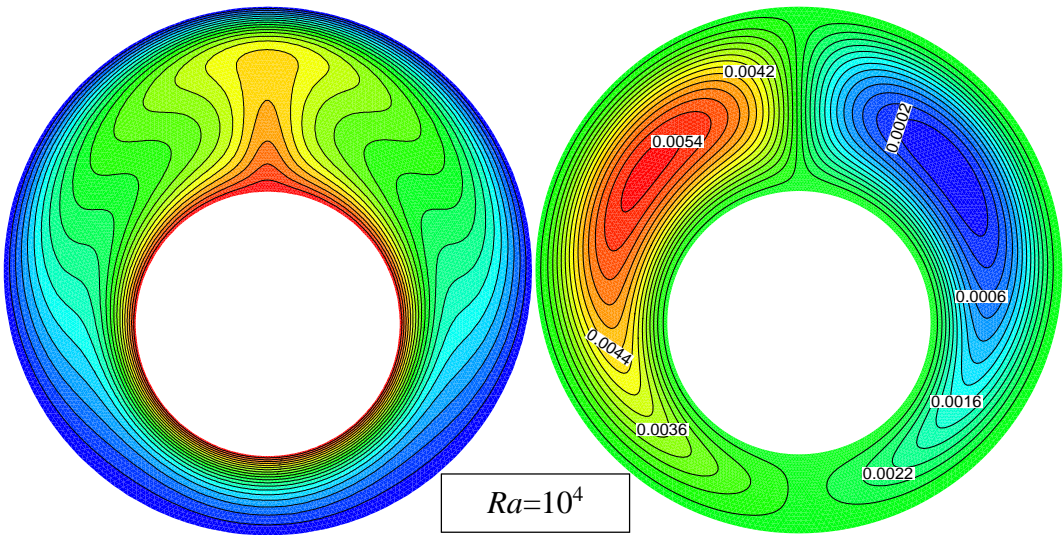
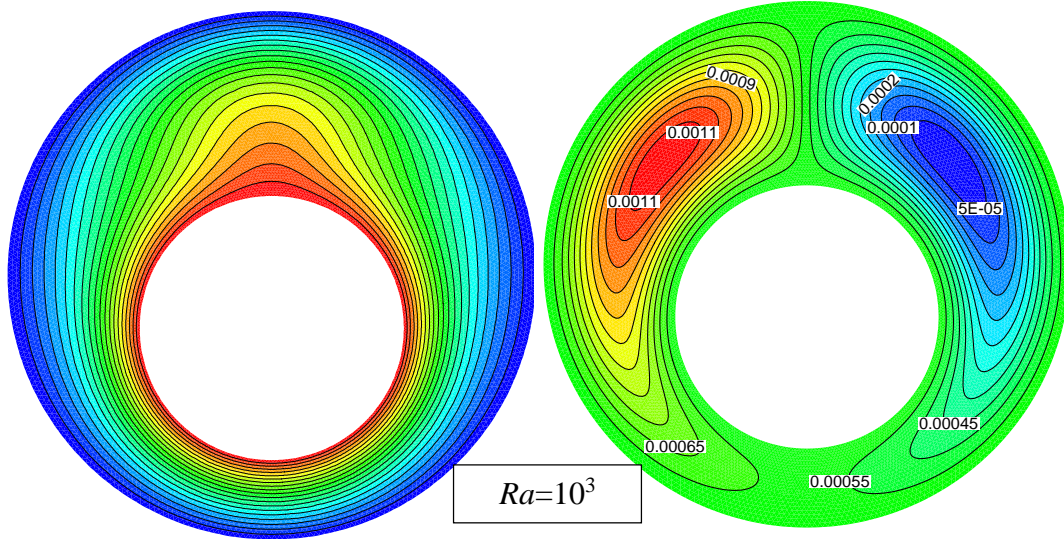


Fig. IV.4. Isothermes et lignes de courant pour différents nombres Rayleigh pour  $\dagger=0$



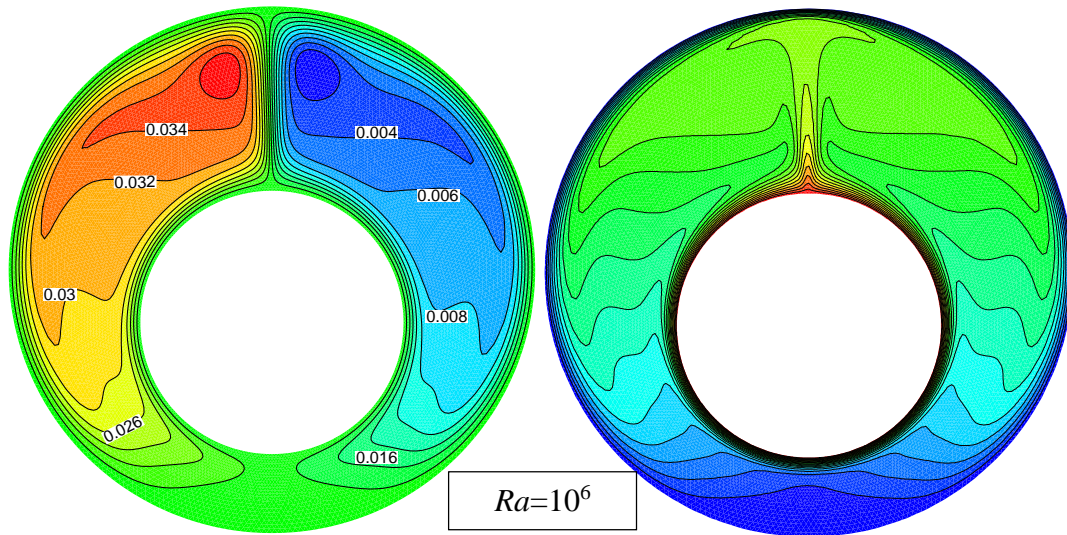
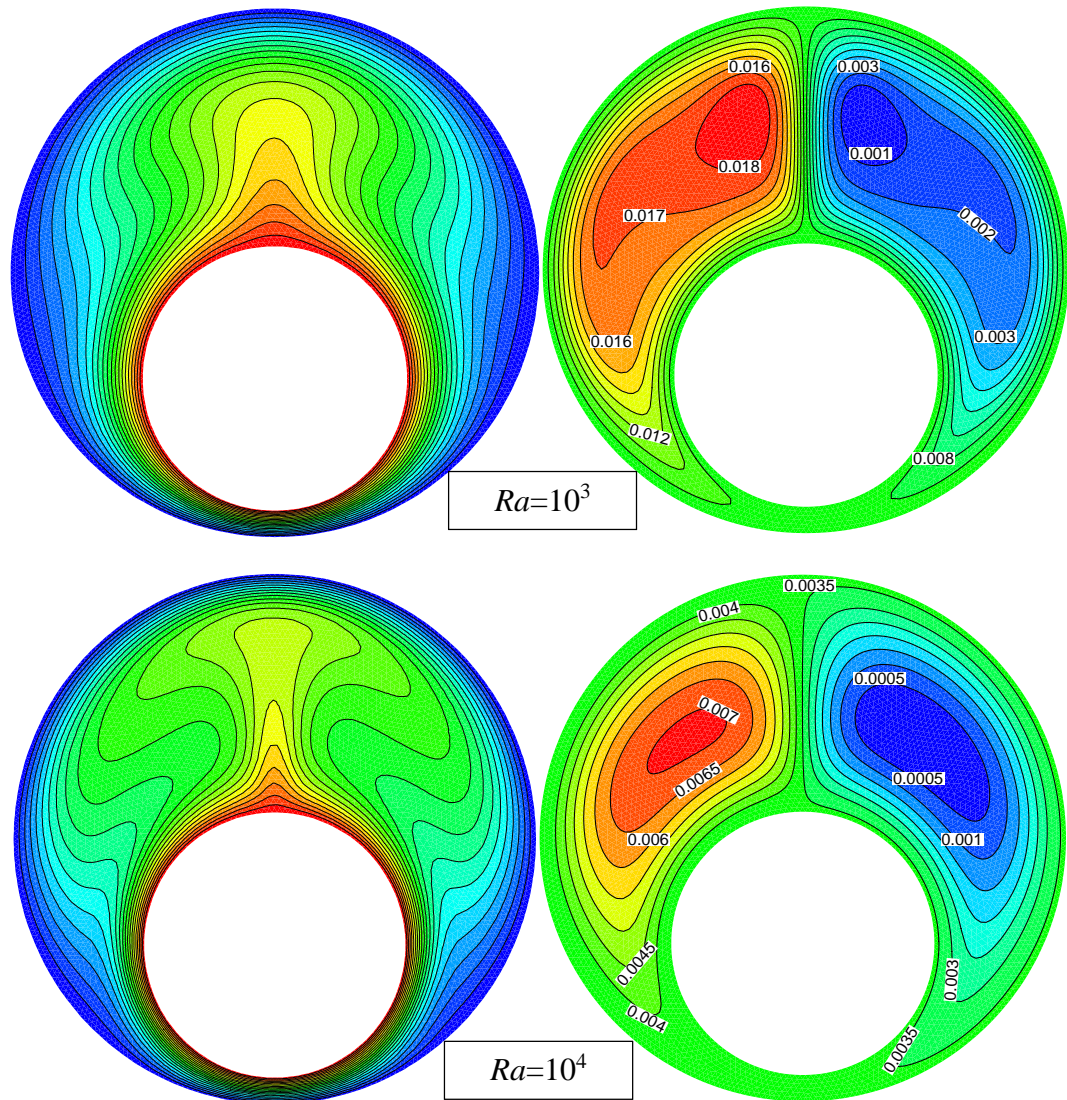
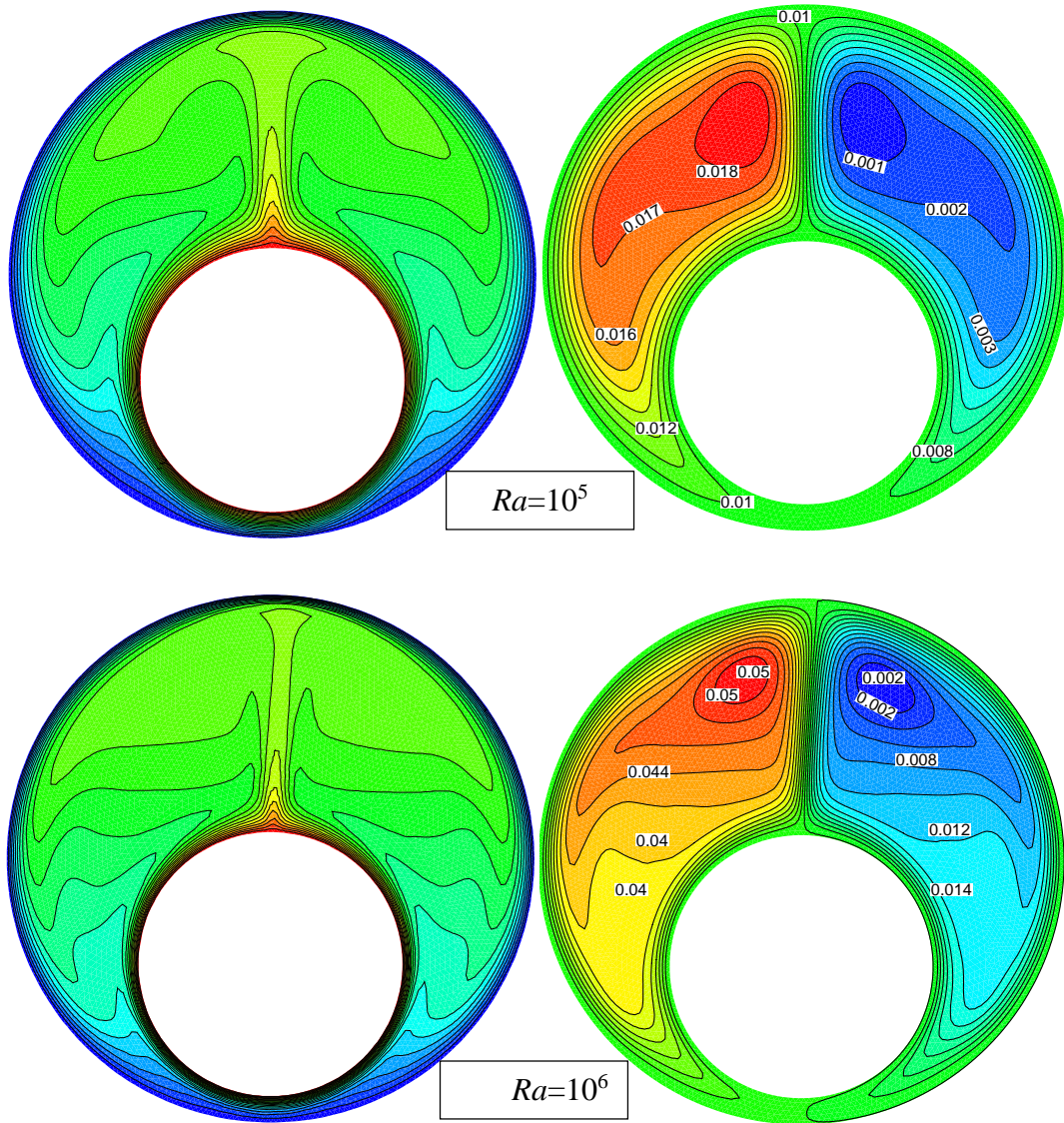


