

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département de Recherche Opérationnelle



# Mémoire

Présentée par :

**Sahraoui Elkamla**  
**Boussouar Yasmine**

Pour l'obtention du diplôme de

## Master

**Filière** : Des Mathématiques appliquées

**Spécialité** : Méthodes et outils pour la recherche Opérationnelle

---

Thème

**Résolution d'un programme linéaire par la méthode du simplexe et  
méthode de points intérieurs**

---

Soutenu publiquement le : 14 juillet 2021

Devant le jury composé de :

<b>M.Ramdani Zoubir</b>	M.A.A	Président
<b>M.Brahmi Boualem</b>	M.C.B	Examineur
<b>Mme.Guerra Loubna</b>	M.C.B	Encadreur

Année universitaire  
2020/2021

# Remerciements

Nous remercions **Allah** tout puissant de nous avoir donné la force, le courage et la patience pour l'élaboration de ce modeste travail .

Nous remercions notre encadreur : **Mme Guerra Ioubna** ; maître de conférence classe B ; à l'université Mohamed El Bachir El Ibrahimi, Bordj Bou Arréridj pour son encadrement de qualité, sa motivation professionnelle, ses conseils et critiques constructives, ses corrections, sa gentillesse et sa patience ainsi pour le temps qu'elle a consacré à la réalisation de ce travail.

Nous remercions les membres du jury pour leur présence, pour leur lecture attentive de ce mémoire, ainsi que pour les remarques qu'ils m'adresseront lors de cette soutenance afin d'améliorer mon travail.

Nous remercions tous les enseignants de la faculté des mathématiques et de l'informatique de l'université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj.

# Dédicace

A mes chers parents A ma chère mère **Nassima** et mon cher père **Toufik**,  
pour leurs sacrifices,leur confiance,leur tendresse et leur soutien tout au long de mes  
études,

A le personne le plus chère pour moi, pour son motivation, son attention et son  
encouragement,merci d'être avec moi.

A ma petite sœur **Dhoha** et ma cousine **Rania**, pour leur encouragement permanents, et  
leur soutien moral,

A mes chers frères,**Moncef** et **Youcef** ,pour leur appui et leur encouragement,

A toute ma famille **Boussouar** et ma famille **Djemoui**,

A ma chère binôme **Elkamla** pour notre longue amitié,

A mes belles amies qui ont étudié avec moi tout au long de mes études,

**Boussouar Yasmine.**

# Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mon cher père,  
A ma chère mère,

Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

A mes frères **Lokman** , **Badr Eddine** et sa femme **Nesrine** ,  
A ma chère sœur **Kaouther**,

Pour ses soutiens moraux et leurs conseils précieux tout au long de mes études.

A ma chère binôme **Yasmine**,

Pour son entente et son sympathie.

A ma chère amie **Ichrak**,

Pour son aide et support dans les moments difficiles.

A toute ma famille,

Pour leurs encouragements permanents et leur soutien moral.

**Sahraoui Elkamla.**

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Généralité sur la programmation mathématique</b>	<b>10</b>
1.1 Préliminaires	10
1.1.1 Produit scalaire et norme	10
1.2 Convexité	11
1.2.1 Ensemble et fonction convexe	11
1.2.2 Ensemble et application affine	12
1.3 Programmation mathématique	12
1.3.1 Notions de base	12
1.3.2 Classification d'un programme mathématique	13
1.3.3 Qualification des contraintes	14
1.3.4 Existence et unicité	14
1.3.5 Conditions d'optimalités	14
1.4 Méthode de newton	15
<b>2 Programmation linéaire et Méthode du simplexe</b>	<b>16</b>
2.1 Programmation linéaire	16
2.1.1 Définition du problème	16
2.2 Dualité en programmation linéaire	17
2.2.1 Dualité faible	17
2.2.2 Dualité forte	18
2.3 Formes d'un programme linéaire	19
2.3.1 Forme canonique	19
2.3.2 Forme standard	19
2.4 Existence et unicité de la solution	20
2.5 Méthode du simplexe	20
2.5.1 Variable d'écart et la transformation à la forme standard	21
2.5.2 Algorithme du simplexe	22
2.5.3 Méthode des tableaux du simplexe	28
2.5.4 Complexité de l'algorithme du simplexe	29
2.5.5 Exemple numérique	29
2.5.6 Absence d'une solution initiale de base	32
<b>3 Méthode de points intérieurs</b>	<b>35</b>
3.1 Méthode de trajectoire centrale	35
3.1.1 La mesure de proximité	38
3.1.2 Algorithme	39
3.1.3 La convergence de l'algorithme et l'analyse de la complexité	39
3.2 Exemple numérique	46

<b>Conclusion</b>	<b>50</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>51</b>

# Introduction

La programmation linéaire (*PL*) à été développée en 1947 et utilisée par Géorge Bernard Danzing[5]. Elle relève des mathématiques de la recherche opérationnelle et a des applications en gestion ainsi qu'en économie, en statistique, en physique....etc. La programmation linéaire est un cadre mathématique général permettant de modéliser et de résoudre certain problèmes d'optimisation, qu'est consiste à trouver le maximum où le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certain équations et inégalités dites contraintes. Parmi les méthodes de résolution d'un problème linéaire on cite :

- **La méthode graphique.**
- **La méthode du simplexe.**
- **Les méthode de points intérieurs.**

L'une des méthodes pour résoudre les problèmes linéaires en nombre réels est la méthode classique du simplexe, qui est la plus utilisé depuis longtemps. Cette méthode à été découvre en 1947 par George Danzing [5] . La méthode du simplexe est une procédure itérative permettant d'effectuer une exploration dirigée de l'ensemble des solutions réalisable de base . L'application de cette méthode nécessite la connaissance d'une solution de base réalisable de départ, ensuite on utilise la méthode des tableaux pour obtenir la solution optimale. Il est montré par [17] qui a un complexité exponentielle. Pour cela, on utilise les méthodes de points intérieurs qui on été initialiser pour la première fois par Karmaker en 1984. Depuis cette date, de nombreux algorithmes ont été développée pour la programmation linéaire [9, 14]. On distingue quatre classes fondamentales de méthodes de points intérieurs à savoir :

- **Méthodes affines.**
- **Méthodes projectives.**
- **Méthodes de réduction de potentiel.**
- **Méthodes de trajectoire centrale.**

La méthode de trajectoire centrale a été introduite à la même époque que les méthodes de réduction de potentiel et pleinement développées au début des années 90. Elles possède de bonnes propriétés théorique : une complexité polynomiale et une convergence linéaire [14]. L'extension pour d'autre problèmes d'optimisation, pour plus de détail voir [1,2,3,7,11,18,19].

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente quelque définitions de produit scalaire, norme et l'analyse convexe ainsi la programmation mathématique et la méthode de newton qui utilisé par la suite.

Dans le deuxième chapitre, on utilise la méthode du simplexe pour résoudre un problème linéaire dont la complexité de cette méthode est exponentielle et on termine ce chapitre par quelque exemple numérique.

Dans le troisième chapitre, on va étudier un algorithme de trajectoire centrale de type primal-dual pour résoudre le problème linéaire. Notons que **Roos et al** [14] ont montré que la complexité de cet algorithme est polynomiale et à la fin de ce chapitre on présente des tests numériques issues de l'application de cet algorithme .

On terminera ce mémoire par une conclusion .



## Notations

$\mathbb{R}^n$	:	L'espace des vecteurs réels de dimension $n$ ,
$\mathbb{R}_+^n$	:	L'orthant positif de $\mathbb{R}^n$ ,
$\mathbb{R}^{m \times n}$	:	L'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(m \times n)$ ,
$rg(A)$	:	Le rang de la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,
$A^T$	:	Transposé d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,
$a_j$	:	La colonne $j$ de la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,
$x^T$	:	Transposé d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ ,
$xz$	=	$x_i z_i, \forall i$ ,
$\sqrt{x}$	=	$\sqrt{x_i} (x_i > 0, \forall i)$ ,
$x^{-1}$	=	$\frac{1}{x_i} (x_i \neq 0, \forall i)$ ,
$x \geq 0 (x > 0)$	=	$x_i \geq 0 (x_i > 0), \forall i$ ,
$x \leq 0 (x < 0)$	=	$x_i \leq 0 (x_i < 0), \forall i$ ,
$0_m$	:	Le vecteur 0 de taille $(m)$ ,
$I_m$	:	La matrice identité de taille $(m \times m)$ ,
$card(E)$	:	Le nombre des éléments d'un ensemble $E$ ,
$f(x) = O(g(x))$	$\Leftrightarrow$	$\exists k > 0 : f(x) \leq kg(x),$ pour tout $x > 0$ .

## Terminologie

- PM** : Programmation mathématique ,
- PL** : Programmation linéaire ,
- (P)** : Le problème linéaire sous forme primal ,
- (D)** : Le problème dual de  $(P)$  .
- (PA)** : Le problème artificielle.
- K.K.T** : Karush-Kuhn-Tucker .
- TC** : Trajectoire centrale .
- CPI** : Condition de points intérieurs .
- J(x)** : La matrice jacobienne .
- S.B.R** : Solution de base réalisable .

# Chapitre 1

## Généralité sur la programmation mathématique

Dans ce chapitre, on présente les notions fondamentales d'analyse convexe et de la programmation mathématique.

### 1.1 Préliminaires

#### 1.1.1 Produit scalaire et norme

##### Définition 1.1.1

Le produit scalaire usuel de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  est définie par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y.$$

##### Définition 1.1.2

La norme vectorielle est une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}_+$  notée par  $\|\cdot\|$  et vérifiée les conditions suivantes :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
3.  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

On note que Les normes usuelles sur  $\mathbb{R}^n$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  sont :

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_i |x_i|.\end{aligned}$$

Sur  $\mathbb{R}^n$  les trois normes  $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$  sont équivalentes. C'est à dire :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

Ces définitions est très importante par la suite.

**Définition 1.1.3**

L'ensemble de  $m$  vecteurs  $v_i$  est dit linéairement indépendant si et seulement si

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, m.$$

Notons que la matrice  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  qui est formé de  $m$  vecteurs linéairement indépendantes est inversible.

**Définition 1.1.4**

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , le nombre maximale des lignes (ou des colonnes) de  $A$  linéairement indépendantes est appelé le rang de  $A$ , est noté par  $rg(A)$ .

De plus,  $A$  est dite de plein rang si

$$rg(A) = \min(m, n).$$

## 1.2 Convexité

La notion de convexité est un outil mathématique important pour l'étude théorique et numérique des problèmes d'optimisations. Par la suite, on présente quelques notions d'analyse convexe.

### 1.2.1 Ensemble et fonction convexe

**Définition 1.1.5**

un sous ensemble  $C \subset \mathbb{R}^n$  est dit convexe si :

$$\forall (x, y) \in C, (1 - \lambda)x + \lambda y \in C ; \forall \lambda \in [0, 1].$$

Autrement dit, si le segment de droit joignant deux point quelconques  $(x, y) \in C$  est entièrement inclus dans  $C$ , c-à-d :

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y \in C, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset C.$$

Soit  $C_1, C_2, \dots, C_n$  convexe alors on a Les opération suivant :

- l'intersection quelconque.
- le produit cartésien.
- l'addition et soustraction.
- les combinaison linéaire  $\sum_{i=1}^m \alpha_i c_i, (\alpha_i \in \mathbb{R} \text{ et } m \in \mathbb{N}).$

**Définition 1.1.6**

Soit  $C$  un ensemble convexe, on dit que la fonction  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe sur  $C$  si :

$$f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \forall \lambda \in [0, 1], \forall (x, y) \in C.$$

**Remarque 1.2.1**

Une fonction  $f$  est dite concave si et seulement si  $(-f)$  est convexe.

