Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présentée par :

MEGUEDDEM Nawel
HAMMOUDI Salima

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Systèmes Dynamiques

Thème

Étude Mathématique des Quelques Problèmes elliptiques.

Soutenu publiquement **le … Juillet 2021** devant le jury composé de

Président :	D.Benterki	Université de Bordj Bou Arréridj
Encadrant :	S.Benaissa	Université de Bordj Bou Arréridj
Examinateur :	A.Berkani	Université de Bordj Bou Arréridj

Promotion 2020/2021

Table des matières

Introduction . . . 1

1 Formulation variationnelle des problèmes elliptiques **3**

1.1 Généralité . . . 3

1.2 Approche variationnelle . . . 5

1.2.1 Formules de Green . . . 5

1.2.2 Formulation variationnelle . . . 8

1.3 Théorème de Lax-Milgram . . . 10

2 Espaces de Sobolev **15**

2.1 L'espaces $L^2(\Omega)$ . . . 15

2.2 Dérivation faible . . . 16

2.3 L'espace $H^1(\Omega)$ . . . 18

2.4 Espace $H_0^1(\Omega)$ . . . 19

2.5 Espace $H^m(\Omega)$ . . . 22

3 Étude Mathématique des Quelques Problèmes elliptiques **23**

3.1 Équation de Laplace avec conditions aux limites de type Dirichlet . . . 23

3.2 Système de l'élasticité linéarisée avec conditions aux limites de Dirichlet . 27

3.2.1 Rappelle sur la mécanique des milieux continus . . . 27

Conclusion . . . 34

References . . . 35

Notations

$\overline{\Omega}$	$fermeture\ de\ \Omega$
$C(\Omega)$	$l'espace\ des\ fonctions\ continues$
$C^K(\Omega)$	$espace\ des\ fonctions\ K\ continues\ \text{d}\acute{e}rivables$ $dans\ \Omega$
$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^{\infty}(\Omega)$	$l'espace\ de\ fonctions\ test$
$\partial\Omega = \Gamma$	$fronti\grave{e}re\ de\ \Omega$
div	$op\acute{e}rateur\ divergence$
V	$espace\ de\ Hilbert$
$P.P$	$presque\ partout$
$\langle .,. \rangle$	$produit\ scalaire$
$\frac{\partial u}{\partial n}$	$d\acute{e}riv\acute{e}e\ partielle\ faible\ de\ u$
∂	$l'op\acute{e}rateur\ de\ diff\acute{e}rentiation\ partielle$
Δ	$op\acute{e}rateur\ de\ Laplace$
∇	$op\acute{e}rateur\ gradient$
H^1, H_0^1, H^m	$espace\ de\ Sobolev$
$D^{\alpha}u = \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}u}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$	$\alpha - i\grave{e}me\ d\acute{e}riv\acute{e}e\ partielle$
$\frac{\partial u}{\partial n}$	$d\acute{e}riv\acute{e}e\ normale\ ext\acute{e}rieur$
$\lvert\alpha\rvert = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$	$multi - indice\ avec\ \alpha_i \in \mathbb{N}\ pour\ tout\ i = 1, \cdots, n$
I	$tenseur\ d'identit\acute{e}$
tr	$trace$
$\varepsilon(u)$	$tenseur\ des\ d\acute{e}formation\ lin\acute{e}aris\acute{e}$
H	$tenseur\ gradient\ de\ d\acute{e}placement$
C	$tenseur\ des\ diltations$
F	$tenseur\ gradient\ de\ la\ d\acute{e}formation$
G	$tenseur\ des\ d\acute{e}formation$

Introduction

Dans l'analyse mathématique les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes des équations aux dérivées partielles.
Les espaces de Sobolev sont un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions de ces équations appartiennent à un espace des fonctions continues partiellement dérivables au sens classique.
Les équations aux dérivées partielles de type elliptique qui correspondent à des modèles physiques stationnaires, c'est-à-dire indépendant du temps.
Le mémoire est divisé en trois chapitres :

- **Chapitre 1 :**

  Nous rappelons quelques formules d'intégration par parties, dites formules de Green puis nous définissons ce qu'est une formulation variationnelle. En fin consacrer au théorème de Lax-Milgram qui sera l'outil essentiel permettant de démontrer des résultats d'existence et d'unicité de la solution de formulation variationnelle.

- **Chapitre 2 :**

  Comme les espaces de Sobolev se construisent à partir de la notion de fonction mesurable et de l'espace L^2 des fonctions carrés sommables et donne quelques rappels à ce sujet. On y introduit aussi la notion de dérivation faible et on donne à la fin toutes les définitions et les résultats qu'il faut connaître sur les espaces de Sobolev.

- **Chapitre 3 :**

  Nous expliquons en détaille fonctionnement de l'approche variationnelle pour le Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet. Nous expliquons en détaille fonctionnement de l'approche variationnelle pour d'autres modèles plus compliquées comme celui de l'élasticité linéarisée.

Chapitre 1

Formulation variationnelle des problèmes elliptiques

1.1 Généralité

Définition 1.1.1

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Une équation aux dérivées partielle (e.d.p) est une équation dont l'inconnue est une fonction et portant sur les dérivées partielles de cette fonction.
Si on note :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

Alors l'équation s'écrit sous la forme :

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \ldots, D^pu(x)) = 0\,,$$

avec n et p des entiers strictement positifs données et $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n^p}$ est une fonction donnée. L'entier p est appelé l'ordre de l'équation aux dérivées partielles.

Les e.d.p préviennent de la modélisation mathématique, c'est-à-dire de la transcription en équations, de problèmes intervenant dans tous les domaines des sciences : physique, chimie, biologie, finance...

Définition 1.1.2 *(Classification des E.D.P)*
On distingue trois grandes catégories d'équations aux dérivées partielles :

1- *Les équations de type* ***elliptique*** *qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires. Le prototype d'équation elliptique est* ***l'équation de Laplace*** *:*

$$-\Delta u = f$$

d'inconnus $u(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et de donnée* f.

2- *Les équations de type* ***parabolique****, qui modélisent souvent l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles associés à des processus de diffusion.* ***L'équation de la chaleur*** *en est un prototype :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$$

d'inconnue $u(t,x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0$ *et de donnée* f.

3- *Les équations de type* ***hyperbolique****, qui modélisent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation d'ondes. On identifie deux prototype pour cette classe d'e.d.p :*

- ***L'équation de transport*** *:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

d'inconnue $u(t,x), x \in \mathbb{R}, t > 0$ *et ou* $c \in \mathbb{R}$ *est donnée .*

- ***L'équation des ondes*** *:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

d'inconnue $u(t,x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0$ *et de donnée* f.