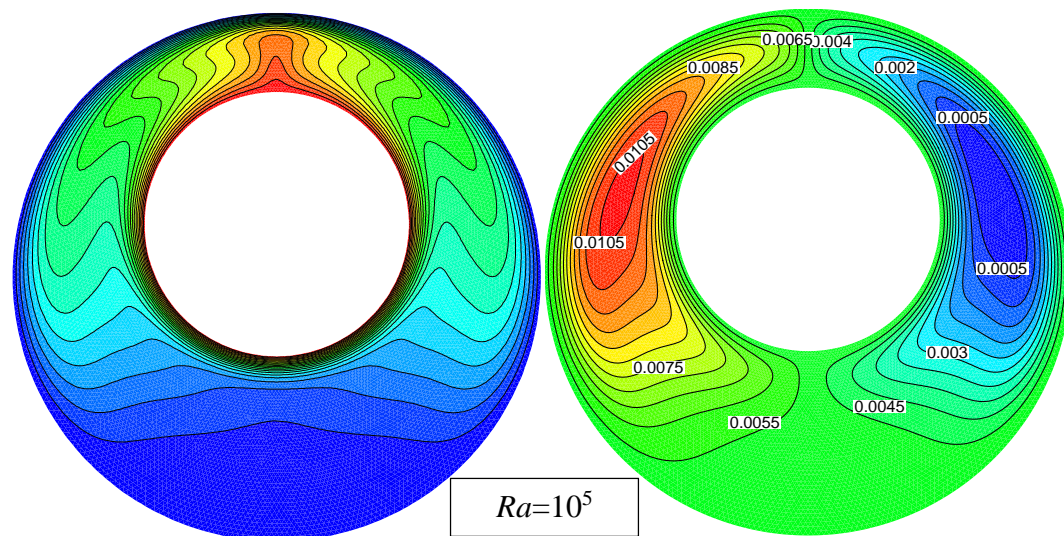
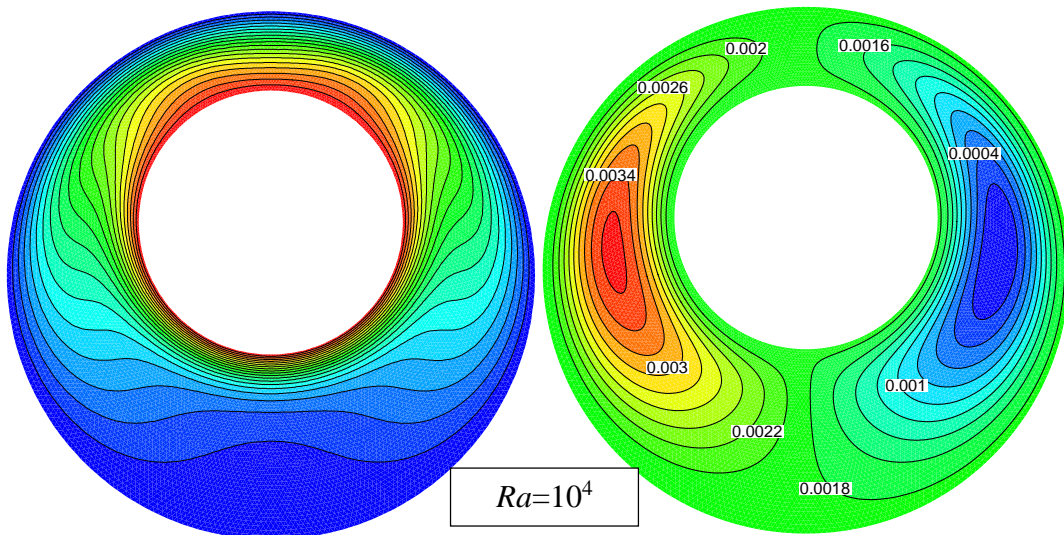
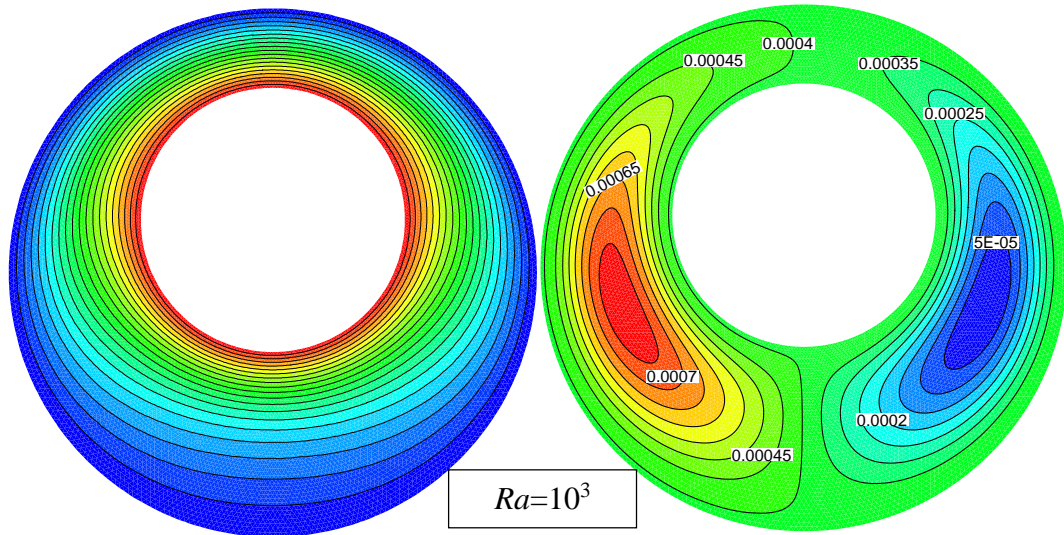
Fig. IV.5. Isothermes et lignes de courant pour différent nombres Rayleigh pour  $\dagger=0.4$  et  $r=0^\circ$