**1.2.2 Ensemble et application affine**

**Définition 1.1.7**

Un sous ensemble  $C \subset \mathbb{R}^n$  est dit affine si :

$$\forall (x, y) \in C \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}, (1 - \lambda)x + \lambda y \in C.$$

**Définition 1.1.8**

Une fonction  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite affine sur  $C$  si :

$$\forall (x, y) \in C \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}, f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

**Définition 1.1.8**

L'ensemble  $C$  qui s'écrit sous la forme :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : p_i^t x \leq \alpha_i : i = 1, \dots, m\}$$

où  $p_i$  est un vecteur non nulle de  $\mathbb{R}^n$  et  $\alpha_i$  est un scalaire pour  $i = 1, \dots, m$ , est dit polyèdre .

**1.3 Programmation mathématique**

**1.3.1 Notions de base**

• **Problème d'optimisation**

Sous sa forme générale, un problème d'optimisation s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C, \end{cases}$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $\phi \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des contraintes .

Si  $C = \mathbb{R}^n$ , ce problème est appelé problème d'optimisation sans contraintes.

• **Programme mathématique**

Un programme mathématique est un problème d'optimisation qui consiste à trouver une solution du problème qui maximise ou minimise une fonction donnée sous un ensemble des contraintes.

En générale, un programme mathématique est défini par :

$$(PM) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in D, \end{cases}$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée fonction objective de  $(PM)$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des contraintes. Souvent  $D$  est présenté comme suit ;

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p\},$$

avec  $g_i, h_j$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

• **Solution réalisable**

Un point  $x^0$  de  $D$  est appelé solution réalisable de  $(PM)$  s'il vérifié les contraintes c-à-d :  $(x^0 \in D)$ .

• **Solution optimale globale**

Tout point  $x^* \in D$  satisfaisant :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D,$$

est appelée solution optimale globale.

• **Solution optimale locale**

Tout point  $x^* \in D$  satisfaisant :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D \cap v,$$

où  $v$  est un voisinage de  $x^*$  est appelée solution optimale locale.

On note que  $f(x^*)$  est appelée valeur optimale de  $(PM)$ .

**1.3.2 Classification d'un programme mathématique**

La classification de  $(PM)$  est établir à partir de deux propriétés fondamentales pour savoir la convexité et la différentiabilité de la fonction objectif et les contraintes :

1.  $(PM)$  est différentiable si les fonctions  $f, g_i, h_j$  sont différentiables.
2.  $(PM)$  est convexe si  $f, g_i$  sont convexes et  $h_j$  sont affines.

**Remarque 1.2.2**

Si  $(PM)$  convexe, alors tout optimum locale est un optimum globale.

### 1.3.3 Qualification des contraintes

La Qualification des contraintes est satisfaite pour tout  $\bar{x} \in D$  dans l'un des trois cas suivants :

- Les contraintes sont affines ( $D$  est un polyèdre convexe).
- La condition de Slater : Si  $D$  est convexe (c-à-d  $g_i(x)$  sont convexes et  $h_j(x)$  sont affines) et  $\text{int}(D) \neq \emptyset$  c-à-d

$$\exists x^0 : g_i(x^0) < 0 \text{ et } h_j(x^0) = 0, \forall i, j.$$

- La condition de Magazarian-Fromowitz : Si les gradients des contraintes saturées en  $\bar{x} \in D$  sont linéairement indépendants.

### 1.3.4 Existence et unicité

#### Théorème 1.3.1 (Weirstrass)

Si  $f$  est une fonction continue sur  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  est compact (fermé et borné), alors (PM) admet au moins une solution optimale  $x^* \in D$ .

#### corollaire 1.3.1

Si  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  est non vide et fermé et si  $f$  est continue et coercive sur  $D$  (c-à-d  $f(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $\|x\| \rightarrow +\infty$ ), alors (PM) admet au moins une solution optimale.

Si  $f$  est strictement convexe et l'ensemble  $D$  est convexe, alors si (PM) admet une solution optimale, la solution est unique .

#### Remarque 1.2.3

La strict convexité assure l'unicité de la solution et non l'existence de ce dernier.

### 1.3.5 Conditions d'optimalités

Le théorème suivant dit de Karush-Kuhn-Tucker-Lagrange donne une condition nécessaire d'optimalité (condition du premier ordre).

#### Théorème 1.3.2

Supposons que les fonctions  $f, g_i, h_j$  sont  $C^1$  dans un voisinage de  $\bar{x} \in D$  et que les contraintes vérifient une des trois conditions de qualification ci-dessus. Si  $f$  a un minimum local en  $\bar{x}$  sur  $D$  alors  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^m, \exists \mu \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$(K.K.T) \begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0, \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \forall i = 1, \dots, m \\ h_j(\bar{x}) = 0, \forall j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Les quantités  $\lambda_i$  et  $\mu_j$  sont appelées multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker-Lagrange.

**Remarque 1.2.4**

1. Si les contraintes de (PM) ne sont pas qualifiées en  $\bar{x}$ , les conditions de (K.K.T) ne s'appliquent pas.
2. Si (PM) est convexe, les conditions de (K.K.T) sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que  $\bar{x}$  soit un minimum global.

## 1.4 Méthode de newton

Dans cette partie, on s'intéresse par la résolution d'un système d'équations non linéaire. Pour cela, on considère le problème suivant :

$$F(x) = 0, \text{ où } F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } n \geq 2.$$

c-à-d trouver  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0 \\ f_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0 \end{cases}$$

Chaque équation  $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$  est considéré comme une surface de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ; l'intersection de  $n$  surfaces nous donne la solution  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n; F(\bar{x}) = 0$ . Alors on peut remplacer chaque surface associé à  $f_i(x) = 0$  par l'hyperplan qui est tangent au point  $x^{(k)}$ .

On définit alors le point  $x^{(k+1)}$  comme l'intersection de ces  $n$  hyperplan avec l'hyperplan  $y = 0$ .

On a :

$$F(x^{(k+1)}) \simeq F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}).$$

Alors :

$$0 = F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}).$$

Et par conséquent :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}).$$

Puisque  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , alors  $F'(x^{(k)}) = J(x^{(k)})$  ou  $J(x)$  désigne la matrice jacobienne donc :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [J(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}).$$

Pour éviter le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne ou résoud le système linéaire suivant :

$$F'(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}).$$

Et on prend :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}.$$



# Chapitre 2

## Programmation linéaire et Méthode du simplexe

Dans ce chapitre, On présente une synthèse sur le problème linéaire et ainsi sur la méthode du simplexe .

### 2.1 Programmation linéaire

#### 2.1.1 Définition du problème

Un programme linéaire est un modèle d'optimisation mathématique qui à pour objectif de trouver le maximum où le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines égalités et / ou inégalités dites contraintes. En langage mathématique , un programme linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$(P) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

tels que :

$c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$  des données et  $x \in \mathbb{R}_+^n$  (inconnu).

On note par :

– L'ensemble des solutions réalisables primales de  $(P)$  est :

$$F_P = \{Ax = b, x \geq 0\}.$$

On note que  $F_P$  est un polyèdre convexe fermé.

– L'ensemble des solutions strictement réalisable primales :

$$F_P^+ = \{Ax = b, x > 0\}.$$

– la valeur optimale primale du problème  $(P)$  :

$$val(P) = \inf_x \{c^T x : Ax = b, x \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

– On dit que  $x^*$  est une solution optimale primale de  $(P)$  si :

$$x^* \in F_P \text{ et } val(P) = c^T x^*.$$

## 2.2 Dualité en programmation linéaire

Le dual de  $(P)$  est donné par :

$$(D) \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y + z = c \\ y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0, \end{cases}$$

où l'inconnu est  $(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n$ .

– L'ensemble des solutions réalisables duales de  $(D)$  est noté par :

$$F_D = \{A^T y + z = c, z \geq 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^m\}.$$

– L'ensemble des solutions strictement réalisables duales de  $(D)$  est noté par :

$$F_D^+ = \{A^T y + z = c, z > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^m\}.$$

– La valeur optimale dual de  $(D)$  :

$$val(D) = \underset{(y,z)}{Sup} \{b^T y : A^T y + z = c, z \geq 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^m\}.$$

– On dit que  $(y^*, z^*)$  est une solution optimale dual de  $(D)$  si :

$$(y^*, z^*) \in F_D \text{ et } val(D) = b^T y^*.$$

– L'ensemble des solutions réalisables primales-duales de  $(P)$  et  $(D)$  est noté par :

$$F_P \times F_D.$$

– L'ensemble des solutions strictement réalisables primales-duales de  $(P)$  et  $(D)$  est :

$$F_P^+ \times F_D^+.$$

### 2.2.1 Dualité faible

**Définition 2.1.1** (Saut de dualité)

Soient  $x \in F_P, (y, z) \in F_D$ , alors la différence :

$$\begin{aligned} val(P) - val(D) &= c^T x - b^T y \\ &= x^T z \end{aligned}$$

est appelée le saut de dualité des problèmes  $(P)$  et  $(D)$ .

**Théorème 2.2.1** (Proposition II.1[14])

Soit  $x$  et  $z$  deux solutions réalisables de  $(P)$  et  $(D)$  respectivement, alors

$$c^T x - b^T y = x^T z \geq 0.$$

Si le saut de dualité  $x^T z = 0$ , alors  $x$  est une solution optimale de  $(P)$  et  $(y, z)$  solution optimale de  $(D)$ .

**Preuve**

On a :

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y \\ &= (y^T A + z^T)x - x^T A^T y \\ &= \langle A^T y, x \rangle + \langle z, x \rangle - \langle Ax, y \rangle \end{aligned}$$

Comme  $\langle A^T y, x \rangle = \langle Ax, y \rangle$  donc :

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= x^T z \\ &= \sum_{i=1}^n x_i z_i \geq 0 \text{ car } x \geq 0 \text{ et } z \geq 0. \end{aligned}$$

### 2.2.2 Dualité forte

**Théorème 2.2.2**[14]

Soient  $(x, y) \in F_P \times F_D$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $(D)$ , respectivement tel que :

$$b^T y = c^T x.$$

Alors  $x$  et  $y$  sont des solutions optimales de  $(P)$  et  $(D)$ .

**corollaire 2.1.1**

- Si  $c^T x$  est non borné inférieurement sur  $F_P$  alors  $(D)$  est non réalisable ( l'ensemble des contraintes duales  $F_D$  est vide ).
- Si  $b^T y$  est non borné supérieurement alors  $(P)$  est non réalisable (c-à-d :  $F_P$  est vide ).
- Si  $P$  est non réalisable alors  $(D)$  est non borné ( et réciproquement).