Définition 1.1.3
$Soit\, \Omega$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ *sa fermeture. On note* $C(\Omega)$ *(respectivement,* $C(\overline{\Omega})$*) l'espace des fonctions continues dans* Ω *(resp, dans* $\overline{\Omega}$*). Soit un entier* $K \geq 0$. *On note* $C^K(\Omega)$ *(resp,* $C^K(\overline{\Omega})$*) l'espace des fonctions* K *fois continument dérivables dans* Ω *(resp, dans* $\overline{\Omega}$*).*

Définition 1.1.4

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, *on note* $\mathcal{D}(\Omega)$ *ou* $C_c^\infty(\Omega)$ *l'espace des fonctions à valeurs réelles, infiniment dérivables sur* Ω *et à support compact contenu dans* Ω. *Les fonctions de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *sont appelées les* ***fonctions test*** *(fonction de base).*

1.2 Approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite **variationnelle**, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la **formulation variationnelle**.

1.2.1 Formules de Green

Nous supposant que Ω est un ouvert borné de l'espace $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, dont la frontière (ou le bord) est noté $\Gamma = \partial\Omega$. On définit alors la **normale extérieure** au bord Γ comme étant le vecteur unité $n = (\, n_i \,)_{1 \leq \, i \, \leq n}$ normal en tout point au plan tangent de Ω et pointant vers l'extérieur de Ω. Dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on note dx la **mesure volumique**, ou **mesure de Lebesgue** de dimension n sur Γ, on note ds la **mesure surfacique**, ou **mesure de Lebesgue** de dimension $(n-1)$ sur Γ.

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des e.d.p. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Théorème 1.2.1 ***(Formule d'ostragrodsky)***

Soit Ω *un ouvert borné de classe* C^1 *et* Γ *son bord. Soit* ω *une fonction de* $C^1(\,\overline{\Omega}\,)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *(un champ de vecteurs). Alors :*

$$\int_\Omega div(\omega(x))\, dx = \int_\Gamma \omega(x).n(x)\, d\Gamma \tag{1.1}$$

Théorème 1.2.2

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. Soit ω une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors :

$$\int_\Omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x)dx \;=\; \int_\Gamma \omega(x)n_i(x)ds$$

Ou

n_i est la i-ème composante de la normale extérieure unité de Ω.

Remarque 1.2.3

Dans cette formule, $n(x)$ est le vecteur unitaire normale à Γ on point x, dirigé vers l'extérieur de Ω.

Corollaire 1.2.4 ***(Formule d'intégration par parties)***

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. Soit u et v deux fonctions de $C^1(\ \overline{\Omega}\ )$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties :

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_\Gamma u(x)v(x)n_i(x)ds \tag{1.2}$$

***Preuve*.**

Dans le théorème (1.2.2), On prendre $\omega = uv$:

$$\int_\Omega \frac{\partial (uv)}{\partial x_i}dx \;=\; \int_\Gamma u(x)v(x)n_i(x)ds \tag{1.3}$$

On a :

$$\int_\Omega \frac{\partial (uv)}{\partial x_i}\,dx \;=\; \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}v(x)dx \;+\; \int_\Omega u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx$$

Alors

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx \;=\; -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}dx \;+\; \int_\Omega \frac{\partial (uv)}{\partial x_i}dx \tag{1.4}$$

D'après (1.3) et (1.4) on a :

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx \;=\; -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}dx \;+\; \int_\Gamma u(x)v(x)n_i(x)ds$$

❒

Corollaire 1.2.5 ***(Formule de Green)***

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. Soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$, on a :

$$\int_\Omega \triangle u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds \tag{1.5}$$

Ou

$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_i})_{1\leq\, i\, \leq n}$ *est le vecteur gradient de* u, *et* $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u(x).n(x)$.

Preuve.

Il suffit d'appliques le théorème (1.2.1) avec : $\omega(x) \;=\; v(x)\nabla u(x)$ et de remarquer que :

$$div(v(x)\nabla u(x)) \;=\; v(x)\triangle u(x) \;+\; \nabla u(x).\nabla v(x)$$

alors :

$$\int_\Omega div(v(x)\triangle u(x))\; dx \;=\; \int_\Omega v(x)\triangle u(x)dx \;+\; \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx$$

Et

$$\int_\Omega div(v(x)\nabla u(x))\; dx \;=\; \int_\Gamma v(x)\nabla u(x).n(x)ds$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \triangle u(x)v(x)dx \;&=\; -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx \;+\; \int_\Gamma \nabla u(x).n(x)v(x)ds\\ &=\; -\int_\Omega v(x)\nabla u(x).\nabla v(x)dx \;+\; \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds\end{aligned}$$

❒

1.2.2 Formulation variationnelle

Soit le problème de Dirichlet aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textbf{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \textbf{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.6}$$

Ω est un ouvert borné de l'espace $\mathbb{R}^n$ et que le second membre f est continue sur $\overline{\Omega}$, et u est l'inconnue.

Lemme 1.2.6

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit g une fonction continue dans Ω. Si pour toute v de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω, on a :

$$\int_\Omega g(x)\, v(x) dx = 0.$$

Alors la fonction g est nulle dans Ω.

Preuve.

Supposons qu'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposons que $g(x_0) > 0$ (sinon on prend $-g$). Par continuité, il existe un petit voisinage ouvert $\omega \subset \Omega$ de x_0 tel que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \omega$. Soit alors une fonction test positive, non nulle, v à support inclus dans ω, on a :

$$\int_\Omega g(x)\, v(x) dx = \int_\omega g(x)\, v(x) = 0$$

qui est une contradiction avec l'hypothèse sur g. Donc $g(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. ❐

Proposition 1.2.7

Soit u une fonction de $C^2(\,\overline{\Omega}\,)$. Soit X l'espace défini par :

$$X = \{\phi \in C^1(\,\overline{\Omega}\,) \quad tel\ que \quad \phi = 0 \quad sur \quad \Gamma\} \tag{1.7}$$

Alors u est une solution du problème aux limites (1.6) si et seulement si u appartient a X et vérifié l'égalité :

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \tag{1.8}$$

pour toute fonction $v \in X$
l'égalité (1.8) *est appelée la formulation variationnelle du problème aux limite* (1.6).

Remarque 1.2.8

Un intérêt immédiat de la ***formulation variationnelle*** *est qu'elle* ***a un sens*** *si la solution* u *est seulement une fonction de* $C^1(\overline{\Omega})$, *contrairement à la formulation classique qui requiert que* u *appartienne a* $C^2(\overline{\Omega})$.