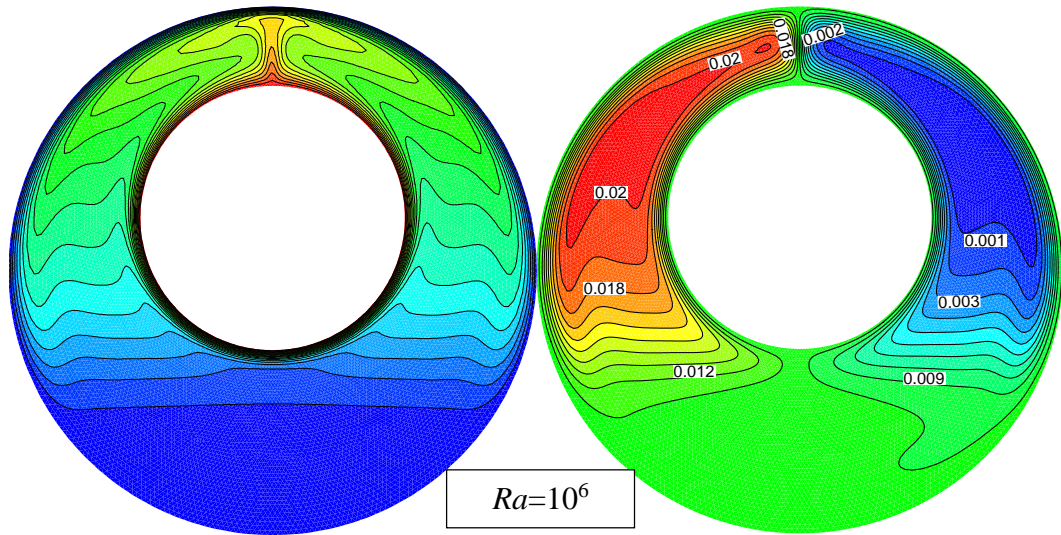




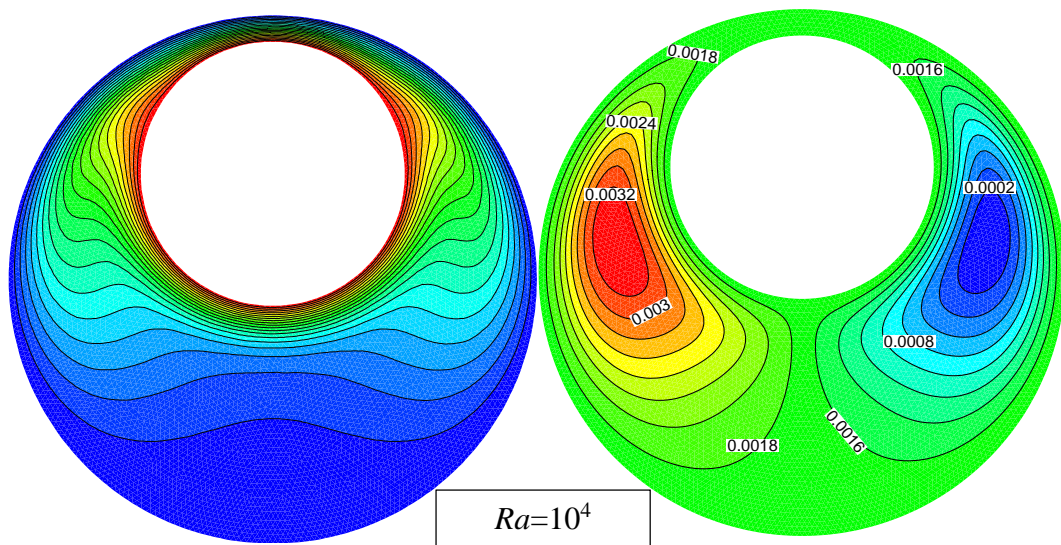
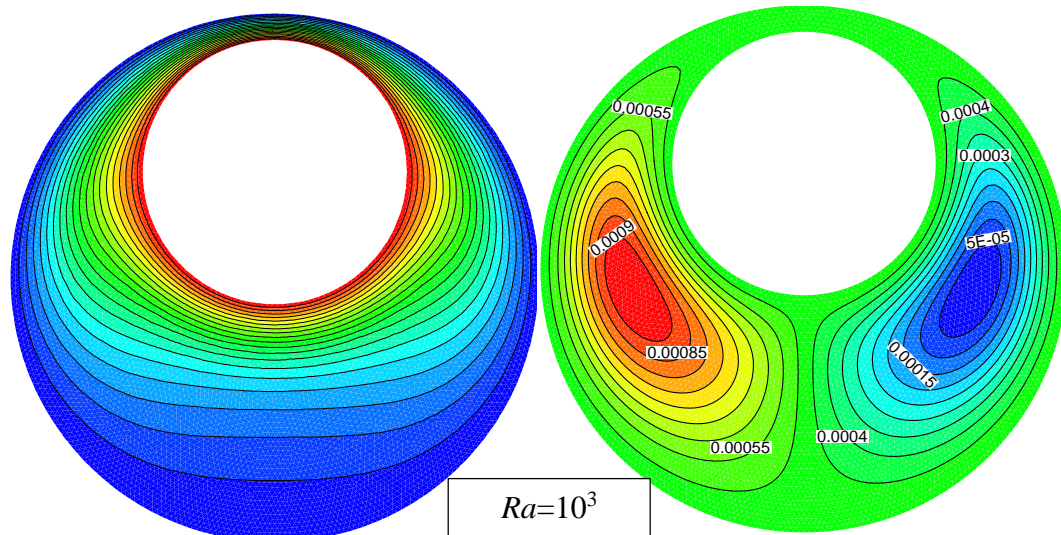


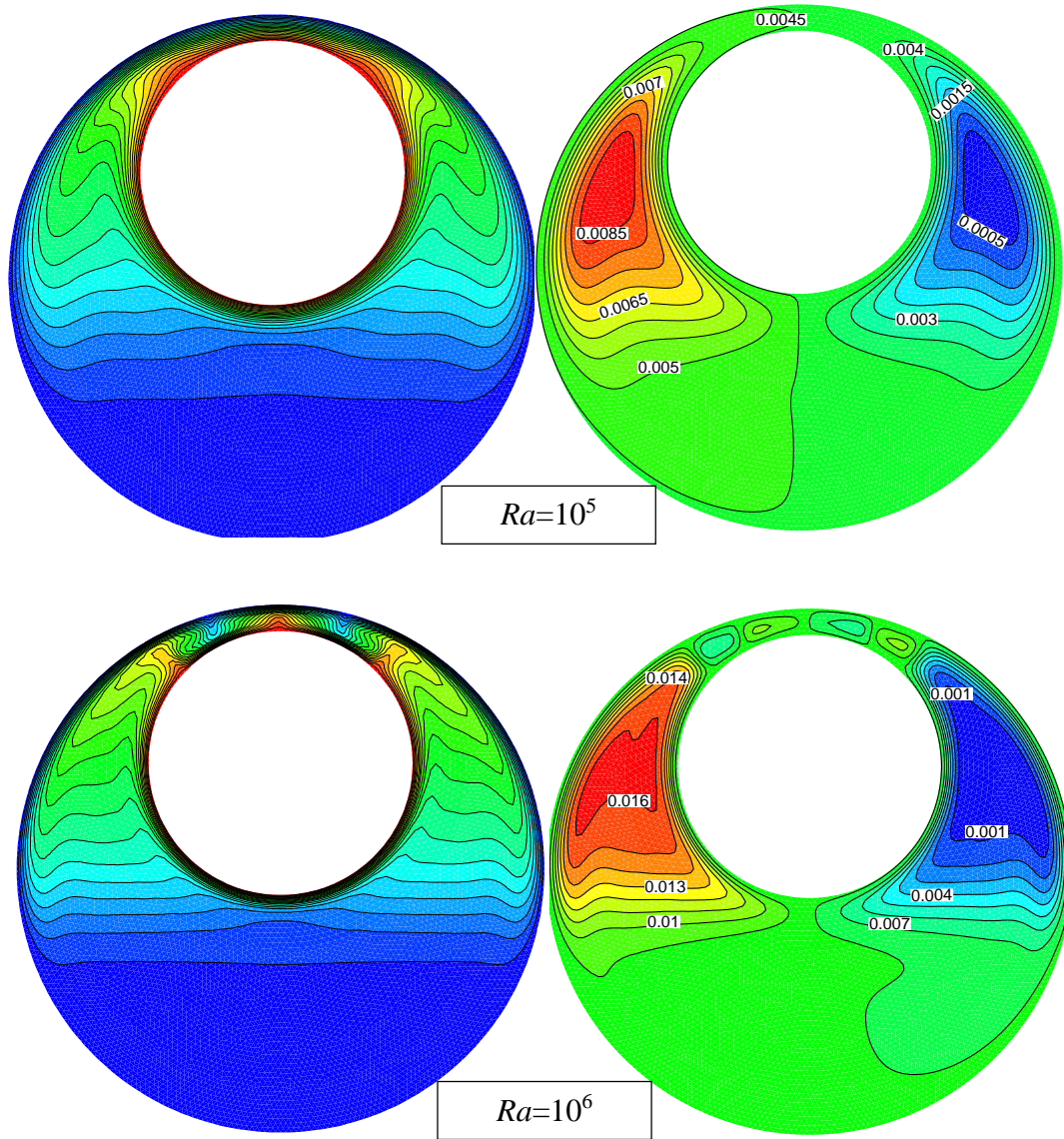
**Fig. IV.6.** Isothermes et lignes de courant pour différents nombres Rayleigh pour  $\dagger=0.8$  et  $a=0^\circ$





**Fig.IV.7.** Isothermes et lignes de courant pour différents nombres Rayleigh pour  $\tau=0.4$  et  $r=180^\circ$





**Fig. IV.8.** Isothermes et lignes de courant pour différents nombres de Rayleigh pour  $\dagger=0.8$  et  $\tau=180^\circ$

Les **figures IV.4-IV.8** représentent lignes de courant (à droite) et isothermes (à gauche) pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh  $Ra$  ( $10^3$ - $10^6$ ) et pour trois valeurs de l'excentricité relative  $\dagger = 0, 0.4$  et  $0.8$  quand  $\tau=0^\circ$  et  $\tau=180^\circ$ .

Ces figures montrent que pour tous les cas, l'écoulement s'organise en deux cellules. Du côté gauche, l'écoulement tourne dans le sens trigonométrique et du côté droit, il est de sens contraire (les particules du fluide se déplacent vers le haut sous l'action des forces de pesanteur).

Dans le cas des cylindres concentriques qui correspond  $\dagger=0$  (**Fig.IV.4**) pour les valeurs faibles de nombre de Rayleigh ( $Ra=10^3$ ), les lignes de courant du fluide dont

l'écoulement s'organise en deux cellules qui tournent très lentement dans des sens opposés. Les isothermes sont des courbes presque parallèles et épousent assez bien les profils des parois. Dans ce cas la distribution des températures est simplement décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide. On peut dire que les transferts thermiques se font par *pseudo conduction* au niveau de la paroi chauffée, car les champs des vitesses sont différents de zéro. Les valeurs de la fonction de courant qui sont données sur ces figures sont très petites. Pour  $Ra=10^4$  et  $10^5$ , les lignes isothermes se modifient sensiblement, et les valeurs de la fonction de courant mentionnées sur la même figure augmentent aussi sensiblement, ce qui traduit une transformation du transfert conductif au transfert convectif, mais il reste relativement faible. Une région de panache apparaît sur la partie supérieure du cylindre intérieur (à la position angulaire  $\theta=0$ ). Cependant la valeur  $Ra=10^6$  la **figure IV.4** montre que les lignes isothermes se modifient et finissent par adopter la forme d'un champignon. La distribution de la température est décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide. Le sens de la déformation des isothermes est conforme au sens de rotation des lignes de courant. En régime laminaire, on peut dire que, sous l'action du mouvement des particules qui décollent de la paroi chaude, les lignes isothermes se «voûtent» et s'éloignent de la paroi à cet endroit. En outre, il est observable qu'en augmentant le nombre de Rayleigh la cellule principale de fonction de courant déforme d'une forme ovale à un (profil aérodynamique) forme étendue, le centre de vortex intérieure se déplace vers le haut en raison de l'effet de flottabilité. Les valeurs des fonctions de courant augmentent ce qui signifie que la convection s'intensifie.