## 2.3 Formes d'un programme linéaire

### 2.3.1 Forme canonique

La forme canonique d'un programme linéaire ( $P$ ) est s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \text{ (ou } \leq) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ , et  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$ .

### 2.3.2 Forme standard

La forme standard d'un programme linéaire ( $P$ ) est s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Pour résoudre le problème ( $P$ ) on suppose qu'il vérifie les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 1 :** On suppose que la matrice  $A$  est de taille  $m \times n$  avec  $\text{rg}(A) = m \leq n$  ( $A$  de plein rang).

**Hypothèse 2 :** On suppose que  $F_P \neq \emptyset$  c-à-d :  $\exists x^0 \geq 0 : Ax^0 = b$ .

**Définition 2.1.2** Ensemble des indices de base

Soit  $R \subset \{1, \dots, n\}$  un ensemble d'indice avec  $\text{card}(R) = m$  tel que les colonnes  $a_j (j \in R)$  de  $A$  sont linéairement indépendantes . Autrement dit , la matrice carrée  $B$  formée des colonnes  $a_j (j \in R)$  est inversible . On dit alors que l'ensemble  $R$  des indices est une base .

- Les variables  $x_B = (x_j, j \in R)$  sont appelées variables de base.
- Les variables  $x_N = (x_j, j \notin R)$  sont appelées variables hors-base.

**Remarque 2.2.1**

On peut toujours écrire les décompositions par blocs suivantes :

$A = (B, N)$  où  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est appelée matrice de base et  $N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$  matrice hors base et aussi

$x = (x_B, x_N)^T$  où  $x_B \in \mathbb{R}^m$  sont les variables de base et  $x_N \in \mathbb{R}^{(n-m)}$  les variables hors base.

**Définition 2.1.3** Solution de base réalisable

On dit que  $x = (x_B, x_N)^T$  est une solution de base associée à la base  $R$  si elle vérifie  $Ax = b$  avec  $x_B = B^{-1}b$  et  $x_N = 0_{(n-m)}$  .

De plus, si  $x_B \geq 0$ , alors  $x$  est une solution de base réalisable.

**Remarque 2.2.2**

Un programme linéaire admet au plus  $C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}$  solutions de base.

**Définition 2.1.4** Solution dégénérée et non dégénérée

- Une solution de base réalisable  $x$  est dite non dégénérée si  $x_B > 0$ .
- Si, au moins une composantes  $(x_B)_i = 0$ . alors  $x$  est appelée une solution de base réalisable dégénérée.

## 2.4 Existence et unicité de la solution

D’après l’hypothèse 2, on a  $F_P \neq \emptyset$  donc le théorème suivant montre l’existence de la solution

**Théorème 2.2.3**

- $(P)$  admet au moins une solution optimale si :  $S$  bornée où la fonction objective bornée inférieurement :  $\inf_S c^T x > -\infty$ .
- $(P)$  admet une infinité de solution si admet deux solution optimale différent où solution optimale non réalisable.
- Si  $(P)$  admet des solutions optimales, nécessairement une des sommets de  $S$  est une solution de  $(P)$ .

**Remarque 2.2.3**

la fonction linéaire n’est pas strictement convexe alors la solution s’il existe n’est pas unique .

## 2.5 Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une méthode efficace pour résoudre les problèmes linéaires. Elle peut s’appliquer peu importe le nombre de variables dans le modèle. Le principe de résolution nécessite un certain nombre d’étapes dont la démarche est la suivante [4] :

1. Déterminer une première solution de base réalisable, cette solution initiale sert de départ au changement vers la solution optimale (si elle existe).
2. Si la solution obtenue en (1) n’est pas optimale, déterminer une autre solution de base réalisable qui permettrait d’améliorer la fonction objectif (augmentation pour une maximisation ou diminution pour une minimisation).
3. Répéter cette procédure itérative jusqu’à ce qu’il ne soit plus possible d’améliorer la fonction objectif. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale du programme linéaire.

### 2.5.1 Variable d'écart et la transformation à la forme standard

La résolution d'un problème linéaire par la méthode de simplexe nécessite que les contraintes fonctionnelles du modèle soient exprimées sous forme d'équations linéaires (forme standard) au lieu d'inéquations. Cette transformation s'effectue facilement en introduisant dans le modèle de nouvelle variable appelée variable d'écart.

#### Transformation d'une inéquation de signe plus petit ou égal ( $\leq$ )[16]

Tout contraintes de la forme

$$Ax \leq b$$

peut être remplacée par un système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} Ax + s = b \\ s \in \mathbb{R}_+^n, \end{cases}$$

où  $s = b - Ax$  est appelée variable d'écart.

#### Transformation d'une inéquation de signe plus grand ou égal ( $\geq$ )[16]

Tout contraintes de la forme

$$Ax \geq b$$

peut être remplacée par un système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} Ax - s = b \\ s \in \mathbb{R}_+^n, \end{cases}$$

où  $s = Ax - b$  est appelée variable d'écart.

### Forme standard d'un modèle de programmation linéaire

La résolution d'un programme linéaire par la méthode de simplexe est basée sur la représentation du problème en forme standard. Considérons le modèle suivant :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Sa forme standard sera :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax - s = b \\ x \geq 0, s \geq 0 \end{cases}$$

## 2.5.2 Algorithme du simplexe

On dispose d'une solution de base réalisable  $x$  du problème  $(P)$  sous forme standard, la matrice  $A$  peut s'écrire

$$A = (B, N)$$

avec  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  une matrice inversible correspondant aux variables de base et  $N$  une matrice de taille  $m \times (n - m)$  correspondant aux variables hors-base.

On décompose également le vecteur de décision

$$x = (x_B, x_N)$$

avec  $x_B$  les variables de base et  $x_N$  les variables hors base.

Le but est de trouver une autre base  $R^*$  est une solution de base  $x^*$  associée telle que :

$$c^T x^* < c^T x \quad (x^* \text{ est meilleur que } x)$$

La méthode du simplexe consiste à introduire une variable hors-base dans la nouvelle base (variable entrante) et obtenir une variable de base (variable sortante).

### 2.6.2.1 Détermination d'une première solution

Considérons le problème  $(P)$  sous forme standard suivant :

$$(P) \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ .

On peut construire à partir de la matrice  $A$ , deux sous matrices,  $A = (B, N)$ .

De même le vecteur  $x$  (vecteur de décision) est décomposé comme suit :  $x = [x_B, x_N]^T$  où  $x_B = [x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bm}]^T$  et  $x_N$  pour les  $(n - m)$  variables restantes et  $c = (c_B, c_N)^T$ ,  $c_B \in \mathbb{R}^m$ ,  $c_N \in \mathbb{R}^{(n-m)}$ .

Alors

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow (B, N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b. \\ &\Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b. \\ &\Leftrightarrow B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b. \\ &\Leftrightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, \text{ car } B^{-1}B = I_m. \\ &\Leftrightarrow x_B = B^{-1}b, \text{ car } x_N = 0. \end{aligned}$$

où  $x_B$  désigne une solution de base réalisable de départ si  $x_B \geq 0$ .

Notons que la matrice  $B$  est toujours constituée à partir des colonnes de la matrice  $A$ .

### 2.6.2.2 Amélioration d'une solution de base

A partir d'une solution de base réalisable, on obtient une nouvelle solution de base réalisable adjacente (meilleure ou aussi bonne) en transformant une variable (hors-base) en variable de base (dite variable entrante) et en même temps, rendre une variable de base actuelle en variable hors-base (dite variable sortante). Cette opération algébrique permet d'obtenir une nouvelle solution réalisable.

- **Détermination de la variable entrante**

- . **Calcul des coûts réduits**

En simplifiant l'expression de la fonction objective du problème ( $P$ ), on obtient le critère pour déterminer la variable entrante .

On sait que

$$x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b$$

qui est équivalent à :

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N.$$

On note par  $Z = c^T x$  alors

$$Z = c_B^T x_B + c_N^T x_N.$$

Donc

$$\begin{aligned} Z &= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b + c_N^T x_N - c_B^T B^{-1}N x_N. \end{aligned}$$

$N$  constitué de vecteurs hors base (notons ces vecteurs par  $a_j$  ) dont les indices de ces vecteurs sont autres que ceux des vecteurs dans la base. Identifions cet ensemble d'indices par  $E$  et par  $x_j$ , les variables correspondant aux vecteurs  $a_j$ .

L'expression matricielle  $B^{-1}N$  peut s'écrire alors :

$$B^{-1}N = \sum_{j \in E} B^{-1}a_j.$$

On pose  $Z_0 = c_B^T B^{-1}b$ , alors :

$$Z = Z_0 + \sum_{j \in E} c_j x_j - c_B^T \sum_{j \in E} B^{-1}a_j x_j$$



Le vecteur

$$y_N = c_N - (B^{-1}N)^T c_B^T.$$

qui se compose de

$$y_j = c_j - z_j.$$

S'appelle vecteur des coûts réduits .

$z_j = (B^{-1}N)^T c_B^T$  et  $c_j$  sont les coefficients de la fonction objectif des variables hors base.

Notons par  $\mu_j = B^{-1}a_j$  (ces vecteurs  $\mu_j$  seront les nouveaux éléments sous les variables  $x_j$  dans le tableau du simplexe. Dans le tableau de départ les  $\mu_j$  sont les  $a_j$  associés aux contraintes originales du modèle).

- Si les coûts réduits sont tous positifs c'est-à-dire  $y_j = c_j - z_j \geq 0$  (pour toutes les variables hors base), il n'est alors pas possible de diminuer la fonction objectif ( $c^T x$ ) : l'algorithme se termine, et on a trouvé la solution de base réalisable optimale.
- Dans le cas contraire s'il existe  $j \in E$  avec  $E$  l'ensemble des indices des variables hors base telle que  $y_j = c_j - z_j < 0$ , dans ce cas on a intérêt à faire entrer dans la base, la variable qui a le coût réduit négative le plus petit possible.

► **Critère d'entrée d'une variable dans la base**[4]

A partir d'une solution de base réalisable , calculer pour toutes les variables hors base , la quantité  $z_j = c_B^T (B^{-1}a_j) = c_B^T \mu_j$ , puis les  $c_j - z_j$ .

La variable  $x_r$  est introduite dans la base si  $c_r - z_r$  correspond à la valeur algébrique la plus bas parmi tous les  $c_j - z_j$  c'est à dire :

$$c_r - z_r = \min_{j \in E} \{c_j - z_j / c_j - z_j < 0\}.$$

**Remarque 2.2.4**

1. Les  $c_j - z_j = 0$  pour toutes les variables de base .  
En effet ,  $z_j = c_B^T (B^{-1}a_j) = c_B^T \mu_j = c_j$ , le vecteur  $\mu_j$  étant alors un vecteur identité.
2. La valeur de  $x_r$  est déterminée selon la règle de sortie d'une variable de la base que nous traitons ci-après.

● **Détermination de la variable sortante**

Une fois que la variable  $x_r$  est choisie, il faut déterminer quelle variable doit quitter la base. En maintenant la relation  $Ax = b$ , on augmente  $x_r$  jusqu'à annuler une variable de base. Cette variable sera alors la variable sortante.