Remarque 1.2.9

Dans la ***formulation variationnelle****, la fonction* v *est appelée fonction test. La formulation variationnelle est aussi parfois appelée* ***formulation faible*** *du problème aux limites* (1.6).

Remarque 1.2.10

1. *En mécanique, la* ***formulation variationnelle*** *est connue sous le nom de principe des travaux virtuels. En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité.*
2. *Dans* (1.8) *si* $v = u$, *on obtient ce qu'il est convenu d'appelés une égalité d'énergie, qui exprime généralement l'égalité entre énergie Stockée dans le domaine* Ω *et une énergie potentielle associée à* f.

Preuve. (proposition (1.2.7))

1. $\Rightarrow$) Si u est solution du problème aux limites (1.6), on multiplie l'équation par $v \in X$ et on utilise la formule Green du Corollaire (1.2.5)
$$-\int_\Omega \triangle u(x)v(x)dx = -(-\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds).$$
$$= \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds$$
Or $v = 0$ sur Γ puisque $v \in X$, donc :
$$\int_\Omega f(x)v(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx,$$

qui n'est rien d'autre que la formule (1.8).

2. $\Leftarrow$) Si $u \in X$ vérifie (1.8), en utilisant " à l'envers " la formule de Green précédente on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u(x)v(x)dx &= -\int_\Omega \triangle u(x)v(x)dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)dx \\ &= \int_\Omega f(x)v(x)dx\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\int_\Omega (\triangle u(x) + f(x))v(x)dx = 0, \quad \forall\, v \in X$$

Comme $(\triangle u + f)$ est une fonction continue, grâce au Lemme $(1.2.7)$ on conclut que $-\triangle u(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.
par ailleurs, comme $u \in X$, On retrouve la condition aux limites $u = 0$ sur $\Gamma = \partial\Omega$, c'est-à-dire que u est solution du problème aux limites (1.8)

❐

1.3 Théorème de Lax-Milgram

Avant d'énoncer le théorème on fait les hypothèses suivantes,

1. ℓ est une forme linéaire définie sur V (V espace de Hilbert) de plus, ℓ est continue, c'est-à-dire, il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\forall v \in V \ : \ |\ell(v)| \leq C \parallel v \parallel_V . \tag{1.9}$$

2. a est une forme bilinéaire définie sur $V \times V$ vérifiant de plus,
   i) a est continue sur $V \times V$. C'est-à-dire il existe une constante $M > 0$ telle que,

$$\forall (u, v) \in V \times V \ : \ |a(u, v)| \leq M \parallel u \parallel_V \parallel v \parallel_V . \tag{1.10}$$

   ii) a est coercive, c'est-à-dire il existe une constante $\alpha > 0$ telle que,

$$\forall v \in V \ : \ a(u, v) \geq \alpha \parallel v \parallel_V^2 \tag{1.11}$$

Théorème 1.3.1

Soient V un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire, continue et coercive sur V et ℓ une forme linéaire continue sur V. Alors, il existe un unique élément u de V solution du problème

$$\ell(v) \;=\; a(u,v) \qquad \forall v \in V. \tag{1.12}$$

De plus si a est symétrique, u est l'unique solution du problème de minimisation suivant,

$$J(u) \leq J(v) \qquad \forall v \in V \tag{1.13}$$

ou J est définie sur V par ;

$$J(v) \;=\; \frac{1}{2}a(u,v) - \ell(v) \qquad \forall v \in V \tag{1.14}$$

***Preuve*.**

Nous remarquons d'abord qu'en raison de la coercivité de a, si une telle solution existe, elle est unique. Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (1.12), alors par soustraction on a,

$$\forall v \in V \;\; a(u_1 - u_2, v) \;=\; 0 \tag{1.15}$$

en particulier pour $v = u_1 - u_2$ on a,

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \;=\; 0$$

Maintenant, comme $\alpha > 0$, on déduit de la minoration (1.11) que $u_1 = u_2$. Montrons maintenant l'existence d'une telle solution. Pour tout $u \in V$, la forme linéaire $a(u,.)$ étant continue sur V, il existe, d'après le Théorème de la représentation de Riesz un unique élément $Au \in V$ tel que,

$$\forall v \in V \;\; a(u,v) = (Au, v)_V \tag{1.16}$$

De la même façon, il existe un unique $f \in V$ tel que,

$$\forall v \in V \;\; \ell(v) = (f, v)_V$$

L'équation (1.12) est alors équivalent à trouver $u \in V$ tel que $Au = f$. Il suffit pour cela de montrer que l'opérateur A est linéaire et surjectif.
Soient $u_1, u_2 \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(A(u_1+\lambda u_2),v) &= a(u_1+\lambda u_2,v)\\ &= a(u_1,v)+a(\lambda u_2,v)\\ &= a(u_1,v)+\lambda a(u_2,v)\\ &= (Au_1,v)+\lambda(Au_2,v).\end{aligned}$$

Nous remarquons aussi que A est continu, car nous avons, d'après (1.10), pour $v = Au$ dans (1.16) on a,

$$\| Au \|_V^2 = a(u, Au) \leq M \| u \|_V \| Au \|_V.$$

Ce qui nous donne,

$$\| Au \|_V \leq M \| U \|_V$$

Montrons que A est surjectif : Nous Montrons d'abord que l'image de A, notée $Im(A)$, est fermée. Soit (v_p) une suite de Cauchy dans $Im(A)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{N}, \ \text{ tel que si } \ q \geq p \geq \delta, \ \text{ alors } \ \| v_p - v_q \| \leq \varepsilon.$$

Comme v_p et v_q sont des éléments de $Im(A)$, il existe des éléments u_p et u_q dans V tels que $Au_p = v_p$ et $Au_q = v_q$. On a :

$$\begin{aligned}\alpha \| u_p - u_q \|_V^2 &\leq \| a(u_p - u_q, u_p - u_q) \|\\ &= \| (A(u_p - u_q), u_p - u_q \|\\ &\leq \| A(u_p - u_q) \|_V \| (u_p - u_q) \|_V\end{aligned}$$

