

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Bordj Bou Arréridj

Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département des Mathématiques



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de formation troisième cycle

Doctorat LMD

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Par

Maadadi Asma

Thème

**Étude et Construction de Méthodes Numériques pour
Quelques Équations Intégré-Différentielles**

Soutenue publiquement le 13 Mai 2018 devant le jury composé de :

NADIR Mostefa	Professeur	Université de M'sila	Président
MEROUANI Abdelbaki	Professeur	Université de BBA	Rapporteur
RAHMOUNE Azedine	Maître de conférences A	Université de BBA	Co-rapporteur
BENSERIDI Hamid	Professeur	Université de Setif	Examineur
ZEDAM Lemnouar	Professeur	Université de M'sila	Examineur

À me

Remerciement

Je remercie d'abord et avant tout Allah tout-puissant de m'avoir donné le courage, la patience, la volonté et l'e

Je tiens remercié mon directeur de thèse
 Profe
 m'encadrer pour ce travail de thèse
 orientations et ce

Je voudrais ex
 Arzedine Rahmoune, Maître de conférence
 Bou Arréridj pour sa générosité
 et ce
 moi et à corriger mes
 remercie aussi pour sa
 constante. C'est

Je remercie très
 l'Université de M'sila d'avoir acce

J'ex
 l'Université de Setif et Mr. Zedam Lemnouar, Profe
 l'Université de M'sila d'avoir acce

J'adre
 pour son aide, se

Je remercie également Mr. Fare
 Mathématique
 leurs encouragements
 pour ce travail.

*Je n'oublie pas le
soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce travail. Je le
remercie.*

*J'ai gardé pour la fin ceux qui me sont le
me
leurs sacrifice*

Table des matières

Introduction générale	1
1 Équations Intégro-Différentielles	5
1.1 Définition des équations intégro-différentielles	5
1.2 Classification des équations intégro-différentielles	6
1.2.1 Types des équations intégro-différentielles	6
1.2.2 Linéarité et Homogénéité des équations intégro-différentielles	6
1.2.3 Singularité des équations intégro-différentielles	7
1.2.4 Types des noyaux	7
1.3 Origine des équations intégro-différentielles	8
1.4 Existence et unicité des solutions pour les E.I.D non-linéaires	12
1.4.1 Certaines théorèmes du point fixe	13
Théorème du point fixe de Banach	13
Théorème du point fixe de Brouwer	13
Théorème du point fixe de Schauder	13
1.4.2 Applications de théorème du point fixe de Banach	13
E.I.D de Volterra de premier ordre	13
E.I.D de Volterra-Fredholm d'ordre n	15
2 Fonctions de Base Radiales	19
2.1 Historique des RBFs	19
2.2 Définition des RBFs	20
2.3 Quelques types des RBFs	20
2.4 Paramètre libre	21
2.5 Formulation du problème de RBFs interpolation	21
2.6 Test numérique et étude comparative	23
2.7 Méthode de RBFs collocation pour les EDP	29
2.8 Étude de la matrice associée aux RBFs	30
2.8.1 Méthode de base des RBFs	31
Matrices définies positives	31
Fonctions complètement monotones	31
2.8.2 Méthode des RBFs augmentée	32
2.9 Unicité de l'interpolant	33
3 Méthodes Spectrales	35
3.1 Principe des méthodes spectrales	35
3.2 Convergence spectrale	36
3.3 Méthodes spectrales	37
3.3.1 Méthode de Galerkin	37
3.3.2 Méthode de Tau	39
3.3.3 Méthode de collocation	49

3.4	Résolution numériques des E.I.D.	52
3.4.1	Méthode de RBF collocation pour les E.I.D.V.	52
	Principe de la méthode	52
	Résultats numériques	55
3.4.2	Méthode de collocation-Chebyshev pour les E.I.D.F.	56
	Principe de la méthode	56
	Résultats numériques	58
3.4.3	Méthode de collocation-Legendre pour les E.I.D.F.	59
	Principe de la méthode	59
	Résultats numériques	61
3.4.4	Discussion	63
3.4.5	Conclusion	63
	Conclusion générale et perspectives	64
	Annexes	65
	A. Polynômes de Chebyshev (première espèce)	65
	B. Polynômes de Chebyshev (seconde espèce)	67
	C. Polynômes de Legendre	68
	Bibliographie	72
	Résumé	78

Table des figures

2.1	Quelques RBFs	21
2.2	Fonction de base radiale Gaussienne	22
2.3	Fonction de base radiale Multiquadrique	22
2.4	Fonction de base radiale Inverse Multiquadrique	22
2.5	Interpolation de e^x par GA-RBF pour $n = 5, 10, 100$	25
2.6	Interpolation de e^x par MQ-RBF pour $n = 5, 10, 100$	26
2.7	Interpolation de e^x par IMQ-RBF pour $n = 5, 10, 100$	27
2.8	MaxErr de l'interpolation de e^x par différents RBFs	28
2.9	Conditionnement de la matrice A par différents RBFs.	28
3.1	Méthode de Chebychev-Galerkin, Erreur absolue, Exemple 3.1, $N = 12$	39
3.2	Méthode de Tau-Chebychev, Exemple 3.2, $N = 10$	46
3.3	Méthode de Tau-Chebychev, Exemple 3.2, $N = 30$	46
3.4	Méthode de Tau-Chebychev, Exemple 3.3, $N = 10$	47
3.5	Méthode de Tau-Chebychev, Exemple 3.3, $N = 30$	48
3.6	Méthode de Tau-Chebychev, Erreur absolue, Exemple 3.3, $N = 10$	48
3.7	Méthode de Tau-Chebychev, Erreur absolue, Exemple 3.3, $N = 30$	49
8	Polynômes de Chebychev de première espèce pour $N = 0, 1, 2, 3, 4$	71
9	Polynômes de Chebychev de seconde espèce pour $N = 0, 1, 2, 3, 4$	71
10	Polynômes de Legendre pour $N = 1, 2, 3, 4$	71

Liste des tableaux

2.1	Quelques types des RBFs	20
2.2	Étude comparative entre différentes RBFs	29
3.1	Méthode de Galerkin, Erreur absolue, Exemple 3.1, $N = 4, 8, 12$	39
3.2	Méthode de Tau-Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.2, $N = 10$	45
3.3	Méthode de Tau-Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.3, $N = 10$	47
3.4	Méthode de collocation, Erreur absolue, Exemple 3.4, $M = 4, 10, 15$ et $k = 1$	52
3.5	Méthode des RBFs, Erreur absolue, Exemple 3.5.	56
3.6	Méthode des RBFs, Erreur absolue, Exemple 3.6.	56
3.7	Méthode de Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.7.	58
3.8	Méthode de Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.8.	59
3.9	Méthode de Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.9.	59
3.10	Méthode de Legendre, Erreur absolue, Exemple 3.10.	61
3.11	Méthode de Legendre, Erreur absolue, Exemple 3.11.	61
3.12	Méthode de Legendre, Erreur absolue, Exemple 3.12.	62
3.13	Méthode de Legendre, Erreur absolue, Exemple 3.13.	62

Liste des Abréviations

ED	Equations D ifférentielles
EDO	Equations D ifférentielles O rdinaires
EDP	Equations D ifférentielles P artielles
EI	Equations I ntégrales
EID	Equations I ntégro- D ifférentielles
EIDF	Equations I ntégro- D ifférentielles de F redholm
EIDV	Equations I ntégro- D ifférentielles de V olterra
RBF	Fonction de B ase R adiale
RBFs	Fonctions de B ase R adiales
GA-RBF	Fonction de B ase R adiale G Aussienne
MQ-RBF	Fonction de B ase R adiale M ulti Q uadrique
IMQ-RBF	Fonction de B ase R adiale I nverse M ulti Q uadrique
LWM	Legendre w avelet M ethod

Liste des Symboles

\mathbb{R}	Ensemble des réels
\mathbb{R}^n	Ensemble des vecteurs réels à n dimensions
\mathbb{H}	Espace de Hilbert
$C^0(0, \infty)$	Ensemble des fonctions continues sur $(0, \infty)$
$C^n(\Omega)$	Classe des fonctions n fois continûment dérivables sur (Ω)
$L^2(\Omega)$	Espace de Lebesgue sur Ω d'exposant 2
$H_\omega^k(I)$	Espace de Sobolev sur I d'exposant k
$C_\beta(I, \mathbb{R}^n)$	Espace des fonctions continues de I dans \mathbb{R}^n muni de la norme Bielecki
A	Opérateur intégral
u	Fonction inconnue dans l'équation intégral-différentielle
u'	Dérivée première de u
$u^{(n)}$	Dérivée n -ième de u
u_N	Solution approchée de u
u'_N	Solution approchée de u'
$K(x, t)$	Noyau de l'équation intégral-différentielle
f	Terme libre dans l'équation intégral-différentielle
φ_j	Fonction de base radiale
P_N	Opérateur de projection
R_N	Résidu
$T_n(x)$	Polynôme de Chebyshev de première espèce
$U_n(x)$	Polynôme de Chebyshev de seconde espèce
$L_n(x)$	Polynôme de Legendre
\sum''	Sommation dont le premier et le dernier terme divisés par 2.
λ	Paramètre numérique
ω	Fonction poids

Introduction Générale

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'étude et de la construction de méthodes numériques pour quelques équations intégro-différentielles.

Les équations intégro-différentielles apparaissent dans divers domaines (voir [30], [48], [49] et [98]). Ces équations proviennent de la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques très variés, tels que : la dynamique des fluides, la physique des solides, la physique des plasmas, la viscoélasticité de la biologie [81], l'économie [57], le transfert de la chaleur [17], la médecine, le chémostat [100], le biotissus [39], l'analyse statique des tours et des cheminées [88], la chemical kinetics [86] et etc.

Les équations différentielles connectent des fonctions inconnues, leurs dérivés et leurs variables indépendantes. D'autre part, les équations intégrales contiennent des fonctions inconnues sous une intégrale. Le terme équation intégro-différentielle est utilisé dans le cas où l'équation contient une fonction inconnue avec ses dérivés et quand soit une fonction inconnue ou ses dérivés ou les deux apparaissent sous une intégrale [95].

Volterra est l'un des fondateurs de la théorie des équations intégro-différentielles [93, 95]. Son travail en élasticité a été l'origine de cette théorie. En 1909, *Volterra* [92] a étudié un type particulier de telles équations et a montré que cette équation intégro-différentielle est équivalente à un système composé de trois équations intégrales linéaires et d'équations différentielles partielles de second ordre.

L'un des premiers exemples des équations intégro-différentielles étudiées au début du vingtième siècle était dans les travaux de *Schlesinger* [78], [79], où l'équation suivante est étudiée

$$u_x(x, y) = \int_a^b f(x, y, s)u(x, s) ds.$$

D'autres types des équations intégro-différentielles linéaires plus générales ont été discutées par *Pomey* [70].

L'un des représentants importants dans l'économie est le modèle de processus de risque dans la théorie de ruine, qui sont des équations intégro-différentielles de Volterra de second ordre [57]

$$c^2 u''(x) - 2(\beta + \delta)cu'(x) + (\beta + \delta)^2 cu(x) = \beta^2 \int_0^x f(x-t)u(t) + \beta^2(1 - F(x)),$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = u'_0,$$

où x est un surplus initial, β est un paramètre d'échelle, δ est un paramètre non négatif et F est une fonction de distribution.

Les équations intégral-différentielles apparaissent aussi dans l'étude de divers problèmes de viscoélasticité. Le moment M_v des forces viscoélastiques est écrit comme suit

$$M_v = lv_x(x, t) - \int_0^t L_1(t-s)v_x(x, t) ds, \quad l = \text{const} > 0,$$

où L_1 le noyau de relaxation, continu avec $t \in \mathbb{R}^+$.

La modélisation mathématiques du développement de spatio-temporal d'une épidémie et de divers modèles physiques et biologiques donne des équations intégral-différentielles non linéaires de Volterra de la forme [97]

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)[R(u(t)) + N(u(t))]dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad n \geq 0,$$

et des équations intégral-différentielles non linéaires de Fredholm de la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, t)[R(u(t)) + N(u(t))]dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad n \geq 0,$$

Dans le circuit électronique LRC, on rencontre une équation intégral-différentielle pour déterminer le courant instant qui circule dans un circuit fermé avec une tension donnée $E(t)$ et elle est écrite comme

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int_0^1 I(\tau) d\tau = E(t), \quad I(0) = I_0.$$

où L est l'inductance, R est la résistance et C est la capacité.

En ingénierie structurelle, un modèle typique pour les tours et les cheminées [88]

$$u^{(n)}(x) + \beta(x)u(x) + \alpha(x) \int_0^x \gamma(x)u(x) dx = q(x), \quad x \in [0, h], \quad n \geq 2,$$

avec les conditions aux limites

$$u^{(i)}(h) = a_i, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Les concepts des équations intégral-différentielles ont motivé un grand nombre de travaux de recherche ces dernières années. Ces équations sont difficiles à résoudre analytiquement, il est donc nécessaire pour obtenir une solution approchée efficace. Plusieurs méthodes numériques ont été appliquées pour ces équations telles que : El-Gendi [32], Polynômes de Chebyshev [4, 6], Ondelettes de Chebyshev [7], [10], Galerkin-Chebyshev [13], Polynômes de Bernstein [11], Polynômes de Taylor [59], Matrice de Bernoulli [13], Polynômes de Legendre [58], [91], [103], Ondelette de Legendre [25], Legendre-Galerkin [34], Collocation de Legendre [62], Tau [64], Interpolation de Lagrange [75], [82], Interpolation par Spline [36], Polynômes de Bessel [104], Différence finie [107] et etc.

Depuis une dizaine d'années, de nouvelles méthodes numériques, alternative aux méthodes classiques comme la méthode des éléments finis [26], ont été développées. Ces méthodes numériques, sont appelées méthodes sans maillage (meshfree, meshless) (voir [42], [51] et [85]).

Les méthodes sans maillage étaient pour les premières fondées sur des méthodes d'interpolation purement nodales. L'idée est de reconstruire une fonction définie sur un espace continu à partir de l'ensemble des valeurs discrètes prises par cette fonction sur un nuage de points de domaine. Ces méthodes utilisent juste un ensemble de points de collocation, indépendamment de toute information de relation entre ces nœuds (points de collocation). Donc, l'absence de connectivités fixes entre ces nœuds supprime les effets indésirables dus à la déformation du maillage. Cette propriété est le principal avantage de ces techniques par rapport aux méthodes classiques.

En 1990, Kansa [46] a introduit une nouvelle méthode numérique pour résoudre les équations aux dérivés partielles, est appelée méthode de collocation par les fonctions de base radiales (RBFs). Cette méthode est utilisée comme une famille bien connue de méthodes sans maillage, pour approximer les solutions de divers types des équations fonctionnelles linéaires et non linéaires telles que : les équations différentielles partielles (EDP) [46], [47], [65], les équations différentielles ordinaire (EDO) [56], les équations intégrales (EI) [40] et les équations intégral-différentielles (EID) [41], [68]. Pour des raisons de fiabilité, de simplicité et d'actualité, on a donc choisi la méthode de collocation RBFs dans notre travail.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'application de la méthode de collocation par les fonctions radiales de base indirecte (IRBFs), qui est basée sur les méthodes de quadrature. D'abord, la méthode de collocation IRBFs est présentée et utilisée par *Mai-Day* et *Tran-Cong* [54], [55], [56] pour les équations différentielles. Ensuite, cette méthode a été appliquée pour résoudre les équations intégral-différentielles du premier ordre par les auteurs dans [68]. Puis, *Biazar* et *Asadi* [15] ont généralisé la méthode IRBFs pour les équations intégral-différentielles d'ordre supérieur. La nouveauté dans notre travail par rapport aux travaux récents est que, on a fait une modification sur cette méthode pour la résolution numérique des équations intégral-différentielles de Volterra non linéaires d'ordre supérieur de la forme

$$u^{(m)}(x) = g(x) + \int_0^x K(x, t) \psi(u(t)) dt, \quad 0 < x < b,$$

avec les conditions aux limites

$$u^{(j)}(0) = \alpha_j, \quad j = 0, 1, \dots, r - 1, \quad (1)$$

$$u^{(j)}(b) = \beta_j, \quad j = r, r + 1, \dots, m - 1. \quad (2)$$

où $u^{(m)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre m de $u(x)$, le noyau $K(x, t)$ et $g(x)$ sont des fonctions données, $\psi(u(t))$ est une fonction non-linéaire. $u(x)$ et $g(x)$ sont supposées réelles et différentiable sur l'intervalle $[0, b]$ et α_j , $0 \leq j \leq (r - 1)$ et β_j , $r \leq j \leq (m - 1)$ sont des constantes réelles.

Après une introduction générale, la suite de cette thèse est donc organisée en trois chapitres.

Le *premier* chapitre consiste en rappel de la définition des équations intégral-différentielles et leurs classifications, qui a pour objectif de familiariser le lecteur avec le concept de ces équations. Puis, on établit l'origine des équations intégral-différentielles et la relation entre ces dernières et les équations différentielles. Enfin, on donne trois grands théorèmes du point fixe celui de Banach, de Brouwer et de Schauder. Ces théorèmes sont importants pour montrer l'existence des solutions numériques pour les équations non linéaires.

Dans le *deuxième* chapitre, on donne un aperçu sur les fonctions de base radiales et comment elles sont utilisées dont un exemple simple, dont le but est de donner au lecteur une

impression intuitive de la procédure.

Les méthodes spectrales (Galerkin, Tau et collocation) font l'objet du *dernier* chapitre. Le but de ce chapitre est de décrire des méthodes de résolution efficace pour les équations intégrales-différentielles. Ces méthodes cherchent des solutions en termes d'une série des fonctions connues et régulières. On applique ces méthodes récentes pour quelques équations intégrales-différentielles. On présente la méthode de collocation par les fonctions de base radiales indirectes (IRBFs) pour les équations intégrales-différentielles linéaires et non linéaires de type de Volterra d'ordre supérieur et on montre sa efficacité.

Avant les références bibliographiques, on a jugé utile d'insérer à la fin de cette thèse quelques notions de base que nous avons utilisées dans ce travail (les polynômes de Chebyshev, les polynômes de Legendre). Ces notions se trouvent dans l'annexe.

Équations Intégro-Différentielles

Dans ce chapitre, nous donnons brièvement un rappel sur la définition des équations intégro-différentielles. Puis, nous introduirons à la classification de ces équations, qui a pour objectif de familiariser le lecteur avec le concept d'équation intégro-différentielle. Ensuite, nous parlons de l'origine des équations intégro-différentielles et la relation entre ces dernières et les équations différentielles. La dernière partie est consacrée à la question d'existence et d'unicité, nous présentons certaines théorèmes du point fixe et ces applications.

1.1 Définition des équations intégro-différentielles

Une équation intégro-différentielle est une équation fonctionnelle dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, apparaît sous le signe intégral, paraissent leurs dérivées.

Nous intéressons dans cette partie beaucoup plus aux types les plus simples qui concernent les équations intégro-différentielles unidimensionnelles. La forme générale d'une équation intégro-différentielle d'ordre n est donnée par [50]

$$u^{(n)}(x) = f\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right) + \lambda \int_{\Omega} K\left(x, t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)\right) dt, \quad (1.1)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= \beta_0, \\ u'(\alpha) &= \beta_1, \\ &\vdots \\ u^{(n-1)}(\alpha) &= \beta_{n-1}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où

- α et β_i ($0 \leq i \leq n-1$) nombres donnés.
- $u, u', u^{(n-1)}$: des fonctions inconnues.
- K : noyau de l'équation intégro-différentielle.
- f : fonction donnée.
- Ω : un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension fini.

- λ : paramètre numérique.

1.2 Classification des équations intégro-différentielles

Le domaine des équations intégro-différentielles est très vaste. Nous présentons ici une classification générale des équations intégro-différentielles, qui est centrée sur plusieurs caractéristiques de base décrivent leur structure globale.

1.2.1 Types des équations intégro-différentielles

On distingue trois types majeurs des équations intégro-différentielles [98]

Équations intégro-différentielles de Fredholm

On appelle équation intégro-différentielle de Fredholm une équation de la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, u(t)) dt \quad (1.3)$$

où la région d'intégration est fixée.

Équations intégro-différentielles de Volterra

On appelle équation intégro-différentielle de Volterra une équation de la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t)) dt \quad (1.4)$$

où la région d'intégration est variable.

Équations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm

On appelle équation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm une équation de la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K(x, t, u(t)) dt + \lambda_2 \int_a^b K(x, t, u(t)) dt, \quad (1.5)$$

et

$$u^{(n)}(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t, y, z, u(y, z)) dy dz, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1.6)$$

où $f(x, t)$ et $G(x, t, y, z, u(y, z))$ sont des fonctions analytiques sur $\Omega \times [0, T]$, et Ω est un sous ensemble fermé sur \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$.

1.2.2 Linéarité et Homogénéité des équations intégro-différentielles

Autres classes de terminologie liées à ces trois équations de Volterra, de Fredholm et de Volterra-Fredholm sont la *linéarité* et l'*homogénéité*. Ces deux concepts jouent un rôle majeur dans la structure des solutions.

Linéarité des équations intégro-différentielles

- Si on prend $K(x, t, u(t)) = k(x, t)u(t)$, l'équation intégro-différentielle devient linéaire.
- Si la fonction K dépend de u , l'équation intégro-différentielle devient non linéaire ou si l'équation contient une fonction non linéaire de u , telle que u^2 , u^3 , e^u , $\cos(u)$, $\sinh(u)$, $\ln(1 + u)$.

Homogénéité des équations intégro-différentielles

Si la fonction $f(x)$ dans l'équation intégro-différentielle de Volterra ou de Fredholm ou de Volterra-Fredholm de deuxième espèce est nul alors l'équation intégro-différentielle est dite homogène, in-homogène sinon.

1.2.3 Singularité des équations intégro-différentielles

Une équation intégro-différentielle est dite singulière si :

- (i) L'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies.
- (ii) Le noyau est non borné sur l'intervalle de l'intégration.

Remarque 1.1. *L'ordre d'une équation intégro-différentielle est l'ordre de plus haute dérivée qui apparaît dans l'opérateur différentiel.*

Remarque 1.2. .

- *Si la fonction inconnue dépende d'une seule variable indépendante, l'équation intégro-différentielle est dite ordinaire.*
- *Si la fonction inconnue dépende de deux ou plusieurs variables indépendantes l'équation intégro-différentielle est dite partielle.*

Remarque 1.3. *On doit noter qu'une équation de Fredholm peut être réduite en une équation de Volterra, il suffit de prendre le noyau $K(x, t) = 0$, pour $x < t$.*

1.2.4 Types des noyaux

Noyau symétrique (Hermitien)

Un noyau $K(x, t)$ est dit Hermitien s'il est de la forme

$$K(x, t) = \overline{K(t, x)},$$

dans le cas réel, ce noyau est dit symétrique si

$$K(x, t) = K(t, x).$$

Noyau dégénéré (séparable)

Un noyau $K(x, t)$ est dit dégénéré s'il est de la forme

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(t),$$

où les fonctions $g_i(x)$ et $h_i(t)$ sont supposées continues dans le carré $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes.

Noyau de Cauchy

Un noyau $K(x, t)$ est dit noyau de Cauchy s'il est de la forme

$$K(x, t) = \frac{H(x, t)}{x - t}, \quad a \leq x, t \leq b,$$

où $H(x, t)$ est une fonction différentiable avec $H(x, t) \neq 0$. Une équation intégro-différentielle définie avec ce noyau est appelée équation intégro-différentielle singulière avec noyau de Cauchy.

Noyau d'Abel

Un noyau $K(x, t)$ est dit noyau d'Abel s'il est de la forme

$$K(x, t) = \frac{H(x, t)}{|x - t|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad a \leq x, t \leq b,$$

où α est donnée et $H(x, t)$ est une fonction bornée avec $H(x, t) \neq 0$. Une équation intégro-différentielle définie avec ce noyau est dite équation intégro-différentielle faiblement singulière.

Noyau de convolution

Un noyau $K(x, t)$ est dit noyau de convolution s'il est de la forme

$$K(x, t) = K(x - t).$$

1.3 Origine des équations intégro-différentielles

Les équations intégro-différentielles apparaissent dans de nombreuses applications scientifiques et d'ingénierie. Une source rapide des E.I.D de type de Volterra peuvent être obtenues lorsque on convert des problèmes aux valeurs initiales à des équations intégrales en utilisant la formule de Leibnitz. Cependant, les E.I.D de type de Fredholm peuvent être obtenues à partir de la conversion des problèmes aux limites. Pour plus de détails voir [98].