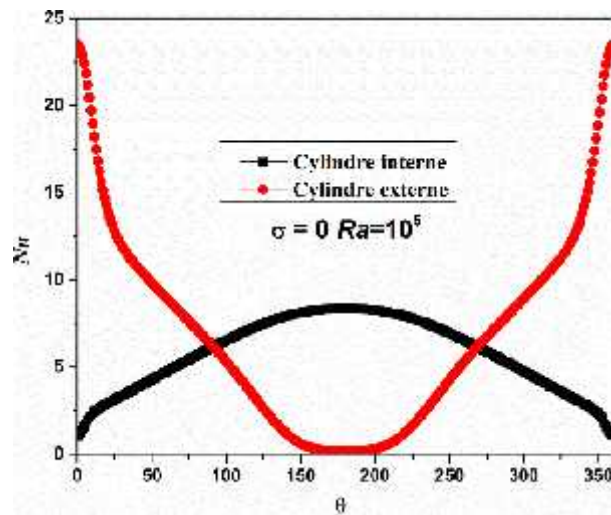
Il est intéressant de noter qu'il y a un phénomène qui se trouve généralement à la partie inférieure de l'annulaire où le flux est inerte et stable stratifié pour toutes les situations.

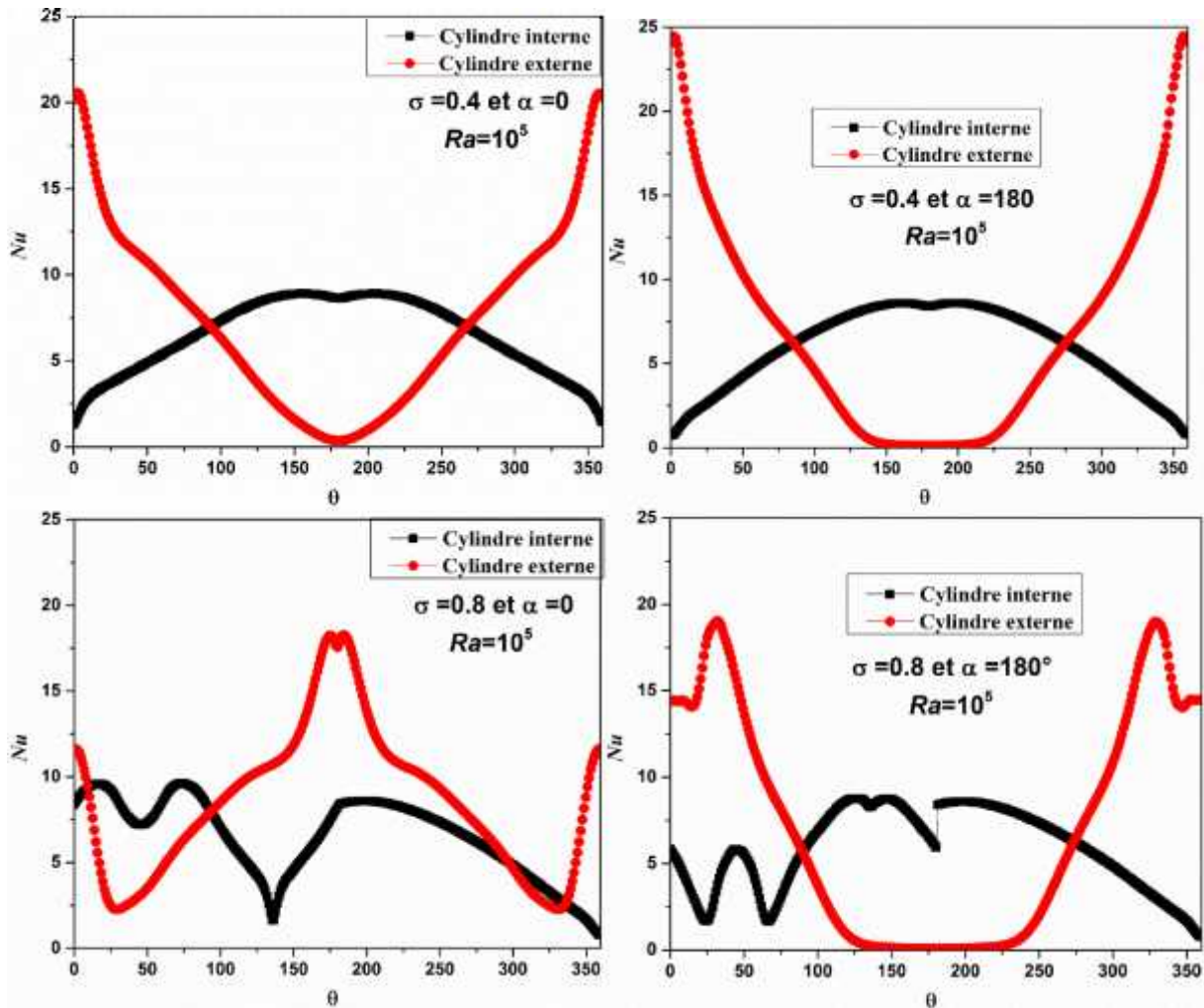
Les **figures IV.5-IV.6** présentent l'effet de l'excentricité relative sur le champ dynamique et thermique lorsque  $\alpha=0^\circ$  pour différents nombre de Rayleigh. Les figures montrent que le déplacement de cylindre intérieur vers le bas favorise le transfert de chaleur par convection naturelle. Le panache de température apparaît pour  $Ra=10^3$  et les valeurs de fonction de courant augmentent par l'augmentation de l'excentricité relative pour un même nombre de Rayleigh. C'est parce que l'espace dans la partie supérieure de l'espace annulaire entre les cylindres augmente par l'augmentation de l'excentricité ce qui favorise le mouvement libre du fluide. En outre, le rétrécissement de l'espace libre dans la partie inférieure favorise le transfert conductif entre les deux surfaces d'échange comme le montre l'allure des lignes isothermes.

L'effet de déplacement du cylindre interne vers le haut sur le champ dynamique et thermique lorsque  $\alpha=180^\circ$  pour différents nombre de Rayleigh est présenté sur les **figures IV.7-IV.8**. Nous remarquons que les valeurs de fonction de courants sont toujours inférieures à ceux pour le cas de  $\alpha=0^\circ$  pour les mêmes nombres de Rayleigh et même excentricité relative. Il est en raison que lorsque le cylindre intérieur se déplace vers le bas, l'espace pour la croissance de la région panache augmente. Dans cette situation, les forces de flottabilité vaincre les forces visqueuses et les isothermes deviennent plus perturbée. Il faut noter aussi que le déplacement de cylindre interne va augmenter la zone inerte, ce qui diminue le taux de transfert de chaleur.

#### IV.6.2. Nombre de Nusselt

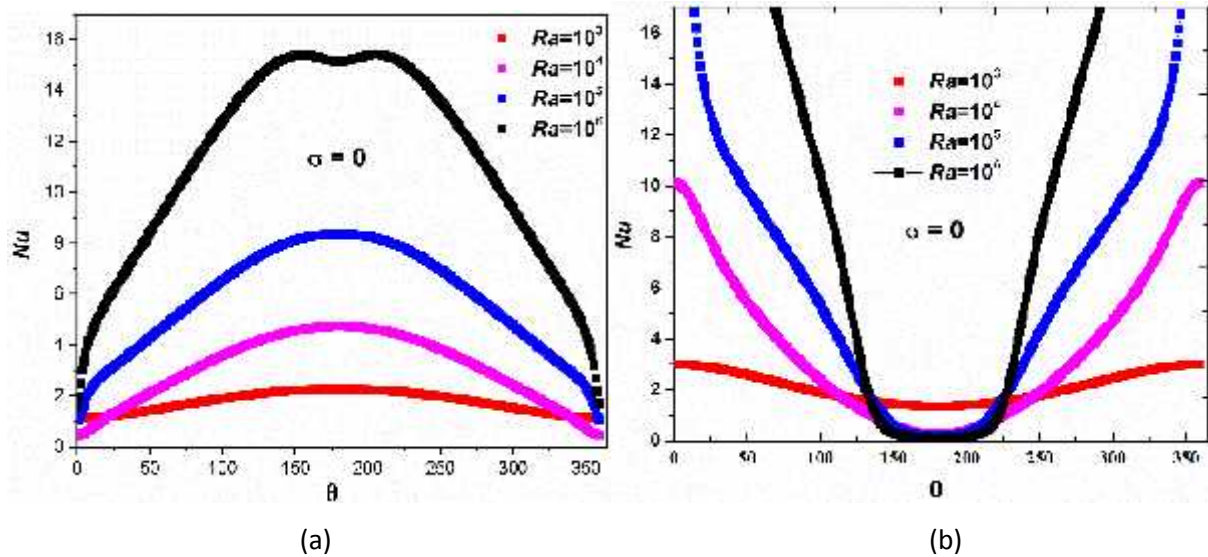
##### ❖ Nusselt local





**Fig. IV.9.** Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne et externe pour  $Ra=10^5$

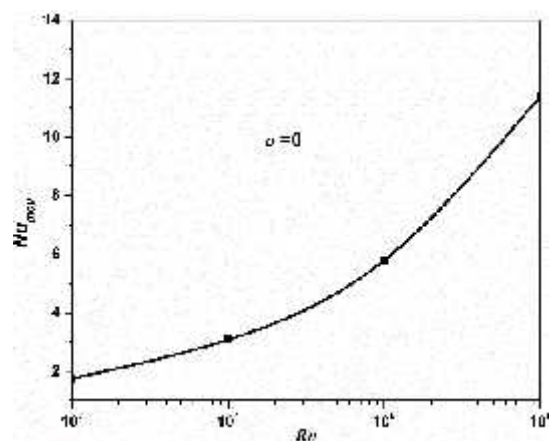
La **Figure IV.9** représente les courbes de variation des nombres de Nusselt locaux le long des parois interne et externe pour différentes valeurs de  $\dagger$  et différentes valeurs de  $\sigma$  lorsque  $Ra=10^5$ . Pour  $\dagger = 0$ , nous remarquons sur ces figures, que Nusselt sur la paroi interne est minimum dans la région de panache (à la position  $\theta=0$ ) où il y a une diminution de gradient de température sur la surface de cylindre interne et par conséquent le nombre de Nusselt diminue également. Par contre, dans la région de panache les gradients de température sur la surface de cylindre externe augmentent ce qui augmente la valeur de Nusselt local dans cette zone.



