

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire

Présenté par

REMMACHE HADJIRA
RAGUEB ABIR

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Systèmes Dynamiques

Thème

Introduction aux Processus stochastiques

Soutenu publiquement le 08 juillet 2021 devant le jury composé de

BERRAH ABDELMALEK	Président
GHEBOULI MESSAOUD	Encadrant
BELKACEM NAZIHEDDINE	Co Encadreur
SIDHOUM KARIMA	Examineur

Promotion 2020/2021

Résumé

Le but de cette étude est de donner une introduction aux processus stochastiques.

C'est un vaste domaine de la théorie des probabilités en particulier et des mathématiques en général.

Nous nous concentrons sur le mouvement brownien qui joue un rôle important dans la construction des intégrales stochastiques et la résolution des équations différentielles stochastiques.

Mots clés :

Probabilité, probabilité conditionnelle, processus stochastique, processus stationnaires, mouvement brownien.

Abstract

The aim of this study is to give an introduction to stochastic processes. It is a huge area of probability theory in particular and mathematics in general.

We focus on Brownian motion that play an important role in the construction of stochastic integrals and the resolution of stochastic differential equations.

Key Words :

Probability, conditional probability, stochastic process, stationary process, Brownian motion.

Remerciements

Avant tout, louanges et remerciements à ALLAH ; qui nous a comblé de ses bienfaits, en nous accordant-sans mérite de notre part-la chance de rechercher la science et le savoir, la santé et la patience durant toutes ces années d'études et pour la réalisation de ce modeste travail que nous espérons être utile. .

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Mr GHEBOULI.M pour ses encouragements ses conseils et pour avoir mis à notre disposition tous les moyens dont nous avons besoin .

Nos remerciement s'étendent aussi à monsieur BELKASSEM.N, madame ZAGHDANE.R pour l' aides qu'ils nous ont apportées dans notre travail et pour tous les enseignants du département de Mathématiques .

Nous tenons également à remercier les membres du jury qui ont bien voulu accepter de porter leurs jugements sur ce modeste travail que nous souhaitons être à la mesure de leurs satisfactions .

Nous voudrions exprimer nous vifs remerciements à tous nos professeurs de l'université de Mohamed El Bachir El Ibrahimi Bordj Bou Arreridj qui ont contribué à nous transmettre l'inestimable trésor qui est le savoir .

Dédicace

Je dédie ce modeste travail en signe de reconnaissance et de respect à

La personne la plus signifiante dans ma vie

Â ma chère maman Qui est dans chaque détail de ma journée.

Â la source de ma force et de ma détermination, mon cher père.

Je le dédie aussi à mes soeurs "RIMA", "MANEL", mon frère "ILYES"

mes meilleures amies "AFFAF", "ABIR", "KHOULOU", "HADJER"

"OUM ELKHIR", "SAMIHA", "ZAHRA", et "NOR EL IMENE".

Â toute la famille "REMMACHE" et à tous ceux qui me sont chers.

De HADJIRA

Dédicace

Je dédie ce travail à celle qui m'a appris que l'amour n'a pas d'âge, n'a pas d'horizon et n'a pas de limite, ma chère maman, et à la bougie qui a brûlé pour éclairer le chemin de ma vie, mon cher père. Ils nous ont tout donné et ils ont sacrifié toutes leurs vies pour nous.

Je tiens à remercier mon mari qui n'a jamais cessé de me soutenir jusqu'à ce que je termine mes études et que je sois la meilleure, je remercie aussi ma deuxième maman et mon deuxième papa pour leurs aides et encouragements.

Je le dédie aussi à mes seours "RIMA", "NINA", "SARA", "ASMA" et leurs enfants, mon frère "ALI" et "MOMEN".

Je partage cette joie avec ma grande famille et tous ceux qui ont prié pour moi. Mes remerciements à tous ceux qui m'ont soutenu, aidé et encouragé tout au long de mon parcours universitaire.