Problèmes aux valeurs initiales

Dans cette partie, nous étudierons une méthode qui transforme un problème aux valeurs initiales à une équation intégro-différentielle de type de Volterra.

On considère le problème aux valeurs initiales du second ordre de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad (1.7)$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta, \quad (1.8)$$

où α et β sont des constantes. Les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions analytiques et $g(x)$ est continue. On pose

$$y''(x) = u(x), \quad (1.9)$$

où $u(x)$ est une fonction continue sur le domaine de discussion. Une première intégration de 0 à x donne

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(t) dt,$$

donc

$$y'(x) = \int_0^x u(t) dt + \beta. \quad (1.10)$$

Par une second intégration de 0 à x , on obtient

$$y(x) - y(0) = \int_0^x \int_0^{x_1} u(t) dt dx_1 + \beta x,$$

donc

$$y(x) = \int_0^x (x - t)u(t) dt + \beta x + \alpha. \quad (1.11)$$

En substituant (1.9), (1.10) et (1.11) dans l'équation (1.7), on obtient

$$u(x) + p(x) \left[\int_0^x u(t) dt + \beta \right] + q(x) \left[\int_0^x (x-t)u(t) dt + \beta x + \alpha \right] = f(x).$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme d'une équation intégrale de Volterra

$$u(x) = g(x) - \int_0^x K(x, t)u(t) dt, \quad (1.12)$$

où

$$K(x, t) = p(x) + q(x)(x-t),$$

et

$$g(x) = f(x) - [\beta p(x) + \beta x q(x) + \alpha q(x)].$$

En différenciant l'équation intégrale de Volterra (1.12), en utilisant la formule de Leibnitz, on obtient une équation intégro-différentielle de Volterra de la forme

$$\begin{cases} u'(x) + K(x, x)u(x) = g'(x) - \int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} u(t) dt, \\ u(0) = g(0). \end{cases} \quad (1.13)$$

La technique présentée ci-dessus pour convertir les problèmes aux valeurs initiales à des équations intégro-différentielles peut être généralisée. On considère le problème aux valeurs initiales général

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = f(x), \quad (1.14)$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, y''(0) = c_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \quad (1.15)$$

On suppose que les fonctions $a_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, sont analytiques à l'origine et $g(x)$ est continue. Soit $u(x)$ est une fonction continue sur le domaine de discussion, on pose

$$y^{(n)}(x) = u(x). \quad (1.16)$$

Une première intégration par rapport x de l'équation (1.16) donne

$$y^{(n-1)}(x) = c_{n-1} + \int_0^x u(t) dt. \quad (1.17)$$

Une deuxième intégration par rapport x donne

$$y^{(n-2)}(x) = c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x \int_0^{x_1} u(t) dt dx_1,$$

donc

$$y^{(n-2)}(x) = c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x (x-t)u(t) dt. \quad (1.18)$$

Une troisième intégration par rapport x donne

$$y^{(n-3)}(x) = c_{n-3} + c_{n-2}x + \frac{1}{2}c_{n-1}x^2 + \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} u(t) dt dx_2 dx_1,$$

donc

$$y^{(n-3)}(x) = c_{n-3} + c_{n-2}x + \frac{1}{2}c_{n-1}x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u(t) dt. \quad (1.19)$$

Une n -ième intégration par rapport x donne

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{k!} x^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t) dt. \quad (1.20)$$

En substituant (1.16)-(1.20) dans l'équation (1.14), on obtient

$$u(x) = g(x) - \int_0^x K(x,t)u(t) dt, \quad (1.21)$$

où

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^n \frac{a_n}{(k-1)!} (x-t)^{k-1},$$

et

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n a_j \left(\sum_{k=1}^j \frac{c_{n-k}}{(j-k)!} x^{j-k} \right).$$

L'équation intégrale de Volterra est obtenue par la dérivation de (1.21) plusieurs fois que nous voulons et par les conditions initiales de chaque équation résultante.

Exemple 1.1. On considère le problème aux valeurs initiales

$$y''(x) - y(x) = \sin(x), \quad (1.22)$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (1.23)$$

On pose

$$y''(x) = u(x). \quad (1.24)$$

Une première intégration par rapport x de l'équation (1.24), en utilisant la condition initiale $y'(0) = 0$ donne

$$y'(x) = \int_0^x u(t) dt. \quad (1.25)$$

Une deuxième intégration, en utilisant la condition initiale $y(0) = 0$ donne

$$y(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} u(t) dt dx_1 = \int_0^x (x-t)u(t) dt. \quad (1.26)$$

En substituant (1.24), (1.25) et (1.26) dans l'équation (1.22), on obtient

$$u(x) = \sin(x) + \int_0^x (x-t)u(t) dt. \quad (1.27)$$

En différenciant l'équation intégrale de Volterra (1.27), en utilisant la formule de Leibnitz, on obtient une équation intégrale de Volterra de la forme

$$\begin{cases} u'(x) = \cos(x) - \int_0^x u(t) dt, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Problèmes aux limites

Dans cette partie, nous allons présenter une méthode qui transforme un problème aux limites à une équation intégrale-différentielle de Fredholm. La méthode est similaire à la méthode précédente à l'exception que les conditions aux limites seront utilisées à la place des conditions initiales.

On considère le problème avec conditions aux limites de la forme

$$y''(x) + g(x)y(x) = h(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1.29)$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta. \quad (1.30)$$

On pose

$$y''(x) = u(x). \quad (1.31)$$

Une première intégration de l'équation (1.31) donne

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t) dt, \quad (1.32)$$

où la condition initiale $y'(0)$ n'est pas donnée dans le problème aux limites. La condition $y'(0)$ sera déterminée plus tard en utilisant la condition $x = 1$. Une deuxième intégration de l'équation (1.32) donne

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \int_0^x \int_0^{x_1} u(t) dt dx_1,$$

donc

$$y(x) = \alpha + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t) dt. \quad (1.33)$$

Pour déterminer $y'(0)$, on substitue $x = 1$ dans l'équation (1.33) et on utilise $y(1) = \beta$, on obtient

$$y(1) = \alpha + y'(0) + \int_0^1 (1-t)u(t) dt = \beta,$$

donc

$$y'(0) = (\beta - \alpha) - \int_0^1 (1-t)u(t) dt. \quad (1.34)$$

En substituant (1.34) dans l'équation (1.33), on obtient

$$y(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x - \int_0^1 x(1-t)u(t) dt + \int_0^x (x-t)u(t) dt. \quad (1.35)$$

En substituant (1.31) et (1.35) dans l'équation (1.29), on obtient

$$u(x) + \alpha g(x) + (\beta - \alpha)xg(x) - \int_0^1 xg(x)(1-t)u(t) dt + \int_0^x g(x)(x-t)u(t) dt = h(x). \quad (1.36)$$

On utilise la formule

$$\int_0^1 (\cdot) = \int_0^x (\cdot) + \int_x^1 (\cdot),$$

l'équation (1.36) devient

$$u(x) = h(x) - \alpha g(x) - (\beta - \alpha)xg(x) - g(x) \int_0^x (x-t)u(t) dt \\ + xg(x) \left[\int_0^x (1-t)u(t) dt + \int_x^1 (1-t)u(t) dt \right],$$

qui donne

$$u(x) = f(x) + \int_0^x t(1-x)g(x)u(t) dt + \int_x^1 x(1-t)g(x)u(t) dt,$$

qui conduit à l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t) dt, \quad (1.37)$$

où

$$f(x) = h(x) - \alpha g(x) - (\beta - \alpha)xg(x),$$

et le noyau $K(x,t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} t(1-x)g(x), & \text{pour } 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t)g(x), & \text{pour } x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

D'une manière analogue, on dérive l'équation intégrale de Fredholm (1.37), en utilisant la formule de Leibnitz, on obtient une équation intégro-différentielle de Fredholm.

Exemple 1.2. On considère le problème aux limites de la forme

$$y''(x) + xy(x) = 0, \quad (1.38)$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 2. \quad (1.39)$$

Il est facile de voir que $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $g(x) = x$ et $h(x) = 0$. Alors, on a $f(x) = -2x^2$. En substituant ces derniers dans l'équation (1.37), on obtient

$$u(x) = -2x^2 + \int_0^1 K(x,t)u(t) dt, \quad (1.40)$$

et le noyau $K(x,t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} tx(1-x), & \text{pour } 0 \leq t \leq x, \\ x^2(1-t), & \text{pour } x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

En utilisant la formule de Leibnitz, on obtient une équation intégro-différentielle de Fredholm.

1.4 Existence et unicité des solutions pour les E.I.D non-linéaires

Dans cette partie, on présente les théorèmes du point fixe de Banach, de Brouwer et de Schauder. Ces théorèmes sont importants pour montrer l'existence des solutions numériques pour les équations intégro-différentielles non linéaires.

Le théorème du point fixe de Banach est le plus connu et plus simple. Ce théorème dit qu'une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique.

Les théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder sont plus puissants et plus topologiques et affirment qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

On applique dans cette partie le théorème du point fixe de Banach aux équations intégrales différentielles (Volterra du premier ordre et Volterra-Fredholm d'ordre n).

1.4.1 Certaines théorèmes du point fixe

Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 1.1 (Banach). *Soient (X, d) un espace métrique complet et $M \subseteq X$ est une partie fermée non vide. Si l'application $T : M \rightarrow M$ est une contraction, alors T admet un point fixe unique dans M .*

Preuve. Voir [33, 106]. ■

Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

Théorème 1.2 (Brouwer). *Toute application continue T de la boule unité fermée $B^n \subseteq \mathbb{R}^n$ dans lui-même admet au moins un point fixe.*

Preuve. Voir [33, 106]. ■

Théorème du point fixe de Schauder

Le Théorème du point fixe de Schauder prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 1.3 (Schauder). *Soient X un espace de Banach et $M \subseteq X$ un ensemble non vide, convexe et compact. Alors toute application continue $T : M \rightarrow M$ possède au moins un point fixe.*

Preuve. Voir [33, 106]. ■

1.4.2 Applications de théorème du point fixe de Banach

E.I.D de Volterra de premier ordre

Dans cette partie, on donne quelques conditions pour assurer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale-différentielle de Volterra de la forme

$$\begin{cases} u'(x) &= f(x) + \int_a^x K(x, t, u(t)) dt, & x \in I = [a, b], \\ u(a) &= u_0, \end{cases} \quad (1.41)$$

où $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $u' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues. Pour ce faire, on doit être reformuler l'équation (1.41) en un problème de point fixe.

On considère l'espace de Banach $C_\beta(I, \mathbb{R}^n)$ qui est l'espace des fonctions continues de I dans \mathbb{R}^n muni de la norme (norme de Bielecki [16])

$$\|u\|_\infty^\beta = \sup_{x \in I} \frac{|u(x)|}{e^{\beta(x-a)}}, \text{ avec } \beta > 0.$$

Ce théorème est une modification de théorème (2.3) dans [66].

Théorème 1.4. *Supposons que K est L -Lipschitzienne par rapport à la troisième variable*

$$\exists L > 0, \forall x, t \in I \text{ et } u, v \in \mathbb{R}^n : |K(x, t, u(t)) - K(x, t, v(t))| \leq L|u(t) - v(t)|,$$

si $\frac{L}{\beta^2} < 1$, alors l'équation (1.41) admet une solution unique $u \in C_\beta(I, \mathbb{R}^n)$.

Preuve. Soit $x \in C_\beta(I, \mathbb{R}^n)$, en intégrant l'équation (1.41) entre a et x on obtient

$$u(x) = u_0 + \int_a^x f(s) ds + \int_a^x \int_a^s K(s, t, u(t)) dt ds, \quad x \in I. \quad (1.42)$$

Réciproquement, si $u \in C^1(I)$ on retrouve bien l'équation (1.41), en dérivant l'équation (1.42) et on retrouve la condition initiale $u(a) = u_0$ en faisant $x = a$. On définit ainsi l'opérateur T sur l'espace $C_\beta(I, \mathbb{R}^n)$ par

$$(Tu)(x) = u_0 + \int_a^x f(s) ds + \int_a^x \int_a^s K(s, t, u(t)) dt ds, \quad x \in I. \quad (1.43)$$

Il est clair que l'opérateur T applique $C_\beta(I, \mathbb{R}^n)$ sur lui-même car f et K sont continues, donc $T(C_\beta(I, \mathbb{R}^n)) \subseteq C_\beta(I, \mathbb{R}^n)$.

Maintenant, on doit vérifier que l'opérateur T est une contraction. Soient $u, v \in C_\beta(I, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &\leq \int_a^x \int_a^s |K(s, t, u(t)) - K(s, t, v(t))| dt ds, \\ &\leq \int_a^x \int_a^s L|u(t) - v(t)| dt ds, \\ &\leq L \int_a^x \int_a^s |u(t) - v(t)| e^{-\beta(t-a)} e^{\beta(t-a)} dt ds, \\ &\leq L \|u - v\|_\infty^\beta \int_a^x \int_a^s e^{\beta(t-a)} dt ds, \\ &= L \|u - v\|_\infty^\beta \left(\frac{e^{\beta(x-a)} - 1}{\beta^2} - \frac{x-a}{\beta} \right), \\ &\leq L \left(\frac{e^{\beta(x-a)}}{\beta^2} \right) \|u - v\|_\infty^\beta. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\|(Tu)(x) - (Tv)(x)\|_\infty^\beta \leq \frac{L}{\beta^2} \|u - v\|_\infty^\beta, \quad \forall u, v \in C_\beta(I, \mathbb{R}^n), \beta > 0.$$

Comme $L/\beta^2 < 1$, alors T est une contraction. Donc, par le théorème du point fixe de Banach T a un point fixe unique dans $C_\beta(I, \mathbb{R}^n)$, qui est la solution de l'équation (1.41). ■

E.I.D de Volterra-Fredholm d'ordre n

On considère le problème avec valeur initiale pour l'équation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm d'ordre n de la forme

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = F(x, u(x), \dots, u^{(n-1)}(x), (Au)(x), (Bu)(x)), & x \in I = [a, b], 0 \leq a < b, \\ u^{(k)}(a) = c_k, & k = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (1.44)$$

où

$$(Au)(x) = \int_a^x k_1(x, t) h_1(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) dt, \quad (1.45)$$

et

$$(Bu)(x) = \int_a^b k_2(x, t) h_2(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) dt. \quad (1.46)$$

Dans (1.44)-(1.46), $F \in C(I \times \mathbb{R}^{n+2}, \mathbb{R})$, $k_i \in C(I^2, \mathbb{R})$, $h_i \in C(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$ et $a \leq t \leq x$ sont des fonctions continues et c_k sont des constantes réelles données.

Soient $E = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n -fois) l'espace de produit et $y^{(j)}(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ des fonctions continues. On note

$$|y(x)|_E = \sum_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(x)|,$$

pour $(y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in E$, $x \in I$. Soit G l'espace de ces fonctions $(y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in E$ qui sont continues pour $x \in I$ et vérifient la condition

$$|y(x)|_E = o(\exp(\lambda x)), \quad x \in I, \quad (1.47)$$

où λ est une constante positive. Dans l'espace G , on définit la norme (voir [16])

$$|y|_G = \sup_{x \in I} \left\{ |y(x)|_E \exp(-\lambda x) \right\}. \quad (1.48)$$

Il est facile de voir que G avec la norme définie par (1.48) est un espace de Banach. On note que la condition (1.47) implique qu'il existe une constante N_0 telle que

$$|y(x)|_E \leq N_0 \exp(\lambda x).$$

En utilisant cette dernière dans (1.48), on obtient

$$|y|_G \leq N_0. \quad (1.49)$$

Il est facile d'observer que la solution $u(x)$ de problème (1.44) et ses dérivées sont équivalents aux équations

$$\begin{aligned} u^{(j)}(x) &= \sum_{i=j}^{n-1} \frac{c_i (x-a)^{i-j}}{(i-j)!} \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} F(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(n-1)}(s), (Au)(s), (Bu)(s)) ds, \end{aligned}$$

pour $0 \leq j \leq n-1$.

Le résultat de l'existence d'une solution unique de IVP (1.44) est donné dans le théorème suivant. Pour plus de détails voir [67].

Théorème 1.5. *On suppose que*

(i) *Les fonctions $F, h_i, i = 1, 2$ satisfont les conditions*

$$\begin{aligned} & |F(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, v_1, v_2) - F(x, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, w_1, w_2)| \\ & \leq p(x) \left[\sum_{j=0}^{n-1} |y_j - z_j| + |v_1 - w_1| + |v_2 - w_2| \right], \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$|h_i(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) - h_i(x, z_0, z_1, \dots, z_{n-1})| \leq q_i(x) \sum_{j=0}^{n-1} |y_j - z_j|, \quad (1.51)$$

où $p, q_i \in C(I, \mathbb{R}_+)$.

(ii) *Il existe une constante α telle que $0 \leq \alpha < 1$ et*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} p(s) [\exp(\lambda s) + h_1^*(s) + h_2^*(s)] ds \leq \alpha \exp(\lambda x), \quad (1.52)$$

pour $x \in I$, où

$$h_1^*(x) = \int_a^x |k_1(x, t)| q_1(t) \exp(\lambda t) dt, \quad (1.53)$$

$$h_2^*(x) = \int_a^b |k_2(x, t)| q_2(t) \exp(\lambda t) dt, \quad (1.54)$$

et λ est donnée dans (1.47)

(iii) *Il existe une constante positive P telle que*

$$h(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} |F(s, 0, 0, \dots, 0, (A0)(s), (B0)(s))| ds \leq P \exp(\lambda x), \quad (1.55)$$

où

$$h(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{i=j}^{n-1} \frac{|c_i| (x-a)^{i-j}}{(i-j)!} \right] \quad (1.56)$$

Alors le problème (1.44) admet une solution unique $u(x)$ dans G sur I .

Preuve. Soit $u \in G$, on définit l'opérateur T sur G par

$$\begin{aligned} (Tu)(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} \\ &+ \int_a^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} F\left(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(n-1)}(s), (Au)(s), (Bu)(s)\right) ds. \end{aligned} \quad (1.57)$$

En dérivant les deux cotés de l'équation (1.57) par rapport à x , on obtient

$$\begin{aligned} (Tu)^{(j)}(x) &= \sum_{i=j}^{n-1} \frac{c_i (x-a)^{i-j}}{(i-j)!} \\ &+ \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} F\left(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(n-1)}(s), (Au)(s), (Bu)(s)\right) ds. \end{aligned} \quad (1.58)$$

pour $0 \leq j \leq n-1$. Évidemment, $(Tu)^{(j)}(x)$ sont continues sur I .

Maintenant, on doit montrer que l'opérateur T applique G sur lui même. On vérifie que la condition (1.44) est satisfaite. De (1.50), (1.55) et (1.58) on a

$$\begin{aligned}
|(Tu)(x)|_E &= \sum_{j=0}^{n-1} |(Tu)^{(j)}(x)|, \\
&\leq h(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} |F(s, 0, 0, \dots, 0, (A0)(s), (B0)(s))| ds \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} |F(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(n-1)}(s), (Au)(s), (Bu)(s)) \\
&\quad - F(s, 0, 0, \dots, 0, (A0)(s), (B0)(s))| ds, \\
&\leq P \exp(\lambda x) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} p(s) [|u(s)|_E \\
&\quad + |(Au)(s) - (A0)(s)| + |(Bu)(s) - (B0)(s)|] ds, \\
&\leq P \exp(\lambda x) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} p(s) [\exp(\lambda s) |u|_G \\
&\quad + |(Au)(s) - (A0)(s)| + |(Bu)(s) - (B0)(s)|] ds. \tag{1.59}
\end{aligned}$$

De (1.45), (1.51) et (1.54) on obtient

$$\begin{aligned}
|(Au)(s) - (A0)(s)| &\leq \int_a^s |k_1(s, t)| \cdot |h_1(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) - h_1(t, 0, 0, \dots, 0)| dt, \\
&\leq \int_a^s |k_1(s, t)| q_1(t) [\exp(\lambda t) |u(t)|_E \exp(-\lambda t)] dt, \\
&\leq \int_a^s |k_1(s, t)| q_1(t) [\exp(\lambda t) |u|_G] dt, \\
&= |u|_G h_1^*(s). \tag{1.60}
\end{aligned}$$

De même manière, de (1.46), (1.51) et (1.54) on obtient

$$|(Bu)(s) - (B0)(s)| \leq |u|_G h_2^*(s). \tag{1.61}$$

De (1.59), (1.60), (1.61), (1.49) et (1.52) on obtient

$$\begin{aligned}
|(Tu)(x)|_E &\leq P \exp(\lambda x) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} p(s) [\exp(\lambda s) + h_1^*(s) + h_2^*(s)] \cdot |u|_G ds, \\
&\leq P \exp(\lambda x) + N_0 \alpha \exp(\lambda x), \\
&= [P + N_0 \alpha] \exp(\lambda x). \tag{1.62}
\end{aligned}$$

De (1.62) il s'ensuit que $Tx \in G$. Cela prouve que l'opérateur T applique G sur lui même.

Maintenant, on doit vérifier que l'opérateur T est une contraction. Soient $u, v \in G$. De (1.50) et (1.58) on a

$$\begin{aligned}
|(Tu)(x) - (Tv)(x)|_E &= \sum_{j=0}^{n-1} |(Tu)^{(j)}(x) - (Tv)^{(j)}(x)|, \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \left| F\left(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(n-1)}(s), (Au)(s), (Bu)(s)\right) \right. \\
&\quad \left. - F\left(s, v(s), v'(s), \dots, v^{(n-1)}(s), (Av)(s), (Bv)(s)\right) \right| ds, \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} p(s) \left[|u(x) - v(x)|_E + |(Au)(x) - (Av)(x)| \right. \\
&\quad \left. + |(Bu)(x) - (Bv)(x)| \right] ds, \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} p(s) \left[\exp(\lambda s) |u - v|_G + |(Au)(x) - (Av)(x)| \right. \\
&\quad \left. + |(Bu)(x) - (Bv)(x)| \right] ds. \tag{1.63}
\end{aligned}$$

De (1.60) et (1.61) on obtient

$$|(Au)(x) - (Av)(x)| \leq |u - v|_G h_1^*(s), \tag{1.64}$$

et

$$|(Bu)(x) - (Bv)(x)| \leq |u - v|_G h_2^*(s). \tag{1.65}$$

En substituant (1.64) et (1.65) dans (1.63) et en utilisant la condition (1.52), on obtient

$$\begin{aligned}
|(Tu)(x) - (Tv)(x)|_E &\leq |u - v|_G \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} p(s) \left[\exp(\lambda s) + h_1^*(s) + h_2^*(s) \right] ds, \\
&\leq |u - v|_G \alpha \exp(\lambda x). \tag{1.66}
\end{aligned}$$

Par conséquent, à partir de (1.66), on a

$$|Tu - Tv|_G \leq \alpha |u - v|_G. \tag{1.67}$$

Comme $\alpha < 1$, alors T est une contraction. Donc, par le théorème du point fixe de Banach T a un point fixe unique dans G , qui la solution du problème (1.44). ■

Fonctions de Base Radiales

Dans ce chapitre, on donne un aperçu sur les fonctions de base radiales et comment elles sont utilisées dont un exemple simple, dont le but est de donner au lecteur une impression intuitive de la procédure.

2.1 Historique des RBFs

La méthodologie du RBFs a été introduire en 1971 par *Rolland Hardy* [43]. Il a présenté une méthode basée sur la fonction de base radiale multiquadrique (RBF-MQ) pour interpoler des données multidimensionnelles et pour rapprocher des surfaces géographiques bidimensionnelles.

En 1982, *Richard Franke* popularise la méthode MQ avec sont rapport sur 32 des méthodes d'interpolation les plus couramment utilisées [35]. Il a comparé diverses méthodes d'interpolation et conclu que les MQ et les TPS étaient les meilleurs. *Franke* a également conjecturé que la matrice d'interpolation pour MQ est inversible [36].

La caractérisations principale de la méthode MQ est que l'interpolant est une combinaison linéaire d'une fonction de base qui ne dépend que de la distance euclidienne de son centre. Cette fonction de base est donc radialement symétrique par rapport à son centre.

La méthode MQ a été généralisée à d'autres fonctions radiales, telles que la gaussienne, la cubique, la spline à plaque mince, etc. et la méthode a été appelée la méthode de "Fonction de Base Radiale".