Il en résulte que,

$$\| (u_p - u_q) \|_V \leq \frac{1}{\alpha} \| Au_p - Au_q \|_V .$$

L'espace V étant complet, la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $u \in V$, et l'opérateur A étant continu, nous avons, Au_p converge vers Au, d'où $v = Au$. Nous avons ainsi montré que l'image de A est fermée. Ce résultat étant établi, en conséquence, nous avons

$$V = Im(A) \oplus [Im(A)]^{\perp}$$

Supposons que $Im(A) \neq V$; alors $[Im(A)]^{\perp} \neq \{0\}_V$ et il existe un élément non nul $u \in V$ tel que,

$$\forall v \in V, \ \ (Av, u)_V = 0.$$

Cette relation étant en particulier vraie pour $v = u$, nous obtenons,

$$0 = a(u, u) \geq \alpha \parallel u \parallel_V^2.$$

Ce qui entraine $u = 0$, nous aboutissons ainsi à une contradiction, ce qui signifie que $Im(A) = V$.
Pour conclure la preuve du théorème, il reste à montrer que si a est symétrique, le problème de minimisation (1.13) est équivaut au problème (1.12). Soit $u \in V$ l'unique solution de (1.12) et montrons que u est la solution de (1.13). Soit $\omega \in V$, on va montrer que $J(u + \omega) \geq J(u)$

$$\begin{aligned}
J(u+\omega) &= \tfrac{1}{2}a(u+\omega, u+\omega) - \ell(u+\omega) \\
&= \tfrac{1}{2}a(u,u) + \tfrac{1}{2}[a(u,\omega) + a(\omega,u)] + \tfrac{1}{2}a(\omega,\omega) - \ell(u) - \ell(\omega) \\
&= \tfrac{1}{2}a(u,u) - \ell(u) + [a(u,\omega) - \ell(\omega)] + \tfrac{1}{2}a(\omega,\omega) \\
&= J(u) + \tfrac{1}{2}a(\omega,\omega) \geq J(u) + \tfrac{\alpha}{2} \parallel \omega \parallel_V^2
\end{aligned}$$

Donc $J(u + \omega) > J(u)$, pour tout $\omega \in V$, $\omega \neq 0_V$.
Réciproquement, supposons maintenant que u est la solution du problème de minimisation (1.13) et montrons que u est la solution de (1.12) .
Soit $\omega \in V$ et $t > 0$, on a :

$$J(u + t\omega) - J(u) \geq 0$$

Et

$$J(u - t\omega) - J(u) \geq 0.$$

Car u minimise J. On en déduit que,

$$t[a(u, \omega) - \ell(\omega)] + \tfrac{1}{2}t^2 a(\omega, \omega) \geq 0$$

Et

$$-t[a(u,\omega)-\ell(\omega)]+\tfrac{1}{2}t^2a(\omega,\omega)\geq 0 \quad \forall\omega\in V.$$

Comme t est strictement positif, on peut diviser ces deux inégalités par t à obtenir

$$[a(u,\omega)-\ell(\omega)]+\tfrac{1}{2}ta(\omega,\omega)\geq 0$$

Et

$$-[a(u,\omega)-\ell(\omega)]+\tfrac{1}{2}ta(\omega,\omega)\geq 0, \quad \forall\omega\in V.$$

On fait alors tendre t vers 0, nous obtenons,

$$a(u,\omega)-\ell(\omega)\geq 0,$$

Et

$$a(u,\omega)-\ell(\omega)\leq 0, \quad \forall\omega\in V,$$

Ce qui donne en définitive l'égalité $a(u,\omega)=\ell(\omega), \ \forall\omega\in V$. cela signifie que u est la solution du problème (1.12).

❒

Chapitre 2

Espaces de Sobolev

2.1 L'espaces $L^2(\Omega)$

Définition 2.1.1 *(L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$)*

Soit p un élément de $[1,+\infty]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, On appelle espace de Lebesgue, et on note $L^p(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions u mesurables de Ω dans $\mathbb{C}$, vérifiant :

1. *Si* $1 \leq p < +\infty$, $\quad \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty$
2. *Si* $p = +\infty$, $\quad Supess_{x\in\Omega} |u(x)| < +\infty$ *ou :*

$$Supess_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf\{M \ / \ |u(x)| \leq M \quad \textit{p.p.}\}$$

Cas particulier :

Si $p = 2$, on définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurable de carré sommable dans Ω, muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On note :

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

La norme correspondante.

Théorème 2.1.1

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ (ou $C_c^\infty(\Omega)$) est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $u \in L^2(\Omega)$ il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que,

$$\lim_{n\to+\infty} \| u - u_n \|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Corollaire 2.1.2

Soit $u \in L^2(\Omega)$. Si pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx = 0$$

alors $u(x) = 0$ presque partout dans Ω.

***Preuve*.**

Supposons qu'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $u(x_0) > 0$ (sinon on prend $-u$). Par continuité, il existe un petit voisinage ouvert $\omega \subset \Omega$ de x_0 tel que $u(x) > 0$ pour tout $x \in \omega$. Soit alors une fonction test positive, non nulle, v à support inclus dans ω. On a :

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\omega u(x)v(x) = 0,$$

qui est une contradiction avec l'hypothèse sur u.
Donc $u(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. ❒

2.2 Dérivation faible

La notation de dérivée faible est une extension de la notion de dérivée usuelle pour des fonctions qui ne sont pas forcément dérivables, mais pour les quelles on peut tout de même réaliser une sorte d'intégration par parties, c'est un concept très utile dans la résolution des équations aux dérivées partielles.

Définition 2.2.1

Soit u une fonction de $L^2(\Omega)$, On dit que u est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $\omega_i \in L^2(\Omega)$, pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, telles que, pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \omega_i(x)v(x)dx$$

avec ω_i est la i-ème dérivée partielle faible de u et notée $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Remarque 2.2.1

1. *La définition* (2.2.1) *a bien un sens : en particulier la notation* $\omega_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ *est univoque car, en vertu du corollaire* (2.1.2)*, les fonctions* ω_i *sont uniques (si elles existent).*
2. *Si* u *est dérivable au sens usuel et que ses dérivées partielles appartiennent à* $L^2(\Omega)$*, alors les dérivées usuelle et faible de* u *coïncident (d'après le corollaire* (1.2.4)*).*

Lemme 2.2.2

Soit u *une fonction de* $L^2(\Omega)$*. S'il existe une constante* $C > 0$ *telle que Pour toute fonction* $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ *et pour tout indice* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, On a :*

$$|\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx| \ \leq \ C \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)}$$

alors u *est dérivable au sens faible.*

Preuve.

On pose que ℓ une forme linéaire définie par :

$$\ell(v) \ = \ \int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx, \quad u \in L^2(\Omega), \ v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

telle que :

$$|\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx| \leq C \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)}$$

donc on peut prolonge ℓ par continuité à toutes les fonctions de $L^2(\Omega)$ car $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

Alors ℓ est continue sur $L^2(\Omega)$.
d'après théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction $(-\omega_i) \in L^2(\Omega)$ telle que,

$$\ell(v) \ = \ \int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx \ = \ -\int_\Omega \omega_i(x)v(x)dx$$

donc u est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$. ❐

2.3 L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 2.3.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que $u \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $u \in L^2(\Omega)$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ c'est-à-dire :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ telle que } \forall\, i \in \{1, \cdots, n\}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

ou $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de u.