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

La solution de base  $x_B$  sera modifiée selon l'expression :

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ &= B^{-1}b - B^{-1}a_r x_r \\ &= \bar{b} - \mu_r x_r \end{aligned}$$

où  $\bar{b} = B^{-1}b$  et  $\mu_r = B^{-1}a_r$  (les éléments du tableau sous le vecteur  $a_r$ ).

Il faut que  $x_B \geq 0, i = 1, \dots, m$  pour que la nouvelle solution de base soit réalisable c'est à dire :

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - \mu_{1r} x_r \geq 0$$

$$x_{B_2} = \bar{b}_2 - \mu_{2r} x_r \geq 0$$

$$x_{B_k} = \bar{b}_k - \mu_{kr} x_r \geq 0$$

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - \mu_{mr} x_r \geq 0$$

Discutons sur le signe de  $\mu_{ir} = B^{-1}a_{ir}$

- Si  $\mu_{ir} \leq 0$ , la quantité  $\mu_{ir} x_r$  sera négative et  $x_{B_i}$  augmentera à mesure que  $x_r$  augmentera. on aura toujours la positivité de la variable de base  $x_{B_i}$ . Dans ce cas la solution est non bornée, quand  $x_r$  tend vers l'infini et  $Z$  aussi, donc l'algorithme s'arrête.
- Si  $\mu_{ir} > 0$ , alors  $\mu_{ir} x_r$  sera une quantité positive et  $x_{B_i}$  réduira à mesure que  $x_r$  augmentera.

Pour vérifier que  $x_{B_i} > 0; \forall i$ , on choisit la variable sortant pour laquelle le rapport  $\frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}$  est le plus petit possible, supposons que ce minimum s'obtient à  $i = k$ . Le critère de sortie d'une variable de la base s'énonce alors comme suit :

► **Critère de sortie d'une variable de la base [4]**

Sachant que la variable entrante dans la base est  $x_r$ , la variable  $x_k$  sort de la base d'après :

$$\frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\}$$

La nouvelle valeur de la variable de base est :

$$x_r = \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}, i = k.$$

Le terme  $\mu_{kr}$  est appelé le pivot et sert à effectuer l'opération de pivotage pour déterminer la nouvelle solution réalisable de base .

Soit  $R^*$  la nouvelle base obtenue et  $x^*$  sa solution de base associée alors la nouvelle valeur de la fonction objectif sera donnée par :

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 + x_r(c_r - z_r) \\ &= Z_0 + \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}(c_r - z_r) \end{aligned}$$

et comme la solution n'est pas dégénéré ( $\bar{b}_k > 0$ ) et puisque ( $c_r - z_r < 0$ ), par conséquent la valeur numérique de la fonction objectif s'est améliorée c'est à dire :

$$Z_0 > Z$$

On poursuit ces étapes ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus obtenir de solution de base réalisable améliorant  $Z$ . La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale au programme linéaire.

• **Détermination des nouvelles valeurs des variables de base**

Pour déterminer les nouvelles valeurs des variables de base, on suit les étapes suivantes :

- On remplace  $x_r = \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}$  par sa valeur dans la relation :

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \mu_{ir} x_r, i = 1, \dots, m.$$

- On obtient alors les nouvelles valeurs pour les variables de base

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \frac{\mu_{ir}}{\mu_{kr}} \bar{b}_k, i = 1, \dots, m.$$

et toutes les autres variables  $x_j$  sont nulles ( $j \in E$ )

On note que

$$x_{B_k} = \bar{b}_k - \mu_{kr} x_r = \bar{b}_k - \frac{\mu_{kr}}{\mu_{kr}} \bar{b}_k = 0.$$

alors  $x_k$  variable sortante.

**Remarque 2.2.5**

On peut maintenant exprimer la nouvelle valeur de la fonction objectif ainsi que tous les  $c_j - z_j$  en fonction de la nouvelle quantité pour la variable qui entre dans la base comme suit :

En considérant que la variable entrante est  $x_r$ , la variable sortante est  $x_k$  et que le pivot est  $\mu_{kr}$ , on a :

$$\text{Nouvelle valeur de } Z = \text{Ancienne valeur de } Z + \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} (c_r - z_r).$$

Donc

$$\widehat{Z} = Z + \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} (c_r - z_r).$$

De la même façon, les  $z_j$  sont ajustés comme suit, à partir de la ligne pivot :

$$\text{Nouvelle valeur de } z_j = \text{Ancienne valeur de } z_j + \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}} (c_r - z_r).$$

Donc

$$\widehat{z}_j = z_j + \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}} (c_r - z_r).$$

L'amélioration de la fonction objectif s'écrit alors :

$$c_j - \widehat{z}_j = (c_j - z_j) - \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}} (c_r - z_r).$$

Ces relations seront particulièrement utiles dans la systématisation de l'algorithme à l'aide des tableaux du simplexe.

► **Critère d'optimalité** [4]

Une solution de base réalisable est optimale si pour toutes les variables hors base. On a :

$$c_j - z_j \geq 0.$$

**Théorème 2.2.4**

. **Solution optimale unique** : Une solution de base réalisable est optimale et unique si pour les variables hors base , tout les

$$c_j - z_j > 0.$$

. **Solution optimale multiple** : Il existe une infinité de solutions optimales

Si pour une variable hors base  $c_j - z_j = 0$ . En effet, s'il y a un terme  $\mu_{ij} > 0$  sous le vecteur  $a_j$  on peut introduire  $a_j$  dans la base et obtenir une autre solution de base optimale.

**2.6.2.3 Procédure de l'algorithme du simplexe**

**Étape initiale**

Poser  $x_N = 0$  et déterminer la solution de base réalisable initiale  $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$  et l'objectif  $Z = c_B^T(B^{-1}b) = c_B^T\bar{b}$ .

**Étape principale**

1. Calculer  $c_j - z_j$  avec  $z_j = c_B^T \mu_j = c_B^T (b^{-1} a_j)$ , pour toutes les variables hors base .
  - . Si tous les  $c_j - z_j \geq 0$ , alors stop ; la solution actuelle est la solution optimale .
  - . Sinon, choisir la variable entrante selon le critère :

$$\min_{j \in E} \{c_j - z_j, /c_j - z_j < 0\} = c_r - z_r \text{ (variable entrante } x_r).$$

2. Calculer  $\mu_{ij} = B^{-1} a_j$ .
  - . Si  $\mu_{ij} < 0$  alors stop ; le problème a une solution infinie.
  - . Sinon, choisir la variable qui doit quitter la base selon le critère :

$$\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} \text{ (variable sortante } x_k).$$

3. A partir de la nouvelle base , déterminer  $B^{-1}$ ,  $x_B = B^{-1}b$  et  $Z = c_B^T(B^{-1}b)$  et on passe à l'étape 1.

### 2.5.3 Méthode des tableaux du simplexe

Comme nous l'avons vu précédemment, nous devons, à chaque itération, déterminer les quantités suivantes :  $x_B = B^{-1}b$ ,  $Z = c_B^T x_B = c_B^T (B^{-1}b)$ ,  $z_j = c_B^T (B^{-1}a_j)$  et  $c_j - z_j$ .

Les différentes procédures ont été élaborées pour effectuer une mise à jour de ces quantités.

On peut structurer toute cette information dans un tableau, dit tableau du simplexe [].

On réécrit les expressions matricielles, ci-dessus, sous forme d'un tableau, comme suit :

**Tableau 1**

Base	$x_B$	$x_N$	S.B.R
$c_j - z_j$	0	$c_j - (B^{-1}N)^T c_B^T$	$Z = c_B^T x_B$
$x_B$	$I$	$B^{-1}a_j$	$x_B = B^{-1}b$

Le tableau, ci-dessus, nous donne toutes les informations dont on a besoin pour procéder à la méthode du simplexe.

La première ligne du tableau représente les  $c_j - z_j$  et la valeur de la fonction objectif de la solution de base.

Les lignes 2 à  $m$  sont les éléments du tableau (les  $\mu_{ij}$ ) qu'on obtient après chaque opération de pivotage, pour les variables de base. Ces éléments seront constitués uniquement de 0 et de 1.

#### • Opération de pivotage

Pour déterminer à chaque itération la solution de base et les différents éléments du tableau, nous servons des différentes expressions qui ont été obtenues ci-dessus. Cette procédure de calcul s'appelle opération de pivotage .

Supposons que  $x_r$  devient une variable de base (variable entrante) et que  $x_k$  devient une variable hors base (variable sortante).

· Diviser les éléments de la ligne  $k$  par le pivot  $\mu_{kr}$  :

$$x_{B_k} = \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}$$

$$\widehat{\mu}_{kj} = \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}, j = 1, \dots, n \text{ et } \widehat{\mu}_{kr} = 1, j = r.$$

· Pour les lignes  $i = 1, \dots, m, i \neq k$  du tableau, ajuster les valeurs de la ligne  $i$  en additionnant à cette ligne,  $-\mu_{ir}$  multipliée par les éléments de la nouvelle ligne  $k$  :

$$\widehat{\mu}_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{ir} \widehat{\mu}_{kj} = \mu_{ij} - \mu_{ir} \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}$$

$$\widehat{\mu}_{ir} = 0, i = 1, 2, \dots, m \text{ et } \widehat{\mu}_{kr} = 1, j = r$$

$$\widehat{x}_{B_i} = x_{B_i} - \mu_{ir} \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = \bar{b}_i - \mu_{ir} \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}.$$

· Effectuer une mise à jour de la ligne  $c_j - z_j$  en additionnant à cette ligne ,  $-(c_r - z_r)$  multipliée par les éléments de la nouvelle ligne  $k, \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}$ ;

$$c_j - \widehat{z}_j = (c_j - z_j) - \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}(c_r - z_r)$$

On notera que pour les variables de base  $c_j - z_j = 0, j \in R$ .

· La mise à jour de  $Z$  s'obtient de

$$\widehat{Z} = Z + \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}(c_r - z_r).$$

### Règle de rectangle

Le calcul des éléments  $\widehat{b}_k, \mu_{ij}, Z$  et  $c_j - z_j$  s'obtient rapidement selon la règle du rectangle

$$\text{Nouvelle valeur} = \text{Ancienne valeur} - \frac{\text{Produit les éléments dans les coins opposés}}{\text{Le pivot}}$$

### 2.5.4 Complexité de l'algorithme du simplexe

La complexité d'un algorithme est le nombre d'opérations élémentaires qu'il doit effectuer pour mener à bien un calcul en fonction de la taille des données d'entrée . L'efficacité d'un algorithme est mesurée par l'augmentation du temps de calcul en fonction du nombre des données.

Nous avons donc deux éléments à prendre en compte :

- La taille des données;
- Le temps de calcul .

L'évaluation de la complexité d'un algorithme est l'étude du nombre maximal d'opérations élémentaires qu'il nécessite dans le pire des cas. Kelle et Miny (1972) ont construit des problèmes nécessitant l'examen d'un nombre de sommets croissants exponentiellement en fonction de la taille du problème (contraintes et variables). Et puisqu'il a été montré pour les principales règles de pivotage employées que l'algorithme du simplexe pouvait prendre un temps de calcul exponentiel. En particulier, on ne sait pas s'il existe une règle de pivotage qui assurerait que l'algorithme se termine après un nombre polynomial d'étapes. Alors la complexité de la méthode du simplexe est donc exponentielle [17] .