Dans les années 1990, la méthodologie RBF a été une fois de plus mise en lumière quand *Edward Kansa* [46] a introduit une nouvelle méthode numérique pour résoudre les équations aux dérivées hyperboliques paraboliques, elliptiques, appelée méthode de collocation par les fonctions de base radiales.

Puis, *Buhmann et Michelle* [21] en 1992, ensuite *Chui* [28] en 1996 où montré que les RBFs sont liées aux les ondelettes. En 1984, *Harry Michael STEAD* a prouvé que l'approximation des dérivées partielles d'ordre supérieur obtenue pour résoudre des équations aux dérivées partielles du type elliptique, parabolique ou encore hyperbolique. Cette intervention qui a

modifié la fonction multiquadrique a eu un grand succès.

Enfin, en 1999, HON et al. [44] ont amélioré la méthode multiquadrique pour résoudre des variétés des problèmes aux limites non linéaires dont la plus courante est l'équation de Burgers.

2.2 Définition des RBFs

Définition 2.1. [27]

Les fonctions de base radiales sont principalement des fonctions multivariées, leurs valeurs ne dépendent que de la distance par rapport à l'origine, c-à-d

$$\varphi(x) = \varphi(r) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}.$$

Ou alternativement sur la distance d'un point d'un ensemble donné $\{c_j\}_{j=0}^n$ et

$$\varphi(x - c_j) = \varphi(r_j) \in \mathbb{R}.$$

Toute fonction φ vérifie la propriété

$$\varphi(x) = \varphi(\|x\|_2)$$

est une fonction de base radiale. La norme $r_j = \|x - c_j\|_2$ est la norme euclidienne entre x et les centres c_j .

2.3 Quelques types des RBFs

Il existe plusieurs types des fonctions de base radiales et leurs caractéristiques ont été étudiées dans plusieurs travaux [46, 77]. Les plus utilisées et populaires généralement sont données dans le Tableau 2.1. Le paramètre libre positif ϵ est défini la largeur de la fonction de base radiale, pour ajuster la forme de la fonction.

TABLE 2.1 – Quelques types des RBFs

Fonctions de base radiales	Abréviation	$\phi(r), r \geq 0$	Paramètre	Doceur
Gaussienne	GA	$e^{-(\epsilon r)^2}$	$\epsilon > 0$	Infiniment lisse
Multiquadrique	MQ	$\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}$	$\epsilon > 0$	
Inverse Multiquadrique	IMQ	$\frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}}$	$\epsilon > 0$	
Inverse Quadrique	IQ	$\frac{1}{1 + (\epsilon r)^2}$	$\epsilon > 0$	
Multiquadrique Generalisée	GMQ	$(1 + (\epsilon r)^2)^\beta$	$\epsilon > 0$	
Linéaire	LN	r	/	Lisse par morceaux
Cubique	CU	r^3	/	
Spline en plaque mince	TPS	$r^2 \log(r)$	/	
Spline polyharmonique	SPH	r^{2k-1}	/	
		$r^{2k} \log(r)$	/	

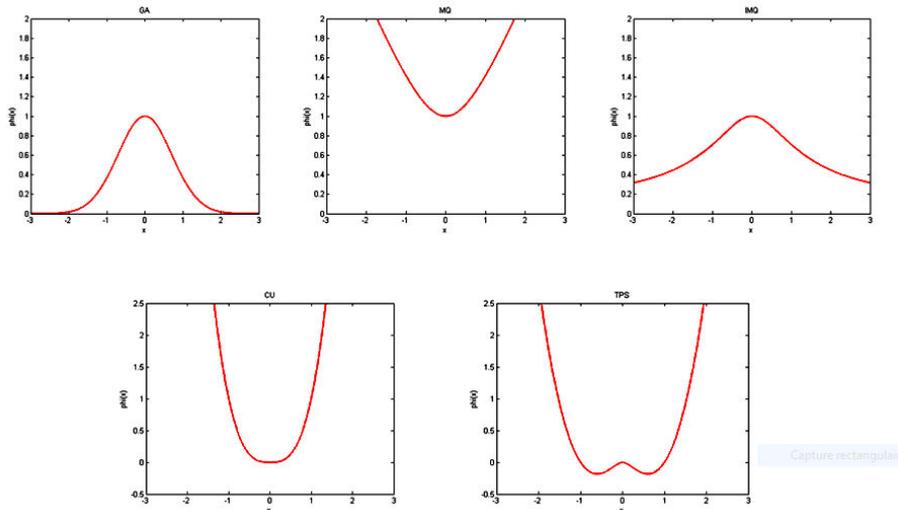


FIGURE 2.1 – Quelques RBFs

2.4 Paramètre libre

Plusieurs RBFs contiennent un paramètre libre positif ϵ qui joue un rôle important pour la précision de la méthode. Ce paramètre contrôle le conditionnement de système à résoudre et qui peut être réglé par l'utilisateur, un paramètre libre plus petit correspond à une fonction de base plus plate ou plus large. Les Figures 2.2, 2.3 et 2.4 montrent trois RBFs avec différents paramètres libres.

Le problème de la sélection d'une bonne valeur pour le paramètre ϵ est un sujet de recherche a été suggéré par plusieurs méthodes dans la littérature. Hardy a utilisé $\epsilon = 0.815d$, où $d = (1/n) \sum_{i=1}^n d_i$ et d_i est la distance entre le nœud i -ème et son nœud voisin. Franke a remplacé d par D/\sqrt{n} , où D est le diamètre du cercle minimal entourant tous les points d'appui et suggéré d'utiliser $\epsilon = 1.25(D/\sqrt{n})$. Jusqu'à présent, l'optimisation du paramètre de forme et sa distribution sont encore en cours de recherche.

2.5 Formulation du problème de RBFs interpolation

Soit Ω un ouvert borné dans \mathbb{R}^s tel que $s > 0$. On note $C(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω à valeurs réelles et soit $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \Omega$ un ensemble de points distincts de Ω , on note que pour tout $u \in C(\Omega) : u_i = u(x_i), \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Notre objectif dans cette partie est d'interpoler la fonction u par un interpolant $S(x) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ de la forme

$$S(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(\|x - c_j\|_2), \quad (2.1)$$

avec $S(x_i) = u(x_i), i = 1, 2, \dots, n$, et $\varphi : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction radiale de base et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de \mathbb{R}^s .

Le problème d'interpolation est de déterminer les coefficients réels $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$ tels que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(\|x_i - c_j\|_2) = u(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

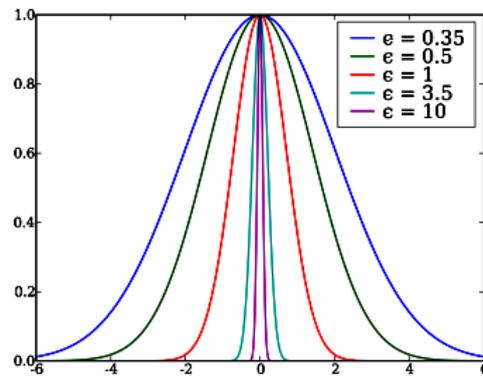


FIGURE 2.2 – Fonction de base radiale Gaussienne

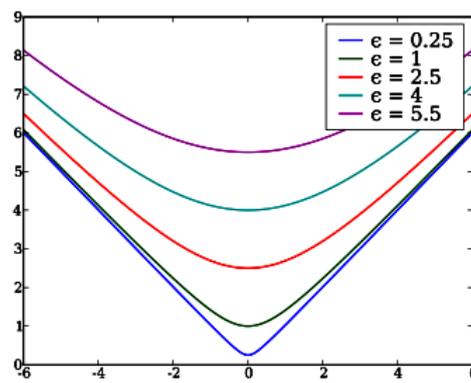


FIGURE 2.3 – Fonction de base radiale Multiquadrique

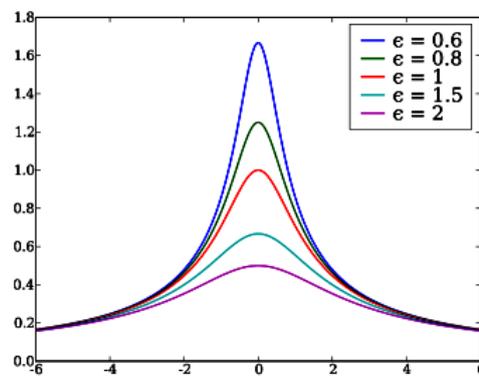


FIGURE 2.4 – Fonction de base radiale Inverse Multiquadrique

C'est un système de la forme

$$A\Lambda = U \tag{2.2}$$

où

$$A = [\varphi(\|x_i - c_j\|_2)]_{i,j=1}^n,$$

$$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T,$$

et

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T.$$

Notez que

$$\varphi_j(x_i) = \varphi(\|x_i - c_j\|_2) = \varphi(\|c_j - x_i\|_2) = \varphi_i(x_j)$$

donc, la matrice est symétrique. Le système (2.2) admet une solution unique si et seulement si la matrice A n'est pas singulière.

2.6 Test numérique et étude comparative

Exemple 2.1. Laissez-nous déterminer le polynôme d'interpolation de la fonction

$$u(x) = \exp(x)$$

dont on connaît les valeurs aux abscisses 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1. On choisit la fonction radiale de

x_j	0	1/4	1/2	3/4	1
u_j	1	$e^{1/4}$	$e^{1/2}$	$e^{3/4}$	e

base gaussienne

$$\varphi(x) = \exp(-(\epsilon r)^2),$$

où $\epsilon = n/(\max(x) - \min(x))$, tels que $\max(x)$ (resp. $\min(x)$) est le borne supérieure (resp. inférieure) des points de contrôle et n est le nombre de ces points. Pour déterminer $S(x)$ on doit déterminer le vecteur des coefficients Λ

$$\begin{bmatrix} \varphi(\|x_1 - x_1\|_2) & \varphi(\|x_1 - x_2\|_2) & \cdots & \varphi(\|x_1 - x_5\|_2) \\ \varphi(\|x_2 - x_1\|_2) & \varphi(\|x_2 - x_2\|_2) & \cdots & \varphi(\|x_2 - x_5\|_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|x_5 - x_1\|_2) & \varphi(\|x_5 - x_2\|_2) & \cdots & \varphi(\|x_5 - x_5\|_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi(0) & \varphi(1/4) & \varphi(1/2) & \varphi(3/4) & \varphi(1) \\ \varphi(1/4) & \varphi(0) & \varphi(1/4) & \varphi(1/2) & \varphi(3/4) \\ \varphi(1/2) & \varphi(1/4) & \varphi(0) & \varphi(1/4) & \varphi(1/2) \\ \varphi(3/4) & \varphi(1/2) & \varphi(1/4) & \varphi(0) & \varphi(1/4) \\ \varphi(1) & \varphi(3/4) & \varphi(1/2) & \varphi(1/4) & \varphi(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.2840 \\ 1.6487 \\ 2.1170 \\ 2.7183 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.2096 & 0.0019 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.2096 & 1.0000 & 0.2096 & 0.0019 & 0.0000 \\ 0.0019 & 0.2096 & 1.0000 & 0.2096 & 0.0019 \\ 0.0000 & 0.0019 & 0.2096 & 1.0000 & 0.2096 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0019 & 0.2096 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.2840 \\ 1.6487 \\ 2.1170 \\ 2.7183 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0481 & -0.2298 & 0.0483 & -0.0101 & 0.0020 \\ -0.2298 & 1.0984 & -0.2403 & 0.0504 & -0.0101 \\ 0.0483 & -0.2403 & 1.1006 & -0.2403 & 0.0483 \\ -0.0101 & 0.0504 & -0.2403 & 1.0984 & -0.2298 \\ 0.0020 & -0.0101 & 0.0483 & -0.2298 & 1.0481 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.2840 \\ 1.6487 \\ 2.1170 \\ 2.7183 \end{bmatrix}$$

Alors

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.8167 \\ 0.8636 \\ 1.1765 \\ 1.3591 \\ 2.4311 \end{bmatrix}$$

Donc, le polynôme d'interpolation $S(x)$ est donné par

$$\begin{aligned} S(x) &= 0.8167\varphi(|x|) + 0.8636\varphi(|x - 0.25|) + 1.1765\varphi(|x - 0.5|) + 1.3591\varphi(|x - 0.75|) \\ &\quad + 2.4311\varphi(|x - 1|), \\ &= 0.8167 \exp(-\epsilon x^2) + 0.8636 \exp(-\epsilon^2(x - 0.25)^2) + 1.1765 \exp(-\epsilon^2(x - 0.5)^2) \\ &\quad + 1.3591 \exp(-\epsilon^2(x - 0.75)^2) + 2.4311 \exp(-\epsilon^2(x - 1)^2). \end{aligned}$$

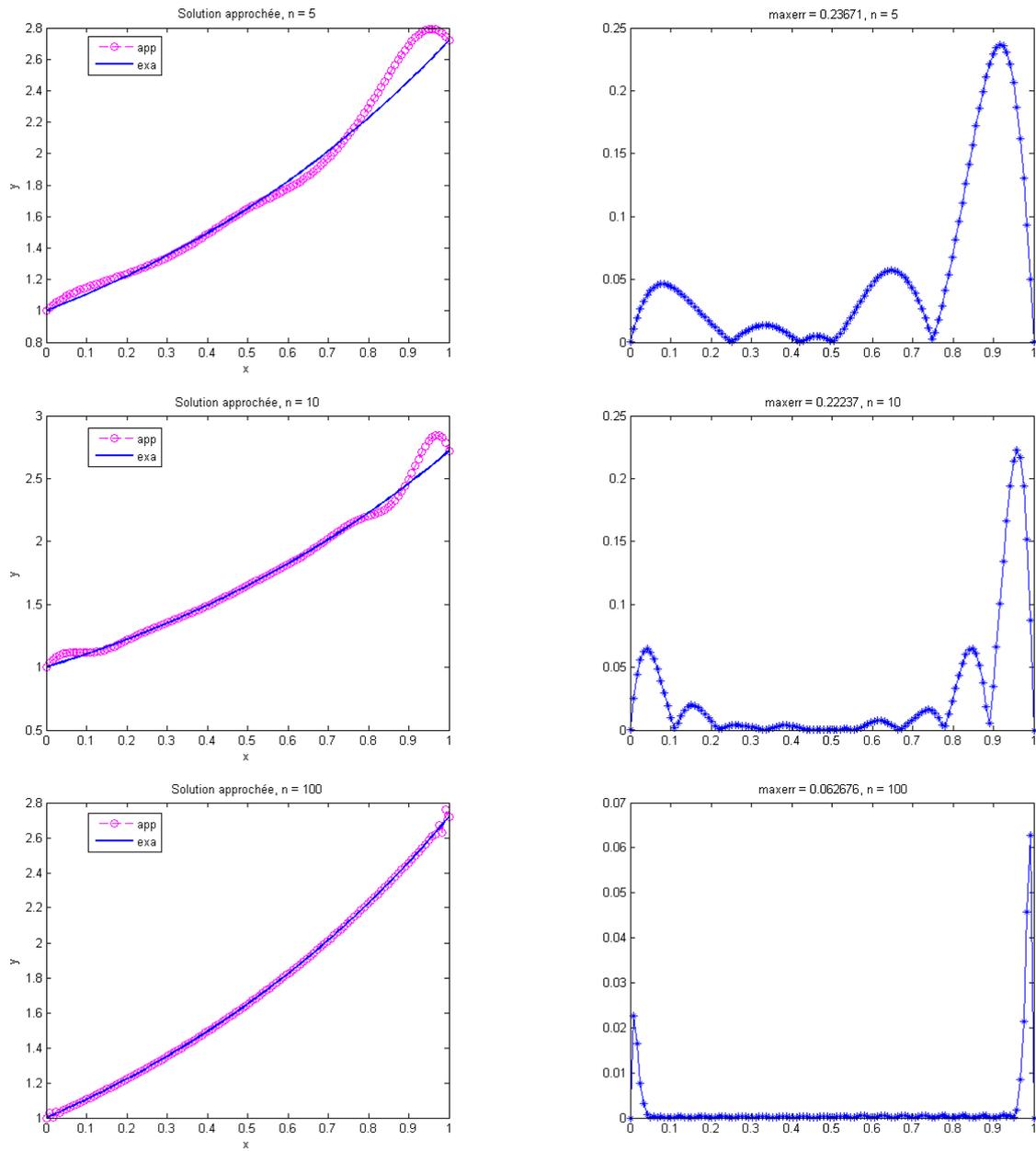


FIGURE 2.5 – Interpolation de e^x par GA-RBF pour $n = 5, 10, 100$

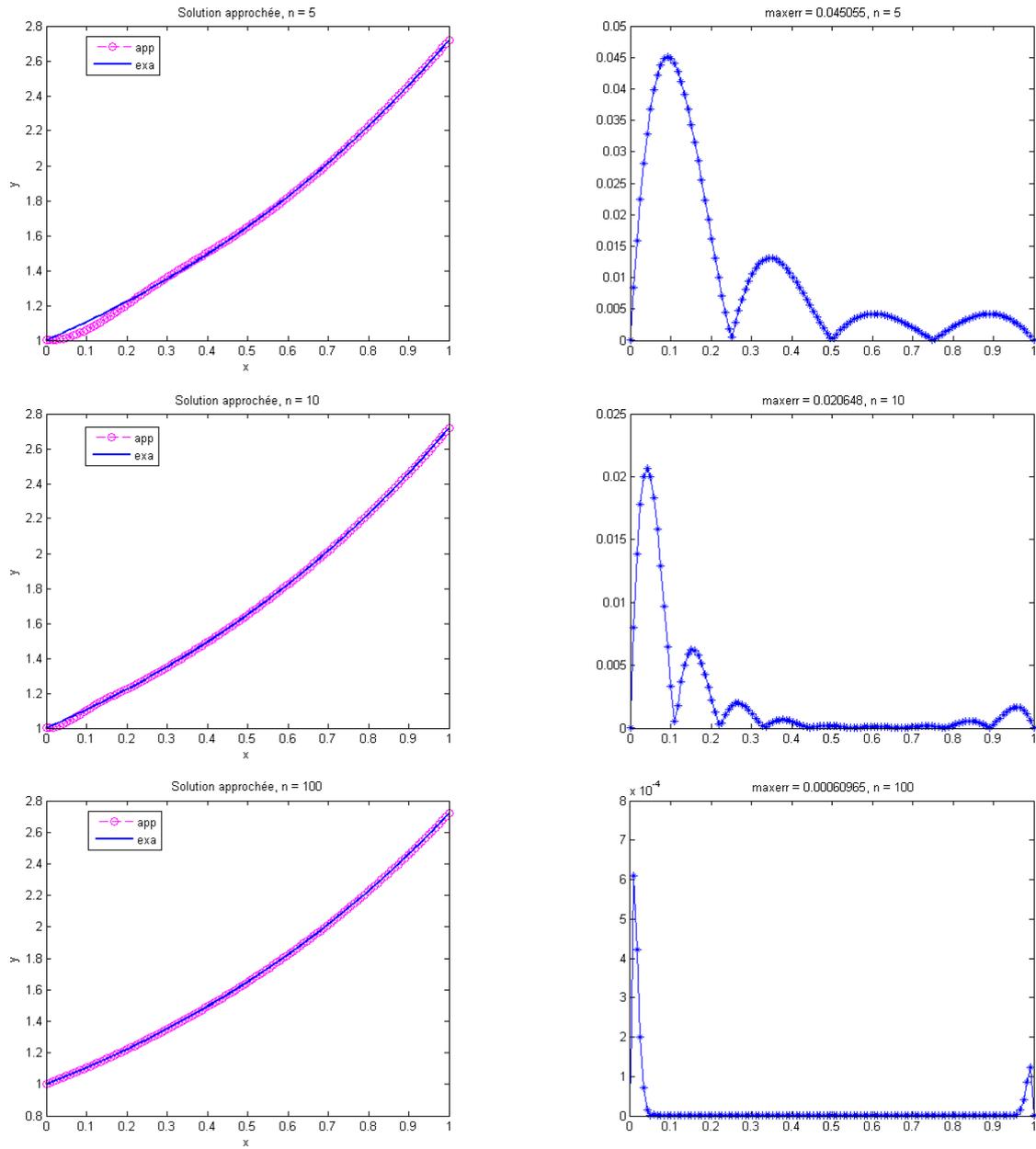


FIGURE 2.6 – Interpolation de e^x par MQ-RBF pour $n = 5, 10, 100$

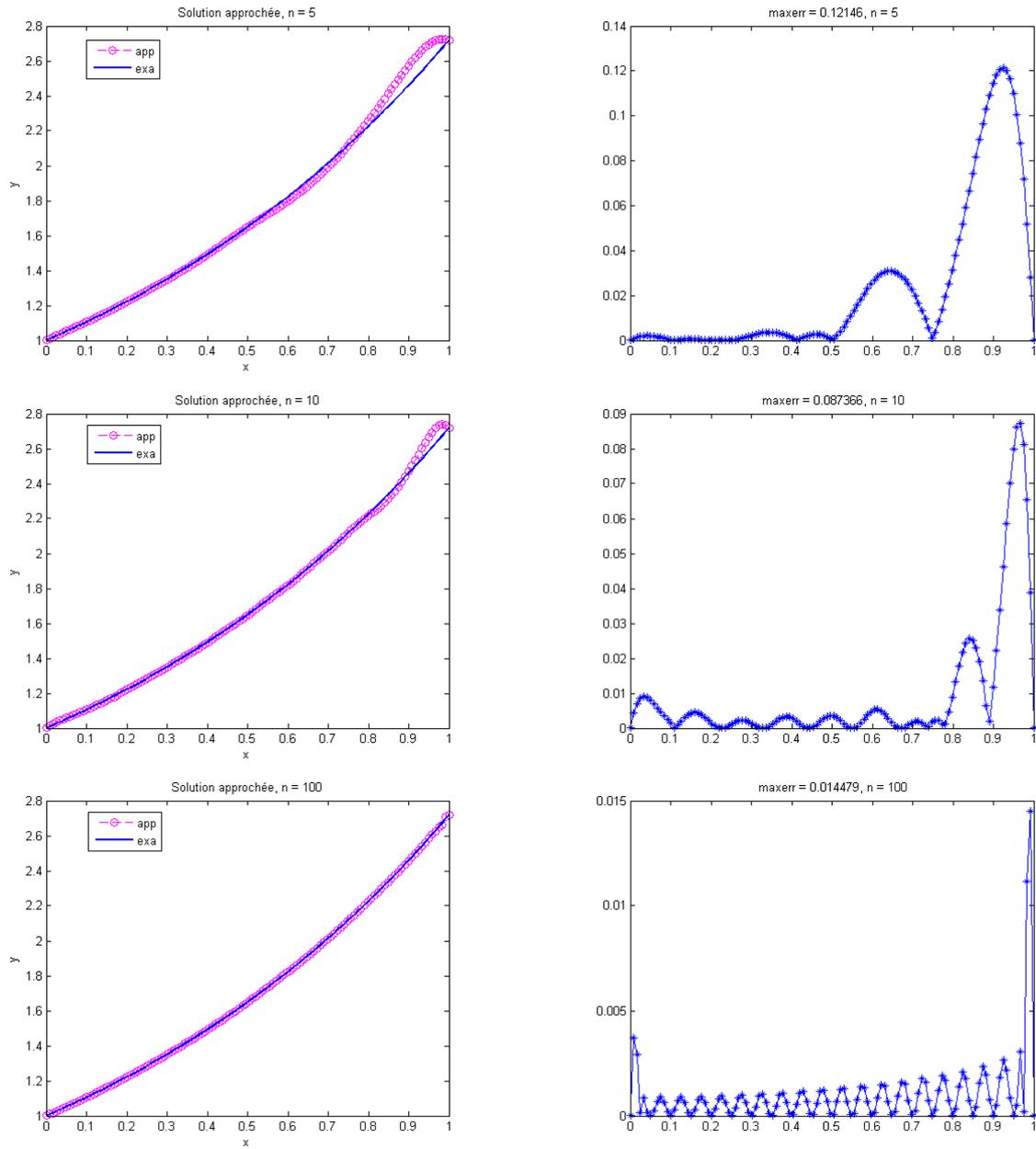


FIGURE 2.7 – Interpolation de e^x par IMQ-RBF pour $n = 5, 10, 100$

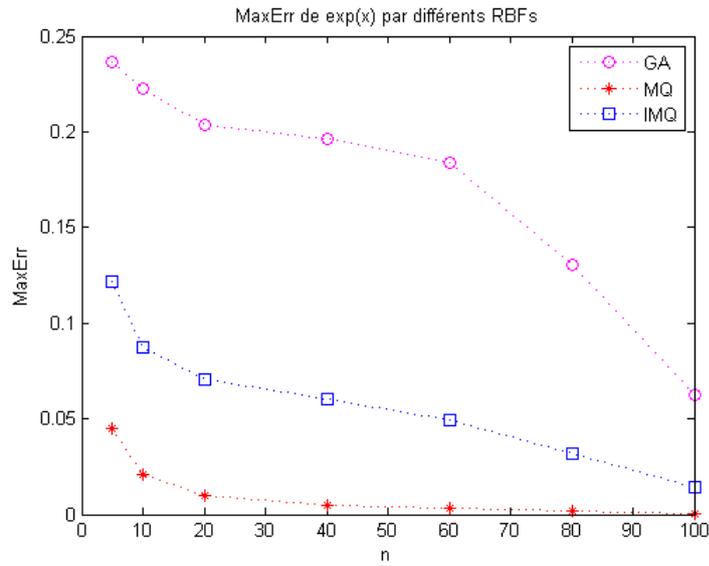


FIGURE 2.8 – MaxErr de l'interpolation de e^x par différents RBFs.