Remarque 2.3.1

La dérivée dans la définition est à comprendre au sens des distributions.

Exemple 1

1. *Toute fonction de $C^1([-1,1])$ est dans $H^1(]-1,1[)$.*
2. *Soit u définie sur $]-1,1[$ par :*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Alors $u \notin H^1(]-1,1[)$, in effet $u \in L^2(]-1,1[)$ mais $u' = \delta_0$ (la mesure de Dirac en 0) qui ne peut pas être identifiée avec une fonction de $L^2(]-1,1[)$.

Théorème 2.3.2 *(de densité)*

Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1, ou bien si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $C_c^\infty(\overline{\Omega}) = \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Théorème 2.3.3

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel muni du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle_{H^1} &= \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx \\ &= \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x).\nabla v(x))dx \end{aligned}$$

C'est un espace de Hilbert. Sa norme est notée $\| \,.\, \|_{H^1}$:

$$\| u \|_{H^1}^2 = \| u \|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \|_{L^2}^2$$

Remarque 2.3.4

Pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

2.4 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 2.4.1

On définit $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ (pour la norme $H^1(\Omega)$). Autrement dit :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega),\ \exists v_n \in \mathcal{D}(\Omega) \ \ \textit{telle que} \ \ v_n \to u \ \ \textit{dans} \ \ H^1(\Omega)\}.$$

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

Remarque 2.4.1

1. *$H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ alors $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ avec inclusion stricte.*
3. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$.*
4. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un fermé de $H^1(\Omega)$.*

Théorème 2.4.2

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Proposition 2.4.3

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur le bord de Ω (quand ce bord est défini).

Proposition 2.4.4 ***(Inégalité de Poincaré)***

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

***Preuve*.**

Pour les fonctions $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a déjà démontré l'inégalité de Poincaré par un argument de densité le résultat reste vrai pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$. En effet, comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tell que :

$$\lim_{n\to\infty} \| u - u_n \|^2_{H^1(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \int (|u - u_n|^2 + |\nabla(u - u_n)|^2) dx = 0$$

En particulier, on en déduit que :

$$\lim \int_\Omega |u|^2 dx \quad \text{et} \quad \lim \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

$$\int_\Omega |u_n(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 dx$$

on passe alors a la limite $n \to \infty$ dans chacun des deux termes de l'inégalité pour obtenir le résultat recherché. ❐

Corollaire 2.4.5

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ alors le semi-norme :

$$\| v \|_{H_0^1(\Omega)} = \| \nabla u(x) \|_{L^2(\Omega)}$$

et une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$.

***Preuve*.**

Montrons que :

$$\| v \|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \| \frac{\partial v}{\partial x_i} \|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

représente une norme sur $H_0^1(\Omega)$

$$\| v \|_{H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{i=n}^n \| \frac{\partial v}{\partial x_i} \|^2_{L^2(\Omega)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \| \tfrac{\partial v}{\partial x_i} \|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

il vient pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\| v \|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)(\sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial v}{\partial x_n} \|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

D'où

$$\| v \|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

Montrons qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que,

$$C_1 |v|_{H_0^1(\Omega)} \leq \| v \|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 |v|_{1,\Omega}$$

En effet,

$$|v|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial v}{\partial x_i} \|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \| v \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial v}{\partial x_i} \|^2_{L_2(\Omega)} = \| v \|^2_{H^1(\Omega)}$$

D'où

$$|v|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \| v \|_{H^1(\Omega)}$$

Réciproquement

$$\| v \|^2_{H^1(\Omega)} = \| v \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial v}{\partial x_i} \|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C_\Omega(\sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial v}{\partial x_i} \|^2_{L^2(\Omega)}) + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial v}{\partial x_i} \|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq (C_\Omega + 1)(\sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial v}{\partial x_n} \|^2_{L^2(\Omega)})$$

$$\leq C_\Omega |v|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{avec} \quad C_\Omega = C_\Omega + 1$$

D'où l'équivalence des normes

$$\| v \|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega |v|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

avec

$$C_1 = 1 \quad \text{et} \quad C_2 = C_\Omega$$

❒

2.5 Espace $H^m(\Omega)$

Définition 2.5.1

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$. On appelle $H^m(\Omega)$ l'espace de fonctions u de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées, au sens des distributions, jusqu'à l'ordre m, appartiennent à $L^2(\Omega)$.

$$H^m = \{u \in L^2(\Omega) \ \ \textit{telles que} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\} \textit{ au sens faibl.}$$

On introduit sur $H^m(\Omega)$ le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle \ = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle$$

et la norme associée

$$\| \ u \ \|_{H^m(\Omega)} = \ \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Théorème 2.5.1

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle$, est un espace de Hilbert séparable.

Chapitre 3

Étude Mathématique des Quelques Problèmes elliptiques

3.1 Équation de Laplace avec conditions aux limites de type Dirichlet

On appelle problème de Dirichlet une équation de Laplace avec conditions aux limites de type Dirichlet. Pour tout Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\Gamma = \partial\Omega$, le problème de Dirichlet s'énonce de la façon suivante :
détermines une fonction u dans un certain espace fonctionnel telle que

$$\begin{cases} -\triangle u \; = \; f \quad dans \quad \Omega \\ u \; = \; 0 \qquad\quad sur \quad \Gamma \end{cases} \tag{3.1}$$

Ou f est un second membre qui appartient à l'espace $L^2(\Omega)$.
L'approche variationnelle pour étudier (3.1) est constituée de deux étapes que nous détaillons :

Étape 1 : Établissement d'une formulation variationnelle

Le but de cette **première étape** est de proposer la formulation variationnelle du problème aux limites (3.1), c'est-à-dire qu'il faut trouver une forme bilinéaire $a(.,.)$, une forme linéaire $\ell(.)$, et un espace de Hilbert V tels que (3.1) soit équivalent à trouver :

$$u \in V \quad \text{tel que} \quad a(u,v) \; = \; \ell(v), \quad \forall v \in V$$

Pour trouver la **la formulation variationnelle** :

- On multiplie l'équation (3.1) par une fonction test v, tel que $v \in V$ espace de Hilbert et $v = 0$ sur Γ :

$$-\triangle u.v = fv$$

- Et on intégré par parties :

$$\int_\Omega -\triangle u.vdx = \int_\Omega fvdx$$

- D'après corolaire (1.2.4)

$$-\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}dx + \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx = \int_\Omega fv\, dx$$

$$-\int_\Gamma v\nabla u.n\, dx + \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx = \int_\Omega fv\, dx$$

$$-\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial x_i}.n\, dx + \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx = \int_\Omega fv\, dx \tag{3.2}$$