De ABIR

Table des matières

1	Rappels sur les probabilités	8
1.1	Notions élémentaires sur les probabilités	8
1.2	Variables aléatoires	14
1.3	Approximation des lois	18
2	Processus stochastiques	19
2.1	Introduction aux processus stochastiques	19
2.2	Quelques types de processus stochastiques	23
2.3	Continuité et dérivation d'un processus stochastique	25
3	Mouvement Brownien	27
3.1	Introduction sur le Mouvement Brownien	27
3.2	Construction de Mouvement Brownien par le biais de la marche aléatoire	28
3.3	Covariance de Mouvement Brownien	28
3.4	Propriétés sur le Mouvement Brownien	30

Introduction

La théorie des probabilités occupe une place très importante dans le domaine scientifique en général, et mathématique en particulier.

Elle est utilisée dans plusieurs filières tel que : la physique, l'économie, la psychologie ect... pour modéliser des phénomènes aléatoires (incertains).

Pascal et **Fermat** sont les premiers qui ont essayé a comprendre, analyser les jeux de hasard par le biais de la théorie des probabilités. La théorie moderne où axiomatique des probabilités a vu le jour et s'est développée grace au fameux mathématicien russe **Kolmogorov**.

- Le but de ce travail est de donner une brève introduction au processus stochastiques.

1. **Le premier chapitre** est une introduction a la théorie des probabilités on fait un rappel bref et compréhensif sur les probabilités fondamentales des ensembles. Puis on donne un rappel sur les notions fondamentales de probabilités telque les axiomes du probabilités, probabilités conditionnelles, variables aléatoires discrètes et continues ainsi que les lois qui leurs sont correspondantes tel que la loi de bernoulli, binomiale, loi de poissons et la loi géométrique dans le cas discret.

Dans le cas continu on s'est intéressé à l'étude de : la loi uniforme, loi exponentielle, loi de gamma et la loi normale (gaussienne). En fin on définit l'inégalité de Markov, de Tchebychev, la convergence en lois et l'approximation des la loi normale par les lois de poisson et binomiale.

2. **Le deuxième chapitre** est une introduction aux processus stochastiques et leurs propriétés fondamentales : les processus stochastiques discrets et continus et quelques caractéristiques principales tel que : la moyenne, la fonction cumulative, fonction d'auto-corrélation et son existence et la fonction d'autocovariance. Puis on passe à l'étude de quelques processus stochastiques : processus stochastiques stationnaires au sens strict et large, processus indépendents et identiquement distribués, processus à accroissements indépendents et les processus gaussiens qui occupent une place importante dans la modélisation stochastique.

Et la troisième partie est dédiée a la continuité et la dérivation des processus stochastiques. On devrait distinguer notamment entre la continuité et la dérivation au sens de probabilité et la continuité et la dérivation au sens de la moyenne quadratique .

3. **Le troisième chapitre** est consacré à l'étude du Mouvement Brownien qui est le concept clé dans la définition de l'intégrale d'Ito et la résolution des équations différentielles stochastiques.

On commence par sa définition, ses propriétés essentielles et sa construction par le biais de la marche aléatoire et on termine enfin par la covariance entre de positions différentes.

Chapitre 1

Rappels sur les probabilités

1.1 Notions élémentaires sur les probabilités

Expérience aléatoire

Définition 1.1 *On appelle une expérience aléatoire toute épreuve dont :*

- *Il est impossible de déterminer son résultat à l'avance,*
- *lorsque l'on répète le phénomène dans les mêmes conditions il peut donner des résultats différents.*

L'ensemble des résultats possibles noté Ω .

Exemples 1.1 — *Lancer un dé et noter le résultat obtenu*

on a l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- *le jeu du jet d'une pièce de monnaie est*

$\Omega = \{pile, face\}$.

Evenement aléatoire

Définition 1.2 *est un ensemble de résultats possibles A .*

Autrement dit un sous ensemble de Ω ($A \subseteq \Omega$).

Exemple 1.1 *Lancer un dé à 6 faces, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*

On a les événements aléatoires

A : le résultat est un nombre pair

$A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$;

B : le résultat est un nombre impair

$B = \{1, 3, 5\} \subseteq \Omega$;

C : le résultat est un nombre inférieur à 4

$C = \{1, 2, 3\} \subseteq \Omega$;

D : le résultat est un nombre pair au inférieur à 4

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6\} \subseteq \Omega ;$$

E : le résultat est un nombre impair et inférieur à 4

$$E = \{1, 3\} \subseteq \Omega .$$

Language ensembliste

Notion d'ensemble

Exemple 1.2 • $\{1, 7, \sqrt{2}\}$ désigne l'ensemble qui contient 3 éléments 1, 7 et $\sqrt{2}$, on utilise les accolades pour délimiter la liste de ses éléments, A l'intérieur des accolades peu importe l'ordre dans lequel on écrit les éléments, on peut donner un nom à cet ensemble par exemple on écrit $E = \{1, 7, \sqrt{2}\}$.