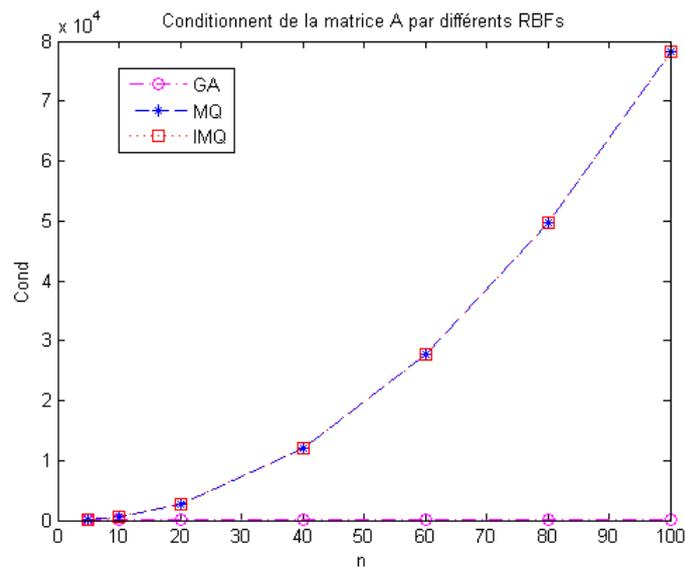


FIGURE 2.9 – Conditionnement de la matrice A par différents RBFs.

Le choix de la fonction de base radiale et le nombre de points d'interpolation influe sur le conditionnement de la matrice et l'erreur d'interpolation. Pour étudier cette relation nous allons procéder à une étude comparative. Dans le Tableau 2.2, on présente les résultats obtenus pour différent choix des RBFs, telles que le terme **Cond** représente le conditionnement de la matrice obtenue et **Err** représente l'erreur maximale entre la fonction et l'interpolant.

TABLE 2.2 – Étude comparative entre différentes RBFs

N	GA-RBF		MQ-RBF		IMQ-RBF	
	Cond	Err	Cond	Err	Cond	Err
5	2.1360	0.2367	88.8339	0.0451	12.0035	0.1215
10	3.4604	0.2224	578.6409	0.0206	24.9342	0.0874
20	4.5338	0.2036	2.7777e+03	0.0097	39.4999	0.0704
30	4.9612	0.1902	6.5862e+03	0.0061	47.9402	0.0601
100	5.6076	0.0627	7.8263e+04	6.0965e-04	71.5659	0.0145
1000	5.8674	5.2084e-04	8.0210e+06	8.4503e-08	112.6122	0.0019

Pour les différents choix des RBFs, on remarque que le conditionnement des matrices d'interpolation obtenu en utilisant GA-RBF et IMQ-RBF est stable comparativement à la MQ-RBF quand le nombre de points d'interpolation augmente. Cependant, l'erreur absolue obtenue après l'interpolation par la MQ-RBF décroît plus vite que les deux autres choix.

2.7 Méthode de RBFs collocation pour les EDP

Étant donné N points arbitraires, x_1, x_2, \dots, x_N , dans un domaine Ω . Nous considérerons qu'il y a k points à l'intérieur de Ω et $m = N - k$ sur le bords $\partial\Omega$ que l'on notera Γ . On posera u_N la forme approchée de u .

Pour bien illustrer la méthode de collocation par les fonctions de base radiales, on considère l'équation aux dérivées partielles donnée par

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^s, \quad (2.3)$$

$$Qu(x) = g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.4)$$

Soit $\{x_j\}_{j=1}^k \subset \Omega$ et $\{x_j\}_{j=k+1}^N \subset \Gamma$. Par la méthode de collocation par les fonctions de base radiales, on cherche une solution approchée u_N de l'équation (2.3) et l'équation (2.4) de la forme

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x), \quad (2.5)$$

où $\varphi_j(x) = \varphi(\|x - x_j\|_2)$, φ étant une fonction radiale de base. L et Q sont des opérateurs différentiels linéaires. Q spécifie les conditions aux limites de Dirichlet, Neumann ou mixtes, f et g sont des fonctions données de \mathbb{R}^s dans \mathbb{R} .

En remplaçant l'approximation (2.5) dans (2.3) et (2.4), on obtient

$$Lu_N = \sum_{j=1}^N \alpha_j L\varphi_j(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.6)$$

$$Qu_N = \sum_{j=1}^N \alpha_j Q\varphi_j(x_i) = g(x_i), \quad i = k + 1, \dots, N. \quad (2.7)$$

On résout donc le système d'inconnus $\{\alpha_j\}_{j=1}^{k+m}$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j L \varphi_j(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j Q \varphi_j(x_i) = g(x_i), \quad i = k+1, \dots, k+m. \quad (2.9)$$

qui peut être écrit sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} L_{1,1}u & L_{1,2}u & \cdots & L_{1,N-1}u & L_{1,N}u \\ L_{2,1}u & L_{2,2}u & \cdots & L_{2,N-1}u & L_{2,N}u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{k,1}u & L_{k,2}u & \cdots & L_{k,N-1}u & L_{k,N}u \\ Q_{k+1,1}u & Q_{k+1,2}u & \cdots & Q_{k+1,N-1}u & Q_{k+1,N}u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Q_{N,1}u & Q_{N,2}u & \cdots & Q_{N,N-1}u & Q_{N,N}u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \\ g_{k+1} \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

Après avoir calculé les coefficients α_j , on calcule les valeurs approchées de u par la formule (2.5).

Pour les problèmes d'évolution en dimension s , i.e. non stationnaire, évoluant en fonction du temps, comme par exemple

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x) \text{ sur } \Omega \times [0, T_{max}],$$

avec les conditions initiales aux limites

$$Bu = g(x, t) \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega,$$

et les conditions initiales

$$u(x, t_0 = 0) = h(x_i).$$

On utilise un schéma de discrétisation en temps, par exemple celui de Crank-Nicholson

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = \theta(Lu^{k+1} + f(x, t_{k+1})) + (1 - \theta)(Lu^k + f(x, t_k)),$$

et les conditions aux limites données, où $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ est le pas de discrétisation en temps, $u^k, k = 0, 1, 2, \dots$ est la solution au pas de temps $t_k = k\Delta t$ et $\theta = 1/2$ pour le cas de *Crank-Nicholson*. Dans ce cas, la solution approchée à l'instant t_k par la méthode de collocation par les fonctions radiales de base s'écrit de la forme

$$u^k(x, t_k) = \sum_{j=1}^{k+m} \alpha_j(t_k) \phi_j(x).$$

2.8 Étude de la matrice associée aux RBFs

La méthode directe des RBF, qui est exprimée dans (2.3) et (2.2) consiste à inverser la matrice A pour trouver les coefficients, donc l'interpolant des RBF. Comme il a été mentionné précédemment, la non singularité des matrices est une incitation énorme à l'utilisation de la méthode des RBF. on considère maintenant, l'invariabilité des matrices associées aux fonctions

de base radiales les plus communes. La preuve de cette caractéristique a été achevée en deux étapes. Premièrement, *Schoenberg* en 1938 a prouvé la solvabilité unique de (2.2) pour une petite classe de fonctions de base radiales. Ensuite, *Micchelli* en 1986 a étendu les résultats de *Schoenberg* à une plus grande classe de fonctions, qui comprend des fonctions plus populaires, telles que les MQ ou les TPS RBF. En plus de [80] et de [60], on a utilisé les sources suivantes pour cette section [22, 24, 42, 60, 71, 101].

2.8.1 Méthode de base des RBFs

Nous appellerons méthode de base des RBFs, la méthode caractérisée dans (2.3) et (2.2). Elle donne une expression pour l'interpolant à condition que le système soit résoluble de façon unique. En 1938, *Schoenberg* a prouvé qu'une certaine classe de fonctions radiales, les fonctions complètement monotones, donne naissance à des matrices de collocation strictement positives, donc inconditionnellement non singulières.

Matrices définies positives

Définition 2.2. Une matrice réelle symétrique A s'appelle semi-définie positive si sa forme quadratique associée est non négative, i.e.

$$\sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d c_j c_k A_{jk} \geq 0, \quad (2.10)$$

pour $c = [c_1, \dots, c_d]^T \in \mathbb{R}^d$. Si la forme quadratique (2.10) est nulle seulement pour $c \equiv 0$; alors A s'appelle définie positive.

Une propriété importante des matrices définies positives est que toutes leurs valeurs propres sont positives, et donc une matrice définie positive est non singulière.

Théorème 2.1. Supposons que d est un nombre entier positif et que les points $x_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2, \dots, n$, sont tous distincts. Si φ peut être écrit sous la forme

$$\varphi(r) = \int_0^\infty e^{-\alpha r^2} \omega(\alpha) d\alpha, \quad (2.11)$$

où $\omega(\alpha) \geq 0$, pour $\alpha \geq 0$ et $\int_\varepsilon^\infty \omega(\alpha) d\alpha > 0$ pour certains $\varepsilon > 0$, alors la matrice

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n = [\varphi(\|x_i - x_j\|)]_{i,j=1}^n$$

est définie positive.

Preuve. Voir [71]. ■

Exemple 2.2. La matrice A correspondant à l'interpolation IMQ-RBF est défini positive

$$\int_0^\infty \alpha^{-1/2} e^{-\alpha(1-c^2 r^2)} d\alpha = \sqrt{\pi}(1-c^2 r^2)^{-1/2}, \quad r \geq 0.$$

Fonctions complètement monotones

Définition 2.3. Une fonction

$$\varphi(r) = \int_0^\infty e^{-\alpha r^2} d\alpha, \quad r \geq 0,$$

où $\omega \geq 0$ est dite complètement monotone sur $[0, \infty[$ si, on considère les dérivés de la fonction

$$\psi(r) = \varphi(r^{1/2}) = \int_0^\infty e^{-\alpha r} \omega(\alpha) d\alpha.$$

on trouve $\psi(r) \geq 0$ et $(-1)^k \psi^{(k)}(r) \geq 0$, $r \geq 0$ pour tous les entiers positifs k .

Théorème 2.2. $\varphi(r)$ peut être exprimé comme

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r^2} \omega(\alpha) d\alpha$$

si et seulement si $\psi(r) = \varphi(r^{-1/2})$, $r \geq 0$, est complètement monotone.

Exemple 2.3.

- GA : $\varphi(r) = e^{-(cr)^2}$.
- GMQ : $\varphi(r) = (1 + c^2 r^2)^\beta$, $\beta < 0$.

Ces fonctions radiales sont complètement monotones, elles donnent des matrices strictement définies positives. Cependant, le théorème 2.2 ne s'applique pas aux fonctions radiales telles que LN, MQ ou TPS. Franke a conjecturé la non singularité de la matrice d'interpolation associée aux excellentes fonctions radiales MQ, mais ce n'est qu'en 1986 que Micchelli a complété la démonstration des fonctions radiales LN et MQ avec la représentation RBF (2.2).

Théorème 2.3. Soit $\psi(r) = \varphi(r^{1/2}) \in C^0[0, \infty)$, $\psi(r) \geq 0$, $r > 0$, et $\psi'(r)$ complètement monotone mais pas constant sur $(0, \infty)$. Alors, pour tout ensemble de n points distincts $\{x_j\}_{j=1}^n$, la matrice $(n \times n)$ A avec des entrées $a_{ij} = \varphi(\|x_i - x_j\|)$ est non singulière. De plus, pour $n \geq 2$, la matrice a $n - 1$ valeurs propres négatives et une valeur propre positive.

Preuve. [22, 60]. ■

Exemple 2.4.

- LN : $\varphi(r) = r$.
- MQ : $\varphi(r) = (1 + c^2 r^2)^{1/2}$.

Notez que ces fonctions radiales ne donnent pas des matrices strictement définies positives, elles donnent des matrices inversibles.

2.8.2 Méthode des RBFs augmentée

Les fonctions de base radiales telles que TPS ne satisfait pas les conditions nécessaires pour les Théorèmes 2.2 ou 2.3. En fait, quand utilisé la fonction de base radiale TPS, il existe des ensembles de nœuds qui produisent une matrice de singulière. Dans le but d'avoir des conditions suffisantes pour un système non singulier, Micchelli a ajouté des restrictions, de nouvelles exigences au-dessus de (2.2) et a ainsi introduit la méthode RBF augmentée.

Définition 2.4 (La méthode RBF augmentée). L'interpolation par les RBFs des valeurs données f_i données points x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ dans d dimensions, prend maintenant la forme

$$S(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\|x - x_i\|) + \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \mu_j p_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.12)$$

avec la contrainte supplémentaire

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_j(x_i) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \tilde{m}, \quad (2.13)$$

avec $\{p_j, j = 1, 2, \dots, \tilde{m}\}$ une base de $\Pi_{\tilde{m}-1}$ (l'espace des polynômes de degré au plus $\tilde{m} - 1$ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , et $m \in \mathbb{N}$ défini plus tard.

L'équation équivalente à (2.12) prend la forme

$$\left[\begin{array}{c|c} A & P \\ \hline P^T & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Lambda \\ \mu \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} f \\ 0 \end{array} \right] \quad (2.14)$$

où A est la matrice définie dans le système (2.2) et la matrice P est ($\tilde{m} \times n$ et $P_{ij} = p_i(x_j)$, $i = 1, 2, \dots, \tilde{m}$, $j = 1, 2, \dots, n$).

Théorème 2.4. Soit $\psi(r) = \varphi(r^{1/2}) \in C^0[0, \infty)$, $\psi(r) \geq 0$, $r > 0$, et $\psi^{m+1}(r)$ complètement monotone mais pas constant sur $(0, \infty)$, pour $m \geq 0$. Alors, pour tout ensemble de n points distincts $\{x_j\}_{j=1}^n$ qui satisfont la condition $\text{rank}(P) = \tilde{m}$ où P est la matrice ($\tilde{m} \times n$) donnée dans (2.14), la matrice de dimension $(n + \tilde{m}) \times (n + \tilde{m})$ donnée dans (2.14) est non singulière. De plus, si \bar{m} est le plus petit m tel que $\psi^{m+1}(r)$ est complètement monotone, alors pour tout vecteur non nul $\alpha \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant la condition $P^T \alpha = 0$, on a la relation $(-1)^{\bar{m}+1} \alpha^T A \alpha > 0$, où A est la matrice ($n \times n$) dans (2.2).

Preuve. [60]. ■

Exemple 2.5. • **TPS** : $\varphi(r) = r^{2k} \log(r)$, ($m = k + 1$).

• **GMQ** : $\varphi(r) = (1 + \epsilon^2 r^2)^\beta$, $\beta > 0$, ($m = \lceil \beta \rceil$).

• **MQ** : $\varphi(r) = r^{2k-1}$, ($m = k$).

On note que, tous les fonctions de base radiales qui donnent une solution unique à (2.2) peuvent aussi être utilisées à (2.14). En effet, dans le cas où les fonctions sont complètement monotones, on va récupérer (2.2) de (2.14) puisque dans ce cas $m = 0$. En utilisant la représentation (2.14) plutôt que (2.2), bien que on a assoupli les conditions sur les fonctions radiales, donc l'ouverture de la porte à une plus grande classe de fonctions radiales, on a ajouté de nouvelles restrictions sur les ensembles de nœuds de données.

2.9 Unicité de l'interpolant

Pour avoir une solution unique, on a besoin que A soit non singulière. Nous voudrions prouver que le système linéaire (2.12) a une solution unique pour n'importe quel choix des points de contrôle et des valeurs de l'RBF. Ce qui revient à montrer que le système homogène de (2.14)

$$A\Lambda + P\mu = 0, \quad (2.15)$$

$$P^T \Lambda = 0, \quad (2.16)$$

admet une solution unique $\Lambda = 0$ et $\mu = 0$.

On multiplie (2.15) par Λ^T , en utilisons (2.16), on obtient

$$\Lambda^T A \Lambda = 0. \quad (2.17)$$

Ceci nous mène aux définitions suivantes :

Définition 2.5. Une fonction radiale continue $\varphi : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}$ serait conditionnellement définie positive d'ordre m sur \mathbb{R}^s si et seulement si :

$$\Lambda^T A \Lambda = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \lambda_i \lambda_j \varphi(\|x_i - x_j\|_2) > 0,$$

vérifier pour tous les ensembles $X = \{x_1, \dots, x_d\} \subset \mathbb{R}^s$ avec d distinct points et tout vecteurs non nuls $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)^T \in \mathbb{R}^d$ qui satisfont :

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i p(x_i) = 0, \quad \text{pour tout } p \in \Pi_{m-1}.$$

une fonction conditionnellement définie positive d'ordre 0 sur \mathbb{R}^s s'appelle définie positive sur \mathbb{R}^s .

D'après cette définition il est évident que seulement si $\lambda = 0$ la condition (2.17) est vérifiée. Il est suffisant d'exiger que l'ensemble X soit Π_{m-1} -unisolvent, signifiant que le polynôme $p \in \Pi_{m-1}$ peut être uniquement récupéré ses valeurs de la fonction dans X .

Définition 2.6. Un ensemble de points $X = \{x_1, \dots, x_d\} \subset \mathbb{R}^s$ s'appelle Π_{m-1} -unisolvent si le seul polynôme du degré total $m-1$ aux plus qui donne zéro sur tout les points d'interpolation de X est le polynôme nul :

$$p(x_j) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq j \leq d \Rightarrow p \equiv 0 \text{ pour } p \in \Pi_{m-1}.$$

Théorème 2.5. Soit A une matrice symétrique réelle de dimension $d \times d$ qui est conditionnellement définie positive d'ordre un, et soit $P = [1, \dots, 1]^T$ une matrice de dimension $d \times 1$ (vecteur colonne). Alors le système des équations linéaires

$$\begin{bmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

est uniquement soluble.

Preuve. Voir [42]. ■

Dans le but de généraliser ce résultat d'interpolation a des polynômes d'ordre élevé, nous allons maintenant introduire la notion de fonctions strictement conditionnellement définie positives d'ordre m .

Théorème 2.6. Si la fonction f a valeurs réels est strictement conditionnellement définie positif d'ordre m sur \mathbb{R}^s et les points x_1, \dots, x_d forment un ensemble $(m-1)$ -unisolvent, alors le système des équations linéaires (2.18) admet une solution unique.

Preuve. Voir [42]. ■

Méthodes Spectrales

Les méthodes spectrales consistent une classe de la discrétisation spatiale des équations différentielles, intégrales et intégro-différentielles. Elles cherchent des solutions en termes d'une série des fonctions connues et régulières. A partir de ses fonctions on peut distinguer trois types de méthodes, à savoir Galerkin, Tau et Collocation [23]. Une première des applications des méthodes spectrales aux EDP est celle de *Silberman* (1954) pour la modélisation de la météorologie par l'approche de Galerkin. Cependant, cette méthode n'est pas devenue pratique pour la résolution des problèmes non linéaires. Après, *Orszag* (1960, 1970) et *Eliassen, Machenhauer* et *Rasmussen* (1970) ont développé des méthodes de transformations pour évaluer la somme de convolution (termes non linéaires).

Dans ce chapitre, on présente les méthodes spectrales (Galerkin, Tau et Collocation) pour la résolution numérique des équations intégro-différentielles. Nous exposons à la fois la formulation intrinsèque de ces méthodes et leur application pratique à l'aide des exemples pour des domaines bornés. Le but de dernière partie est de décrire des méthodes efficaces pour la résolution numérique ces équations. En premier lieu, on présente la méthode de collocation par les fonctions de base radiales pour les équations intégro-différentielles linéaires et non-linéaires de Volterra d'ordre supérieur. On présente en second lieu, la méthode de collocation par les polynômes de Chebyshev pour les équations intégro-différentielles non-linéaires de Fredholm du premier ordre. En dernier lieu, on présente la méthode de collocation par les polynômes de Legendre pour les mêmes équations. Pour plus de détails voir [8], [12], [23], [30], [31], [48], [74], [83] et [84].

3.1 Principe des méthodes spectrales

On considère l'équation intégro-différentielle de la forme

$$\begin{cases} u'(x) &= (Au)(x) + g(x), & x \in \Omega, \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

où $(Au)(x) = \int_{\Omega} K(x, t)u(t) dt$ et Ω est un fermé borné et X un espace complet, tel que $X = L^2(\Omega)$ (ou bien $X = C(\Omega)$).

Les méthodes spectrales permettent de traiter la dépendance spatiale [87], en décomposant les éléments de X sur une base des fonctions $\{\varphi_j\}_{j \geq 1}$ et on cherche

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

élément de l'espace B_N engendré par les N premières de base de telle sorte que cette fonction approche la vraie solution du problème.

On définit le résidu associé à l'approximation u_N par

$$R_N(x) = u'_N(x) - (Au_N)(x) - g(x),$$

donc

$$R_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \left\{ \varphi'_j(x) - \int_{\Omega} K(x,t) \varphi_j(t) dt \right\} - g(x),$$

ce résidu serait nul si u_N était la vraie solution. On cherche donc à le rendre petit. Pour cela on impose que R_N soit nul en projection sur un sous-espace de X de dimension N . Cette projection P_N dépend de la méthode spectrale employée. On a donc remplacé le problème initial (3.1) par le problème approché

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u_N \in B_N \text{ telle que } & P_N^\perp R_N = 0 \quad (N-1) \text{ équations} \\ & \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(0) = u_0. \end{aligned}$$

3.2 Convergence spectrale

Théorème 3.1. *Pour tout $u \in L^2_\omega(I)$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u - P_N u\|_{L^2_\omega} = 0.$$

Quand I est borné, la preuve est directe, voir [38]. Lorsque I n'est pas borné, la preuve est plus délicate, voir [29] pour plus de détails.

Le taux de convergence dépend de la régularité de u et du type de polynômes orthogonaux $\{\varphi_k\}$. On présente ici un résultat pour les polynômes de Legendre.

On définit l'espace de Sobolev pondéré $H^k_\omega(I)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ par

$$H^k_\omega(I) = \left\{ u : I \mapsto \mathbb{R} \left| \frac{d^m u}{dx^m} \in L^2_\omega(I), 0 \leq m \leq k \right. \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^k_\omega} = \sum_{m=0}^k \left\langle \frac{d^m u}{dx^m}, \frac{d^m v}{dx^m} \right\rangle_{L^2_\omega},$$

et la norme associée est donnée par

$$\|u\|_{H^k_\omega} = \langle u, u \rangle_{H^k_\omega}^{1/2}.$$

On considère le cas de $I = [-1, 1]$ avec la fonction de poids $\omega(x) = 1$ et les polynômes de Legendre $\{P_n(x)\}$. La projection orthogonale pour tout $u(x) \in L^2_\omega(I)$ est

$$P_N u(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k P_k(x), \quad \hat{u}_k = \frac{1}{\|P_k\|_{L^2_\omega}^2} \langle u, P_k \rangle_{L^2_\omega}.$$

Théorème 3.2. *Pour tout $u(x) \in H^p_\omega[-1, 1]$, $p \geq 0$, il existe une constante C , indépendante de N , telle que*

$$\|u - P_N u\|_{L^2_\omega[-1, 1]} \leq C N^{-p} \|u\|_{H^p_\omega[-1, 1]}.$$

Preuve. Voir [31]. ■

3.3 Méthodes spectrales

L'objectif de cette section est de présenter des méthodes numériques basées sur une approximation spectrale pour les équations intégral-différentielles. Ces méthodes cherchent des solutions en termes d'une série des fonctions de la base.

3.3.1 Méthode de Galerkin

On applique la méthode de Galerkin lorsque les conditions aux limites sont périodiques ou homogènes.