- Ensuite on utilise la formule de Green :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}dx = \int_\Gamma u(x)n_i(x)ds$$

Alors :

$$\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}n_idx = \int_\Gamma u(x)n_ids - \int_{\partial^2\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \tag{3.3}$$

- En remplace (3.3) dans (3.2), on obtiens :

$$-\int_\Gamma vun_ids + \int_{\partial^2\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Omega \nabla u.\nabla vdx = \int_\Omega fvdx$$

comme u doit satisfaire une conditions aux limites, $u = 0$ sur Γ, alors $v = 0$ sur Γ, donc :

$$\int_\Omega fvdx = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx$$

avec ∇u, ∇v et $v \in L^2(\Omega)$, et on suppose que $f \in L^2(\Omega)$

- Par conséquent, un choix raisonnable pour l'espace de Hilbert est $V = H_0^1(\Omega)$, le sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont les éléments s'annulent sur le bord Γ.
- Alors, la formulation variationnelle proposée pour (3.1) est :

trouver

$$u \in H_0^1(\Omega)$$

tel que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx \;=\; \int_\Omega f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.4}$$

avec :

$$a(u,v) \;=\; \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$$
$$\ell(v) \;=\; \int_\Omega f v dx$$

Étape 2 : Résolution de la formulation variationnelle

Le but de la deuxième étape est seulement pour vérifions que la formulation variationnelle (3.4) admet une solution unique, c'est-à-dire on va montrer que a est une forme bilinéaire continue et coercive, et ℓ forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.
Pour cela nous utilisons le théorème de Lax-Milgram (1.3.1)

- a **est une forme bilinéaire continue ?**

  $$a(u,v) \;=\; \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx$$

  a est continue $\Leftrightarrow$ $\exists\, c \in \mathbb{R}^*$ tel que $|a(u,v)| \;\leq\; c\|u\|.\|v\|$

  $$|a(u,v)| \;=\; |\int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx|$$

  d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

  $$|a(u,v)| \;\leq\; (\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}$$
  $$\leq\; \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 \quad \text{avec} \quad c = 1$$

  Alors a est une forme bilinéaire continue.

- a **est coercive ?**

  Voyons si a est coercive, il faut montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

  $$a(u,u) \geq \; \alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega)$$

  Par hypothèse sur a, on a :

  $$a(u,u) \;=\; \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \;=\; \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

On applique alors l'inégalité de Poincaré (2.4.4)

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

donc :

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{C} \int_\Omega |u(x)|^2 dx$$

entrame bien que :

$$a(u,u) \ = \ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{C+1} (\int_\Omega |u(x)|^2 dx \ + \ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx)$$

et on a :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \ = \ \int_\Omega |u(x)|^2 dx \ + \ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

ce qui implique :

$$a(u,u) \geq \tfrac{1}{C+1} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Ce qui démontrer la coercivité de a.

- **ℓ une forme linéaire continue ?**

$$\ell \text{ continue } \Leftrightarrow \ |\ell(v)| \leq C \parallel v \parallel \quad \forall\, C \in \mathbb{R}^*$$

on a :

$$|\ell(v)| \ = \ | \int_\Omega f(x) v(x) \ dx|$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\ell(v)| \leq (\int_\Omega |f(x)|^2 \ dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |v(x)|^2 \ dx)^{\frac{1}{2}}$$

avec :

$$(\int_\Omega |f(x)|^2 \ dx)^{\frac{1}{2}} \ = \ C$$

alors :

$$|\ell(v)| \leq C \parallel v \parallel$$

ℓ est une forme linéaire continue.

Finalement, toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (1.3.1) sont satisfaites et on peut donc conclure qu'il existe une unique solution $u \in H^1_0(\Omega)$ de la formulation variationnelle (3.1).

3.2 Système de l'élasticité linéarisée avec conditions aux limites de Dirichlet

On appelle problème de système de élasticité linéarisé avec conditions aux limites de types Dirichlet. Pour Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\Gamma = \partial\Omega$, $f(x)$ une force, l'inconnue u (le champ de déplacement) et le tenseur des déformation linéaire $\varepsilon(u)$. Le problème énoncé de la façon suivante :

$$\begin{cases} -div(2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))Id) = f & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \Gamma \end{cases} \tag{3.5}$$

ou f est le second membre qui appartient à l'espace $(L^2(\Omega))^n$.

3.2.1 Rappelle sur la mécanique des milieux continus

Définition 3.2.1 ***(Un Milieu continue)***
Un milieu continue est un corps qui occupe instant un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) en respectant la continuité de la matière (ni interpénétration, ni formation de cavités).

Définition 3.2.2 ***(élasticité)***
L'élasticité est la propriété d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé.

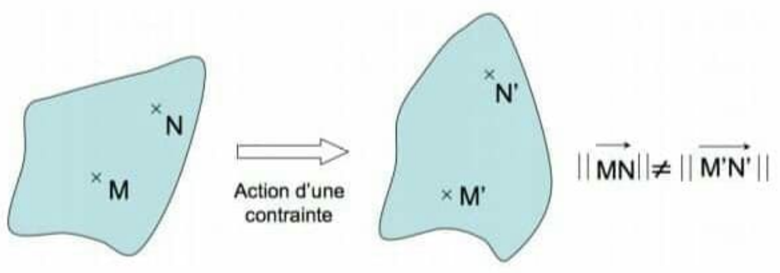

FIGURE 3.2-Déformation d'un corps élastique soumis à une contrainte

Remarque 3.2.1

- *La déformation élastique est une déformation réversible.*
- *Un matériau solide de déforme lorsque des forces lui sont appliquées.*

Définition 3.2.3

On désigne par Ω le domaine occupé par le corps à l'instant $t = 0$ (Ω s'appelle la configuration de référence), et par Ω_t le domaine occupé par le même corps à l'instant $t > 0$ (Ω_t s'appelle la configuration déformée).

- *On désigne par $X = (X_i)$ les composantes de la position d'une particule p du corps à l'instant $t = 0$.*
- *On désigne par $x = (x_i)$ les composantes de la position de la même particule p à l'instant $t > 0$.*

Définition 3.2.4 *(Description analytique de la déformation)*
Le lien entre $X \in \Omega$ et $x \in \Omega_t$ est donné par un application vectorielle :

$$\varphi(.,t) : \Omega \to \Omega_t$$
$$X \mapsto \varphi(X,t), \qquad \forall\ t > 0$$

$$x = \varphi(x,t) = X + u(X,t), \qquad t > 0, \ \ X \in \Omega.$$

avec $u(X,t)$ le vecteur de déplacement.
$\varphi(.,t)$ est appelé application de la déformation.