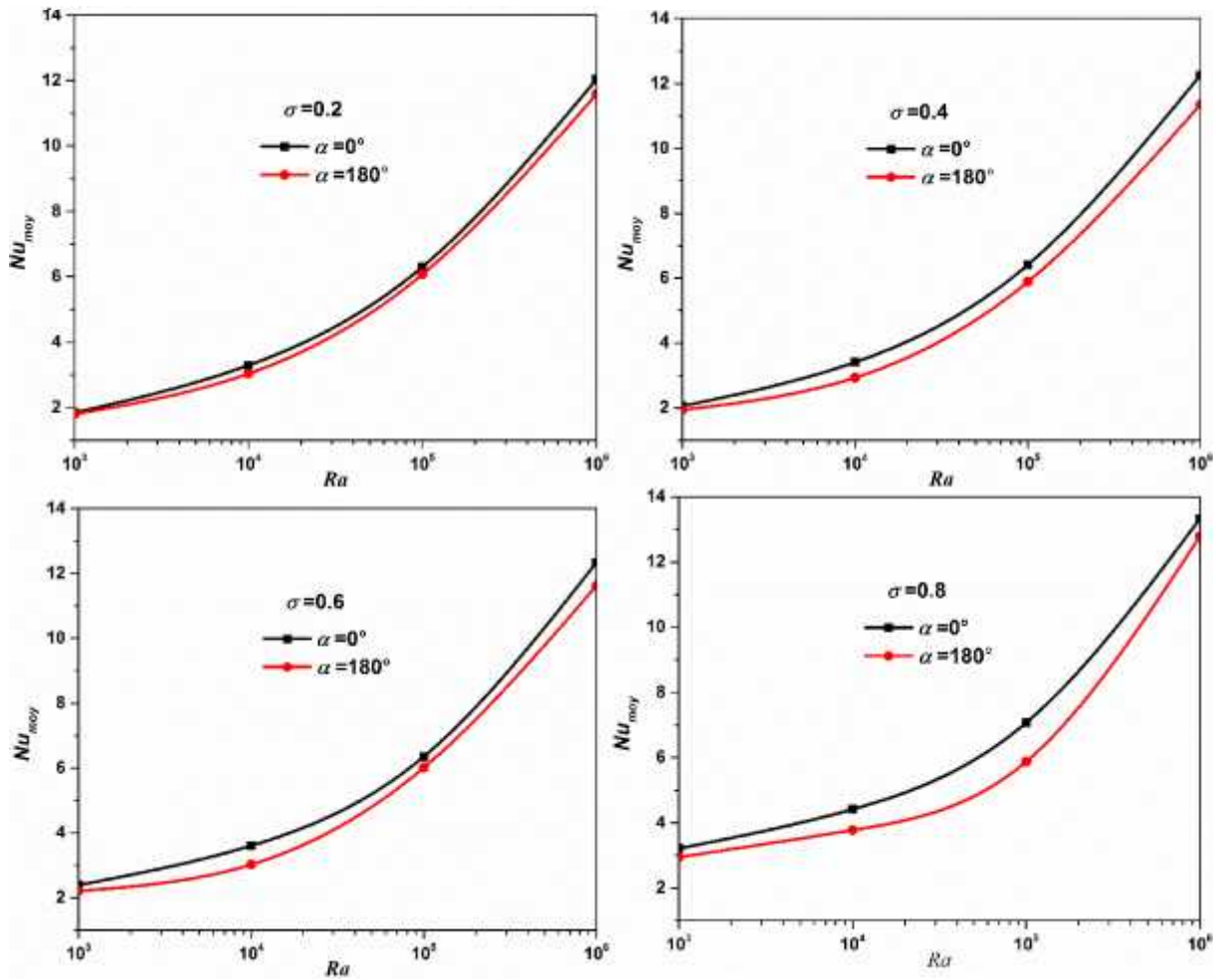
**Fig.IV.10.** Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne (a) et externe (b) pour différents nombres Rayleigh pour  $\sigma=0$

La variation du nombre de Nusselt local au long du cylindre interne et externe est représentée dans le **Figure IV.10 (a) et (b)**. Il est évident que les valeurs minimales du nombre de Nusselt local se situent à la région de panache (entre deux tourbillons contrarotatifs  $\theta=0^\circ$ ) sur la surface chauffée, tandis qu'il prend ses valeurs maximales à cette région sur la surface de cylindre externe.

❖ **Nusselt moyen**



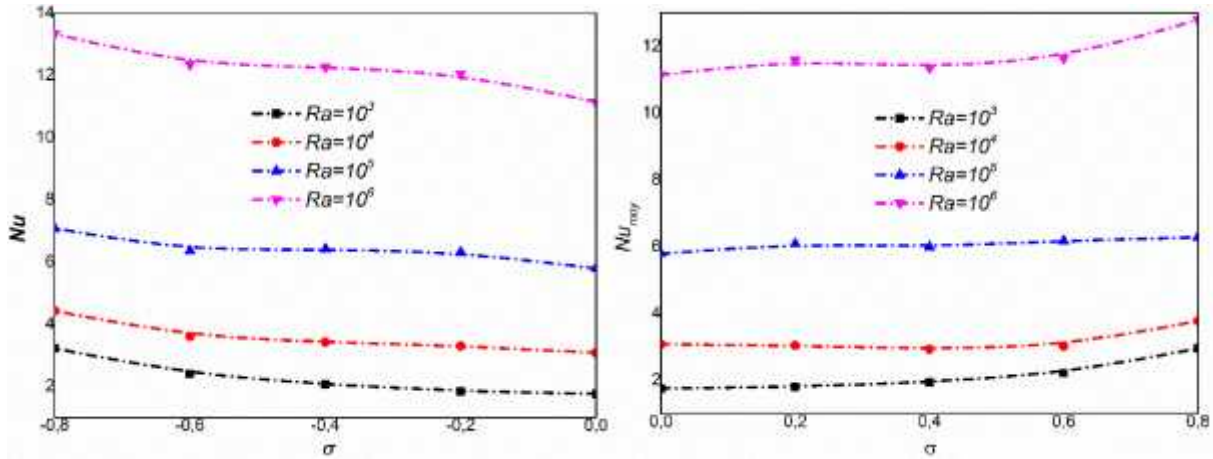




**Fig. IV.11.** Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction de nombre de Rayleigh

**Figure IV.11.** Illustre la variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction de nombre de Rayleigh. Comme il est attendu qu'il existe une relation presque linéaire entre  $Nu$  et  $Ra$ . Si  $Ra$  augmente  $Nu$  aussi augmente, qui est également en accord avec les figures précédentes. Cela est dû au fait que l'augmentation de  $Ra$  provoque l'augmentation des forces de flottabilité. On observe aussi que, pour un nombre de Rayleigh et une excentricité donnés, les valeurs de  $Nu$  pour un déplacement vers le bas ( $r=0^\circ$ ) sont toujours plus élevées comparant avec ceux pour ( $r=180^\circ$ ). Parce que, comme nous avons indiqué précédemment, pour un déplacement du cylindre vers le haut l'écart supérieur entre les cylindres devient étroite de sorte qu'il conduit à diminuer la convection de fluide à l'intérieur de l'espace annulaire et le fluide ne peut pas se déplacer librement en haut du cylindre intérieur. Bien que l'écart plus faible entre les cylindres plus la convection de fluide n'est pas très sensible parce que le gradient de température et la force de gravité sont dans la même direction (le cylindre supérieur est chaud et cylindre inférieur est froid) ici.

**Figure IV.12** montre que les valeurs maximums de Nusselt moyen présentés dans le cas où le cylindre interne se déplace vers le bas (les valeurs négatives de l'excentricité) et ces valeurs augmentent par l'augmentation du nombre de Rayleigh. Pour un déplacement du cylindre interne vers le haut (les valeurs positives de l'excentricité) l'augmentation dans Nusselt moyen devient considérable à partir  $\dagger=0.4$



**Fig. IV.12.** Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction de l'excentricité relative pour différent nombre de Rayleigh

*Conclusion*

# CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons mené une étude numérique de la convection naturelle bidimensionnelle laminaire et permanente dans un espace annulaire entre deux cylindres excentrés horizontaux, la paroi cylindrique interne étant chauffée à température chaude constante  $T_c$ , alors que la paroi cylindrique externe est refroidie isothermiquement.

En se basant sur les approximations de Boussinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement, on a développé le modèle mathématique décrivant notre problème.

On a mis également au point un modèle numérique basé sur la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations gouvernante. On a validé notre procédure de simulation numérique sous Fluent en comparant nos résultats avec ceux d'autres auteurs.

L'étude permet de déterminer les champs de températures et la distribution de la fonction de courant dans le fluide, ainsi que les nombres adimensionnels de Nusselt locaux et moyens sur les parois de l'enceinte, en fonction des grandeurs caractérisant l'état du système. L'influence du nombre de Rayleigh, de l'excentricité relative de notre espace annulaire et de l'inclinaison du système, sur l'écoulement en régime stationnaire a été notamment examinée.

Pour montrer l'influence du nombre de Rayleigh sur l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle, on a fait varier le nombre de Rayleigh de  $10^3$  jusqu'à  $10^6$ , les résultats montrent que l'augmentation du nombre Rayleigh fait accélérer l'écoulement dans la cavité et le transfert de chaleur passe du mode conductif au mode convectif pour des nombres de  $Ra$  inférieur à  $10^4$  pour les cylindres coaxiaux ( $\Gamma=0$ ). Si on fait déplacer le cylindre interne vers le bas, la convection est le régime de transfert de chaleur dominant, pour des nombres de Rayleigh inférieurs à  $10^3$  pour  $\Gamma = 0.4$  et supérieurs à  $10^4$  pour un déplacement vers le haut quand  $\Gamma = 0.4$ . La présence d'une ondulation dans la cavité fait diminuer le transfert de chaleur, et les valeurs  $\Gamma = 0.4$ . Les résultats ont montré aussi que pour un nombre de Rayleigh donné, les caractéristiques géométriques de l'enceinte étudiée influent beaucoup sur le transfert, ce dernier est donc meilleur quand on a considéré la plus grande valeur de l'excentricité relative vers le bas ( $\Gamma=0$ ).

Une suite intéressante à ce travail serait de généraliser notre étude en appliquant d'autres conditions aux frontières de notre enceinte telle qu'une température ou une densité de flux de chaleur variant périodiquement et d'examiner le transfert de chaleur correspondant à d'autres fluides tels que l'air, le dioxyde de carbone liquide...etc. et les comparer au comportement thermique de l'eau.