### 2.5.5 Exemple numérique

Soit le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min 3x_1 - 6x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ -2x_1 - x_2 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ 4x_1 - x_2 \leq 23 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

En ajoutant les variables d'écart  $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  pour obtenir la forme standard

$$\begin{cases} \min 3x_1 - 6x_2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + x_6 = 13 \\ 4x_1 - x_2 + x_7 = 23 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 7 \end{cases}$$

On obtient alors un système d'équations de  $n = 7$  inconnues et  $m = 5$  contraintes .

On obtient une solution de base en annulant  $(7 - 5) = 2$  variables . On s'assure d'une solution de base réalisable en annulant les variables  $x_1, x_2$  c'est à dire :

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 13, x_7 = 23.$$

C'est la solution de base réalisable de départ qui est mise en évidence dans le premier tableau du simplexe .

**Tableau 1 -solution de départ**

ligne	base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	S.B.R
0	$c_j - z_j$	3	-6	0	0	0	0	0	0
1	$x_3$	-1	-2	1	0	0	0	0	1
2	$x_4$	-2	-1	0	1	0	0	0	0
3	$x_5$	-1	1	0	0	1	0	0	1
4	$x_6$	-1	4	0	0	0	1	0	13
5	$x_7$	4	-1	0	0	0	0	1	23

Les variables hors base sont  $x_1, x_2$ .

Appliquer le critère d'entrée d'une variable.

$$\begin{aligned} \min\{c_j - z_j\} &= \min\{c_1 - z_1, c_2 - z_2\}, \\ &= \min\{3, -6\}, \\ &= -6. \end{aligned}$$

Donc la variable  $x_2$  entrante .

Appliquer le critère de sortie d'une variable.

$$\begin{aligned} \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0\right\} &= \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{i2}}, \mu_{i2}\right\}, \\ &= \min\left\{1, \frac{13}{4}\right\}, \\ &= 1, \\ &= \frac{\bar{b}_3}{\mu_{32}}. \end{aligned}$$

Donc la variable  $x_5$  sortante.

La variable  $x_2$  dans la base et sa valeur sera 1, la variable sortante est  $x_5$  et le pivot  $\mu_{42} = 1$  ( $k = 3$ ).

Le tableau suivant contient les calculs ci-dessus :

**Tableau 2**

ligne	base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	S.B.R
0	$c_j - z_j$	-3	0	0	0	6	0	0	6
1	$x_3$	-3	0	1	0	2	0	0	3
2	$x_4$	-3	0	0	1	1	0	0	1
3	$x_2$	-1	1	0	0	1	0	0	1
4	$x_6$	3	0	0	0	-4	1	0	9
5	$x_7$	3	0	0	0	1	0	1	24

Le tableau 2 n'est pas optimale car  $c_1 - z_1 = -3 < 0$ .

On applique les même critère d'entrée et de sortie d'une variable on obtient :

La variable entrante :  $x_1$ , la variable sortante :  $x_6$ , le pivot  $\mu_{41} = 3$ .

En pivotant sur  $\mu_{41} = 3$  on obtient le tableau 3 :

**Tableau 3**

ligne	base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	S.B.R
0	$c_j - z_j$	0	0	0	0	2	1	0	15
1	$x_3$	0	0	1	0	-2	1	0	12
2	$x_4$	0	0	0	1	-3	1	0	10
3	$x_2$	0	1	0	0	-1/3	1/3	0	4
4	$x_1$	1	0	0	0	-4/3	1/3	0	3
5	$x_7$	0	0	0	0	5	-1	1	15

Le tableau 3 est optimale car tout les  $c_j - z_j$  pour les variables hors base sont positives ( $c_5 - z_5 > 0$  et  $c_6 - z_6 > 0$ ).

La solution optimale est :

$$x_{B_1} = x_3 = 12$$

$$x_{B_2} = x_4 = 10$$

$$x_{B_3} = x_2 = 4$$

$$x_{B_4} = x_1 = 3$$

$$x_{B_5} = x_7 = 15$$

$Z$  est minimum pour  $x_1 = 3$  et  $x_2 = 4$  et  $Z = -15$ .



### 2.5.6 Absence d'une solution initiale de base

Pour initialiser l'algorithme du simplexe, il faut disposer d'une solution de base réalisable initiale, or une telle solution de base initiale n'est pas nécessairement disponible .

Soit à résoudre le problème de programmation linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

où :  $c \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , supposé de plein rang ( $rg(A) = m < n$ ).

Introduire les variables artificielle  $a_1, \dots, a_m$ , et appliquer la méthode du simplexe au problème auxiliaire :

$$(PA) \begin{cases} \min \omega = \sum_{i=1}^m a_i \\ Ax + a = b \\ x \geq 0, a \geq 0. \end{cases}$$

Si la valeur optimale  $\omega$  est positive alors le domaine réalisable du problème original est vide, si la valeur optimale  $\omega$  est nulle alors le domaine réalisable du problème original n'est pas vide. Dans ce cas, les valeurs qui prennent les variables  $x_i$  constituent une solution pour le problème original où tout les variables artificielles  $a_i$  sont égale à 0 .

#### Exemple

La solution de problème linéaire :

$$\begin{cases} \min 2x_1 - x_2 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

#### Phase I : Détermination de solution initiale ( $x^0$ )

Résoudre le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \min \omega = a_1 + a_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + a_1 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 + a_2 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0. \end{cases}$$

On cite les données dans le tableau suivant :

**Tableau 1**

ligne	base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$a_1$	$a_2$	S.B.R
0	$a_j - \omega_j$	0	0	0	0	1	1	0
1	$a_1$	1	1	1	1	1	0	3
2	$a_2$	1	-1	-2	-3	0	1	1

A partir de calculer  $\alpha_j - \omega_j$  on obtient ce tableau

**Tableau 2**

ligne	base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$a_1$	$a_2$	S.B.R
0	$a_j - \omega_j$	-2	0	1	2	0	0	-4
1	$a_1$	1	1	1	1	1	0	3
2	$a_2$	1	-1	-2	-3	0	1	1

Les variables hors base sont :  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Appliquer le critère d'entrée d'une variable :

$$\begin{aligned} \min\{a_j - \omega_j\} &= \min\{a_1 - \omega_1, a_2 - \omega_2, a_3 - \omega_3, a_4 - \omega_4\} \\ &= \min\{-2, 0, 1, 2\} \\ &= -2 \end{aligned}$$

La variable entrante est  $x_1$ .

Appliquer le critère de sortie d'une variable :

$$\begin{aligned} \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}} \mid \mu_{ir} > 0\right\} &= \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{i1}} \mid \mu_{i1} > 0\right\} \\ &= \min\{3, 1\} \\ &= 1 \\ &= \frac{\bar{b}_2}{\mu_{21}} \end{aligned}$$

Donc la variable sortante est  $a_2$ .

La variable  $x_1$  entre dans la base et sa valeur sera 1 et la variable sortante est  $a_2$  et le pivot  $\mu_{21} = 1$ .

**Tableau 3**

ligne	base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$a_1$	$a_2$	S.B.R
0	$a_j - \omega_j$	0	-2	-3	-4	0	2	-2
1	$a_1$	0	2	3	4	1	-1	2
2	$x_1$	1	-1	-2	-3	0	1	1

Le tableau 3 n'est pas optimal car :  $\exists(a_j - \omega_j < 0)$ .

On applique les mêmes critères d'entrée et de sortie d'une variable on obtient :

La variable entrante :  $x_4$ , la variable sortante :  $a_1$  et le pivot  $\mu_{14} = 4$ .

En pivotant sur  $\mu_{14}$  on obtient le tableau 4 :

**Tableau 4**

ligne	base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$a_1$	$a_2$	S.B.R
0	$a_j - \omega_j$	0	0	0	0	1	1	0
1	$x_4$	0	1/2	3/4	1	1/4	-1/4	1/2
2	$x_1$	1	1/2	1/4	0	3/4	1/4	5/2

Donc la solution initiale est  $x^0 = (5/2, 0, 0, 1/2)^T$ .

On a dans la phase II  $\omega_j = 0$  et il n'est pas les variables artificielle .

### Phase II

Nous reprennent le problème à partir de dernière tableau de la phase I :

$$\begin{cases} \min 2x_1 - x_2 + x_4 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + x_4 = \frac{1}{2} \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

A partir de ce problème on obtient le tableau suivant

**Tableau 1**

ligne	base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S.B.R
0	$c_j - z_j$	2	-1	0	1	0
1	$x_1$	1	1/2	1/4	0	5/2
2	$x_4$	0	1/2	3/4	1	1/2

Après les calculs de  $c_j - z_j$  on obtient le tableau 2

**Tableau 2**

ligne	base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S.B.R
0	$c_j - z_j$	0	-5/2	-5/4	0	-11/2
1	$x_1$	1	1/2	1/4	0	5/2
2	$x_4$	0	1/2	3/4	1	1/2

On applique les mêmes critère d'entrée et de sortie d'une variable on obtient :

La variable entrante :  $x_2$ , la variable sortante  $x_4$  et le pivot  $\mu_{22} = 1/2$ .

En pivotant sur  $\mu_{22}$  on obtient le tableau 2 :

**Tableau 3**

ligne	base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S.B.R
0	$c_j - z_j$	0	0	5/2	5	-3
1	$x_1$	1	0	-1/2	-1	2
2	$x_2$	0	1	3/2	2	1

Le tableau 3 est optimale car tout les  $c_j - z_j$  sont positive .

La solution optimale est :

$$\begin{aligned} x_{B_1} &= x_1 = 2 \\ x_{B_2} &= x_2 = 1 \\ x_{B_3} &= x_3 = 0 \\ x_{B_4} &= x_4 = 0 \end{aligned}$$

Z est minimum pour  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$  et le vaut = 3.

# Chapitre 3

## Méthode de points intérieurs

On désigne par méthode de points intérieurs, toute procédure de résolution générant une suite de points appartenant à l'intérieur relatif du domaine réalisable et convergeant vers une solution optimale.

Ces méthodes sont réputées grâce à leur convergence polynomiale, leur rapidité et efficacité et se sont révélées comme de véritables concurrentes des méthodes simpliciales surtout pour les problèmes de grandes tailles.

On distingue quatre classes fondamentales de méthodes de points intérieurs à savoir :

- **Les méthodes affines .**
- **Les méthodes projectives.**
- **les méthodes de réduction du potentiel.**
- **Les méthodes de trajectoire centrale.**

Dans ce travail, on s'intéresse pour les méthodes de trajectoire centrale.

### 3.1 Méthode de trajectoire centrale

Elles ont été introduites à la même époque que les méthodes de réduction du potentiel et pleinement développées au début des années 90. Elles possèdent de bonnes propriétés théoriques : une complexité polynomiale et une convergence linéaire.