• $[0, 1]$ désigne l'ensemble des réels compris entre 0 et 1, la vue l'orientation des crochets 0 et 1 sont des éléments de cet ensemble, on écrit $]0, 1]$ pour exclure 0, mais pas 1, ou $[0, 1[$ pour exclure 1, mais pas 0, ou encore $]0, 1[$, pour exclure 0 et 1, cet ensemble contient une infinité d'éléments on peut aussi noter cet ensembles contient une infinité d'éléments on peut aussi noter cet ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ qui se lit l'ensemble des x dans \mathbb{R} tel que $0 \leq x \leq 1$.

Exemple 1.3 — \mathbb{N} ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$;

— \mathbb{Z} ensemble des entiers relatifs $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$;

— \mathbb{D} ensemble des décimaux, c'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $n \times 10^p$, n et p entiers relatifs ;

— \mathbb{Q} ensemble des rationnels, c'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{m}{n}$, m et n entiers relatifs avec $n \neq 0$;

— \mathbb{R} ensemble des nombres réels ;

— \mathbb{C} ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire qui peuvent s'écrire $a + ib$ avec a et b réels.

Notion d'appartenance

• $x \in E$: x est un élément de l'ensemble E ;

• $x \notin E$: est la négation de $x \in E$, c'est-à-dire x n'est pas un élément de l'ensemble E ou encore que x n'appartient pas à l'ensemble E .

Exemple 1.4 • $3 \in \{2, 3, -5, \frac{7}{2}\}$;

• $1 \notin \{2, 3, -5, \frac{7}{2}\}$;

• $0 \in [0, 1]$;

• $0 \notin]0, 1]$.

Ensemble vide

C'est l'ensemble qui ne contient aucun élément, et qui est noté \emptyset .

Inclusion

L'ensemble F est inclus dans l'ensemble E si tout élément de F appartient à E ;

- $F \subset E$ signifie que F est inclus dans l'ensemble E , on encore que F est contenu dans E , on encore que F est un sous ensemble de l'ensemble E , on dit aussi que F est une partie de E ;
- $F \not\subset E$ est la négation de $F \subset E$;
Cela signifie que F n'est pas inclus dans l'ensemble E ou encore qu'il existe au moins un élément de F n'appartenant pas à E ;
L'inclusion est une large : tout ensemble est inclus dans lui même ;
L'inclusion est transitive : cette propriété permet d'écrire une série d'inclusions comme par exemple :
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Exemple 1.5 • $[0, 1] \subset [-1, 3]$: tout réel compris entre 0 et 1 est également compris entre -1 et 3 ;

- $\{0, 1, 3\} \not\subset \{-1, 0, 3, 5\}$: 1 est un élément du premier ensemble, mais pas du deuxième ;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ les entiers naturels sont des entiers relatifs.

Egalité d'ensembles

Deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments.
On peut donc écrire : $E = F$ si et seulement si $\{E \subset F \text{ et } F \subset E\}$.

Inclusion et implication, égalité et équivalence

- Soient A et B deux sous ensembles d'un ensemble E , dire que A est inclus dans B , c'est-à-dire que pour tout élément de E , si c'est un élément de A alors c'est un élément de B ;
- $A \subset B$ signifie que pour tout x de E , si x appartient à A alors x appartient à B on peut écrire : $\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B$;
- $A = B$ signifie que pour tout x de E , x appartient à A si et seulement si x appartient à B , et on écrit : $\forall x \in E, x \in A \iff x \in B$.

Produit d'ensembles

Le produit de deux ensembles E et F est défini par :
 $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$.

Exemple 1.6 • $\{1, 3\} \times \{0, 1, 7\} = \{(1, 0), (1, 1), (1, 7), (3, 0), (3, 1), (3, 7)\}$;

(Dans un couple, l'ordre compte $(0, 1) \neq (1, 0)$) ;

- $A = [0, 2] \times [0, 2]$, $B = [1, 4] \times [1, 3]$, $C = \{1\} \times [1, 3]$.