Soient $X = L^2(\Omega)$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur X et $\mathcal{B} = \{v \in X, Bv = 0\}$ le sous-espace des fonctions de X vérifiant les conditions aux limites avec B est un opérateur de trace, déterminant les conditions aux limites, on l'omettra si le domaine est périodique. Dans cette méthode les $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ forment une base de \mathcal{B} .

En cherchant u_N dans \mathcal{B} engendré par les $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, on est sûr de trouver une solution vérifiant les conditions aux limites.

Soit P_N^\perp la projection orthogonale de X sur \mathcal{B}_N . La méthode de Galerkin consiste à résoudre le problème approché suivant

$$\begin{aligned} u_N &\in \mathcal{B}_N \\ \text{telle que } P_N^\perp R_N &= 0 \\ \text{avec } R_N &= u'_N - Au_N - g. \end{aligned}$$

Méthode de Galerkin-Chebyshev

On considère l'équation intégral-différentielles de Volterra [14]

$$\begin{cases} u'(x) = g(x) + \int_a^x K(x, t)u(t) dt, & x \in [a, b], \\ u(a) = u_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

où $u(x)$ est la fonction inconnue, $K(x, t)$ est une fonction donnée continue et carré intégrable et g est une fonction donnée.

On suppose que

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{j=0}^N c_j T_j \left(\frac{2x - (b-a)}{b-a} \right), \quad (3.3)$$

où $T_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right)$ est le polynôme de Chebyshev sur $[a, b]$. Alors, on a

$$u'(x) \approx u'_N(x) = \sum_{j=0}^N \frac{2}{b-a} c_j T'_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right). \quad (3.4)$$

En substituant (3.3) et (3.4) dans (3.2), on obtient

$$\sum_{j=0}^N \frac{2}{b-a} c_j T'_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) = g(x) + \sum_{j=0}^N c_j \int_a^x K(x, t) T_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dt, \quad x \in [a, b] \quad (3.5)$$

Pour déterminer les coefficients c_j , on utilise l'idée de Galerkin par multipliant les deux cotés de l'équation (3.5) par $T_i\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right)$ et intégrant par rapport à x de -1 à 1 . Alors, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \frac{2}{b-a} c_j \int_{-1}^1 T'_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) T_i\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx &= \int_{-1}^1 g(x) T_i\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx + \\ &\int_{-1}^1 \left(\sum_{j=0}^N c_j \int_a^x K(x, t) T_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dt \right) T_i\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx, \quad x \in [a, b], \end{aligned}$$

pour $i = 0, \dots, N$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \frac{2}{b-a} c_j \int_{-1}^1 T'_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) T_i\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx &= \int_{-1}^1 g(x) T_i\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx + \\ \sum_{j=0}^N c_j \int_{-1}^1 \left(\int_a^x K(x, t) T_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dt \right) T_i\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx, \quad x \in [a, b]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

La condition initiale est donnée par

$$u(a) = u_0 \Rightarrow \sum_{j=0}^N c_j T_j\left(\frac{2a-(b-a)}{b-a}\right) = \sum_{j=1}^N c_j T_j(-1) = u_0. \quad (3.7)$$

Les équations (3.6) et (3.7) forment un système de $(N+1)$ équations algébriques linéaires. On calcule les éléments de $\{c_j\}_{j=0}^N$ par la résolution de ce système à l'aide de la méthode directe. Enfin la solution approchée de l'équation (3.2), est donnée par la formule (3.3).

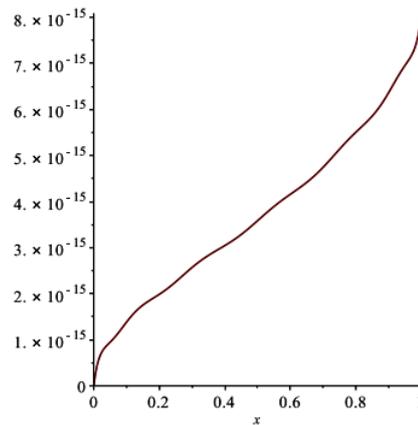
d'une manière analogue, on peut appliqué cette approche pour l'équation intégral-différentielle de Fredholm de la forme

$$\begin{cases} u'(x) &= g(x) + \int_a^b K(x, t) u(t) dt, \quad x \in [a, b], \\ u(a) &= u_0, \end{cases}$$

Exemple 3.1. On considère l'équation intégral-différentielle de Fredholm de la forme [14]

$$\begin{cases} u'(x) &= 1 - 2x \sin(x) + \int_0^x u(t) dt, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

avec la solution exacte est $u(x) = x \cos(x)$. Dans cet exemple, en utilisant la méthode de Galerkin par les polynômes de Chebyshev pour $n = 4, 8$ et 12 . La fonction approchée $u(x)$

FIGURE 3.1 – Méthode de Chebychev-Galerkin, Erreur absolue, $N = 12$.

s'écrit comme

$$u(x) \approx \sum_{j=0}^n c_j T_j(2x - 1),$$

où $T_j(2x - 1)$ sont les polynômes de Chebyshev. Pour $n = 8$, l'équation (3.8) devient

$$\sum_{j=0}^8 c_j T_j'(2x - 1) = 1 - 2x \sin(x) + \int_0^x \sum_{j=0}^8 c_j T_j(2t - 1) dt. \quad (3.9)$$

En multipliant les deux cotés de l'équation (3.9) et l'intégrant par rapport à x de -1 à 1 , on obtient un système linéaire, qui est résolu par des méthodes directes pour déterminer les coefficients c_j . Les résultats numériques sont présentés dans le Tableau 3.1, pour $N = 4, 8, 12$, et l'erreur dans la Figure 3.1 pour $N = 12$.

TABLE 3.1 – Méthode de Galerkin, Erreur absolue, Exemple 3.1, $N = 4, 8, 12$.

x	Erreur absolue		
	n=4	n=8	n=12
0.0	0	0	0
0.2	5.89e-04	3.45e-09	1.99e-15
0.4	8.39e-04	5.14e-09	3.05e-15
0.6	1.21e-03	7.19e-09	4.16e-15
0.8	1.54e-03	9.39e-09	5.51e-15
1.0	2.30e-03	1.38e-08	8.09e-15

3.3.2 Méthode de Tau

La méthode de Tau est une modification de la méthode Galerkin, qui est applicable pour les équations avec conditions aux limites non périodiques.

Soit $\{\varphi_j\}_{j \geq 1}$ une base orthogonale ne vérifiant pas les conditions aux limites, la méthode de Tau consiste à résoudre le problème approché

$$\begin{aligned} u_N &\in \mathcal{B}_N \\ \text{telle que } &\begin{cases} P_N^\perp R_N = 0, & (N-1) \text{ équations} \\ Bu_N = 0, \end{cases} \\ \text{avec } R_N &= u'_N - Au_N - g. \end{aligned}$$

où P_N^\perp désigne la projection orthogonale de X sur \mathcal{B}_{N-1} .

Méthode de Tau-Chebyshev

La méthode de Tau-Chebyshev est basée sur l'interpolation de la solution du problème par une somme finie de la série de Chebyshev sous la forme

$$u(x) \approx \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \cdots + c_{N-1}T_{N-1}(x), \quad x \in [-1, 1].$$

où $T_k(x) = \cos(k \cos^{-1}(x))$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ sont les polynômes de Chebyshev de première espèce et les $\{c_k\}_{k=0}^{N-1}$ sont les coefficients inconnus à déterminer. Dans cette méthode, nous travaillons dans l'espace spectral de ces coefficients.

Théorème 3.3. *Si u est Lipschitzienne continue sur $[-1, 1]$, alors u a une représentation unique comme une série absolument et uniformément convergente de la forme*

$$u(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \cdots \quad (3.10)$$

et les coefficients sont donnés par la formule

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Soit $u_{N-1}(x)$ de la forme

$$u_{N-1}(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \cdots + c_{N-1}T_{N-1}(x) \quad (3.12)$$

Chaque intervalle $[a, b]$ peut être converti à l'intervalle $[-1, 1]$, en utilisant les polynômes de Chebyshev de la forme

$$T_k^*(x) = T_k(\alpha x + \beta), \quad x \in [a, b],$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{2}{b-a} \text{ et } \beta = -\frac{b+a}{b-a}.$$

Tout d'abord, nous avons besoin d'un ensemble de N points de collocation $x_1, x_2, \dots, x_N \in [-1, 1]$ pour trouver une bonne transformation entre l'approximation spectrale (3.12) de u et ses représentations physiques $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N)$.

Soit

$$p_{N-1}(x) = \frac{1}{2}a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + \cdots + a_{N-1}T_{N-1}(x) \quad (3.13)$$

le polynôme unique obtenu par l'interpolation de $u(x)$ à travers les points x_1, x_2, \dots, x_N . Alors on a le théorème suivant sur l'estimation d'erreur [18].

Théorème 3.4. Soit u a au moins N dérivés sur l'intervalle $[-1, 1]$. Alors

$$u(x) - p_{N-1}(x) = \frac{1}{N!} u^{(N)}(\xi) \prod_{k=1}^N (x - x_k), \quad (3.14)$$

pour certain ξ sur l'intervalle étalé par x et les points d'interpolations. Le point ξ dépend de la fonction u , N , x et l'emplacement des points d'interpolation.

Par conséquent, les points d'interpolation sont les racines du polynôme de Chebyshev $T_N(x)$ du premier type

$$x_k = -\cos \frac{(2k-1)\pi}{2N}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Pour ces points $\{x_k\}_{k=1}^N$, les polynômes $\{p_{N-1}\}$ sont généralement proches de u que les polynômes $\{u_{N-1}\}$ et si u est analytique sur le domaine de discussion alors $\|u - u_{N-1}\|$ et $\|u - p_{N-1}\|$ diminuent géométriquement quand $N \mapsto \infty$. C'est la convergence spectrale, i.e. la convergence de $\|u - u_{N-1}\|$ et $\|u - p_{N-1}\|$ vers zéro est plus rapide que toute puissance de $\frac{1}{N}$ quand $N \mapsto \infty$.

L'intégration numérique et l'interpolation de Lagrange sont très proches. La formule d'intégration pour une fonction continue f sur $[-1, 1]$ est de la forme

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^N \omega_k f(x_k) = \mathbf{w}f(\mathbf{x}),$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_N]^T, \\ \mathbf{w} &= [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N], \end{aligned}$$

et ω_k sont les poids de la forme

$$\omega_k = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Les formules de quadrature de Gauss sont basées sur les points de Legendre x_k , $k = 1, \dots, N$ et ces formules sont exactement pour les polynômes de degré $2N - 1$. L'idée de la quadrature de Clenshaw-Curtis est d'utiliser les points de Chebyshev \mathbf{x} comme des nœuds. Si on utilise les points de Chebyshev, on obtient la règle de quadratures de Clenshaw-Curtis classique. Mais, si on utilise les zéros de la première dérivée d'un polynôme de Chebyshev plus les extrémités ± 1 , i.e.

$$x_k = -\cos \frac{(k-1)\pi}{N-1}, \quad k = 1, \dots, N,$$

dans $[-1, 1]$ (les points de Chebyshev de second ordre), on obtient la règle de quadrature de Clenshaw-Curtis pratique.

Laissez-nous calculer maintenant la matrice de différenciation D tel que, si \mathbf{f} est le vecteur colonne des coefficients de Chebyshev d'une fonction f , alors $D\mathbf{f}$ est le vecteur colonne des

coefficients de Chebyshev de la dérivée $\frac{df}{dx}$. Sur $[-1, 1]$, les dérivées de T_i vérifient

$$\begin{aligned} T_0 &= T_1', \\ T_1 &= \frac{T_2'}{4}, \\ &\vdots \\ T_i &= \frac{T_{i+1}'}{2(i+1)} - \frac{T_{i-1}'}{2(i-1)}, \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{T_0'}{2} = 0, \quad T_i' &= 2i(T_{i-1} + T_{i-3} + \cdots + T_1), & i \text{ paire}, \\ T_i' &= 2i(T_{i-1} + T_{i-3} + \cdots + T_1 + 0.5T_0), & i \text{ impaire}. \end{aligned}$$

Par conséquent, D est une matrice triangulaire supérieure,

$$\begin{aligned} D_{ii} = 0, \quad D_{ij} &= 0, & \text{pour } (j-i) \text{ paire}, \\ D_{ij} &= 2j, & \text{sinon.} \end{aligned}$$

Les coefficients $f^{(p)}$ sont $D^{(p)}\mathbf{f}$. Si le domaine de discussion est $[a, b]$, alors la matrice D est multipliée par $\frac{2}{b-a}$.

D'une manière analogue, on calcule la matrice d'intégration J telle que les coefficients de $\int f(t) dt$ sont $J\mathbf{f}$. Ici, le premier coefficient du résultat $J\mathbf{f}$ peut être modifié pour obtenir les coefficients d'une primitive spécifique de f . Par exemple, les coefficients de la primitive qui s'annule en a sont obtenus par $J_0\mathbf{f}$.

Les formules de base sur $[-1, 1]$ sont

$$\begin{aligned} \int \frac{T_0}{2} dx &= \frac{T_1}{2}, \\ \int T_1 dx &= \frac{T_0}{4} + \frac{T_2}{4}, \\ &\vdots \\ \int T_k dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{T_{k+1}}{k+1} + \frac{T_{k-1}}{k-1} \right), \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} J_{k,k} &= 0, \\ J_{0,1} &= \frac{1}{2}, \\ J_{k,k-1} &= \frac{1}{2k} = -J_{k,k+1} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Pour le domaine de discussion est $[a, b]$, alors la matrice J est multipliée par $\frac{b-a}{2}$.

Par un exemple, si on calcule les coefficients d'une matrice primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$, nous devons alors résoudre le problème à valeur initiale

$$\frac{dF}{dx} = f(x), \quad u(-1) = \alpha, \quad x \in [-1, 1].$$

Si \mathbf{c} sont les coefficients de Chebyshev de F , et \mathbf{f} sont les coefficients de f , l'équation est devient dans l'espace spectral comme

$$D\mathbf{c} = \mathbf{f}.$$

On remarque que

$$u(-1) = c_0 \frac{T_0}{2} + c_1 T_1(-1) + c_2 T_2(-1) + \cdots + c_{N-1} T_{N-1}(-1) = \alpha.$$

Cette dernière équation peut être écrit comme

$$T\mathbf{c} = \alpha$$

où

$$T = \left[\frac{T_0}{2}, T_1(-1), T_2(-1), \dots, T_{N-1}(-1) \right].$$

Cela signifie que nous pouvons remplacer la dernière ligne de D par T et la dernière entrée de \mathbf{f} par α , en obtenant une nouvelle matrice \tilde{D} et un nouveau vecteur $\tilde{\mathbf{f}}$. Finalement, les coefficients de la primitive sont donnés par

$$\mathbf{c} = \tilde{D}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}.$$

Applications

On considère l'équation intégrale-différentielle de Fredholm de la forme [89]

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} = \int_a^b K(x,t) u(t) f(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.15)$$

avec les conditions générales

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij}^{(1)} u^{(j-1)}(x_{ij}^{(1)}) + \cdots + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}^{(m)} u^{(j-1)}(x_{ij}^{(m)}) = \beta_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.16)$$

où $x_{ij}^{(k)} \in [a, b]$, $\forall i, j, k = 1, \dots, m$. Par exemple pour $m = 2$:

- Conditions initiales, $u(a) = \beta_1$, $u'(a) = \beta_2$.
- Conditions aux limites, $\alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) = \beta_1$, $\alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) = \beta_2$.

En utilisant la discrétisation matricielle avec les polynômes de Chebyshev décalé pour la formule différentielle d'ordre m , on obtient

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} = \left(\sum_{k=0}^m P_k(x) D^k \right) \mathbf{c},$$

et l'opérateur intégrale de Fredholm $A(u)$ devient

$$\begin{aligned}
A(u)(x) &= \int_a^b K(x,t)u(t) dt \\
&= \int_a^b K(x,t) \sum_{k=0}^{N-1} c_k T_k^*(t) dt, \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \int_a^b K(x,t) T_k^*(t) dt, \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} c_k I_k(x), \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{j=0}^{N-1} k_{ij} T_j^*(x), \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} k_{ij} c_k \right] T_j^*(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T$ sont les coefficients de u , alors $K\mathbf{c}$ sont les coefficients de $A(u)$, donnés par la matrice

$$K = [k_{ij}]_{i,j=0}^{N-1}.$$

La matrice K peut être calculée à partir de

$$\begin{aligned}
I_k(x_s) &= \int_a^b H(x_s, t) T_k^*(t) dt, \\
&= \omega_i K(x_s, x_i) T_k^*(x_i), \quad s, k = 0, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Sous la forme

$$[I_k(x_s)]_{k,s=0}^{N-1} = [K(x_s, x_i)]_{s,i=0}^{N-1} \cdot \text{diag}([\omega_i]_{i=0}^{N-1} \cdot T).$$

L'équation intégrale de Fredholm (3.15) devient

$$\left(\sum_{k=0}^m P_k(x) D^k - K \right) \mathbf{c} = \mathbf{f}, \quad (3.17)$$

où \mathbf{f} sont les coefficients de Chebyshev de f . L'équation (3.17) forme un système linéaire, qui est résolu par des méthodes directes.

De même, pour l'équation intégrale de Volterra

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} = \int_a^x K(x,t) u(t) f(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.18)$$

L'opérateur intégral de Volterra devient

$$\begin{aligned}
A(u)(x) &= \int_a^x K(x,t) u(t) dt \\
&= \left(T J_0 T^{-1} \cdot \times K(x_i, x_j) \right) \mathbf{u},
\end{aligned}$$

où \mathbf{u} sont les valeurs de $u(x)$ aux points \mathbf{x} . Par conséquent, la représentation physique de l'opérateur intégral de Volterra est la matrice

$$V_{phys} = T J_0 T^{-1} \cdot \times K(x_i, x_j),$$

tandis que, sa représentation spectrale est donnée par

$$V_{spec} = T V_{phys} T^{-1}.$$

L'équation intégral-différentielle de Volterra devient en représentation physique

$$\left(\sum_{k=0}^m P_k(x) D^k - K \right) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.19)$$

où \mathbf{f} sont les valeurs de f sur les points \mathbf{x} . L'équation (3.19) forme un système linéaire, qui est résolu par des méthodes directe.

Dans le cas non linéaires, on obtient un système non linéaires, qui est résolu par des méthodes itératives.

Exemple 3.2. On considère l'équation intégral-différentielle de Volterra du premier ordre de la forme [90]

$$u'(x) + u(x) - x(1 + 2x) \int_0^x e^{t(x-t)} u(t) dt = 1 + 2x, \quad x \in [0, 1],$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 1.$$

La solution exacte de cette équation est $u(x) = \exp(x^2)$. Les résultats numériques sont présentés dans le Tableau 3.2 pour $N = 10$ et les Figures 3.2 et 3.3. Dans cet exemple, on a utilisé les points de Chebyshev de second type.

TABLE 3.2 – Méthode de Tau-Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.2, $N = 10$.

x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur absolue
0.00	1.0000000000	1.0000000000	0
0.03	1.0009096584	1.0009096153	4.31 e-08
0.12	1.0137778523	1.0137778438	8.48 e-09
0.25	1.0644944589	1.0644944403	1.85 e-08
0.41	1.1861518568	1.1861518270	2.97 e-08
0.59	1.4110900788	1.4110900897	1.09 e-08
0.75	1.7550546569	1.7550546070	4.99 e-08
0.88	2.1808795173	2.1808795343	1.70 e-08
0.97	2.5615226473	2.5615225943	5.29 e-08
1.00	2.7182818284	2.7182818363	7.91 e-09

Exemple 3.3. On considère l'équation intégral-différentielle de Volterra-Fredholm d'ordre 2 de la forme [90]

$$u''(x) + xu'(x) - xu(x) = -x - 2x^2 + \int_0^1 6xu^2(t) dt + \int_0^x 2u(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

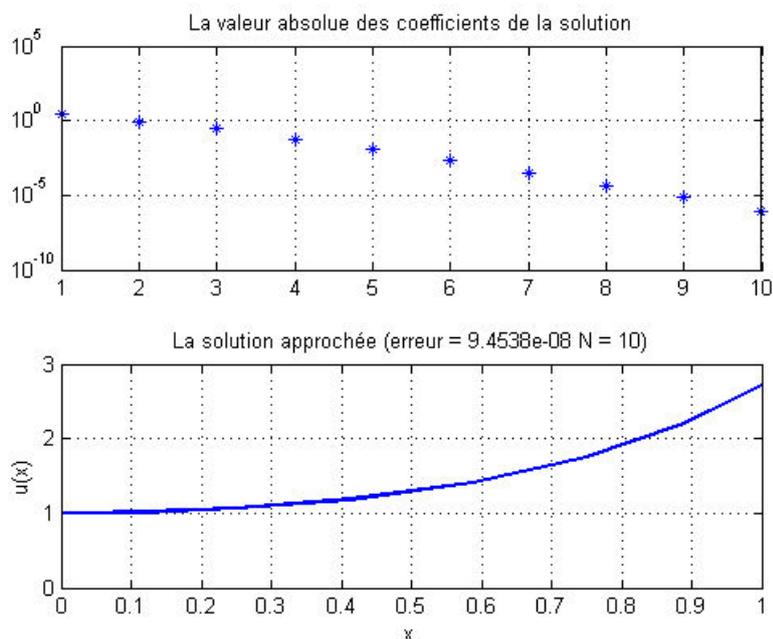


FIGURE 3.2 – Méthode de Tau-Chebyshev, Exemple 3.2, $N = 10$.

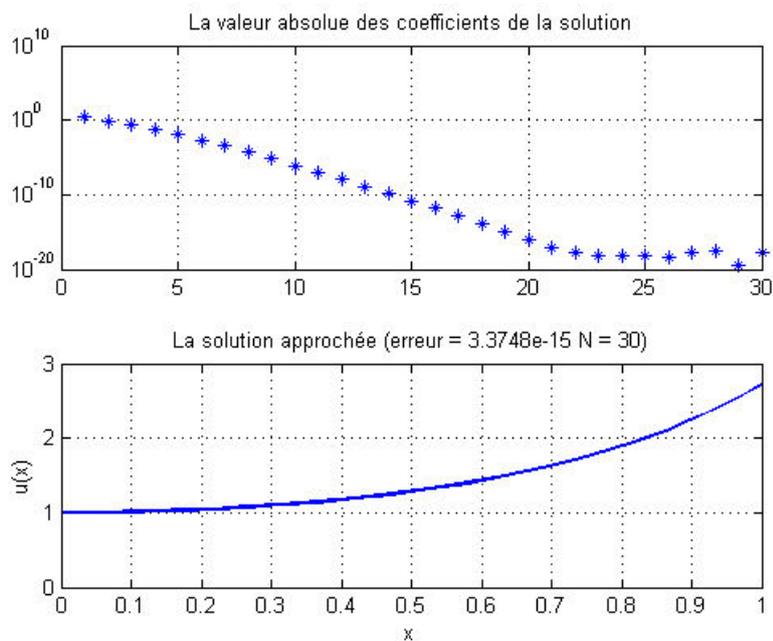
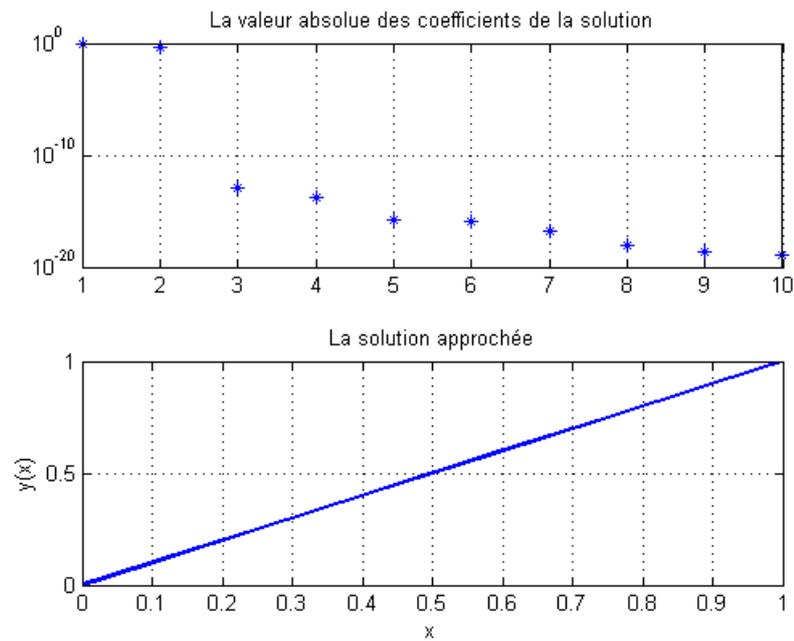


FIGURE 3.3 – Méthode de Tau-Chebyshev, Exemple 3.2, $N = 30$.