On rappelle qu'on cherche à résoudre un programme linéaire ( $P$ ) qui est définie par :

$$(P) \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

et son dual est donné par :

$$(D) \begin{cases} \max b^T y \\ A^T y + z = c \\ y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0. \end{cases}$$

Pour résoudre les deux problèmes ( $P$ ) et ( $D$ ) on suppose qu'ils vérifient les hypothèses suivantes :

## Hypothèses

1. la matrice  $A$  est de plein rang (c-à-d :  $rg(A) = m \leq n$ ).
2. Condition de point intérieur (CPI) :  $\exists (x^0, y^0, z^0) \in F_P^+ \times F_D^+$ .

$$\begin{cases} Ax^0 = b \\ A^T y^0 + z^0 = c \\ x^0 > 0, z^0 > 0, y \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

( $P$ ) consiste à minimiser une fonction linéaire (convexe) sous l'ensemble des contraintes qui est un polyèdre convexe. comme  $F_P$  non vide (hypothèse 2),  $\exists z \in \mathbb{R}_+^n; \exists y \in \mathbb{R}^m$ . D'après les condition d'optimalité de Karuch-Kuhn-Tucher :

$$(K.K.T) \begin{cases} \nabla(c^T x) - \sum_{i=1}^n z_i (\nabla x_i) + \sum_{j=1}^m y_j (\nabla(b - Ax)) = 0 \\ Ax = b \\ zx = 0. \end{cases}$$

Après la dérivation de premier equation de ce système on obtient :

$$\begin{cases} c - z - A^T y = 0 \\ Ax = b \\ zx = 0. \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} Ax = b \\ A^T y + z = c \\ xz = 0, x > 0, z > 0; y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dont la dernière équation est dite équation de complémentarité.

L'idée principale de la méthode de trajectoire centrale est de perturbé la dernière equation du système (3.1). Alors

$$\begin{cases} Ax = b \\ A^T y + z = c \\ xz = \mu e, x > 0, z > 0; y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (3.2)$$

Tel que :  $\mu > 0, e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ .

L'ensemble  $\{x(\mu), y(\mu), z(\mu); \mu > 0\}$  s'appelle la trajectoire centrale. De plus ; si  $\mu \rightarrow 0$  alors  $x^T z$  tend vers le zéro c-à-d trouver une solution optimale pour ( $P$ ) et ( $D$ ) revient à résoudre le système (3.2).

Le système (3.2) devient :

$$\begin{cases} Ax - b = 0 \\ A^T y + z - c = 0 \\ xz - \mu e = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Ce système est un système d'équation non linéaire .Il est résolu par la méthode de newton appliquée à la fonction  $F(x, y, z) = 0$

où  $F : \mathbb{R}^{2n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+m}$  définie par

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ xz - \mu e \end{pmatrix}.$$

Soient  $(x, y, z) \in F_p^+ \times F_D^+$ , tel que  $xz \neq \mu e$ .

La direction de Newton  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  est la solution de système linéaire :

$$\nabla F(x, y, z) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = -F(x, y, z)$$

On va calculer la matrice jacobienne de  $F$  :

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Par un simple calcul, on arrive à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} A\Delta x = 0 \\ A^T \Delta y + \Delta z = 0 \\ z\Delta x + x\Delta z = \mu e - xz \end{cases} \quad (3.4)$$

On définit le vecteur  $v$  pour tout vecteur réalisable primal  $x > 0$ ; et le vecteur réalisable dual  $z > 0$ ,

$$v = \sqrt{\frac{xz}{\mu}}.$$

On définit les vecteurs normés de la direction de déplacement  $d_x$  et  $d_z$  comme suit :

$$d_x = \frac{v\Delta x}{x}; \quad d_z = \frac{v\Delta z}{z}.$$

en remplaçant  $d_x$  et  $d_z$  dans la dernière equation de système précédent, on obtient :

$$z\Delta x + x\Delta z = \mu v(d_x + d_z). \quad (3.5)$$

D'une part on a :

$$d_x d_z = \frac{\Delta x \Delta z}{\mu}. \quad (3.6)$$

Utilisant(3.5) on peut récrire le système (3.4) comme suite :

$$\begin{cases} \bar{A} d_x = 0 \\ \bar{A}^T d_y + d_z = 0 \\ d_x + d_z = p_v. \end{cases} \quad (3.7)$$

Avec  $\bar{A} = \frac{1}{\mu} A \text{diag}(\frac{x}{v})$ ,

et

$$P_v = v^{-1} - v. \quad (3.8)$$

On montrer que  $d_x^T d_z = 0$ .

**Preuve :**

D'après l'équation (2) de système (3.7) on à :

$$d_z = -\bar{A}^T d_y$$

Donc

$$\begin{aligned} d_x^T d_z &= d_x^T (-\bar{A}^T d_y) \\ &= -(d_x^T \bar{A}^T) d_y \\ &= -(\bar{A} d_x)^T d_y \end{aligned}$$

D'après l'équation (1) de système (3.7) on à :

$$\bar{A} d_x = 0$$

Alors

$$d_x^T d_z = 0.$$

### 3.1.1 La mesure de proximité

Pour que les itérations produites par l'algorithme restent réalisables et proches de la trajectoire centrale, on est obligé d'introduire une mesure de proximité qui est défini par :

$$\delta = \delta(x, z; \mu) = \frac{1}{2} \|v^{-1} - v\| = \frac{1}{2} \|p_v\|.$$

C'est facile de vérifier que :

$$\delta = 0 \Leftrightarrow v^{-1} = v \Leftrightarrow xz = \mu e.$$

Soit  $q_v = d_x - d_z$ .

Puisque  $d_x^T d_z = 0$  alors :

$$\|P_v\| = \|q_v\|,$$

c-à-d :

$$\|d_x + d_z\| = \|d_x - d_z\|.$$

Et par conséquent :

$$\delta = \frac{1}{2} \|p_v\| = \frac{1}{2} \|q_v\|.$$

De plus :

$$d_x = \frac{p_v + q_v}{2}, \quad d_z = \frac{p_v - q_v}{2}.$$

Dans cet algorithme, on utilise une valeur seuil  $\beta$  de la proximité et on suppose que  $(x^0, y^0, z^0)$  est un point strictement réalisable avec  $\delta(x^0, z^0, \mu^0) \leq \beta$  pour certain  $\mu^0$  connu. On note que la recherche d'une solution optimale primal-duale est équivalente à mettre le saut de dualité  $x^T z$  vers le zéro, cela est exprimé par la mise à jour du paramètre  $\mu$  via :

$$\mu_+ = (1 - \theta)\mu, \quad 0 < \theta < 1.$$

Maintenant, on présente un algorithme primal-dual à petit pas pour tracer approximativement la trajectoire centrale.

### 3.1.2 Algorithme

Dans cette partie, on présente un algorithme de trajectoire centrale de type primal-dual pour un (PL) :

#### Algorithme primal-dual à petit pas pour PL

##### Début d'algorithme

##### Données :

un paramètre de précision  $\epsilon > 0$ ;

un paramètre de proximité  $0 < \beta < 1$  (défaut  $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ );

un paramètre  $0 < \theta < 1$  (défaut  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ )

un paramètre de barrière  $\mu^{(0)} = \frac{(x^0)^T z^0}{n}$ .

**Initialisation :** soit  $(x^0, y^0, z^0)$  vérifiant la CPI tel que :

$\delta(x^0, z^0; \mu^{(0)}) \leq \beta$  et  $k = 0$ ;

**Tant que**  $n\mu^{(k)} \geq \epsilon$  faire :

•  $\mu^{(k+1)} = (1 - \theta)\mu^{(k)}$ .

• calculer  $(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta z^{(k)})$  via le système (3.7);

• mise à jour  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$ ,  $y^{(k+1)} = y^{(k)} + \Delta y^{(k)}$ ,  $z^{(k+1)} = z^{(k)} + \Delta z^{(k)}$  et  $k = k + 1$ ;

**Fin Tant que**

**Fin algorithme.**

#### Algorithme 3.1.2

### 3.1.3 La convergence de l'algorithme et l'analyse de la complexité

Dans cette partie on présent quelque lemmes techniques qui sera utilisé par la suite .

#### Lemme 3.1.3 [14]

Soient  $(x, z) \in \mathbb{R}^n$  et  $\mu > 0$ .

Alors :

$$\|d_x d_z\|_\infty \leq \delta^2 \text{ et } \|d_x d_z\| \leq \sqrt{2}\delta^2.$$

#### Lemme 3.1.4 [14]

Soient  $u, v \in \mathbb{R}$ , tel que  $v^T v = 0$  alors :

$$\|uv\|_\infty \leq \frac{1}{4}\|u + v\|^2; \|uv\| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\|u + v\|^2.$$



**Preuve :( lemme[3.1.3])**

Pour  $u = d_x, v = d_z$  on à  $d_x, d_z \in \mathbb{R}$  tel que  $d_x^T d_z = 0$  Alors :

- $\|d_x d_z\|_\infty \leq \frac{1}{4} \|d_x + d_z\|^2$  et on à  $:\frac{1}{4} \|d_x + d_z\|^2 = \frac{1}{4} \|pv\|^2 = \delta^2$  donc  $:\|d_x d_z\|_\infty \leq \delta^2$ .
- $\|d_x d_z\| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \|d_x + d_z\|^2$  et on à  $:\frac{1}{2\sqrt{2}} \|d_x + d_z\|^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \|d_x^T d_z\|^2 = \sqrt{2}\delta^2$  donc  $:\|d_x d_z\| \leq \sqrt{2}\delta^2$ .

**Analyse de la stricte faisabilité**

Dans le lemme suivant, on donne quelque condition pour assurer la stricte faisabilité du pas de newton complet.

**Lemme 3.1.5 [14]**

Le nouveau itéré du pas de newton complet est strictement réalisable si et seulement si :

$$\mu e + \Delta x \Delta z > 0.$$

On montre que le pas de newton itéré  $x^+ = x + \Delta x$ ,  $z^+ = z + \Delta z$  (obtenue après le pas de newton est strictement réalisable).

**Preuve**

Pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  on définit :

$$x^\alpha = x + \alpha \Delta x, z^\alpha = z + \alpha \Delta z.$$

Ensuite on à  $x^0 = x$ ,  $x^1 = x^+$  et le même pour l'autre variable ( $z$ ), par conséquent

$$x^0 z^0 = xz > 0.$$

Maintenant, on écrit

$$\begin{aligned} x^\alpha z^\alpha &= (x + \alpha \Delta x)(z + \alpha \Delta z), \\ &= xz + \alpha(x\Delta z + z\Delta x) + \alpha^2 \Delta x \Delta z. \end{aligned}$$

Donc :

$$x^\alpha z^\alpha = xz + \alpha(\mu e - xz) + \alpha^2 \Delta x \Delta z, \quad (3.9)$$

Par hypothèses, on a :

$$\Delta x \Delta z + \mu e > 0.$$

Alors

$$\Delta x \Delta z > -\mu e,$$

Donc :

$$\begin{aligned} x^\alpha z^\alpha &> xz + \alpha(\mu e - xz) - \alpha^2 \mu e, \\ &= (1 - \alpha)(xz + \alpha \mu e), \\ &> 0. \end{aligned}$$

Car  $e = (1, 1, \dots, 1)^T > 0$ ,  $xz > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Donc

$$x^\alpha > 0, z^\alpha > 0,$$

comme

$$x^0 > 0, z^0 > 0.$$

Par continuité

$$x^1 > 0, z^1 > 0.$$

D'une part (d'après 3.6) :

$$d_x d_z = \frac{\Delta x \Delta z}{\mu}.$$

Ce qui implique que

$$\Delta x \Delta z = \mu d_x d_z.$$

D'après (3.9) et avec  $\alpha = 1$  on obtient :

$$x^1 z^1 = x^+ z^+ = \mu e + \Delta x \Delta z \quad (3.10)$$

Donc

$$x^+ z^+ = \mu e + \mu d_x d_z.$$

Alors

$$x^+ z^+ = \mu(e + d_x d_z). \quad (3.11)$$

Ainsi on reformuler lemme (3.1.5) comme suite.