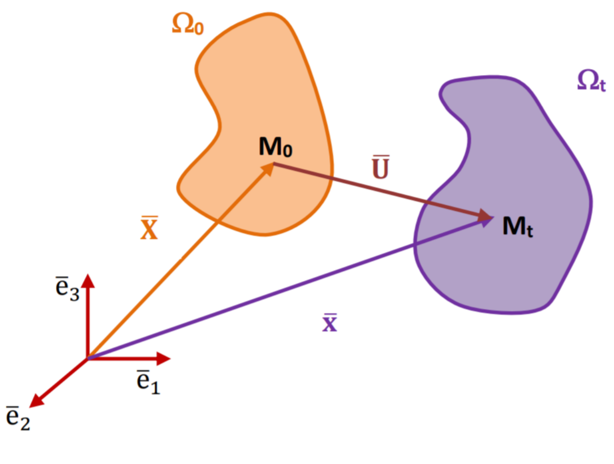

FIGURE 3.2-Description Lagrangienne du mouvement

Définition 3.2.5 *(Quelques tenseurs)*

$$H = \nabla_X u$$

$$F = \nabla_X \varphi$$

$$C = FF^\top = (H + H^\top + HH^\top + I)$$

$$G = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(H + H^\top + HH^\top)$$

Ou $\nabla_X \varphi$ désigne le gradient de φ par rapport au coordonnés de la variable X.
Le tenseur H est le tenseur gradient de déplacement.
Le tenseur F est le tenseur gradient de la déformation.
Le tenseur C est le tenseur des dilatations (tenseur des déformations de Cauchy).
Le tenseur G est le tenseur des déformation.

Remarque 3.2.2 ***(Hypothèse des petites transformations)***

Nous intéressons aux mouvements qui ont un vecteur de déplacement $u(X, t)$ qui varie lentement avec X. Alors les dérivées partielles $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ sont petites, On dit alors qu'on est dans l'hypothèse des petites transformation (H.P.T), dans ce cas les termes $\frac{\partial u_K}{\partial X_i} . \frac{\partial u_K}{\partial X_j}$ sont négligés et l'expression de G se linéarisé en ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(H + H^\top)$$

on en composantes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

Le tenseur ε s'appelle le tenseur des déformation linéarisé.

Remarque 3.2.3

- *La loi de Hooke s'exprime alors sous la forme :*

$$\nabla \; = \; E.\varepsilon.$$

Ou

∇ *est le tenseur de contrainte.*

E *est le module de Yonng.*

ε *est le tenseur des déformation linéarisé.*

- *La loi de comportement élastique linéaire s'écrit de la façon suivante :*

$$\nabla \; = \; 2\mu\varepsilon + \lambda \, tr(\varepsilon)I$$

ou I *est le tenseur identité.*

μ, λ *deux coefficients de Lamé.*

Théorème 3.2.4

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$*. Soit* $f \in (L^2(\Omega))^n$ *il existe une unique solution (faible)* $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ *de* (3.5)

Preuve.

Ona :

$$tr(\varepsilon(u)) \; = \; div \, u$$
$$-div(2\mu \, \varepsilon(u) \; + \; \lambda \, tr(\varepsilon(u))Id) \; = \; f$$

Ce qui implique :

$$\Rightarrow \; -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(2\mu \, (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \; + \; \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \; + \; \lambda \, div \, u \, \delta_{ij}) \; = \; f_i \quad dans \;\; \Omega \tag{3.6}$$

avec f_i et u_i, pour $1 \leq i \leq n$ les composantes de f et u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$\delta_{ij} \; = \begin{cases} 1 \quad si \;\; i \; = \; j \quad symbole \;\; de \;\; Kronecker \\ 0 \quad si \;\; i \; \neq \; j \end{cases}$$

Étape 1 : Établissement d'une formulation variationnelle

On multiplie chaque équation (3.6) par une fonction test v_i (qui s'annule sur le bord Γ pour prendre en compte le condition aux limites de Dirichlet)

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu\, (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \lambda\, div\, u\, \delta_{ij})v_i = f_i v_i$$

et on intégré par parties pour obtenir :

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j})\, dx + \int_\Omega \lambda\, div\, u \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx = \int_\Omega f_i v_i\, dx \quad (3.7)$$

on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) &= \mu \sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \tfrac{1}{2}\mu \sum_{i,j=1}^{n}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \\ &= 2\mu\varepsilon(u)\varepsilon(v)\end{aligned}$$

donc (3.7) implique :

$$\int_\Omega 2\mu\, \varepsilon(u)\varepsilon(v)\, dx + \int_\Omega \lambda\, div\, u\, div\, v\, dx = \int_\Omega fv\, dx \quad (3.8)$$

et (3.8) est la formulation variationnelle de (3.5) tel que $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ est un espace de Hilbert.

Étape 2 : Résolution de la formulation variationnelle

Dans cette deuxième étape nous vérifions que la formulation variationnelle (3.8) admet une solution unique pour cela nous utilisons le théorème de (1.3.1) dont nous vérifions les hypothèses avec les notations :

$$a(u,v) = \int_\Omega 2\mu\varepsilon(u)\varepsilon(v)\, dx + \int_\Omega \lambda\, div\, u\, div\, v\, dx$$

$$\ell(v) = \int_\Omega fv\, dx$$

ou a une forme bilinéaire continue et coercive, ℓ est une forme linéaire continue.

la seule hypothèse délicate à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire a.

On procédé en trois étapes :

- Étape 1

Montrer que :

$$\int_\Omega 2\mu|\varepsilon(u)|^2\,dx \;+\; \int_\Omega \lambda\,|div\ v|^2\,dx \;\geq\; \alpha\int_\Omega |\varepsilon(v)|^2\,dx$$

avec,

$$\alpha \;=\; min(2\mu, (2\mu \;+\; \lambda)) \;>\; 0$$

on pose A, B deux matrices symétrique telle que :