# *ANNEXE*

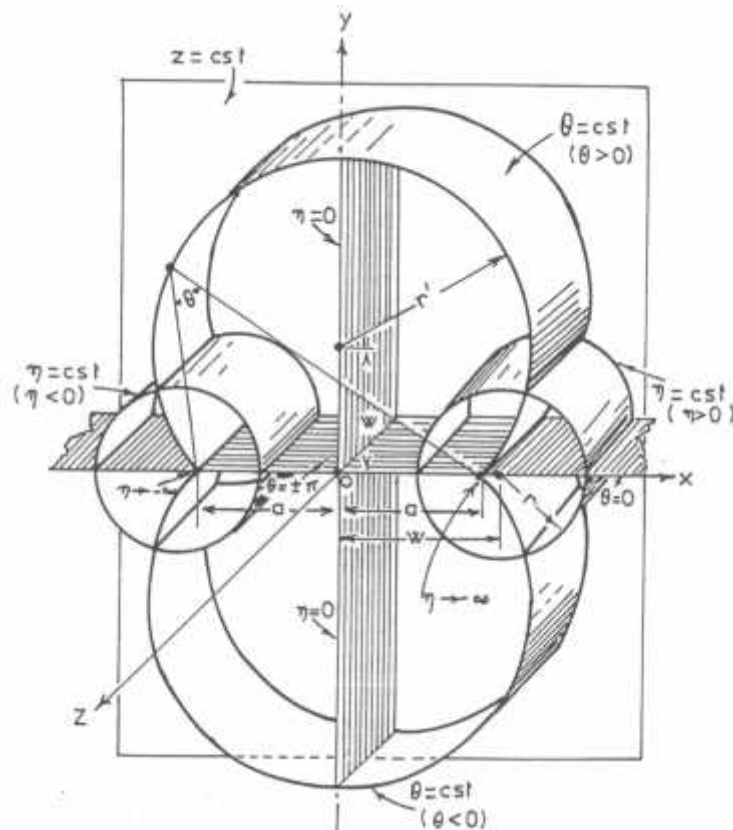
# Coordonnées Bicylindriques

## A.1 Introduction

Dans le référentiel bipolaire représenté sur la figure (A.1), nous observons dans le plan  $(xy)$  deux groupes de cercles:

- Les cylindres définies par  $u=\text{constant}$ , tracés autour des deux pôles  $x=-a$  et  $x=+a$ , centrés sur l'axe  $(x)$ .
- Les cylindres définis par  $v=\text{constant}$ , centrés sur l'axe  $(y)$ .

La translation de ces cercles parallèlement à l'axe  $(z)$  engendre une famille de cylindres. Les coordonnées  $(y, \eta, z)$  sont dites "coordonnées bicylindriques". Les surfaces  $y=\text{constantes}$  sont des cylindres dont les axes sont dans le plan  $xz$ ; Les surfaces  $\eta=\text{constantes}$  sont des cylindres avec des axes dans le plan  $yz$  et les surfaces  $z=\text{constantes}$  sont des plans parallèles.



**Figure. A.1** représentation schématique des coordonnées bicylindriques

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées bicylindriques s'effectue à l'aide des relations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \operatorname{sh}(\alpha)}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \\ y &= \frac{a \sin(\beta)}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Ces formules s'établissent comme suit, d'après la théorie des variables complexes. Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$f(z) = a \frac{e^{\bar{z}_1} + 1}{e^{\bar{z}_1} - 1}$$

avec:

$$z_1 = \alpha + i\beta$$

posons :

$$f(z_1) = x + iy$$

On peut aussi écrire cette fonction sous la forme:

$$f(z_1) = a \operatorname{coth}\left(\frac{-i}{2}\right) \quad (\text{A.2})$$

Considérons la quantité:

$$\operatorname{coth}(\alpha + i\beta) = \frac{\operatorname{ch}(\alpha + i\beta)}{\operatorname{sh}(\alpha + i\beta)} = \frac{e^{\alpha + i\beta} + e^{-\alpha - i\beta}}{e^{\alpha + i\beta} - e^{-\alpha - i\beta}}$$

En développant les termes exponentiels, nous obtenons :

$$\operatorname{coth}(\alpha + i\beta) = \frac{\operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{sh}(\alpha) + i \sin(\beta)\cos(\beta)(\operatorname{sh}^2(\alpha) - \operatorname{ch}^2(\alpha))}{\cos^2(\beta)\operatorname{sh}^2(\alpha) + \sin^2(\beta)\operatorname{ch}^2(\alpha)}$$

Comme:

$$\operatorname{ch}^2(\alpha) - \operatorname{sh}^2(\alpha) = 1$$

Et

$$\operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{sh}(\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2\alpha)$$

Il vient:

$$\operatorname{coth}(\alpha + i\beta) = \frac{0.5(\operatorname{sh}(2\alpha) - i \sin(2\beta))}{\cos^2(\beta)\operatorname{sh}^2(\alpha) + \sin^2(\beta)\operatorname{ch}^2(\alpha)}$$



Soit encore:

$$\coth(\alpha + i\beta) = \frac{\operatorname{sh}(2\alpha) - i \sin(2\beta)}{\operatorname{ch}(2\alpha) + \sin^2(\beta) - \cos^2(\beta)} \quad (\text{A.3})$$

Puisque,

$$\cos(2\beta) = \cos^2(\beta) - \sin^2(\beta)$$

La relation (A.3) se ramène à :

$$\coth(\alpha + i\beta) = \frac{\operatorname{sh}(2\alpha) - i \sin(2\beta)}{\operatorname{ch}(2\alpha) - \cos(2\beta)}$$

On en déduit:

$$\coth\left(\frac{-i}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh}(\alpha) + i \sin(\beta)}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)}$$

Introduisons cette valeur dans l'équation (A.2), il vient :

$$x + iy = a \left( \frac{\operatorname{sh}(\alpha) + i \sin(\beta)}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \right) \quad (\text{A.4})$$

L'identification de la partie réelle à  $x$  et de la partie imaginaire à  $y$  donne :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \operatorname{sh}(\alpha)}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \\ y &= \frac{a \sin(\beta)}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \end{aligned} \right\}$$

## A.2 Démonstration géométrique

A partir du système (A.1), on a :

$$\cos(\beta) = \operatorname{ch}(\alpha) - \frac{a}{x} \operatorname{sh}(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(\beta) = \frac{y}{x} \operatorname{sh}(\alpha)$$

Soit :

$$\cos^2(\beta) = \left( \operatorname{ch}(\alpha) - \frac{a}{x} \operatorname{sh}(\alpha) \right)^2 \quad \text{et} \quad \sin^2(\beta) = \left( \frac{y}{x} \operatorname{sh}(\alpha) \right)^2$$

on en déduit :

$$\left( \operatorname{ch}(\alpha) - \frac{a}{x} \operatorname{sh}(\alpha) \right)^2 + \left( \frac{y}{x} \operatorname{sh}(\alpha) \right)^2 = 1$$

Après arrangement, nous obtenons:

$$(x - a \coth(\alpha))^2 + y^2 = a^2 \coth^2(\alpha) - a^2 \quad (\text{A.5})$$

Comme :

$$a^2 \coth^2(\eta) - a^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2(\eta)}$$

L'équation (A.5) devient:

$$(x - a \coth(\eta))^2 + y^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2(\eta)} \quad (\text{A.6})$$

C'est l'équation d'une famille de cercles dont les centres sont situés à l'abscisse  $x = a \coth(\eta)$  et de rayon  $a/\operatorname{sh}(\eta)$ .

On remarque que la valeur de ce rayon tend vers l'infini lorsque  $\eta$  devient très petit. Cela signifie que la surface se réduit au plan  $yz$ .

Le centre du cercle se déplace sur l'axe ( $x$ ) lorsque  $\eta$  varie si bien qu'il est situé en  $x=a$ , lorsque  $\eta$  tend vers l'infini.

Un calcul analogue conduit à:

$$x^2 + (y - a \cot(\eta))^2 = \frac{a^2}{\sin^2(\eta)} \quad (\text{A.7})$$

Cette équation représente une famille de cercles de rayon  $a/|\sin \eta|$ , qui passe par deux point fixes (pôles) de coordonnées  $(x=+a, y=0)$  et  $(x=-a, y=0)$ .

Dans le système de coordonnées bicylindriques,  $\eta$  varie entre  $(-\infty)$  et  $(+\infty)$ . Les valeurs positives et négatives de  $\eta$  correspondent aux cercles dont les abscisses des centres sont respectivement positives et négatives.

### A.3 Coefficients métriques

En coordonnées cartésiennes, un élément de longueur s'écrit :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,  $(ds)^2$  est égal à :

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

Cet exemple nous conduit à écrire, dans le cas général :

$$(ds)^2 = h_1(du_1)^2 + h_2(du_2)^2$$

ou:

$u_1$  et  $u_2$  sont des coordonnées curvilignes; les quantités  $h_1$  et  $h_2$ , les coefficients métriques qui sont fonction, en général, des coordonnées.

En coordonnées cartésiennes, on a  $h_x = h_y = 1$  et en coordonnées bicylindriques:

$$h = h = \frac{a}{ch(\sigma) - \cos(\sigma)} \quad \text{et} \quad h_z = 1$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les transformations (A.1) et les définitions suivantes :

$$h^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2 \quad (\text{A.8})$$

$$h^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2 \quad (\text{A.9})$$

$$h_z^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2$$

(A.10)

Par suite, nous obtenons:

$$h^2 = h^2 = \frac{a^2}{(ch(\sigma) - \cos(\sigma))^2} \quad (\text{A.11})$$

$$h_z^2 = 1 \quad (\text{A.12})$$

En connaissant les coefficients métriques, on peut écrire les différentes expressions des gradients, divergences, rotationnels, etc...

$$\vec{\text{grad}} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial}{\partial \sigma} \vec{a} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \vec{a} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \vec{a}_z \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{V} &= \frac{1}{h} (ch(\sigma) - \cos(\sigma)) \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} [(ch(\sigma) - \cos(\sigma))^{-1} u] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \sigma} [(ch(\sigma) - \cos(\sigma))^{-1} v] \right\} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{rot} \vec{V} = \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \sigma} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] \vec{a} + \left[ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right] \vec{a}$$

$$+ \frac{\vec{a}_z}{h} (ch(\sigma) - \cos(\sigma)) \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{v}{ch(\sigma) - \cos(\sigma)} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{u}{ch(\sigma) - \cos(\sigma)} \right) \right] \quad (\text{A.15})$$

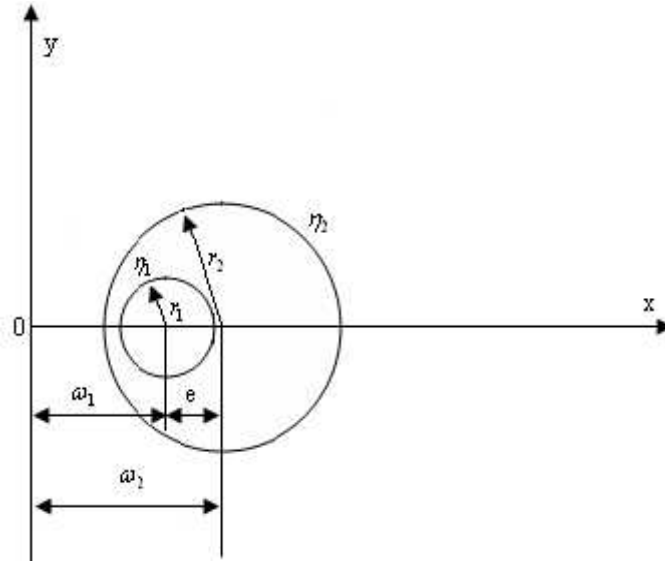
$$= \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.16})$$

Avec :

$\vec{a}, \vec{a}, \vec{a}_z$  vecteurs unitaires suivant  $\sigma, \sigma, z$ .