### Lemme 3.1.6

Le nouveau itéré de pas de newton est strictement réalisable si et seulement si :

$$e + d_x d_z > 0.$$

## La convergence quadratique de la mesure de la proximité

Pour montrer la convergence quadratique de la mesure de proximité, on a besoin d'un résultat concernant le  $v_+$ .

### Lemme 3.1.7 [14]

Si  $\delta = \delta(x, z; \mu) < 1$ , alors :  $x^+ > 0, z^+ > 0$ , de plus :

$$\delta^+ = \delta(x^+, z^+; \mu) \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2(1 - \delta^2)}}.$$

### Preuve

On a

$$\begin{aligned} 2\delta^+ &= \|(v_+)^{-1} - v_+\|, \\ &= \|(v_+)^{-1}(e - (v_+)^2)\|. \end{aligned}$$

D'après (3.11) on a

$$\begin{aligned}
 v_+ &= \sqrt{\frac{x^+ z^+}{\mu}}, \\
 &= \sqrt{\frac{\mu(e + d_x d_z)}{\mu}}, \\
 &= \sqrt{e + d_x d_z}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 2\delta^+ &= \left\| \frac{d_x d_z}{\sqrt{e + d_x d_z}} \right\| \\
 &= \frac{\|d_x d_z\|_2}{\|\sqrt{e + d_x d_z}\|_2} \\
 &\leq \frac{\|d_x d_z\|_2}{\|\sqrt{e + d_x d_z}\|_\infty}; \text{ car } \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \\
 &= \frac{\|d_x d_z\|_2}{\max_i (\sqrt{e + (d_x d_z)_i})} \\
 &= \frac{\|d_x d_z\|_2}{\sqrt{1 + \max_i (d_x d_z)_i}} \\
 &\leq \frac{\|d_x d_z\|_2}{\sqrt{1 - \max_i |(d_x d_z)_i|}} \\
 &= \frac{\|d_x d_z\|_2}{\sqrt{1 - \|d_x d_z\|_\infty}}
 \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1.3 on a  $\|d_x d_z\|_\infty < \delta^2$  et comme  $\delta < 1$ .

Alors  $\|d_x d_z\|_\infty < 1$  et

$$2\delta^+ \leq \frac{\sqrt{2}\delta^2}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

qui est équivalent à

$$\delta^+ \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2(1 - \delta^2)}}.$$

Le corollaire suivant montre la convergence quadratique de la mesure de proximité avec le pas de Newton complet.

### Corollaire 3.1.1

Si  $\delta(x, z; \mu) < \frac{1}{\sqrt{2}}$  alors :  $\delta^+ < \delta^2(x, z; \mu)$ .

## L'influence du nouveau itéré en saut de dualité

Dans le lemme suivant, on analyse l'influence du pas de Newton complet sur le saut de dualité.

### Lemme 3.1.8 (lemme II.47[14])

Après le pas de Newton complet et si  $\delta(x, z, \mu) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , alors le saut de dualité vérifie :

$$(x^+)^t z^+ = n\mu.$$

### Preuve

En utilisant (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} (x^+)^t z^+ &= e^t (x^+ z^+) \\ &= e^t (\mu e + \Delta x \Delta z) \\ &= \mu e^t e + e^t \Delta x \Delta z. \end{aligned}$$

Comme  $\Delta x \Delta z = 0$  alors :

$$\begin{aligned} (x^+)^t z^+ &= e^t e \mu \\ &= n\mu. \end{aligned}$$

### La mise à jour du paramètre barrière $\mu$

La recherche d'une solution optimale primale-duale est équivalente à mettre le saut de dualité  $x^t z$  vers le zéro, la mise à jour du paramètre  $\mu$  est :

$$\mu^+ = (1 - \theta)\mu; \quad 0 < \theta < 1.$$

Par la suite on montre l'influence de la mise à jour du  $\mu$  sur la nouvelle proximité après un pas de Newton complet.

### Lemme 3.1.9 [14]

Si  $\delta(x, z; \mu) < \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\mu^+ = (1 - \theta)\mu; \quad 0 < \theta < 1$ . alors :

$$\delta^2(x^+, z^+; \mu^+) \leq (\delta^+)^2 (1 - \theta) + \frac{n\theta^2}{4(1 - \theta)}. \quad (3.12)$$

De plus, si  $\delta(x, z; \mu) < \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \theta = \frac{1}{\sqrt{2n}}$  et  $n \geq 2$  alors :

$$\delta^2(x^+, z^+; \mu^+) < \frac{1}{2}.$$

**Preuve**

Soient  $v_+^2 = \frac{x^+z^+}{\mu}$ ,  $\mu^+ = (1-\theta)\mu$ ; et  $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$  alors :

$$\begin{aligned} 4\delta^2(x^+, z^+; \mu^+) &= \|\sqrt{1-\theta}v_+^{-1} + \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}v_+\|^2 \\ &= \|\sqrt{1-\theta}v_+^{-1} + \frac{(1-\theta)+\theta}{\sqrt{1-\theta}}v_+\|^2 \\ &= \|\sqrt{1-\theta}(v_+^{-1} - v_+) - \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta}}v_+\|^2 \\ &= (1-\theta)\|v_+^{-1} - v_+\|^2 + \frac{\theta^2}{1-\theta}\|v_+\|^2 - 2\theta(v_+^{-1} - v_+)^t v_+. \end{aligned}$$

D'après le lemme (3.1.8) on a :

$$\begin{aligned} \|v_+\|^2 &= \frac{1}{\mu}((x^+)^t z^+) \\ &= \frac{n\mu}{\mu} \\ &= n \end{aligned}$$

Donc

$$(v_+^{-1} - v_+)^t v_+ = 0.$$

Alors

$$4\delta^2(x^+, z^+; \mu^+) = 4(1-\theta)\delta^2(x^+, z^+; \mu) + \frac{n\theta^2}{1-\theta}.$$

qui est équivalent à :

$$\delta^2(x^+, z^+; \mu^+) = (1-\theta)\delta^2(x^+, z^+; \mu) + \frac{n\theta^2}{4(1-\theta)}.$$

Comme  $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , d'après le corollaire (3.1.1) on obtient  $(\delta^+)^2 < \delta^4 < \frac{1}{4}$ , et par conséquent

$$\delta^2(x^+, z^+; \mu^+) \leq \frac{1-\theta}{4} + \frac{n\theta^2}{4(1-\theta)}.$$

Maintenant, on considère  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ , alors

$$\begin{aligned} \delta^2(x^+, z^+; \mu^+) &\leq \frac{1-\theta}{4} + \frac{n(\frac{1}{2n})}{4(1-\theta)}, \\ &\leq \frac{1-\theta}{4} + \frac{1}{8(1-\theta)}, \end{aligned}$$

Pour  $n \geq 2$ , on a  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$  et la fonction

$$f(\theta) = \frac{1-\theta}{4} + \frac{1}{8(1-\theta)},$$

est strictement convexe sur l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$ . Par conséquent,

$$f(\theta) \leq f(0) = f(\frac{1}{2}) \simeq 0.375 < \frac{1}{2}, \forall \theta \in [0, \frac{1}{2}],$$

Finalement  $\delta^2(x^+, z^+; \mu^+) < \frac{1}{2}$ . Ce qui achève la preuve.

## Analyse de la complexité

Dans cette partie , on présente le nombre d'itération à partir du quel l'algorithme 3.1.2 converge .

### Lemme 3.1.10

Soient  $x^{(k+1)}$  et  $z^{(k+1)}$  le  $(k+1)^{ime}$  itération produite par l'algorithme 3.1.2 , avec  $\mu = \mu^{(k)}$ , alors

$$(x^{(k+1)})^T z^{(k+1)} \leq \epsilon,$$

est satisfaite si

$$k \geq \frac{1}{\theta} \log\left(\frac{n}{\epsilon}\right).$$

### Preuve

D'après le lemme 3.1.8 , on a :

$$(x^{(k+1)})^T z^{(k+1)} \leq \mu^{(k)} n, \quad (3.13)$$

Avec

$$\mu^{(k)} = (1 - \theta)\mu^{(k-1)} = (1 - \theta)\mu^{(0)}.$$

Alors (3.12) devient :

$$(x^{(k+1)})^T z^{(k+1)} \leq (1 - \theta)\mu^{(0)} n,$$

Où l'inégalité  $(x^{(k+1)})^T z^{(k+1)} \leq \epsilon$  est satisfaite si :

$$(1 - \theta)\mu^{(0)} n \leq \epsilon.$$

En utilisant la fonction croissante  $\log$  on obtient :

$$k \log(1 - \theta) \leq \log(\epsilon) - \log(\mu^{(0)} n),$$

Puisque  $\log(1 - \theta) < -\theta$ , pour  $0 < \theta < 1$ , alors

$$k\theta \geq \log\left(\frac{\mu^{(0)} n}{\epsilon}\right).$$

Par conséquent

$$k \geq \frac{1}{\theta} \log\left(\frac{\mu^{(0)} n}{\epsilon}\right).$$

Ce qui achève la preuve.

On note que pour  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ , on obtient le théorème suivant :

### Théorème 3.1.1

Soient  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Alors, l'algorithme de la trajectoire centrale de type primal-dual avec le pas de Newton complet nécessite de  $O(\sqrt{n} \log(\frac{n\mu^{(0)}}{\epsilon}))$  itérations .

**Preuve**

Soient  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2n}}, \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Alors le résultat découle immédiatement du Lemme [3.1.10]. Ce qui achève la preuve.

**3.2 Exemple numérique**

Dans cette partie , on s'intéresse aux expériences numériques issues de l'application de l'algorithme 3.1.2 sur des problèmes linéaires . L'algorithme 3.1.2 à été implémente sous Matlab et exécuté sur (R 2013 a) sous windows intel CORE i3.

On note par :

- $\delta(x, z; \mu)$  : la mesure de proximité qui est associée à l'algorithme 3.1.2 .
- $(x^0, y^0, z^0)$  : un point initial strictement réalisable et vérifie  $\delta(x^0, z^0; \mu^{(0)}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  pour l'algorithme 3.1.2 .
- $(x^*, y^*, z^*)$  : la solution optimale du problème primal (P) et dual (D), respectivement.
- **iter** : le nombre des itérations produites par l'algorithme 3.1.2 .
- **CPU** : le temps d'exécution d'un algorithme en seconde.

**Exemple 1**

On considère le problème linéaire , avec  $n = 5$  et  $m = 3$ , on a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c = [-4 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

On prend comme un point réalisable initial

$$x^0 = [2 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 2]^T,$$

$$y^0 = [-3 \quad -1 \quad -1]^T,$$

$$z^0 = [3 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1]^T.$$

On a  $\epsilon = 10^{-4}$  avec  $\mu^{(0)} = ((x^0)^T z^0)/n = 4.2$ .