FIGURE 3.4 – Méthode de Tau-Chebyshev, Exemple 3.3, $N = 10$.

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(0) &= 1, \\ u'(0) &= 1. \end{aligned}$$

La solution exacte de cette équation est $u(x) = x$. Les résultats numériques sont présentés dans le Tableau 3.3 pour $n = 10$ et les Figures 3.4, 3.5, 3.6 et 3.7. Dans cet exemple, on a utilisé les points de Chebyshev de second type.

TABLE 3.3 – Méthode de Tau-Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.3, $N = 10$.

x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur absolue
0	0	0.000000000000000	0
0.03	0.030153689607046	0.030153689607046	1.38 e-16
0.12	0.116977778440511	0.116977778440510	8.32 e-16
0.25	0.250000000000000	0.249999999999991	9.32 e-15
0.41	0.413175911166535	0.413175911166493	4.20 e-14
0.59	0.586824088833465	0.586824088833346	1.18 e-13
0.75	0.750000000000000	0.749999999999755	2.44 e-13
0.88	0.883022221559489	0.883022221559094	3.95 e-13
0.97	0.969846310392954	0.969846310392434	5.20 e-13
1.00	1.000000000000000	0.999999999999431	5.69 e-13

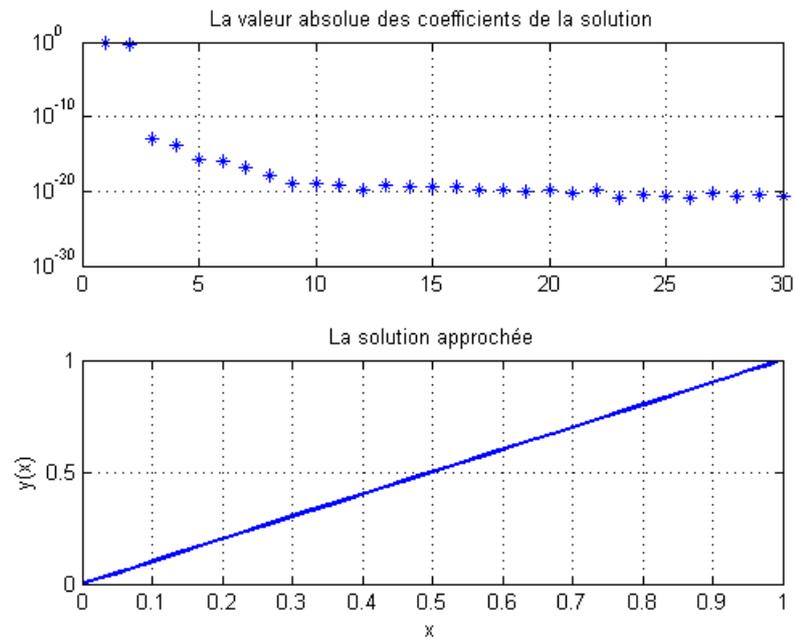


FIGURE 3.5 – Méthode de Tau-Chebyshev, Exemple 3.3, $N = 30$.

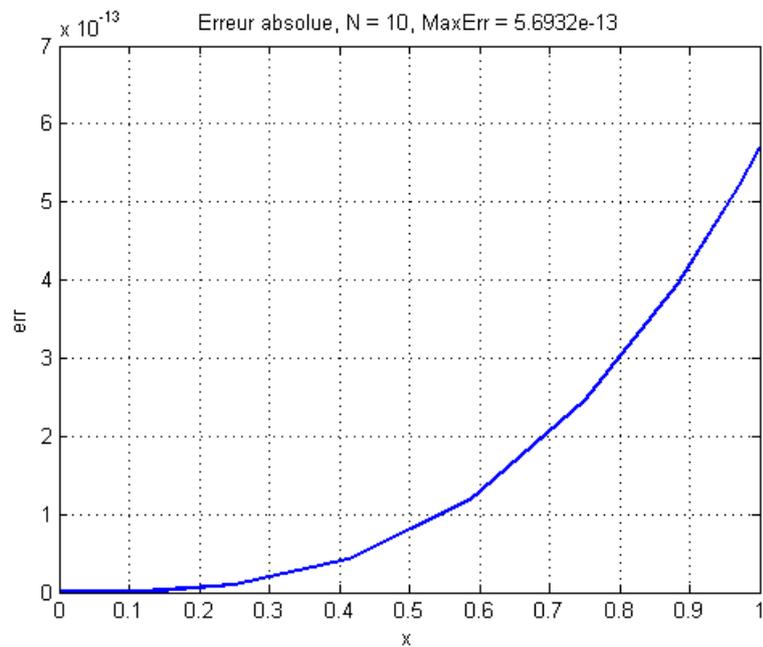


FIGURE 3.6 – Méthode de Tau-Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.3, $N = 10$.

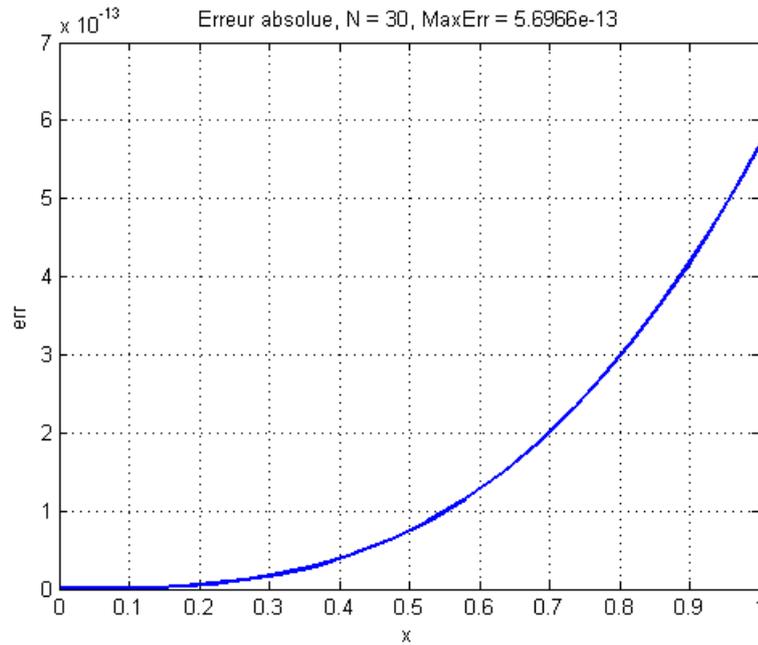


FIGURE 3.7 – Méthode de Tau-Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.3, $N = 30$.

Les résultats numériques obtenus dans les Tableaux 3.2 et 3.3 et les Figures 3.2, 3.3, 3.6 et 3.7 montrent que l'erreur absolue est décroît à chaque fois le pas de discrétisation est petit. Donc, pour améliorer la solution numérique, il est préféré de choisir un pas très petit.

3.3.3 Méthode de collocation

La méthode de collocation est probablement la méthode la plus simple à mettre en œuvre. Les conditions d'applications pour cette méthode sont les mêmes que celle de Galerkin.

Pour cette méthode, les $\{\varphi_j\}_{j \geq 1}$ forment une base complète de X et vérifient les conditions aux limites.

On se donne de plus N points distincts $\{x_i\}_{i=1}^N$ dits de collocation dans Ω tels que la matrice $[\varphi_j(x_i)]_{i,j=1}^N$ soit inversible.

La méthode de collocation consiste à chercher

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x) \text{ dans } \mathcal{B}_N$$

telle que son résidu R_N vérifie les N conditions

$$R_N(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

qui vont déterminer les coefficients $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^N c_j \left\{ \phi_j'(x_i) - \int_{\Omega} K(x_i, t) \phi_j(t) dt \right\} = g(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.20)$$

Méthode de collocation par les Ondelettes

On considère l'équation intégrale-différentielle de Volterra de la forme [25]

$$u^{(m)}(x) = g(x) + \int_0^x K(x, t) F(u(t)) dt, \quad 0 < x < b, \quad (3.21)$$

avec les conditions aux limites

$$u^{(j)}(0) = \alpha_j, \quad j = 0, 1, \dots, r-1, \quad (3.22)$$

$$u^{(j)}(b) = \beta_j, \quad j = r, r+1, \dots, m-1. \quad (3.23)$$

où $u^{(m)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre m de $u(x)$, le noyau $K(x, t)$ et $g(x)$ sont des fonctions données, $F(u(t))$ est une fonction non-linéaire. $u(x)$ et $g(x)$ sont supposées réelles et différentiable sur l'intervalle $[0, b]$ et α_j , $0 \leq j \leq (r-1)$ et β_j , $r \leq j \leq (m-1)$ sont des constantes réelles.

Dans cette méthode, en utilisant la méthode de collocation basée sur les ondelettes de Legendre $\Psi_{nm}(x)$ pour résoudre l'équation (3.21). La fonction approchée $u(x)$ s'écrit comme

$$u(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \Psi_{nm}(x) = C^T \Psi(x), \quad (3.24)$$

où

$$\Psi_{nm}(x) = \begin{cases} 2^{k/2} \sqrt{m + \frac{1}{2}} P_m(2^k x - \hat{n}) & \text{pour } \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq x \leq \frac{\hat{n}+1}{2^k}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$c_{nm} = \langle u(x), \Psi_{nm}(x) \rangle,$$

et $P_m(x)$ sont les polynômes de Legendre d'ordre m , $\hat{n} = 2n - 1$ et C et $\Phi(x)$ sont des matrices $(2^{k-1}M \times 1)$

$$C = [c_{10}, \dots, c_{1M-1}, c_{20}, \dots, c_{2M-1}, c_{2^{k-1}0}, \dots, c_{2^{k-1}M-1}]^T,$$

et

$$\Psi(x) = [\Psi_{10}(x), \dots, \Psi_{1M-1}(x), \Psi_{20}(x), \dots, \Psi_{2M-1}(x), \Psi_{2^{k-1}0}(x), \dots, \Psi_{2^{k-1}M-1}(x)]^T.$$

Maintenant, on définit

$$L = \frac{d^m}{dx^m}.$$

Alors,

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x (\cdot) \underbrace{dx \cdots dx}_{m\text{-fois}}$$

On applique L^{-1} sur les deux cotés de l'équation (3.21), on obtient

$$L^{-1}[u^{(m)}(x)] = L^{-1}[g(x)] + L^{-1} \left[\int_0^x K(x, t) F(u(t)) dt \right],$$

$$u(x) = f(x) + h(x) + L^{-1} \left[\int_0^x K(x, t) F(u(t)) dt \right].$$

où $h(x) = L^{-1}[g(x)]$ et $f(x)$ est une fonction de x . On pose

$$G(x) = f(x) + h(x),$$

Donc

$$u(x) = G(x) + \int_0^x (x-t)^m K(x,t) F(u(t)) dt.$$

Soit

$$u(x) \approx C^T \Psi(x).$$

Alors, on a

$$C^T \Psi(x) = G(x) + \int_0^x (x-t)^m K(x,t) F(C^T \Psi(t)) dt. \quad (3.25)$$

Maintenant, on peut prendre comme points de collocation, les points $x_i = \cos((2i+1)\pi/2^k M)$, $i = 1, 2, \dots, 2^{k-1} M$, l'équation (3.25) devient

$$C^T \Psi(x_i) = G(x_i) + \int_0^{x_i} (x-t)^m K(x,t) F(C^T \Psi(t)) dt. \quad (3.26)$$

Pour utiliser la méthode d'intégration par quadrature de Gauss, on transforme l'intervalle $[0, x_i]$ à l'intervalle $[-1, 1]$, en utilisant la transformation suivante

$$\tau = \frac{2}{x_i} t - 1, \quad t \in [0, x_i].$$

L'équation (3.26) devient

$$C^T \Psi(x_i) = G(x_i) + \frac{x_i}{2} \int_{-1}^1 \left(x - \frac{x_i}{2}(\tau+1)\right)^m K\left(x, \frac{x_i}{2}(\tau+1)\right) F\left(C^T \Psi\left(\frac{x_i}{2}(\tau+1)\right)\right) d\tau.$$

Alors, on a

$$C^T \Psi(x_i) = G(x_i) + \frac{x_i}{2} \sum_{j=1}^s \omega_j \left(x - \frac{x_i}{2}(\tau_j+1)\right)^m K\left(x, \frac{x_i}{2}(\tau_j+1)\right) F\left(C^T \Psi\left(\frac{x_i}{2}(\tau_j+1)\right)\right), \quad (3.27)$$

pour $i = 1, 2, \dots, 2^{k-1} M$. Où τ est le zéro des polynômes de Legendre P_{s+1} et ω_j sont les poids donnés par la formule

$$\omega_j = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^s \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} d\tau.$$

L'équation (3.27) forme un système de $(2s+1)$ équations non-linéaires. On calcule les éléments de C par la résolution de ce système à l'aide de la méthode de Newton.

Exemple 3.4. On considère l'équation intégrale-différentielle de Volterra de la forme [25]

$$u^{(4)}(x) = 5e^x - 1 + \int_0^x u(x) dx, \quad 0 < x < 1, \quad (3.28)$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = 0, u'(0) = 1, \quad (3.29)$$

$$u(1) = e, u'(1) = 2e. \quad (3.30)$$

Pour déterminer les coefficients (c_{nm}) , nous pouvons prendre comme points de collocation, les racines du polynôme de Chebyshev

$$x_j = \cos\left((2j+1)\pi/2^k M\right), \quad j = 1, 2, \dots, 2^{k-1}M.$$

De plus, on utilise la règle d'intégration par quadrature de Gauss

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^s \omega_i f(\tau_i),$$

où τ_i sont les racines du polynôme de Legendre P_{s+1} et ω_i sont les poids de la forme

$$\omega_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^s \left(\frac{\tau - \tau_i}{\tau_k - \tau_i} \right) d\tau.$$

Pour $k = 1$ et $M = 4$, on obtient $u(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!}$. Donc, on $u(x) = xe^x$.

TABLE 3.4 – Méthode de collocation, Erreur absolue, Exemple 3.4, $M = 4, 10, 15$ et $k = 1$.

x	Erreur absolue		
	M=4	M=10	M=15
0.0	0	0	0
0.2	1.39e-05	4e-08	0
0.4	4.63e-04	1.2e-07	6.00e-8
0.6	3.67e-03	2.28e-06	1.60e-7
0.8	1.62e-02	3.94e-06	2.60e-7
1.0	5.16e-02	7.07e-06	1.52e-6

3.4 Résolution numériques des E.I.D.

3.4.1 Méthode de RBF collocation pour les E.I.D.V.

Dans cette partie, nous présentons une méthode numérique pour résoudre les équations intégral-différentielles de Volterra linéaires et non-linéaires d'ordre supérieur. Cette méthode est basée sur l'interpolation par les fonctions de base radiales, en utilisant la formule de quadrature de Legendre-Gauss-Lobatto. La méthode proposée réduit le problème à un système de plusieurs équations algébriques. Quelques exemples numériques ont été traités pour illustrer l'efficacité de cette méthode.

Principe de la méthode

On considère les équations intégral-différentielles de Volterra de la forme

$$u^{(m)}(x) = g(x) + \int_0^x K(x,t)u(t) dt, \quad 0 < x < b, \quad (3.31)$$

et

$$u^{(m)}(x) = g(x) + \int_0^x K(x, t) \psi(u(t)) dt, \quad 0 < x < b, \quad (3.32)$$

avec les conditions aux limites

$$u^{(j)}(0) = \alpha_j, \quad j = 0, 1, \dots, r-1, \quad (3.33)$$

$$u^{(j)}(b) = \beta_j, \quad j = r, r+1, \dots, m-1. \quad (3.34)$$

où $u^{(m)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre m de $u(x)$, le noyau $K(x, t)$ et $g(x)$ sont des fonctions données, $\psi(u(t))$ est une fonction non-linéaire. $u(x)$ et $g(x)$ sont supposées réelles et différentiable sur l'intervalle $[0, b]$ et α_j , $0 \leq j \leq (r-1)$ et β_j , $r \leq j \leq (m-1)$ sont des constantes réelles.

Équations intégro-différentielles de Volterra linéaires

Pour illustrer l'idée principale de cette méthode, on définit

$$L = \frac{d^m}{dx^m}.$$

Alors,

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x (\cdot) \underbrace{dx \cdots dx}_{m\text{-fois}}$$

On applique L^{-1} sur les deux cotés de l'équation (3.31), on obtient

$$L^{-1}[u^{(m)}(x)] = L^{-1}[g(x)] + L^{-1} \left[\int_0^x K(x, t) u(t) dt \right].$$

Puis, on a

$$u(x) = h(x) + G(x) + \frac{1}{(m)!} \int_0^x (x-t)^{(m)} K(x, t) u(t) dt, \quad (3.35)$$

où

$$G(x) = L^{-1}[g(x)], \quad h(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k}{k!} x^k,$$

et les α_j , $0 \leq j \leq (r-1)$ sont des constantes qui définissent les conditions à la borne $x = a$. Cependant, les constantes α_j , $r \leq j \leq (m-1)$ ne sont pas données mais seront déterminées plus tard en utilisant les conditions aux limites à la borne $x = b$, où

$$\alpha_r = u^{(r)}(0), \alpha_{r+1} = u^{(r+1)}(0), \dots, \alpha_{m-1} = u^{(m-1)}(0).$$

On pose $f(x) = h(x) + G(x)$, alors l'équation (3.35) devient

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{(m)!} \int_0^x (x-t)^{(m)} K(x, t) u(t) dt \quad (3.36)$$

La fonction approchée $u(x)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions de base radiales

$$u(x) \simeq \sum_{i=0}^n \lambda_i \phi_i(x) = \Phi^T(x) \Lambda \quad (3.37)$$

où

$$\begin{aligned}\phi_i(x) &= \phi(\|x - c_i\|), \\ c_i \text{ for } i = 0, 1, \dots, n &\text{ sont les nœuds de Legendre-Gauss-Lobatto,} \\ \Lambda &= [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n]^T, \\ \Phi(x) &= [\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)]^T.\end{aligned}$$

En substituant l'approximation (3.37) dans l'équation (3.36), on obtient

$$\Phi^T(x)\Lambda = f(x) + \frac{1}{(m)!} \int_0^x (x-t)^{(m)} K(x,t) \Phi^T(t) \Lambda dt,$$

Donc,

$$\left[\Phi^T(x) - \frac{1}{(m)!} \int_0^x (x-t)^{(m)} K(x,t) \Phi^T(t) dt \right] \Lambda = f(x). \quad (3.38)$$

Maintenant, on peut prendre comme points de collocation, les points $x_j = \frac{b}{n}j$, $j = 0, 1, \dots, n$, l'équation (3.38) devint

$$\left[\Phi^T(x_j) - \frac{1}{(m)!} \int_0^{x_j} (x_j-t)^{(m)} K(x_j,t) \Phi^T(t) dt \right] \Lambda = f(x_j), \quad (3.39)$$

Pour utiliser la méthode d'intégration par quadrature de Gauss, on transforme l'intervalle $[0, x_j]$ à l'intervalle $[-1, 1]$, en utilisant la transformation suivante

$$\eta = \frac{2}{x_j}t - 1, \quad t \in [0, x_j].$$

L'équation (3.39) devient

$$\left[\Phi^T(x_j) - \frac{x_j}{2(m)!} \int_{-1}^1 \left(x_j - \frac{x_j}{2}(\eta+1)\right)^{(m)} K\left(x_j, \frac{x_j}{2}(\eta+1)\right) \Phi^T\left(\frac{x_j}{2}(\eta+1)\right) d\eta \right] \Lambda = f(x_j) \quad (3.40)$$

On utilise la formule de quadrature de Legendre-Gauss-Lobatto, on a

$$\left[\Phi^T(x_j) - \frac{x_j}{2(m)!} \sum_{i=0}^n \omega_i \left(x_j - \frac{x_j}{2}(\eta_i+1)\right)^{(m)} K\left(x_j, \frac{x_j}{2}(\eta_i+1)\right) \Phi^T\left(\frac{x_j}{2}(\eta_i+1)\right) \right] \Lambda = f(x_j) \quad (3.41)$$

pour $j = 0, 1, \dots, n$. L'équation (3.41) forment un système de $(n+1)$ équations algébriques linéaires. On calcule les éléments de Λ par la résolution de ce système à l'aide de la méthode directe. Enfin la solution approchée de l'équation (3.31), est donnée par la formule (3.37).

Équations intégro-différentielles de Volterra non-linéaires

L'objectif principal de cette section est pour déterminer la solution numérique de l'équation intégro-différentielle de Volterra non-linéaire d'ordre supérieur de la forme (3.32).

On applique L^{-1} sur les deux cotés de l'équation (3.32), on obtient

$$L^{-1}[u^{(m)}(x)] = L^{-1}[g(x)] + L^{-1} \left[\int_0^x K(x,t) \psi(u(t)) dt \right].$$

Puis, on a

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{(m)!} \int_0^x (x-t)^{(m)} K(x,t) \psi(u(t)) dt, \quad (3.42)$$

En substituant l'approximation (3.37) dans l'équation (3.42), on obtient

$$\Phi^T(x)\Lambda = f(x) + \frac{1}{(m)!} \int_0^x (x-t)^{(m)} K(x,t) \psi(\Phi^T(t)\Lambda) dt.$$

On peut prendre les points $x_j = \frac{b}{n}j$, $j = 0, 1, \dots, n$, comme points de collocation, l'équation (3.4.1) devient

$$\Phi^T(x_j)\Lambda = f(x_j) + \frac{1}{(m)!} \int_0^{x_j} (x_j-t)^{(m)} K(x_j,t) \psi(\Phi^T(t)\Lambda) dt. \quad (3.43)$$

De même, on transfère l'intervalle $[0, x_j]$ à l'intervalle $[-1, 1]$, l'équation (3.43) devient

$$\Phi^T(x_j)\Lambda = f(x_j) + \frac{x_j}{2(m)!} \int_{-1}^1 \left[\left(x_j - \frac{x_j}{2}(\eta+1) \right)^{(m)} K \left(x_j, \frac{x_j}{2}(\eta+1) \right) \psi \left(\Phi^T \left(\frac{x_j}{2}(\eta+1) \right) \Lambda \right) \right] d\eta. \quad (3.44)$$

On utilise la formule de quadrature de Legendre-Gauss-Lobatto, on a

$$\Phi^T(x_j)\Lambda = f(x_j) + \frac{x_j}{2(m)!} \sum_{i=0}^n \omega_i \left(x_j - \frac{x_j}{2}(\eta_i+1) \right)^{(m)} K \left(x_j, \frac{x_j}{2}(\eta_i+1) \right) \psi \left(\Phi^T \left(\frac{x_j}{2}(\eta_i+1) \right) \Lambda \right). \quad (3.45)$$

pour $j = 0, 1, \dots, n$. L'équation (3.45) forme un système de $(n+1)$ équations algébriques non-linéaires. On calcule les éléments de Λ par la résolution de ce système à l'aide de la méthode de Newton. Enfin la solution approchée de l'équation (3.32), est donnée par la formule (3.37).

La convergence de l'interpolation par les fonctions de base radiale a été discuté par [20, 22] et par d'autres chercheurs dans [45, 76, 99].

Résultats numériques

Exemple 3.5. On considère le problème aux limites linéaire pour l'équation intégral-différentielle

$$u^{(4)}(x) = 5e^x - 1 + \int_0^x u(t) dt, \quad 0 < x < 1, \quad (3.46)$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = 0, u'(0) = 1, \quad (3.47)$$

$$u(1) = e, u'(1) = 2e. \quad (3.48)$$

La solution exacte de cette équation est $u(x) = xe^x$. Dans le Tableau 3.5, les erreurs absolues de la méthode proposée avec $n = 10$ pour MQ-RBF ($\epsilon = 0, 8$), IMQ-RBF ($\epsilon = 0, 87$) et GA-RBF ($\epsilon = 0, 99$) sont comparés avec les résultats obtenus par la méthode basée sur les ondelettes dans [25].