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$$

Et

$$B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n},$$

donc le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle A, B\rangle \;=\; A.B \;&=\; tr(A^\top B) \\ &=\; tr\ (AB) \\ &=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \end{aligned}$$

on décomposer toute matrice réelle symétrique A sous la forme :

$$A \;=\; A_1 \;+\; A_2$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1 \;&=\; A - \tfrac{1}{n}tr\ (A)\ I \\ A_2 \;&=\; \tfrac{1}{n}tr\ (A)\ I \end{aligned}$$

de telle manière que :

$$\langle A_1, A_2\rangle \;=\; A_1.A_2 \;=\; tr(A_1^\top A_2) \;=\; 0$$

Et

$$|A|^2 \;=\; |A_1|^2 \;+\; |A_2|^2$$

on a alors :

$$\begin{aligned} 2\mu|A|^2 + \lambda(tr\ A)^2 \;&=\; 2\mu(|A_1|^2 + |A_2|^2) + \lambda(n|A_2|)^2 \\ &=\; 2\mu|A_1|^2 + 2\mu|A_2|^2 + n^2\lambda|A_2|^2 \\ &\geq\; 2\mu|A_1|^2 + 2\mu|A_2|^2 + n\lambda|A_2|^2 \\ &\geq\; 2\mu|A_1|^2 + (2\mu + n\lambda)|A_2|^2 \end{aligned}$$

$$\geq \ \alpha|A|^2$$

avec :

$$\alpha = min(2\mu, (2\mu + n\lambda))$$

donc pour :

$$A \ = \ \varepsilon(u)$$

On a :

$$\int_\Omega 2\mu|\varepsilon(v)|^2dx + \int_\Omega \lambda|tr\varepsilon(v)|^2dx \ = \ \int_\Omega 2\mu|\varepsilon(v)|^2dx + \int_\Omega \lambda|div\varepsilon(v)|^2$$

$$\int_\Omega 2\mu|\varepsilon(v)|^2dx + \int_\Omega \lambda|div\varepsilon(v)|^2 \geq \alpha \int_\Omega |\varepsilon(v)|^2dx, \quad \alpha > 0 \tag{3.9}$$

$$\alpha > 0 \quad \text{car} \quad \alpha = min(2\mu, (2\mu + n\lambda))$$

Les arguments mécaniques et thermodynamiques qui conduisent aux inégalités $u > 0$ et $2\mu + n\lambda > 0$.

- Étape 2

  Montrer que :

$$\int_\Omega |\varepsilon(u)|^2 \ dx \ \geq \ C \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx, \quad C \ > \ 0 \quad v \in (H_0^1(\Omega))^n$$

Théorème 3.2.5 ***(l'inégalité de Korn)***

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in (H^1(\Omega))^n$, on a :

$$\| \ v \ \|_{H^1(\Omega)} \leq C(\| \ v \ \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \ \varepsilon(u) \ \|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

donc un cas particulièrement simple de cette inégalité de Korm :

Lemme 3.2.6

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour toute fonction $v \in (H_0^1(\Omega))^n$, on a :

$$\| \ \nabla v \ \|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} \ \| \ \varepsilon(v) \ \|_{L^2(\Omega)}$$

donc :

pour tout $v \in (H_0^1(\Omega))^n$ on a :

$$\| \ \varepsilon(v) \ \|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \ \| \ \nabla v \ \|_{L^2(\Omega)}$$

C'est-à-dire :

$$\int_\Omega |\varepsilon(u)|^2dx \geq C \int_\Omega |\nabla v|^2dx, \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n \tag{3.10}$$

- Étape 3

  Montrer que :

$$\int_\Omega |v|^2\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx, \quad c > 0$$

on utilise l'inégalité de Poincaré (composante par composante) qui donne une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in (H_0^1(\Omega))^n$ on a :

$$\int_\Omega |v|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \tag{3.11}$$

donc d'après (3.9), (3.10) et (3.11) on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega 2\mu|\varepsilon(v)|^2 dx + \int_\Omega \lambda|divv|^2 dx &\geq C \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} \\ &\geq C \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Alors d'après les étapes (1), (2) et (3) : a est coercive.

Finalement, touts les hypothèses de Lax-Milgram (1.3.1) sont satisfaites et on peut donc conclure qu'il existe une unique solution $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ de la formulation variationnelle (3.5)

❐

Conclusion

Dans ce travail, nous s'intéresser à l'étude mathématique des quelques problèmes elliptiques.
Pour résoudre ce problème, on applique le théorème de Lax-Milgram la formulation variationnelle pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution.Le point délicat sera le plus souvent de montrer la ***coercivité*** *de la forme bilinéaire.*

Bibliographie

[1] A.Minnier, Espace de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles. institut Élie Cartan 2007-2008.

[2] A.Popier, Espaces des Sobolev, Formulation Variationnelle Des EDP. université du Maine,Le Mans.

[3] B.Dehman Distributions, les espaces de Sobolev, université Virtuelle de Tunis.

[4] B.Helffer, Introduction aux Équations aux Dérivées partielles. Département de Mathématiques université paris-snd 2007.

[5] E.Darrigrand, F.Méhats Équations aux dérivées partielles elliptiques 2015.

[6] F.Elias Élasticité Notes de cours 2017-2018.

[7] G.Allaire, F.Alouges, Analyse Variationnelle des équations aux dérivées partielles polycopié du cours MAP431.

[8] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle théorie et application, paris, 2005.

[9] H.Kloker, Mécanique des Milieux continus, Élasticité chapitre 2 DEFORMATIONS.

[10] J.Rochat, Les espaces de Sobolev, 2009.

[11] L.landry, Les espaces des Sobolev projet de Sem-stre 2005.

[12] M.Thérèse, L.Souries, Distributions, espaces de Sobolev, Application.

[13] P.théo, Distribution. ENS Ker Lann.

[14] S.Deghboudj Mécanique des milieux continus cours et applications 2016.

[15] S.Kesavan, Sobolev Spaces. the institute of Mathomatical Science, chemai .

ملخص:

الغرض من هذه المذكرة هو دراسة بعض المشاكل البيضوية و هذا من خلال اعطاء صياغة متغيرة للمشكل و بعدها استعمال نظرية لاكس-ملغرام لاثبات وجود و وحدانية الحل و هذا في فضاء سوبوليف، قمنا في الاخير بتطبيق هذا الجزء النظري في بعض الامثلة.

الكلمات المفتاحية:

نظرية لاكس-ملغرام، فضاء سوبوليف، صياغة غرين، صياغة متغيرة.

Résumé :

Le but de ce mémoire est une étude des quelques problèmes elliptiques et c'est en donnant une formulation variationnelle du problème puis en l'utilisant théorème de Lax-Milgram pour prouver l'existence et l'unicité de la solution dans l'espace de Sobolev. Enfin, nous avons appliquées cette partie à quelques exemples.

Mots-clés :

théorème de Lax-Milgram, espace de Sobolev, formulation variationnelle et formule de Green.

Abstract:

the purpose of this dissertation is to study elliptical problems by giving a variational formulation of the problem and then using the Lax-Milgram theorem to prove the existence and uniqueness of the solution in Sobolev space. Finaly, we applied this part to some exemples.

Key words:

Lax-Milgram theory, Sobolev space, Green formula, vatiational formulation.