Réunion d'ensembles

Si E et F sont des ensembles, $E \cup F$ est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent (au moins) à l'un des deux ensembles E ou F : $x \in E \cup F \iff (x \in E \text{ ou } x \in F)$.

Le "ou" regroupe trois cas :

$x \in E \cup F \iff (x \in E \text{ et } x \in F) \text{ ou } (x \notin E \text{ et } x \in F) \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin F)$ on a alors :
 $x \notin E \cup F \iff (x \notin E \text{ et } x \notin F)$.

Intersection d'ensembles

Si E et F sont des ensembles, $E \cap F$ est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à la fois à E et à F , on a donc : $E \cap F = \{x | x \in E \text{ et } x \in F\}$.

On déduit donc : $x \notin E \cap F \iff (x \notin E \text{ ou } x \notin F)$.

Distributivité entre réunion et intersection

- L'intersection est distributive par rapport à la réunion : $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$,
- la réunion est distributive par rapport à l'intersection : $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

Complémentaire

Le complémentaire de F dans E , noté F^c est constitué des éléments qui ne sont pas dans F , on a donc : $F^c = \{x \in E | x \notin F\}$.

On peut donc écrire : $x \in F^c \iff x \notin F$.

complémentaire, réunion et intersection

On a :

$x \in (E \cap F)^c \iff x \notin E \cap F \iff (x \notin E \text{ ou } x \notin F) \iff x \in E^c \cup F^c$
et : $x \in (E \cup F)^c \iff x \notin E \cup F \iff (x \notin E \text{ et } x \notin F) \iff x \in E^c \cap F^c$

C'est-à-dire :

- $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$,
- $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$.

Définition 1.3 (Tribu) On appelle Tribu sur Ω tout sous ensemble de $P(\Omega)$ une tribu si et seulement si :

- $\Omega \in T$,
- $\forall A \in T$ alors $\bar{A} \in T$,
- si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in T$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in T$.

Probabilité

Définition 1.4 On appelle une probabilité, P_r , définie sur Ω , toute application :

$$\begin{aligned} P_r : P(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longrightarrow P_r\{A\} \end{aligned}$$

vérifie les deux axiomes :

- $P_r\{\Omega\} = 1$, et $P_r\{\emptyset\} = 0$,
- si $A_1, A_2, \dots, A_N \in P(\Omega)$, sont des événements disjoints (c-à-d $\forall i, j, A_i \cap A_j = \emptyset$), où \emptyset désigne l'ensemble vide), alors :

$$P_r\{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N\} = \sum_{i=1}^N P_r\{A_i\}$$

Le triplet $(\Omega, P(\Omega), P_r)$ est appelé un espace probabilisé.

Proposition 1.1 Soit A et B deux événements.

- $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- Si $A \subset B$ alors on a $P(A) \leq P(B)$.

Probabilité conditionnelle

Définition 1.5 On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B la quantité :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ si } P(B) \neq 0$$

Exemple 1.7 On jet un dé 2 fois et on s'intéresse au 2 sorties.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

A : La sortie de premier jet est 5

$$\Rightarrow A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}.$$

$$P(A) = \frac{\text{car}(A)}{\text{car}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

B : La somme des deux jets est supérieur au égale à 9

$$\Rightarrow B = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$P(B) = \frac{\text{car}(B)}{\text{car}(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$B \cap A = \{(5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$$

$$P(B \cap A) = \frac{3}{36}, \quad P(B|A) = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{6}}, \quad P(B|A) = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{18}}.$$

Évènements indépendants

Définition 1.6 Deux évènements $A, B \in P(\Omega)$ sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Exemple 1.8 On jette deux fois le même dé.

Les évènements

$$A = \{\text{obtention d'un chiffre pair au premier lancer}\},$$

$$B = \{\text{obtention du 1 au deuxième lancer}\},$$

sont indépendants.