Exemple 3.6. On considère le problème aux limites non-linéaire pour l'équation intégral-différentielle

$$u^{(4)}(x) = 1 + \int_0^x e^{-t} u^2(t) dt, \quad 0 < x < 1, \quad (3.49)$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = 1, u'(0) = 1, \quad (3.50)$$

$$u(1) = e, u'(1) = e. \quad (3.51)$$

TABLE 3.5 – Méthode des RBFs, Erreur absolue, Exemple 3.5.

x	Méthode de [25]	La méthode proposée		
	LWM	MQ-RBF	IMQ-RBF	GA-RBF
0.0	0.0	1.93 e-12	6.45 e-13	3.58 e-12
0.2	4 e-08	7.08 e-12	7.31 e-11	1.50 e-10
0.4	1.2 e-07	1.62 e-10	1.44 e-09	1.92 e-10
0.6	2.28 e-06	8.90 e-10	8.10 e-09	4.15 e-10
0.8	3.94 e-06	3.02 e-09	2.70 e-08	1.21 e-09
1.0	7.07 e-06	7.61 e-09	6.80 e-08	3.06 e-09

La solution exacte de cette équation est $u(x) = e^x$. Dans le Tableau 3.6, les erreurs absolues de la méthode proposée avec $n = 10$ pour MQ-RBF ($\epsilon = 0, 78$), IMQ-RBF ($\epsilon = 0, 9$) et avec $n = 6$ pour GA-RBF ($\epsilon = 0, 9$) sont comparés avec les résultats obtenus par la méthode basée sur les ondelettes dans [91].

TABLE 3.6 – Méthode des RBFs, Erreur absolue, Exemple 3.6.

x	Méthode de [91]	La méthode proposée		
	LWM	MQ-RBF	IMQ-RBF	GA-RBF
0.0	0	7.21 e-14	7.23 e-13	1.40 e-14
0.2	2.7 e-06	1.12 e-13	5.58 e-11	4.48 e-09
0.4	2.46 e-05	5.95 e-12	1.22 e-09	1.52 e-07
0.6	1.88 e-05	3.39 e-11	6.88 e-09	9.84 e-07
0.8	4.09 e-05	1.13 e-10	2.30 e-08	3.46 e-06
1.0	1.82 e-05	2.84 e-10	5.80 e-08	8.93 e-06

3.4.2 Méthode de collocation-Chebyshev pour les E.I.D.F.

Dans cette partie, nous allons développer une méthode pour la résolution numérique des équations intégral-différentielles non-linéaires de Fredholm du premier ordre. Cette méthode est basée sur les polynômes de Chebyshev de premier type. La présente méthode réduit le problème à un système de plusieurs équations. Nous allons traiter quelques exemples pour montrer l'efficacité de cette méthode.

Principe de la méthode

On considère l'équation intégral-différentielle de la forme

$$\begin{cases} u'(x) &= \int_0^1 K(x,t)\psi(u(t)) dt + g(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \quad (3.52)$$

avec $K \in L^2[0, 1]^2$ et $g \in L^2[0, 1]$ sont des fonctions données et u est une fonction inconnue à déterminer. On a

$$\begin{aligned}\psi(u(t)) &= \psi\left(\int_0^t u'(x) dx + u_0\right), \\ &= \psi\left(\int_0^t \left(\int_0^1 K(x, s)\psi(u(s)) ds + g(x)\right) dx + u_0\right), \\ &= \psi\left(\int_0^t \int_0^1 K(x, s)\psi(u(s)) ds dx + \int_0^t g(x) dx + u_0\right).\end{aligned}\quad (3.53)$$

La fonction approchée $\psi(u(t))$ s'écrit comme une combinaison linéaire de la forme

$$\psi(u(t)) \simeq \sum_{r=0}^n a_r T_r(t) = A^T T(t).\quad (3.54)$$

Après, en substituant cette dernière approximation (3.54) dans l'équation (3.53), on obtient

$$A^T T(t) = \psi\left(\int_0^t \int_0^1 K(x, s) A^T T(s) ds dx + \int_0^t g(x) dx + u_0\right).\quad (3.55)$$

Pour déterminer les coefficients $\{a_r\}_{r=0}^n$, on va utiliser la méthode de collocation et on peut prendre comme points de collocation les points $t_i = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)\right)$, $i = 0, 1, \dots, n$, de sorte que

$$A^T T(t_i) = \psi\left(\int_0^{t_i} \int_0^1 K(x, s) A^T T(s) ds dx + \int_0^{t_i} g(x) dx + u_0\right).\quad (3.56)$$

Pour utiliser la méthode d'intégration par quadrature de Gauss, on convertit les intervalles $[0, 1]$ et $[0, t_i]$ à l'intervalle $[-1, 1]$, en utilisant les transformations suivantes, respectivement

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 2s - 1, & s &\in [0, 1], \\ \eta_2 &= \frac{2}{t_i}x - 1, & x &\in [0, t_i].\end{aligned}$$

On pose

$$H(x, s) = K(x, s) A^T T(s)$$

L'équation (3.56) devient

$$A^T T(t_i) = \psi\left[\frac{t_i}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H\left(\frac{t_i}{2}(\eta_2 + 1), \frac{1}{2}(\eta_1 + 1)\right) d\eta_1 d\eta_2 + \frac{t_i}{2} \int_{-1}^1 g\left(\frac{t_i}{2}(\eta_2 + 1)\right) d\eta_2 + u_0\right].\quad (3.57)$$

On utilise la formule de quadrature de Clenshaw Curtis, on a

$$A^T T(t_i) = F\left[\frac{t_i}{4} \sum_{j=0}^n \overset{\prime\prime}{\omega}_k \omega_j H\left(\frac{t_i}{2}(\eta_j + 1), \frac{1}{2}(\eta_k + 1)\right) + \frac{t_i}{2} \sum_{j=0}^n \overset{\prime\prime}{\omega}_k g\left(\frac{t_i}{2}(\eta_j + 1)\right) + u_0\right].\quad (3.58)$$

pour $i = 0, 1, \dots, n$ et

$$\omega_k = \frac{4}{n} \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ even}}}^n \overset{\prime\prime}{\omega}_k \frac{1}{1 - i^2} \cos\left(i \frac{k\pi}{n}\right),$$

le symbole $\sum \overset{\prime\prime}$ signifie que le premier et le dernier terme sont divisés par deux. L'équation (3.58) forme un système de plusieurs équations non-linéaires qui est résolu par la méthode de Newton.

Alors, $u'(x)$ est approchée comme

$$\begin{aligned} u'(x) &= \int_0^1 K(x, t)\psi(u(t)) dt + g(x), \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K(x, (\eta + 1)/2) A^T T((\eta + 1)/2) d\eta + g(x), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \omega_i K(x, (\eta_i + 1)/2) A^T T((\eta_i + 1)/2) + g(x). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Aussi, $u(x)$ est approchée comme

$$u(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \omega_i \int_0^t K(x, (\eta_i + 1)/2) A^T T((\eta_i + 1)/2) dx + \int_0^t g(x) dx + u_0. \quad (3.60)$$

Résultats numériques

Exemple 3.7. On considère l'équation intégro-différentielle suivante

$$\begin{cases} u'(x) = 1 - \frac{x}{3} + \int_0^1 x u^2(t) dt, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (3.61)$$

telle que la solution exacte de cette équation est $u(x) = x$. Une comparaison entre la méthode proposée et les méthodes dans [63, 11] est présentée dans le Tableau 3.7 pour $n = 3$.

TABLE 3.7 – Méthode de Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.7.

x	Méthode de [63] $n = 7$	Méthode de [11] $n = 3$	La méthode proposée $n = 3$
0.0	3.20e-09	4.02e-10	0
0.2	7.18e-10	4.91e-10	5.86e-19
0.4	1.42e-10	5.99e-10	2.34e-18
0.6	4.07e-11	7.32e-10	5.27e-18
0.8	9.10e-10	8.94e-10	9.38e-18
1.0	3.70e-09	1.49e-10	1.46e-17

Exemple 3.8. On considère l'équation intégro-différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(x) = \int_0^1 \cos(x - t) (y(t))^2 dt + g(x), \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (3.62)$$

telle que la solution exacte de cette équation est $u(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x) - \frac{2}{3} \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(x - 1) + \frac{1}{4} \sin(x + 1) - \frac{1}{12} \sin(x - 3)$. Les résultats numériques sont présentés dans le Tableau 3.8 pour $n = 6, 14$. Nous avons comparé l'erreur absolue de la méthode proposée avec les résultats obtenus par l'interpolation de Lagrange dans [82].

TABLE 3.8 – Méthode de Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.8.

x	Méthode de [82]	La méthode proposée	
	$n = 6$	$n = 6$	$n = 14$
0.0	0	0	0
0.2	6e-06	3.64e-07	4.68e-17
0.4	1e-05	8.84e-07	1.27e-16
0.6	2e-05	1.54e-06	2.37e-16
0.8	4e-05	2.30e-06	3.74e-16
1.0	5e-05	3.15e-06	5.30e-16

Exemple 3.9. On considère l'équation intégro-différentielle suivante

$$\begin{cases} u'(x) &= e^x - \frac{e^3-1}{3}e^{-x^2} + \int_0^1 e^{2t-x^2} u(t) dt \\ u(0) &= 1, \end{cases} \quad (3.63)$$

telle que la solution exacte de cette équation est $u(x) = e^x$. Les résultats numériques sont présentés dans le Tableau 3.9 pour $n = 5, 10, 15$.

TABLE 3.9 – Méthode de Chebyshev, Erreur absolue, Exemple 3.9.

x	La méthode proposée		
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
0.0	0	0	0
0.2	6.28e-05	3.96e-10	1.06e-16
0.4	1.21e-04	7.62e-10	2.03e-16
0.6	1.70e-04	1.07e-09	2.86e-16
0.8	2.09e-04	1.32e-09	3.52e-16
1.0	2.38e-04	1.50e-09	3.99e-16

3.4.3 Méthode de collocation-Legendre pour les E.I.D.F.

D'une manière analogue, nous pouvons aussi utiliser la base des polynômes de Legendre $\{L_j(x)\}_{j=0}^n$ pour la résolution numérique des équations intégro-différentielles non-linéaires de Fredholm du premier ordre. Cette méthode réduit le problème à un système non-linéaire. Pour montrer l'efficacité de la méthode proposée, nous allons traiter quelques exemples.

Principe de la méthode

On considère l'équation intégro-différentielle de la forme (3.52). La fonction approchée $\psi(u(t))$ s'écrit comme une combinaison linéaire des polynômes de Legendre de la forme

$$\psi(u(t)) \simeq \sum_{i=0}^n c_i L_i^*(t) = C^T L^*(t). \quad (3.64)$$

Après, en substituant cette dernière approximation (3.64) dans l'équation (3.53), on obtient

$$C^T L^*(t) = \psi \left(t, \int_0^t \int_0^1 K(x, s) C^T L^*(s) ds dx + \int_0^t g(x) dx + u_0 \right). \quad (3.65)$$

On peut prendre comme points de collocation les points $t_j = a + \frac{(b-a)j}{n}$, $j = 0, 1, \dots, n$, de sorte que

$$C^T L^*(t_j) = \psi \left(t_j, \int_0^{t_j} \int_0^1 K(x, s) C^T L^*(s) ds dx + \int_0^{t_j} g(x) dx + u_0 \right). \quad (3.66)$$

Pour utiliser la méthode d'intégration par quadrature de Gauss, on transforme les intervalles $[0, 1]$ et $[0, t_j]$ à l'intervalle $[-1, 1]$, en utilisant les transformations suivantes, respectivement

$$\begin{cases} \eta_1 = 2s - 1, & s \in [0, 1], \\ \eta_2 = \frac{2}{t_j}x - 1, & x \in [0, t_j]. \end{cases}$$

On pose

$$H(x, s) = K(x, s) C^T L^*(s)$$

L'équation (3.66) devient

$$C^T L^*(t_j) = \psi \left[t_j, \frac{t_j}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H \left(\frac{t_j}{2}(\eta_2 + 1), \frac{1}{2}(\eta_1 + 1) \right) d\eta_1 d\eta_2 + \frac{t_j}{2} \int_{-1}^1 g \left(\frac{t_j}{2}(\eta_2 + 1) \right) d\eta_2 + u_0 \right]. \quad (3.67)$$

On utilise la formule de quadrature de Legendre-Gauss, on a

$$C^T L^*(t_j) = \psi \left[t_j, \frac{t_j}{4} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^n \omega_k \omega_l H \left(\frac{t_j}{2}(\eta_l + 1), \frac{1}{2}(\eta_k + 1) \right) + \frac{t_j}{2} \sum_{l=0}^n g \left(\frac{t_j}{2}(\eta_l + 1) \right) + u_0 \right]. \quad (3.68)$$

pour $j = 0, 1, \dots, n$. L'équation (3.68) forme un système non-linéaire qui est résolu par la méthode de Newton.

Alors, $u'(x)$ est approchée comme

$$\begin{aligned} u'(x) &= \int_0^1 K(x, t) \psi(t, u(t)) dt + g(x), \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K(x, (\eta + 1)/2) C^T L^*((\eta + 1)/2) d\eta + g(x), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \omega_i K(x, (\eta_i + 1)/2) C^T L^*((\eta_i + 1)/2) + g(x). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Aussi, $u(x)$ est approchée comme

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \omega_i \int_0^t K(x, (\eta_i + 1)/2) C^T L^*((\eta_i + 1)/2) dx + \int_0^t g(x) dx + u_0. \quad (3.70)$$

Résultats numériques

Exemple 3.10. On considère l'équation intégral-différentielle de la forme

$$\begin{cases} u'(x) = 1 - \frac{x}{3} + \int_0^1 x u^2(t) dt, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (3.71)$$

telle que la solution exacte de cette équation est $u(x) = x$. Dans le Tableau 3.10, l'erreur absolue de la méthode proposée pour $n = 3$ est comparé avec les résultats obtenus par la méthode basée sur l'approximation par les fonctions hybride [11] et de la méthode basée sur les polynômes de Bernstein dans [63].

TABLE 3.10 – Méthode de Legendre, Erreur absolue, Exemple 3.10.

x	Méthode de [63]	Méthode de [11]	La méthode proposée
	$n = 7$	$n = 3$	$n = 3$
0.0	3.20e-09	4.02e-10	0
0.2	7.18e-10	4.91e-10	1.42e-17
0.4	1.42e-10	5.99e-10	5.67e-17
0.6	4.07e-11	7.32e-10	1.27e-16
0.8	9.10e-10	8.94e-10	2.27e-16
1.0	3.70e-09	1.49e-10	3.54e-16

Exemple 3.11. On considère l'équation intégral-différentielle de la forme

$$\begin{cases} u'(x) = e^x - \frac{1}{5}(e^5 - 1)e^{-x^2} + \int_0^1 e^{2t-x^2} u^3(t) dt, \\ u(0) = 1, \end{cases} \quad (3.72)$$

telle que la solution exacte de cette équation est $u(x) = \exp(x)$. Dans le Tableau 3.11, l'erreur absolue de la méthode proposée pour $n = 9$ est comparé avec les résultats obtenus par la méthode basée sur les polynômes de Bernstein dans [63].

TABLE 3.11 – Méthode de Legendre, Erreur absolue, Exemple 3.11.

x	Méthode de [63]	La méthode proposée
	$n = 9$	$n = 9$
0.0	2.47e-012	0
0.2	1.98e-012	6.84e-016
0.4	2.60e-012	1.32e-015
0.6	3.89e-012	1.85e-015
0.8	5.77e-012	2.28e-015
1.0	3.34e-012	2.59e-015

Exemple 3.12. On considère l'équation intégro-différentielle de la forme

$$\begin{cases} u'(x) &= \int_0^1 \cos(x-t) u^2(t) dt + g(x), \\ u(0) &= 0, \end{cases} \quad (3.73)$$

telle que la solution exacte de cette équation est $u(x) = \sin(x)$, et $g(x) = \cos(x) - \frac{2}{3} \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(x-1) + \frac{1}{4} \sin(x+1) - \frac{1}{12} \sin(x-3)$. Dans le Tableau 3.12, l'erreur absolue de la méthode proposée pour $n = 6$ est comparé avec les résultats obtenus par la méthode basée sur l'interpolation par les polynômes de Lagrange dans [82].

TABLE 3.12 – Méthode de Legendre, Erreur absolue, Exemple 3.12.

x	Méthode de [82]	La méthode proposée
	$n = 6$	$n = 6$
0.0	0	0
0.2	6e-06	2.79e-12
0.4	1e-05	6.76e-12
0.6	2e-05	1.18e-11
0.8	4e-05	1.76e-11
1.0	4e-05	2.40e-11

Exemple 3.13. On considère l'équation intégro-différentielle de la forme

$$\begin{cases} u'(x) &= 1 - (e-1)e^{-t-1} + \int_0^1 e^{t-x} e^{-2u(t)} dt, \\ u(0) &= 0, \end{cases} \quad (3.74)$$

telle que la solution exacte de cette équation est $u(x) = x$. Les résultats numériques sont présentés dans le Tableau 3.13 pour $n = 2, 4, 6$.

TABLE 3.13 – Méthode de Legendre, Erreur absolue, Exemple 3.13.

x	La méthode proposée		
	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$
0.0	0	0	0
0.2	1.83e-05	4.44e-11	3.20e-17
0.4	3.33e-05	8.08e-11	5.83e-17
0.6	4.56e-05	1.11e-11	7.97e-17
0.8	5.57e-05	1.35e-10	9.73e-17
1.0	6.39e-05	1.55e-10	1.12e-16

3.4.4 Discussion

Les résultats numériques obtenus dans les différents tableaux, montrent que l'erreur numérique décroît à chaque fois le pas de discrétisation est petit. Pour cette raison, il est préféré d'appliquer ces méthodes avec des pas très petits autant possibles pour améliorer la solution numérique.

Dans l'objectif de tester l'efficacité de ces méthodes proposées, nous allons effectuer une étude comparative avec certaines méthodes numériques connues dans le domaine de la résolution approchée des équations intégral-différentielles.

Les résultats obtenus par la méthode de collocation par les polynômes de Chebyshev ont été comparés avec les résultats obtenus par une méthode basée sur les polynômes de Bernstein pour $n = 3$ dans le Tableau 3.7 et par une méthode d'interpolation de Lagrange pour $n = 6$ dans le Tableau 3.8.

D'autre part, en utilisant la méthode collocation par les polynômes de Legendre avec la même équation. Nous avons comparé l'erreur absolue de notre méthode avec les résultats obtenus par une méthode basée sur l'approximation par les fonctions hybride pour $n = 3$ dans le Tableau 3.10, une méthode basée sur les polynômes de Bernstein pour $n = 9$ dans le Tableau 3.11 et par une méthode d'interpolation de Lagrange pour $n = 6$ dans le Tableau 3.12.

Comparativement aux résultats obtenus par la méthode des fonction de base radiales, deux méthodes basées sur les ondelettes, pour $n = 10$ dans les Tableaux 3.5 et 3.6.

À travers ces exemples numériques et cette étude comparative nous avons testé l'efficacité de ces méthode proposée, ainsi comme nous le montrent les résultats obtenus dans les tableaux précédents, la conclusion est que pour des petites valeurs de n , l'erreur est très satisfaisante.

3.4.5 Conclusion

Dans la présente analyse, nous avons proposé la méthode de collocation par les polynômes de Chebyshev et par les polynômes de Legendre pour les équations intégral-différentielles de Fredholm non-linéaires du premier ordre, et par les fonctions de bases radiales pour les équations intégral-différentielles de Volterra linéaires et non-linéaires d'ordre supérieur. Les méthodes proposées sont très simples. L'idée principale est basée sur la projection de notre équation dans un sous espace fonctionnel de dimension finie, dans lequel on cherche à approcher la solution exacte par une combinaison linéaire des éléments de la base. Ces méthodes transfèrent le problème de résolution d'une équation intégral-différentielle à la résolution d'un système de plusieurs équations algébriques qui est résolu par des méthodes standard. Les méthodes proposées sont testées sur quelques exemples et les résultats sont satisfaisants.

Conclusion Générale et Perspectives

Cette partie conclut la thèse en donnant un bilan du travail effectué et les perspectives envisageables.

Le but principal de ce travail a été de construire de méthodes numériques pour quelques équations intégral-différentielles. Nous avons appliquées des méthodes numériques telles que : la méthode de collocation, la méthode de Galerkin et la méthode Tau. Ces méthodes consistent à chercher des solutions sous forme d'une combinaison linéaire des éléments de la base. Une contribution considérable a été apportée dans ce travail pour la résolution numérique des équations intégral-différentielles de Volterra non-linéaires d'ordre supérieur, en utilisant la méthode de collocation par les fonctions de base radiales. Au regard des différents tableaux donnés, nous pouvons affirmer l'efficacité et la convergence de cette approche.

Ce travail peut être étendu à d'autres types d'équations intégrales et intégral-différentielles, et pour un système des équations intégral-différentielles de Fredholm en 2D.

Annexes

A. Polynômes de Chebyshev (première espèce)

Définition et propriétés

- Le polynôme de Chebyshev de première espèce $T_n(x)$ de degré n est défini par la formule suivante

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

- Les premiers de ces polynômes sont

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

- La relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

- Les polynômes de Chebyshev de première espèce sont orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec $\omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$. En particulier,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \pi/2 & i = j \neq 0 \\ \pi & i = j = 0 \end{cases}$$

- Le polynôme de Chebyshev $T_n(x)$ a n zéros sur l'intervalle $[-1, 1]$

$$x = \cos\left(\frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

- Problème de Sturm-Liouville

$$\left(\sqrt{1-x^2}T_n'(x)\right)' + \frac{k^2}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x) = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

- Propriété de symétrie

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x), \quad T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n.$$

-

$$|T_n(x)| \leq 1, \quad |T_n'(x)| \leq n^2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

- Relations de récurrence pour les dérivées

$$(1 - x^2)T'_n(x) = \frac{n}{2}T_{n-1}(x) - \frac{n}{2}T_{n+1}(x)$$

$$T'_n(x) = 2n \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ impaire}}}^{n-1} \frac{1}{c_k} T_k(x),$$

$$T''_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ paire}}}^{n-2} \frac{1}{c_k} n(n^2 - k^2) T_k(x),$$

où $c_k = 2$, et $c_k = 1$ pour $k \geq 1$.

- Conditions aux limites

$$T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1} n^2,$$

$$T''_n(\pm 1) = \frac{1}{3} (\pm 1)^n n^2 (n^2 - 1).$$

Formules de quadrature de Chebyshev-Gauss

- Quadrature de **Chebyshev-Gauss** (CG) :

$$x_j = -\cos \frac{(2j+1)\pi}{2N+2}, \quad \omega_j = \frac{\pi}{N+1}, \quad 0 \leq j \leq N.$$

- Quadrature de **Chebyshev-Gauss-Radau** (CGR) :

$$x_j = -\cos \frac{2\pi j}{2N+1}, \quad 0 \leq j \leq N,$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2N+1}, \quad \omega_j = \frac{2\pi}{2N+1}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

- Quadrature de **Chebyshev-Gauss-Lobatto** (CGL) :

$$x_0 = 1, \quad x_N = -1, \quad \omega_0 = \omega_N = \frac{\pi}{2N},$$

$$x_j = \cos \frac{\pi j}{N}, \quad \omega_j = \frac{\pi}{N}, \quad 1 \leq j \leq N-1.$$

Formules de quadrature de Clenshaw-Curtis

$$x_j = \cos \left(\frac{j\pi}{N} \right), \quad \omega_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{N} \cos \left(\frac{jk\pi}{N} \right), & j = 0, \\ \frac{2}{N} \cos \left(\frac{jk\pi}{N} \right), & j = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{1}{N} \cos \left(\frac{jk\pi}{N} \right), & j = N. \end{cases}$$

Estimation d'erreur

Soit

$$H_\omega^m[-1, 1] = \left\{ u \in L_\omega^2[-1, 1] : \text{pour } 0 \leq k \leq m, \frac{d^k u}{dx^k}(x) \in L_\omega^2[-1, 1] \right\}, \quad (75)$$

où la dérivée $\frac{d^k u}{dx^k}$ est prise au sens des distributions périodiques. L'espace $H_\omega^m[-1, 1]$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{m, \omega} = \sum_{k=0}^m \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d^k u}{dx^k}(x) \frac{d^k v}{dx^k}(x) dx, \quad (76)$$

est à son tour un Hilbert. La norme associée est donnée par

$$\|u\|_{H_\omega^m[-1, 1]} = \left(\sum_{k=0}^m \|u^{(k)}\|_{L_\omega^2[-1, 1]}^2 \right)^{1/2}. \quad (77)$$

Théorème .5. Soient $u \in H_\omega^m[-1, 1]$ et

$$P_n(u(x)) = \sum_{j=0}^N c_j T_j(x),$$

la série tronquée de Chebyshev de u . Alors, $\exists C > 0$, telle que

$$\|u - P_n u\|_{L_\omega^2[-1, 1]} \leq CN^{-m} \left(\sum_{k=\min(m, N+1)}^m \|u^{(k)}\|_{H_\omega^2[-1, 1]}^2 \right)^{1/2}. \quad (78)$$

Preuve. Voir [23]. ■

B. Polynômes de Chebyshev (seconde espèce)

Définition et propriétés

- Le polynôme de Chebyshev de seconde espèce $U_n(x)$ d'ordre n est défini par la formule suivante

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}(x)]}{\sin[\cos^{-1}(x)]}, \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- De cette définition, la propriété suivante est évidente

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad x = \cos \theta.$$

- Les premiers de ces polynômes sont

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x. \end{aligned}$$

- La relation de récurrence

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

- La relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 U_i(x)U_j(x)(1-x^2)^{-1/2} dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{\pi}{8} & i = j \end{cases}$$

C. Polynômes de Legendre

Définition et propriétés

- Les polynômes de Legendre $L_n(x)$ sont définis par la relation de récurrence

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xL_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

- Les premiers de ces polynômes sont

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= x, \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ L_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \end{aligned}$$

- Orthogonalité

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x) dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

où δ_{nm} est delta de Kronecker.