Une solution optimale approximative est donnée par :

$$x^* = [3 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T,$$

$$y^* = [-1 \quad -2 \quad 0]^T,$$

$$z^* = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0]^T.$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est -22.

$\delta(x^0, z^0; \mu^{(0)})$	<b>iter</b>	<b>CPU</b>
0.0873	34	0.0145

**Exemple 2**

Soient  $n = 7$  et  $m = 4$ , on a

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & -5 & -2 & 3 & -5 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & -6 & 7 & -3 & 4 & 2 \\ 6 & -6 & -1 & 7 & 5 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 37 \\ 36 \\ 97 \\ -59 \end{bmatrix},$$

$$c = [-42 \quad 26 \quad -59 \quad 71 \quad -86 \quad 143 \quad 68]^T.$$

On prend comme un point réalisable initial

$$x^0 = [1 \quad 11 \quad 4 \quad 1 \quad 7 \quad 11 \quad 6]^T,$$

$$y^0 = [-1 \quad 10 \quad 8 \quad -3]^T,$$

$$z^0 = [7 \quad 4 \quad 9 \quad 7 \quad 2 \quad 4 \quad 5]^T.$$

On a  $\epsilon = 10^{-4}$  avec  $\mu^{(0)} = ((x^0)^T z^0)/n = 26$ .

Une solution optimale approximative est donnée par :

$$x^* = [0 \quad 9.3403 \quad 0.1150 \quad 0 \quad 0 \quad 4.6641 \quad 6.8257]^T,$$

$$y^* = [0.7342 \quad 10.4513 \quad 7.4090 \quad -4.1541]^T,$$

$$z^* = [4.7727 \quad 0 \quad 16.1279 \quad 9.9884 \quad 0 \quad 0]^T.$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est 1367.2.

$\delta(x^0, z^0; \mu^{(0)})$	iter	CPU
0.7042	48	0.0150

**Exemple 3**

Soient  $n = 9$  et  $m = 7$ , on a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & 7 & 9 & 3 & -1 & 7 & -5 \\ -9 & 1 & 5 & -5 & 10 & -8 & 10 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & -1 & -6 & 2 & -3 & -9 \\ 0 & 4 & 8 & 7 & 8 & -2 & 1 & -6 & 0 \\ -7 & 6 & -7 & 0 & -5 & 8 & 8 & 6 & -4 \\ -9 & 10 & -4 & -9 & 0 & 8 & -5 & 3 & -9 \\ 7 & -6 & 0 & 8 & -3 & -4 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -19 \\ 75 \\ -86 \\ 118 \\ -4 \\ -55 \\ -65 \end{bmatrix},$$

$$c = [-156 \quad 139 \quad 5 \quad -49 \quad 34 \quad 71 \quad 115 \quad -3 \quad -41]^T.$$

On prend comme un point réalisable initial



$$x^0 = [5 \ 9 \ 6 \ 1 \ 5 \ 3 \ 5 \ 2 \ 8]^T,$$

$$y^0 = [-3 \ 6 \ -3 \ 6 \ 10 \ 6 \ 3]^T,$$

$$z^0 = [4 \ 1 \ 3 \ 5 \ 9 \ 6 \ 5 \ 6 \ 2]^T.$$

On a  $\epsilon = 10^{-4}$  avec  $\mu^{(0)} = ((x^0)^T z^0)/n = 18.66$ .

Une solution optimale approximative est donnée par :

$$x^* = [0 \ 6.5526 \ 4.9933 \ 3.7153 \ 3.7971 \ 3.4905 \ 2.4397 \ 0 \ 9.2046]^T,$$

$$y^* = [-2.5023 \ 6.2142 \ -3.7029 \ 6.6134 \ 10.5276 \ 5.9751 \ 3.1980]^T,$$

$$z^* = [7.5140 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2.2980 \ 0]^T.$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est 1033.8 .

$\delta(x^0, z^0; \mu^{(0)})$	iter	CPU
0.3729	55	0.0207

#### Exemple 4

Soient  $n = 10$  et  $m = 8$ , on a

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & -8 & -5 & 2 & 6 & 10 & 5 & 2 \\ 2 & -8 & -6 & -7 & 6 & 5 & 5 & 6 & -9 & -8 \\ 6 & 1 & 9 & 5 & -2 & 3 & 10 & -5 & 6 & -7 \\ 6 & 3 & -2 & 1 & -4 & 7 & -8 & 10 & 8 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & -8 & -4 & 4 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & 5 & -8 & 4 & 1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -8 & 8 & 8 & -2 & -1 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & -9 & -5 & 5 & 4 & -8 & -6 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 49 \\ 0 \\ 22 \\ 84 \\ -42 \\ -14 \\ 108 \\ 15 \end{bmatrix},$$

$$c = [103 \ -39 \ -131 \ -140 \ 236 \ 134 \ -164 \ 7 \ -49 \ 70].$$

On prend comme un point réalisable initial

$$x^0 = [1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 4 \ 5 \ 2 \ 4 \ 2 \ 4]^T,$$

$$y^0 = [-9 \ 10 \ -6 \ 5 \ 0 \ 3 \ 10 \ 7]^T,$$

$$z^0 = [8 \ 10 \ 5 \ 4 \ 9 \ 1 \ 4 \ 6 \ 5 \ 1]^T.$$

On a  $\epsilon = 10^{-4}$  avec  $\mu^{(0)} = ((x^0)^T z^0)/n = 12.9$ .

Une solution optimale approximative est donnée par :

$$x^* = [2.2808 \quad 0.7890 \quad 3.7253 \quad 0.0618 \quad 1.5198 \quad 5.4796 \quad 0 \quad 2.8514 \quad 0 \quad 3.6362],$$

$$y^* = [-9.7262 \quad 9.9978 \quad -5.6856 \quad 6.2811 \quad -1.0117 \quad 4.1407 \quad 9.8503 \quad 6.7071],$$

$$z^* = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 12.3145 \quad 0 \quad 9.7292 \quad 0].$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est 1074.9 .

$\delta(x^0, z^0; \mu^{(0)})$	<b>iter</b>	<b>CPU</b>
0.1277	57	0.0208

# Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié deux algorithmes pour résoudre un problème linéaire ( $PL$ ) :

- Le premier est du simplexe est composé de deux phases dont la première consiste à trouver une solution de base réalisable de départ. Ce dernier est utilisé pour obtenir une solution optimale en deuxième phase. Il est montré que la complexité de cet algorithme est exponentielle.
- Le deuxième est de trajectoire centrale de type primal-dual à petit pas qui est efficace pour résoudre plusieurs problèmes d'optimisations. Notamment ( $PL$ ), car de l'aspect théorique, on obtient une meilleure complexité polynomiale qui est de l'ordre  $O(\sqrt{n} \log(\frac{n}{\epsilon}))$ . Les tests numériques montrent l'efficacité de cet algorithme.

# Bibliographie

- [1] Achache M, *A new primal-dual path-following method for convex quadratic programming*. Comput. Appl. Math. 25(1), 97–110 2006.
- [2] Achache M, *A weighted-path-following method for the linear complementarity problem*. Studia Univ. Babeş-Bolyai. Ser. Informatica 49(1), 61–73 ,2004.
- [3] Achache M, L. Guerra. *A full-Nesterov-Todd-step primal-dual interior point algorithm for convex quadratic semidefinite optimization*. Computational and Applied Mathematics, (231) : 581-590, 2014.
- [4] Baillargeon G, *Programmation Linéaire appliquée* . Les éditions SMG , Québec , 1996.
- [5] Dantzig G.B. , *Linear Programming and Extensions* , Princeton University Press 1963.
- [6] Daravay Z. , *New interior point algorithms in linear programming* , Advanced modeling and optimisation 2003 .
- [7] De Klerk E. *Interior point methods for semidefinite programming*. Master of Science in the Faculty of Engineering University of Pretoria, 1997.
- [8] Hamam Y., Talbot H., *Introduction à la programmation mathématique (Programmation Linéaire et Optimisation Combinatoire)* , Introduction à la programmation mathématique -ESIEE Paris, 7 avril 2009.
- [9] Jansen B., Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph., *Primal-dual algorithm for linear programming based on the logarithmic barrier method* , Journal of optimisation theory and application 1996.
- [10] Kebbiche Z. , *Etude et Extensions d’algorithmes de point intérieur pour la programmation non linéaire* , Doctorat de l’université de Haver 2007.
- [11] Kettab S. , *Généralisation d’une méthode de trajectoire centrale de point intérieur pour la programmation semi définie* , Thèse doctorat université Ferhat Abbas sétif 1 , 2015 .
- [12] Michel J.-C. , *Programmation linéaire outil efficace pour la planification optimale de la production dans une entreprise industrielle* , « mémoire de licence » Université libre de Kigali , 2003.
- [13] Muller D. , *Introduction à la programmation linéaire , Introduction à la programmation linéaire - Apprendre en ligne* , 2013.
- [14] Ross C.T. , Terlaky J.-Ph. Vial , *Interior Point Methods for Linear Optimization* .
- [15] Scheid J.-F. , *Graphe et recherche opérationnelle, Graphe et Recherche Opérationnelle*. ESIAL.2010-2011.
- [16] Trichet E. , *Introduction à la complexité algorithmique, Introduction à la complexité algorithmique -IREM* .
- [17] Wright S.J., *Primal-dual interior point methods* .SIAM, Philadelphia, 1997.
- [18] Ye Y, *A path to the Arrow-Debreu competitive market equilibrium*. Math. Program. 111(1–2), 315–348, 2008.

## ملخص

في هذه المذكرة، درسنا خوارزميتين لحل البرمجة الخطية. بحيث الاول هي طريقة السامبلاكس التي تستعمل الجداول للحصول على حل مثالي، هذه الخوارزمية لها تعقيد اسي. و لهذا قمنا بحل البرمجة الخطية بطريقة المسار المركزي الذي يتميز بالتعقيد الحدودي. اتبعنا هذه الدراسة بالتجارب العددية لاثبات فعالية هذين الخوارزميتين المدروستين.

### الكلمات المفتاحية :

طرق النقاط الداخلية، طريقة السامبلاكس، البرمجة الخطية، خوارزمية اولية-ثانوية، التعقيد الخوارزمي.

## Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié deux algorithmes pour résoudre un problème linéaire ( $PL$ ) dont Le premier est du simplexe qui utilisé les tableaux pour obtenir la solution optimale, cet algorithme a une complexité exponentielle. Pour cela, on résoud un ( $PL$ ) par la méthode de trajectoire centrale qui caractérisé par sa complexité polynomial. En suite cette étude par des tests numériques pour montrer l'efficacité de ces deux algorithmes étudié.

**Mots clés :** Méthode de points intérieurs, méthode du simplexe, problème linéaire, algorithme primal-dual, complexité algorithmique.

## abstract

In this theses, we studied two algorithms for linear problem ( $PL$ ). The first one is the simplexe who used the tables to get the optimal solution, this algorithm has exponential complexity. For that, we solve a ( $PL$ ) by the central path method which characterized by its polynomial complexity. Following this studies by numerical tests to show the efficiency of these two studied algorithms.

**Key words :** Interior point methods, simplexe method, linear problem, primal-dual algorithm, algorithmic complexity.