Exemple :

Cas de deux cylindres d'axes parallèles excentrés (voir figure A.2).



**Figure (A.2):** Représentation schématique de deux cylindres excentrés

Sur cette figure, la distance entre les deux axes est donnée par :

$$e = r_2 - r_1$$

Avec :

$$r_1 = a \coth(\eta_1)$$

$$r_2 = a \coth(\eta_2)$$

Par suite:

$$e = a (\coth(\eta_2) - \coth(\eta_1))$$

D'où :

$$e = a \left( \frac{\operatorname{ch}(\eta_2)}{\operatorname{sh}(\eta_2)} - \frac{\operatorname{ch}(\eta_1)}{\operatorname{sh}(\eta_1)} \right)$$

$$e = \frac{a \operatorname{sh}(\eta_1 - \eta_2)}{\operatorname{sh}(\eta_2) \cdot \operatorname{sh}(\eta_1)}$$

On en déduit :

$$e = r_1 \frac{\operatorname{sh}(\eta_1 - \eta_2)}{\operatorname{sh}(\eta_2)} = r_2 \frac{\operatorname{sh}(\eta_1 - \eta_2)}{\operatorname{sh}(\eta_1)}$$

Soit encore :

$$\frac{e}{r_1} = \frac{\operatorname{sh}(\eta_1 - \eta_2)}{\operatorname{sh}(\eta_2)} = C_2 = \text{constante} \quad \text{et} \quad \frac{e}{r_2} = \frac{\operatorname{sh}(\eta_1 - \eta_2)}{\operatorname{sh}(\eta_1)} = C_2' = \text{constante} \quad (\text{A.17})$$

La constante  $a$  est reliée aux rayons  $r_1$  et  $r_2$  par la relation :

$$a = r_1 \operatorname{sh}(\alpha_1) = r_2 \operatorname{sh}(\alpha_2)$$

D'où :

$$\frac{\operatorname{sh}(\alpha_1)}{\operatorname{sh}(\alpha_2)} = \frac{r_2}{r_1} = C_1 = \text{constante} \quad (\text{A.18})$$

Connaissant les valeurs de  $C_2$  et  $C_1$  figurant dans les équations (A.17) et (A.18), on peut déterminer facilement les valeurs de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  à l'aide des relations suivantes :

$$\alpha_1 = \ln \left[ C_1^2 - C_2^2 - 1 + \sqrt{(C_1^2 - C_2^2 + 1 - 2C_1)(C_1^2 - C_2^2 + 1 + 2C_1)} \right] - \ln(2C_2) \quad (\text{A.19})$$

$$\alpha_2 = \ln \left[ C_1^2 + C_2^2 - 1 + \sqrt{(C_1^2 - C_2^2 + 1 - 2C_1)(C_1^2 - C_2^2 + 1 + 2C_1)} \right] - \ln(2C_1 \cdot C_2) \quad (\text{A.20})$$

#### A.4 Formulation des équations de continuité, de la chaleur et du mouvement dans le système de coordonnées bicylindriques

##### A.4.1 Equation de continuité

En coordonnées curvilignes orthogonales, la divergence du vecteur  $\vec{v}$  est donnée par:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 V_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 V_3) \right] \quad (\text{A.22})$$

Avec:

$x_1, x_2, x_3$  : coordonnées curvilignes.

$h_1, h_2, h_3$  : coefficient métriques suivant  $x_1, x_2, x_3$ .

$v_1, v_2, v_3$  : composantes de vitesses  $x_1, x_2, x_3$ .

Puisqu'en coordonnées bicylindriques, nous avons:

$$h_1 = h$$

$$h_2 = h$$

$$h_3 = 1$$

Alors la relation (A.22) devient :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h v_2) \right] \quad (\text{A.23})$$

Ainsi  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ , se traduit par:

$$\frac{\partial}{\partial} (hV) + \frac{\partial}{\partial} (hV) = 0 \quad (\text{A.24})$$

#### A.4.2 Equation de la chaleur

L'équation (2.6) peut se mettre sous la forme :

$$\vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} = \frac{1}{cp} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}) \quad (\text{A.25})$$

Compte tenu de l'expression du gradient donnée par la relation (A.13), le premier membre de (A.25) donne

$$\left( \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} \right) = \frac{V}{h} \frac{\partial}{\partial} + \frac{V}{h} \frac{\partial}{\partial} \quad (\text{A.25.a})$$

Des relations (A.13) et (A.23), nous déduisons :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}) = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2} \right] \quad (\text{A.25.b})$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{V}{h} \frac{\partial}{\partial} + \frac{V}{h} \frac{\partial}{\partial} = \frac{1}{cp} \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2} \right] \quad (\text{A.26})$$

#### A.4.3 Equation du mouvement

Réécrivons l'équation (2.8) sous la forme suivante :

$$\vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} = g \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \cos(\ ) - \frac{\partial}{\partial y} \sin(\ ) \right) + \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}) \quad (\text{A.27})$$

Nous expliciterons tout d'abord l'expression suivante :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \cos(\ ) - \frac{\partial}{\partial y} \sin(\ ) \right) \quad (\text{A.27.a})$$

En fonction de et .

D'après la relation (A.1), nous pouvons écrire :

$$dx = \frac{a(1 - \cos(\ ))ch(\ )}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} d + \frac{a \sin(\ )sh(\ )}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} d \quad (\text{A.28.a})$$

et

$$dx = -\frac{a(1 - \cos(\ ))ch(\ )}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} d - \frac{a \sin(\ )sh(\ )}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} d \quad (\text{A.28.b})$$

A partir de ces valeurs nous déterminons les valeurs de  $d$  et  $d$  :

$$d = \frac{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2}{a^2} \left[ \frac{a(1 - \cos(\ )ch(\ ))}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} dx - \frac{a \sin(\ )sh(\ )}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} dy \right] \quad (\text{A.28.c})$$

$$d = -\frac{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2}{a^2} \left[ \frac{a(1 - \cos(\ )ch(\ ))}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} dy + \frac{a \sin(\ )sh(\ )}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} dx \right] \quad (\text{A.28.d})$$

Par suite on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2}{a^2} \left[ \frac{a(1 - \cos(\ )ch(\ ))}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2}{a^2} \left[ -\frac{a \sin(\ )sh(\ )}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.29.a})$$

Nous remarquons que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.29.b})$$

Comme les dérivées partielles de T par rapport à x et y sont définies par :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{A.30.a})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{A.30.b})$$

alors, en utilisant les relations (A.30.a), (A.31.a) et (A.31.c) nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2}{a^2} \left[ \frac{a(1 - \cos(\ )ch(\ ))}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} \frac{\partial}{\partial} - \frac{a \sin(\ )sh(\ )}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} \frac{\partial}{\partial} \right] \quad (\text{A.31.a})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2}{a^2} \left[ -\frac{a \sin(\ )sh(\ )}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} \frac{\partial}{\partial} - \frac{a(1 - \cos(\ )ch(\ ))}{(ch(\ ) - \cos(\ ))^2} \frac{\partial}{\partial} \right] \quad (\text{A.31.b})$$

En portant ces valeurs dans l'expression (A.27.a), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \cos(\ ) - \frac{\partial}{\partial y} \sin(\ ) &= \frac{(ch(\ ) - \cos(\ ))}{a} \left\{ [F(\ , \ ) \cos(\ ) + G(\ , \ ) \sin(\ )] \frac{\partial}{\partial} \right. \\ &\quad \left. + [F(\ , \ ) \sin(\ ) - G(\ , \ ) \cos(\ )] \frac{\partial}{\partial} \right\} \quad (\text{A.32}) \end{aligned}$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} F(\theta, \varphi) &= \frac{a(1 - \cos(\theta) \operatorname{ch}(\varphi))}{(\operatorname{ch}(\varphi) - \cos(\theta))} \\ G(\theta, \varphi) &= \frac{a \sin(\theta) \operatorname{sh}(\varphi)}{(\operatorname{ch}(\varphi) - \cos(\theta))} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.33})$$

Finalement, l'équation du mouvement (A.29) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{V}{h} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{V}{h} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{g}{h} \left\{ [F(\theta, \varphi) \cos(\theta) + G(\theta, \varphi) \sin(\theta)] \frac{\partial}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + [F(\theta, \varphi) \sin(\theta) - G(\theta, \varphi) \cos(\theta)] \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} + \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$



*Références  
Bibliographiques*

## Références Bibliographiques

- [1] H. Bénard. « Les Tourbillons cellulaires dans une nappe Liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent ». Ann. Chim. Phys. 7 (Ser. 23): pp.62-79 (1901).
- [2] L. Rayleigh. « On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the underside ». Phil. Mag. 32: pp.529-538 (1916).
- [3] G de Vahl Davis. « Natural convection of air in a square cavity »: a bench mark solution. Int. J. Numer. Methods Fluids, vol. 3, pp. 249-264 (1983).
- [4]. K. Shigeo, A. Bejan. "Experimental study of natural convection in a cavity rectangular with different end temperatures". Int. J. Heat Mass Transfer, 23, 1117-1126. (1980).
- [5] M. November, M.W. Nansteel "Natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled along one side". Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30 No. 11, pp. 2433-40. (1987).
- [6] O. Aydin, W. Yang. "Natural convection in enclosures with localized heating from below and symmetrical cooling from sides". Int. J. Numerical methods for heat & Fluid flow, vol. 10 No.5, pp. 518 – 529. (2000).
- [7] I.E. Sarris, I. Lekakis, N.S. Vlachos. "Natural convection in rectangular tanks heated locally from below". Int. J. Heat and Mass Transfer, 47, 3549–3563. (2004).
- [8] M. Bourich, M. Hasnaoui, A. Amahmid. "Double-diffusive natural convection in a porous enclosure partially heated from below and differentially salted". Int. J. Heat Fluid Flow 25 (6), 1034–1046. (2004).
- [9] M.A.R. Sharif, T.R. Mohammad. "Natural convection in cavities with constant flux heating at the bottom wall and isothermal cooling from the sidewalls". Int. J. Thermal Sci. 44, 865–878. (2005).
- [10] A. Sharma, K. Velusamy, C. Balaji. "Turbulent natural convection in an enclosure with localized heating from below". Int. J. Thermal sciences, 46, 1232 – 1241. (2007).
- [11] - J. H. Lee, Contribution à l'étude de la convection naturelle thermique en régime laminaire transitoire dans un récipient cylindrique vertical partiellement rempli d'un fluide Newtonien, Thèse d'état, Université de Perpignan (1984).
- [12] T. Sakurai. T. Matsuda, A temperature adjustment process in a Boussinesq fluid via a buoyancy-induced meridional circulation, J. Fluid Mech. vol. 54, pp. 417- 421 (1972).