En effet, en prenant $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$,

$$P(A) = \frac{\text{car}(A)}{\text{car}(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \frac{\text{car}(B)}{\text{car}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{12},$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Formule des probabilités totales

La partition de Ω

Définition 1.7 Soient $\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$ des sous ensembles constituant une partition de Ω :

- $B_i \cap B_j = \emptyset; \forall i, j$

- $\cup_{i=1}^N B_i = \Omega;$

si $A \subseteq \Omega$, alors :
$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(A|B_i)P(B_i).$$

Règle de Bayes

Proposition 1.2 Si $P(A) > 0$, alors

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \text{ pour } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

où B_1, B_2, \dots, B_n est une partition de Ω .

Exemple 1.9 Dans une certaine institution 80% du personnel enseignant sont des hommes. De plus, 80% des hommes qui y enseignent ont un doctorat et 90% des femmes ont un doctorat. On prend au hasard une personne qui enseigne dans cette institution.

Soit

F :cette personne est une femme.

D :cette personne a un doctorat.

On peut écrire, par la règle de la probabilité totale, que

$$P(D) = P(D|F)P(F) + P(D|F^c)P(F^c) = 0,9 \times 0,2 + 0,8 \times 0,8 = 0,82$$

De plus, on a :

$$P(F|D) = \frac{P(D|F)P(F)}{P(D)} = \frac{0,9 \times 0,2}{0,82} \simeq 0,2195.$$

1.2 Variables aléatoires

Définition 1.8 Une **variable aléatoire** réelle est une fonction X qui associe un nombre réel $X(s) = x$ à chaque élément s de S , où S est un espace échantillon associé à une expérience aléatoire E .

On désigne par S_X l'ensemble des valeurs possibles de X .

Définition 1.9 La **fonction de répartition** de la variable aléatoire X est définie par

$$F_X(x) = P[X \leq x] \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Proposition 1.3**
1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0, 1]$.
 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
 3. si $x_1 < x_2$ alors $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ (croissante).
 4. F_X continue à droite.

Définition 1.10 L'**espérance mathématique** (ou la moyenne) $E[X]$ de la variable aléatoire est définie par

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_X(x_k) \quad (\text{cas discret})$$
$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (\text{cas continu})$$

Proposition 1.4 L'espérance mathématique de $g(X)$ est donnée par

$$E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_X(x_k) \quad (\text{cas discret})$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (\text{cas continu})$$

Définition 1.11 La **variance** de la variable aléatoire X est la quantité non négative

$$V[X] = E[(X - E[X])^2].$$

Proposition 1.5 1. $V[aX + b] = a^2V[X] \forall a, b \in \mathbb{R}$.

2. $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.

Variable aléatoire à densité

Définition 1.12 La densité de probabilité de la variable aléatoire X que l'on note $f_X(x)$ est par définition la dérivée de la fonction de répartition de variables X

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

cette densité de probabilité est en fait une fonction qui vérifie :

- $f_X(x) \geq 0$,
- $F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$.

Variable aléatoire discrète

Définition 1.13 Si l'ensemble S_X des valeurs que la variable aléatoire X peut prendre est fini ou infini dénombrable, on dit que X est une variable aléatoire discrète ou de type discret.

Définition 1.14 La **fonction de masse** de probabilité de la variable aléatoire discrète X est définie par

$$P_X(x_k) = P[X = x_k] \forall x_k \in S_X.$$

Définition 1.15 La **fonction de répartition** de la variable aléatoire discrète X est définie par

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_k \leq x} P[X = x_k] \end{aligned}$$

Les lois de probabilités discrètes usuelles

- i) **Loi de Bernoulli** : on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , où p est appelé probabilité d'un succès, si

$$p_X(x) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ pour } x = 0 \text{ et } 1$$

On écrit : $X \sim B(p)$.

- ii) **Loi binomiale** de paramètres n et p : $S_X = \{0, 1, \dots, n\}$ et

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$$

On écrit : $X \sim B(n, p)$.

- iii) **Loi de poisson** de paramètre $\lambda > 0$: $S_X = \{0, 1, \dots, n\}$ et

$$p_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

On écrit : $X \sim Poi(\lambda)$.

- iv) **Loi géométrique** de paramètre p : $S_X = \{0, 1, \dots, n\}$ et

$$p_X(x) = (1-p)^{k-1} p$$

On écrit : $X \sim Géom(p)$.