- Problème de Sturm-Liouville

$$\left((1-x^2)L_n'(x)\right)' + \lambda_n L_n(x) = 0, \quad \lambda_n = n(n+1).$$

ou

$$(1-x^2)L_n''(x) - 2xL_n'(x) + n(n+1)L_n(x) = 0.$$

- Formule de Rodrigue

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right], \quad n \geq 0.$$

- Propriété de symétrie

$$L_n(-x) = (-1)^n L_n(x), \quad L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n.$$

-

$$|L_n(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad n \geq 0.$$

- Relations de récurrence pour les dérivées

$$(2n + 1)L_n(x) = L'_{n+1}(x) - L'_{n+1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$(1 - x^2)L'_n(x) = \frac{n(n+1)}{2n+1}(L_{n-1}(x) - L_{n+1}(x)),$$

$$L'_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ impaire}}}^{n-1} (2k+1)L_k(x),$$

$$L''_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ paire}}}^{n-2} \left(k + \frac{1}{2}\right) (n(n+1) - k(k+1))L_k(x).$$

- Conditions aux limites

$$L'_n(\pm 1) = \frac{1}{2}(\pm 1)^{n-1}n(n+1),$$

$$L''_n(\pm 1) = (\pm 1)^n(n-1)n(n+1)(n+2)/8.$$

Formules de quadrature de Legendre-Gauss

- Quadrature de **Legendre-Gauss** (LG) : $\{x_j\}_{j=0}^N$ sont les zéros de $L_{N+1}(x)$, et

$$\omega_j(x) = \frac{2}{(1-x_j^2)[L'_{N+1}(x_j)]^2}, \quad 0 \leq j \leq N.$$

- Quadrature de **Legendre-Gauss-Radau** (LGR) : $\{x_j\}_{j=0}^N$ sont les zéros de $L_N(x) + L_{N+1}(x)$, et

$$\omega_0 = \frac{2}{(N+1)^2}, \quad \omega_j = \frac{1}{(N+1)^2} \frac{1-x_j}{[L_N(x_j)]^2}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

- Quadrature de **Legendre-Gauss-Lobatto** (LGL) : $x_0 = -1$, $x_N = 1$, $\{x_j\}_{j=1}^{N-1}$ sont les zéros de $L'_N(x)$, et

$$\omega_j = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{[L_N(x_j)]^2}, \quad 0 \leq j \leq N.$$

Estimation d'erreur

Soit

$$H^m[-1, 1] = \left\{ u \in L^2[-1, 1] : \text{pour } 0 \leq k \leq m, \frac{d^k u}{dx^k}(x) \in L^2[-1, 1] \right\}, \quad (79)$$

L'espace $H^m[-1, 1]$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{k=0}^m \int_{-1}^1 \frac{d^k u}{dx^k}(x) \frac{d^k v}{dx^k}(x) dx, \quad (80)$$

est un Hilbert, appelé espace de Sobolev. La norme associée est

$$\|u\|_{H^m[-1,1]} = \left(\sum_{k=0}^m \|u^{(k)}\|_{L^2[-1,1]}^2 \right)^{1/2}. \quad (81)$$

Théorème .6. Soit $u \in H^m[-1,1]$. Alors, la série de Legendre tronquée

$$P_n(u(x)) = \sum_{j=0}^N c_j L_j(x),$$

est la meilleure approximation polynomiale de $u(x)$ au sens de la norme L^2 . De plus, $\exists C > 0$, telle que

$$\|u - P_n u\|_{L^2[-1,1]} \leq CN^{-m} \|u\|_{H^m[-1,1]}. \quad (82)$$

Preuve. Voir [23]. ■

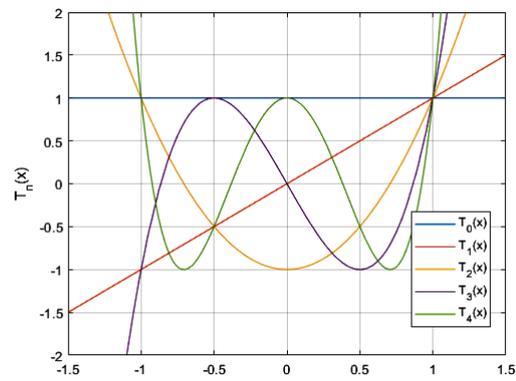


FIGURE 8 – Polynômes de Chebychev de première espèce pour $N = 0, 1, 2, 3, 4$

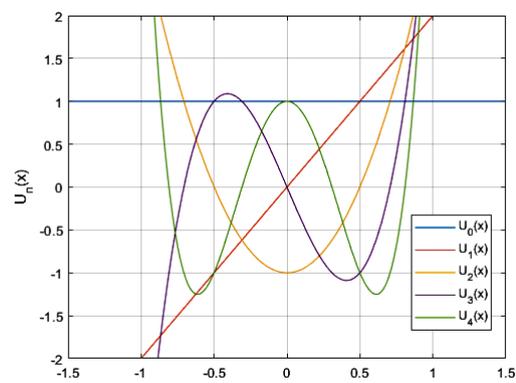


FIGURE 9 – Polynômes de Chebychev de seconde espèce pour $N = 0, 1, 2, 3, 4$

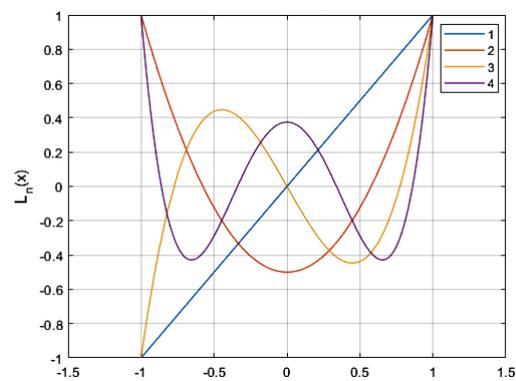


FIGURE 10 – Polynômes de Legendre pour $N = 1, 2, 3, 4$

Bibliographie

- [1] Abubakar, A. and Taiwo, O.A. *Integral collocation approximation methods for the numerical solution of high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations*, Comput. Appl. Math. 4 (2014) 111–117.
- [2] Agarwal, R.P. *Boundary value problems for high ordinary differential equations*, World Scientific, Singapore, 1986.
- [3] Agarwal, R.P. and O'Regan, D. *Integral and integro-differential equations : theory, methods and applications*, OPA, 2000.
- [4] Akyüz Daşcioglu, A. *A Chebyshev polynomials approach for linear Fredholm-Volterra integro-differential equations in the most general form*, Appl. Math. Comput. 181 (2006) 103–112.
- [5] Akyüz Daşcioglu, A. *Chebyshev polynomials solution of system of linear integral equations*, Appl. Math. Comput. 151 (2004) 221–232.
- [6] Akyüz Daşcioglu, A. and Sezer, M. *Chebyshev polynomial solutions of systems of higher-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations*, J. Franklin Inst. 342 (2005) 688–701.
- [7] Aminikhah, H., Hosseini, S. and Alavi, J. *Approximate analytical solution for high-order integro-differential equation by Chebyshev Wavelets*, Inf. Sci. Lett. 4 (2015) 31–39.
- [8] Atkinson, K.E. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [9] Babolian, E., Fattahzadeh, F. and Golpar Raboky, E. *A Chebyshev approximation for solving nonlinear integral equations of Hammerstein type*, Appl. Math. Comput. 189 (2007) 641–646.
- [10] Barzkar, A., Oshagh, M., Assari, P. and Mehrpouya, M. *Numerical solution of the nonlinear Fredholm integral equation and the Fredholm integro-differential equation of second kind using Chebyshev Wavelets*, World Appl. Sci. J. 18 (2012) 1774–1782.
- [11] Behiry, S.H. *Solution of nonlinear Fredholm integro-differential equations using a hybrid of block pulse functions and normalized Bernstein polynomials*, Comput. Appl. Math. 260 (2014) 258–265.
- [12] Ben-Yu, G. *Spectral methods and their applications*, World Scientific Publishing, 1998.
- [13] Bhrawy, A.H., Tohidi, E. and Soleymani, F. *A new Bernoulli matrix method for solving high-order linear and nonlinear fredholm integro-differential equations with piecewise intervals*, Appl. Math. Comput. 219 (2012) 482–497.
- [14] Biazar, J. and Salehi, F. *Chebyshev Galerkin method for integro-differential equations of the second kind*, Iranian J. Num. Anal. Optim. 6 (2016) 31–42.
- [15] Biazar, J. and Asadi, M.A. *Indirect RBF for high-order integro-differential equations*, British J. Math. Comput. Sci. 11 (2015) 1–16.
- [16] Bielecki, A. *Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Phys. Astr. 4 (1956) 261–264.

- [17] Boland, J. *The analytic solution of the differential equations describing heat flow in houses*, Build. Environ. 37 (2002) 1027–1035.
- [18] Boyd, J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover Publications Inc, 2000.
- [19] Brunner, H. *The approximate solution of initial-value problems for general Volterra integro-differential equations*, Comput. 40 (1988) 125–137.
- [20] Buhmann, M.D. *Multivariable interpolation using radial basis functions*, PhD thesis, University of Cambridge, 1989.
- [21] Buhmann, M.D. and Micchelli, C.A. *On radial basis approximations on periodic grids*, Math. Proc. Cambridge Philosophical Society 112 (1992) 317–334.
- [22] Buhmann, M.D. *Radial basis functions : theory and implementations*, Cambridge University Press, 2003.
- [23] Canuto, C., Quateroni, A., Hussaini, M.Y. and Zang, T.A. *Spectral Methods*, Springer, Berlin, 2006.
- [24] Cécile, P. *Analytical and numerical advances in radial basis functions*, Thesis, University of Colorado, 2007.
- [25] Chandel, R.S., Singh, A. and Chouhan, D. *Solution of higher order Volterra integro-differential equations by Legendre Wavelets*, I. J. App. Math. 28 (2015) 377–390.
- [26] Chen, C. and Shih, T. *Finite element methods for integro-differential equations*, World Scientific, 1998.
- [27] Chen, W., Fu, Z.J. and Chen, C.S. *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*, Springer, 2014.
- [28] Chui, C.K., Stoeckler, J. and Ward, J.D. *Analytic wavelets generated by radial functions*, Adv. Comput. Math. 5 (1996) 95–123.
- [29] Courant, R. and Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*, John Wiley Sons, New York, 1953.
- [30] Delves, L.M. and Mohamed, J.L. *Computational methods for integral equations*, Cambridge University Press, 1985.
- [31] Dongbin, X. *Numerical Methods for Stochastic Computations - A spectral Numerical Approach*, Priceton University Press, Princeton, 2010.
- [32] El-Gendi, S.E. *Chebyshev solution of differential, integral and integro-differential equations*, Comput. J. 12 (1969) 282–287.
- [33] Farmakis, I. and Moskowit, M. *Fixed point theorems and their applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013.
- [34] Fathy, M., El-Gamel, M. and El-Azab, M.S. *Legendre-Galerkin method for the linear Fredholm integro-differential equations*, Appl. Math. and Comput. 243 (2014) 789–800.
- [35] Franke, R. *Scattered data interpolation : tests of some methods*, Math. Comp. 48 (1982) 181–200.
- [36] Franke, R. *Smooth interpolation of scattered data by local thin plate splines*, Comput. Math. Appl. 8 (1982) 273–281.
- [37] Fornberg, B. and Piret, C. *A stable algorithm for flat radial basis functions on a Sphere*, SIAM J Sci. Comput. 30 (2007) 60–80.
- [38] Funaro, D. *Polynomial approximation of differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [39] Fung, B.Y.C. *Mechanical Properties of Living Tissues*, Springer-Verlag, New York, 1993.

- [40] Golbabai, A. and Seifollahi, S. *Numerical solution of the second kind integral equations using radial basis function networks*, Appl. Math. Comput. 174 (2006) 877–883.
- [41] Golbabai, A. and Seifollahi, S. *Radial basis function networks in the numerical solution of linear integro-differential equations*, Appl. Math. Comput. 188 (2007) 427–432.
- [42] Gregory, E.F. *Meshfree approximation methods with MATLAB*, World Scientific Publishing, 2007.
- [43] Hardy, R.L. *Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces*, J. Geophy. Res. 76 (1971) 1905–1915.
- [44] Hon, Y.C., Cheung, K.F., Mao, X.Z. and Kansa, E.J. *Multiquadric Solution for Shallow Water Equations*, J. Hydr. Eng., 125 (1999) 524–533.
- [45] Jackson, I.R.H. *Radial basis function methods for multivariable approximation*. PhD thesis, University of Cambridge, 1988.
- [46] Kansa, E.J. *Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations*; Comput. math. appl. 19 (1990) 147–161.
- [47] Kansa, E.J. and Hon, Y.C. *Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions : Applications to elliptic partial differential equation*, Comput. Math. App. 39 (1999) 123-137.
- [48] Kress, R. *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [49] Kythe, P.K. and Puri, P. *Computational methods for linear integral equations*, Birkhauser, Boston, 2002.
- [50] Linz, P. *Analytical and numerical methods for Volterra equations*, Siam : Philadelphia, 1985.
- [51] Liu, G.R. *Mesh-free methods moving beyond the finite element methods*, CRC Press, 2003.
- [52] Maadadi, A., Merouani, A. and Rahmoune, A. *Approximate solution of high-order integro-differential equations using radial basis functions*, J. App. Comput. Sci. Math. 11 (2017) 26–29.
- [53] Madych, W.R. and Nelson, S.A. *Bounds on multivariate polynomials and exponential error estimates for multiquadric interpolation*, J. Approx. Theory 70 (1992), 94–114.
- [54] Mai-Duy, N. and Tran-Cong, T. *Numerical solution of differential equations using multiquadric radial basis function networks*, Neural Networ. 14 (2001) 185–199.
- [55] Mai-Duy, N. and Tran-Cong, T. *Approximation of function and its derivatives using radial basis function networks*, Appl. Math. Model. 27 (2003) 197–220.
- [56] Mai-Duy, N. *Solving high order ordinary differential equations with radial basis function networks*, Int. J. Numer. Meth. Eng. 62 (2005) 824–852.
- [57] Makroglou, A. *Numerical solution of some second order integrodifferential equations arising in ruin theory*, Third Conference in Actuarial Science and Finance Held in Samos, Greece, pp. 2–5, September 2004.
- [58] Maleknejad, K., Basirat, B. and Hashemizadeh, E. *Hybrid Legendre polynomials and Block-Pulse functions approach for nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations*. Comput. Math. Appl. 61 (2011) 2821–2828.
- [59] Maleknejad, K. and Mahmoudi, Y. *Taylor polynomial solution of high-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations*, Appl. Math. Comput. 145 (2003) 641–653.

- [60] Micchelli, C.A. *Interpolation of scattered data : Distance matrices and conditionally positive definite functions*, Constr. Approx. 2 (1986) 11–22.
- [61] Micchelli, C.A., Sperduti, A. and Starita, A. *An introduction to recursive neural networks and kernel methods for cheminformatics*, Curr. Pharm. Des. 13 (2007) 1469–1495.
- [62] Nemati, S. *Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equations using Legendre collocation method*, J. Comput. Appl. Math. 278 (2015) 29–36.
- [63] Ordokhani, Y. and Davaei far, S. *Application of the Bernstein polynomials for solving the nonlinear Fredholm integro-differential equations*, J. Appl. Math. Bioinform. 1 (2011) 13–31.
- [64] Ortiz, E.L. and Samara, H. *An operational approach to the Tau method for the numerical solution of non-linear differential equations*, Computing. 27 (1981) 15–25.
- [65] Ouassissou, A.F. *Application de la méthode de collocation RBF pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles*, Thèse, Université de PAU et des PAYS de l'Adour, France, 2006.
- [66] Pachpatte, B.G. *On certain Volterra integral and integro-differential equations*, Ser. Math. Inform. Vol. 23 (2008) 1–12.
- [67] Pachpatte, B.G. *On higher order Volterra-Fredholm integro-differential equation*, Fasciculi Math. 37 (2007) 34–48.
- [68] Parand, K., Abbasbandy, S., Kazem, S. and Rad, J.A. *A novel application of radial basis functions for solving a model of first-order integro-ordinary differential equation*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 16 (2011) 4250–4258.
- [69] Polyanin, A.D. and Manzhirov, A.V. *Handbook of integral equations*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1998.
- [70] Pomey, L. *Sur les équations intégro-différentielles*, Thèse, Faculté des sciences de Paris, France, 1924.
- [71] Powell, M.J.D. *Five Lectures on Radial Basis Functions*. 2005.
- [72] Rahman, M. *Integral equations and their applications*, WIT Press, 2007.
- [73] Rahmoune, A. *Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales*, Thèse, Université de Batna, 2011.
- [74] Rahmoune, A. *Équations intégrales linéaires*, paf, 2014.
- [75] Rashed, M.T. *Lagrange interpolation to compute the numerical solutions of differential, integral and integro-differential equations*, Appl. Math. Comput. 151 (2004) 869–878.
- [76] Schaback, R. *Approximation by radial basis functions with finitely many centers*, Constr. Approx. 12 (1996) 331–340.
- [77] Schaback, R. and Wendland, H. *Characterization and construction of radial basis functions*, (200)1 1–24.
- [78] Schlesinger, L. *Sur les équations intégro-différentielles*, C. R. de l'Acad. des Sciences de Paris, 158 (1914) 1872–1875.
- [79] Schlesinger, L. *Zur Theorie der linearen integro-differentialgleichungen*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, 24 (1915) 84–123.
- [80] Schoenberg, I. J. *Metric spaces and completely monotone functions*, Ann. of Math. 39 (1938) 811–841.
- [81] Sergeev, V. *On stability of viscoelastic plate equilibrium*, Automat. Remote Control 68 (2007) 1544–1550.
- [82] Shahsavaran, A. and Shahsavaran, A. *Application of Lagrange interpolation for nonlinear integro-differential equations*, App. Math. Sci. 6 (2012) 887–892.

- [83] Shen, J. and Tang, T. *High order numerical methods and algorithms*, Chinese Science Press, 2005.
- [84] Shen, J., Tang, T. and Wang, L.L. *Spectral methods : algorithms, analysis and applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [85] Taik, A. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles par les fonctions radiales de base*. Cours Formation Doctorale, Mohammedia, Morocco, 2009.
- [86] Thieme, H.R. *A model for the spatial spread of an epidemic*, J. Math. Biol. 4 (1977) 337–351.
- [87] Thual, O. *Introduction aux méthodes spectrales*. Thèse, Institut national polytechnique de Toulouse, France, 1996.
- [88] Tomasiello, S. *A note on three numerical procedures to solve Volterra integro-differential equations in structural analysis*, Comput. Math. Appl. 62 (2011) 3183–3193.
- [89] Trif, D. *Matrix based operatorial approach to differential and integral problems*, Babes-Bolyai University of Cluj-Napoca, Romania, 2011.
- [90] Trif, D. *Chebpack*, Babes-Bolyai University of Cluj-Napoca, Romania, 2011.
- [91] Venkatesh, S.G., Ayyaswamy, S.K. and Raja Balachandar, S. *Legendre approximation solution for a class of higher-order Volterra integro-differential equations*, Ain Shams Eng. J. 3 (2012) 417–422.
- [92] Volterra, V. *Equazioni integro-differenziali dell' elasticità nel caso della isotropia*, R. Acc. dei Lincei. Rend. 1909.
- [93] Volterra, V. *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications*, Acta Mathematica, 1 (1912) 295–356.
- [94] Volterra, V. *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.
- [95] Volterra, V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, Dover Publ. Inc. 1959.
- [96] Wazwaz, A.M. *A reliable algorithm for solving boundary value problems for higher-order integro-differential equations*, Appl. Math. Comput. 118 (2001) 327–342.
- [97] Wazwaz, A.M. *A comparison study between the modified decomposition method and the traditional methods for solving nonlinear integral equations*, Appl. Math. Comput. 181 (2006) 1703–1712.
- [98] Wazwaz, A.M. *Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications*, Higher education press Bijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [99] Wendland, H. *Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis functions of minimal degree*, J. Approx. Theory. 93 (1998) 258–272.
- [100] Wolkowicz, G., Xia, H. and Ruan, S. *Competition in the chemostat : a distributed delay model and its global asymptotic behavior*, SIAM J. Appl. Math. 57 (1997) 1281–1310.
- [101] Wright, G.B. *Radial basis function interpolation : numerical and analytical developments*, Thesis, University of Colorado, 2003.
- [102] Xavier, R.O. *Integro-differential equations : Regularity theory and Pohozaev identities*, Thesis, University of Catalunya, 2014.
- [103] Yalçınbaş, S., Sezer, M. and Sorkun, H.H. *Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations*, Appl. Math. Comput. 210 (2009) 334–349.
- [104] Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. and Sezer, M. *Numerical solutions of systems of linear Fredholm integro-differential equations with Bessel polynomials bases*, Comput. Math. Appl. 61 (2011) 3079–3096.

-
- [105] Yüzbaşı, Ş., Sezer, M. and Kemancı, B. *Numerical solutions of integro-differential equations and application of a population model with an improved Legendre method*, Appl. Math. Model. 37 (2013) 2086–2101.
- [106] Zeidler, E. *Nonlinear functional analysis and its applications I : fixed point theorems*, Springer-Verlag, 1985.
- [107] Zhao, J. *Compact finite difference methods for high order integro-differential equations*, Appl. Math. Comput. 221 (2013) 66–78.

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le domaine mathématique de l'étude numérique des équations intégral-différentielles. Ces équations sont très intéressantes, car il y a un lien très étroit entre ces dernières et l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs. Les EIDs sont issues à partir de plusieurs domaines de la recherche scientifique et de la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques très variés tels que : la dynamique des fluides, la physique des solides, la physique des plasmas, l'économie, le chimostat, le biotissus, la chemical kinetics et etc. Les EIDs sont difficiles à résoudre analytiquement, il est donc nécessaire d'obtenir une solution approchée. L'objectif essentiel de ce travail de thèse est de construire des méthodes numériques efficaces pour la résolution approchée de ces équations, telles que : la méthode de collocation, la méthode de Galerkin et la méthode de Tau. On a appliqué la méthode de collocation par les RBFs sur les EIDs linéaires et non linéaires de Volterra d'ordre supérieur, qui est basée sur les méthodes de quadrature.

Mots clés : Équations intégral-différentielles, Fonctions de base radiales, Méthodes spectrale, Polynômes orthogonaux.

Abstract

This thesis is concerned with the numerical study of the integro-differential equations. These equations are very interesting because there is a very close link between these and the functional analysis and the theory of the operators. The integro-differential equations occur in various areas. These equations arise in mathematical modeling of many scientific phenomena, such as : fluid dynamics, solid state physics, plasma physics, economics, chemostat, biotissues, chemical kinetics and etc. The IDEs are difficult to solve analytically, so it is necessary to obtain an approximate solution. The main objective of this thesis is to present efficient numerical methods for the approximate resolution of these equations, such as : collocation method, Galerkin method and Tau method. The indirect RBF collocation method has been applied to higher order linear and nonlinear IDEs of Volterra, which is based on quadrature formulas.

Keywords : Integro-differential equations, Radial basis functions, Spectral methods, Orthogonal polynomials.