- [13] M. C. Jischke, R. T. Doty, Linearized buoyant motion in a closed container, *J. Fluid Mech.* vol. 71. pp. 729-754 (1975).
- [14] J. M. Hyun, Transient process of thermally stratifying an initially homogeneous fluid in an enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 27. pp. 1936-1938 (1984).
- [15] Y. S. Lin, R. G. Akins. Thermal description of pseudo-steady' state natural convection inside a vertical cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 29. n°. 2, pp. 301-307 (1986).
- [16] R. G. Akins, Y. S. Lin, Transient behaviour of natural convection inside a vertical cylinder, *Chem. Eng. Corn.*, vol. 43, pp. 69-83 (1986).
- [17] B. J. Tyler, A. F. Tuck, Heat transfer to a gas from a spherical enclosure : measurements and mechanism , *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 10, n°. 2, pp. 251- 253 (1967).
- [18] Y. Mochimaru, Transient natural convection heat transfer in a spherical cavity, *Heat Transfer. Japanese Research*, vol. 18, n°. 4, pp. 9-19 (1989).
- [19] W. C. Schreiber, and S. N. SINGH, Natural convection between confocal horizontal elliptical cylinders, *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, 28, pp. 807-822. (1985).
- [20] M. Djezzar, M. Daguinet, Contribution à l'étude de la convection dans différents espaces annulaires, soumis à différentes conditions de chauffage. Thèse de Doctorat d'état, Université Mentouri Constantine (2005)
- [21] M. Djezzar, M. Daguinet, Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts. 1ST International Conference on Thermal Engineering Theory and Applications. Beirut-Lebanon, du 31 Mai au 04 Juin 2004. 75
- [22] M. Djezzar, A. Chaker, and M. Daguinet, Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts. Influence of internal eccentricity. *Revue des Energies Renouvelables*, Volume 8, Numéro 1, Juin 2005.
- [23] M. Djezzar, M. Daguinet, Natural steady convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts. Influence of the slope angle. *Journal of Applied Mechanics Transaction of the ASME*, Volume 72, Janvier 2006.
- [24] W. Beckmann, Die wärmeübertragung in zylindrischen gasschichten bei natürlicher konvektion, *Forsch. Geb. Ingenieurwesen*. vol. 2, pp.165-178 (1931)
- [25] E. R. G. Eckert. E. E. Soehgen, Study on heat transfer in laminar free convection with the Mach-Zehnder interferometer, Wright-Patterson AFB Tech.. Rep. n0. 5747, ATI-44580 (1948).
- [26] U. Grigull. W. Hauf, Natural convection in horizontal cylindrical annuli, *Proc. Third International Heat Transfer Conference*, vol. 2. pp. 182-195, (1966).

- [27] R. E. Powe, C. T. Carley, E. H. Bishop. Free convective flow patterns in cylindrical annuli, *J. Heat Transfer*, vol. 91, pp. 310-314 (1969).
- [28] T. H. Kuehn, R. J. Goldstein, An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal cylinders, *J. Fluid Mech.*, vol. 74, pp. 695-719 (1976).
- [29] T. H. Kuehn, R. J. Goldstein. Correlating equations for natural convection heat transfer between horizontal circular cylinders, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 19. pp. 1127-1134 (1976).
- [30] T. H. Kuehn, R. J. Goldstein. An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli, *ASME J. Heat Transfer*, vol. 100. pp. 635-640 (1978).
- [31] U. Projahn. H. Reiger, H. Beer, Numerical analysis of laminar convection between concentric and eccentric cylinders, *Numer. Heat Transfer*, vol. 4. pp. 131- 146 (1981).
- [32] U. Projahn, H. Beer. Prandtl Number effects on natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli, *Wärme-und Stoffübertragung*. vol. 19. pp. 249-254 (1985).
- [33] D. B. Fant. J. Prusa, A. P. Rothmayer, Unsteady multicellular natural convection in a narrow horizontal cylindrical annulus, *ASME J. Heat Transfer*. vol. 112, pp. 379 - 387 (1989).
- [34] D. Naylor, H. M. Badr, J. D. Tarasuk, Experimental and numerical study of natural convection between two eccentric tubes, *Int. J. Heat Mass Transfer*. vol. 32, pp. 171-181 (1989).
- [35] Y. F. Rao, Y. Miki, K. Fukuda, Y. Takata, S. Hasegawa, Flow patterns of natural convection in horizontal cylindrical annuli, *int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 28, pp. 705- 714 (1985).
- [36] H. H. Bau, Low Rayleigh number thermal convection in a saturated porous medium bounded by two horizontal, eccentric cylinders, *ASME J. Heat Transfert*, vol. 106, pp. 166-175 (1984 ). 73
- [37] K. Himashekar, H. H. Bau, Two-dimensional bifurcation phenomena in thermal convection in horizontal concentric annuli containing saturated porous media, *J. Fluid Mech.*, vol. 187, pp. 267-300 (1988).
- [38] J. Prusa, L. S. Yao, Natural convective heat transfer between eccentric horizontal cylinders, *ASME J. Heat Transfer*, vol. 105. pp. 108-116 (1983).
- [39] T. H. Kuehn, R. J. Goldstein, A parametric study of Prandtl number and diameter ratio effects on natural convection heat transfer in horizontal cylindrical annuli *ASME J. Heat Transfer*. vol. 102.pp.768-770 (1980).

- [40] L. R. Mack, E. H. Bishop, Natural convection between horizontal concentric cylinders for low Rayleigh numbers, *Quart. Journ. Mech. and applied Math.*, vol. 21, n°. 2. pp.223-241 (1968).
- [41] J. Huetz, J. P. Petit, Natural and mixed convection in concentric annular spaces : experimental and theoretical results for liquid metals, *Proc. of the 5th Int. Conf., Tokyo*. pp. 169-172 (1974).
- [42] C. Y. Liu, W. K. Mueller, F. Landis, Natural convection heat transfer in long horizontal cylindrical annuli, *International Developments in Heat Transfer, Part. 5*, pp. 976-984 (1961).
- [43] E. H. Bishop, C. T. Carley. Photographic studies of natural convection between concentric cylinders. In *Proceeding of the 1966 Heat Transfer and Fluid Mechanics institute*, pp. 63-78, Stanford University Press, Stanford (1966).
- [44] L. Crawford. R. Lemfich, Natural convection in horizontal concentric cylindrical annuli, *I. and E. C. Fundamentals*, vol. 4, pp. 260-264 (1962).
- [45] R. E. Powe, C. T. Carfey, S. L. Carruth, A numerical solution for natural convection in cylindrical annuli, *ASME J. Heat Transfer*, vol. 92, pp. 210-220 (1971).
- [46] M. R. Abbot, A numerical method for solving equations of natural convection in a narrow concentric cylindrical annulus with a horizontal axis, *Quart. J. Mech. And Applied Math.*, vol. 17, pp. 471-481 (1964).
- [47] A. Cheddadi, Bifurcation et transitions thermoconvectives bidimensionnelles et tridimensionnelles en géométrie annulaire. Thèse d'état, EMI, Rabat (1993).
- [48] R. Kumar, Study of natural convection in horizontal annuli, *Int. J. Heat Mass Transfer*. vol. 31. pp. 1137-1148 (1988).
- [49] E. H. Bishop, R. S. Kolfiat. L R. Mack, J. A. Scanlan, Photographic studies of convection patterns between concentric spheres, *Soc. Photo. Opt. Instrum. Eng. J.*, vol. 3, pp. 47-49. (1964-1965).
- [50] E. H. Bishop, R. S. Kolfiat, L. R. Mack, J. A. Scanlan, Convective heat transfer between concentric spheres, In *Proceeding of the 1964 Heat Transfert and Fluid Mechanics institute*, pp.69-80, Stanford University Press, Stanford (1964).
- [51] E. H. Bishop, L. R. Mack. J. A. Scanlan, Heat transfer by natural convection between concentric spheres, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 9, pp. 649-662 (1966).
- [52] S. N. Singh, J. M. Elliott. Natural convection between concentric spheres in a slightly-thermally stratified médium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 24. pp. 395-406 (1981).
- [53] Help FLUENT

[54] H. K. Versteeg, and W Malalasekra. An introduction to computational fluid dynamics. Essex : Longman Scientific & Technical, 257 p. (ISBN 0 58221884 5), 1995.

[55] S. V. Patankar. Numerical Heat transfer and Fluid Flow. McGraw-Hill Book Company, 1980.

[56] E. Abu-Nada, Z. Masoud, and A. Hijazi, Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids. International Communications in Heat and Mass Transfer. 35, 657-665 (2008).

## Résumé

Dans la présente étude numérique, l'étude numérique du phénomène de la convection naturelle, en régime laminaire et permanent, dans une cavité annulaire orientée d'un angle  $\theta$ , délimité par deux cylindres horizontaux. Cette dernière est remplie par un fluide newtonien et incompressible. Le nombre de Prandtl est fixé à 6.21 (cas de l'eau) mais le nombre de Rayleigh varie. En utilisant l'approximation de Boussinesq et la formulation vorticité fonction de courant, l'écoulement est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles: les équations de continuité et des quantités de mouvement sont exprimées dans un système de coordonnées dites "bi-cylindrique", pour faciliter l'écriture des conditions aux limites et transformer le domaine curviligne en un domaine rectangulaire. Pour les conditions de chauffage, ils supposent, dans un premier cas, les deux parois elliptiques de l'enceinte isothermes,  $T_c$  pour la paroi interne et  $T_f$  pour la paroi externe, avec  $T_c > T_f$ . La simulation numérique de ce problème a été faite sous le code de calcul FLUENT.

Les résultats numériques obtenus, ont été représentés sous forme de lignes de courants, champs de température, nombre de Nusselt local et moyen sur les surfaces des cylindres interne et externe. Les résultats obtenus montrent que l'écoulement et le transfert de chaleur est affecté par le déplacement vertical du cylindre interne. Les cylindres concentriques est favorables pour des nombre de Rayleigh inférieur à  $10^3$  tandis que le déplacement du cylindre interne vers le bas est donne le meilleur échange de chaleur entre les deux surfaces pour des nombres de Rayleigh élevés.

L'étude met en lumière dans ce domaine et indique la nécessité plus investigations pour comprendre le phénomène physique complet avant d'utiliser ces configurations dans les applications pratiques.

**Mots clés** : Convection naturelle, Espace annulaire excentrique, Etude numérique, FLUENT.