Variable aléatoire continue

Définition 1.16 (Une Variable aléatoire continue) X est une variable aléatoire qui peut prendre un nombre infini non dénombrable de valeurs et dont la fonction de répartition F_X est continue.

Définition 1.17 (La fonction de répartition) de la variable aléatoire discrète X est définie par

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \end{aligned}$$

Les lois de probabilités absolument continues usuelles

- i) **Loi uniforme** une variable aléatoire absolument continue suit une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$:

$$f_X(x) = (b-a)^{-1} \text{ pour } a \leq x \leq b$$

On note : $X \sim U[a, b]$.

- ii) **Loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ et $x \geq 0$:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

On note : $X \sim Exp(\lambda)$.

iii) **Loi gamma** de paramètre $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$:

$$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ pour } x \geq 0$$

où $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ si $\alpha \in \mathbb{N}$

On note : $X \sim G(\alpha, \lambda)$.

iv) **Loi gaussienne (normale)** de paramètre μ et σ^2 , où $\sigma > 0$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

On note : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Proposition 1.6 a) **Inégalité de Markov**

Si X est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs non négatives, alors

$$P[X \geq c] \leq \frac{E[X]}{c} \quad \forall c > 0$$

b) **Inégalité de Tchebychev** Si $E[Y]$ et $V[Y]$ existent, alors on a :

$$P[|Y - E[Y]| \geq c] \leq \frac{V[Y]}{c^2} \quad \forall c > 0$$

Loi faible des grands nombres

Théorème 1.1 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P)$. On suppose que ces variables admettent toutes la même espérance m et la même variance σ^2 , et sont deux à deux non corrélées.

On pose $Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) = 0.$$

Autrement dit, la suite Y_n converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à m .

La convergence en loi

Définition 1.18 On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^*$) converge en loi vers la variable aléatoire X dans \mathbb{R}^d si la suite des lois des X_n converge étroitement vers la loi de X c'est-à-dire si pour toute fonction Q de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , continue et bornée, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Q(X_n)) = E(Q(x))$$

On note cette convergence par :

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\text{loi}} & X \\ n & \longrightarrow & \infty \end{array}$$

1.3 Approximation des lois

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

• Lorsque n assez grand ($n > 30$), p est assez petit ($p < 0,1$) et $np > 20$, ou lorsque n est assez grand ($n > 30$), p n'est pas très petit ($0,2 < p < 0,8$), la loi normale fournit une meilleure approximation à la loi binomiale.

Approximation d'une loi de poisson par une loi normale

• Lorsque son paramètre λ est grand (en pratique supérieur à 25), une loi de poisson peut être approchée par une loi normale d'espérance λ et de variance λ le principe est analogue à celui utilisé pour l'approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de poisson

• Si n est suffisamment grand (> 20) et p assez petit ($< 0,05$), alors on peut écrire que

$$P[B(n, p) = k] \simeq P[\text{Poi}(\lambda = np) = k] \text{ pour } k = 0, 1, \dots, n$$

si le paramètre p est supérieure à $\frac{1}{2}$, on procède comme suit :

$$P[B(n, p) = k] = P[B(n, 1 - p) = n - k] \simeq P[\text{Poi}(\lambda = n(1 - p)) = n - k].$$

Dans le cas où $p > \frac{1}{2}$, on a aussi :

$$P[B(n, p) \leq k] = P[B(n, 1 - p) \geq n - k] \simeq [P[\text{Poi}(\lambda = n(1 - p)) \geq n - k].$$

Théorème de la limite centrée

Théorème 1.2 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P)$, mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une variance non nulle. On note

$$m = E(X) \quad \sigma = \sqrt{V(X)}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \sum_{K=1}^n X_k, \quad Y_n = \frac{S_n}{n}, \quad S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(Y_n - m)}{\sigma}.$$

Alors la suite $(S_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $N(0, 1)$.

Cela signifie que, dans les conditions et avec les notations de l'énoncé, où les réels a et b sont arbitraires, $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([a < S_n^* \leq b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Chapitre 2

Processus stochastiques

2.1 Introduction aux processus stochastiques

Définition 2.1 Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires indexées par un paramètre t appartenant à l'ensemble T :

$$X(t, \omega) = \{X(t), t \in T\}.$$

Un processus stochastique est une fonction de deux arguments $(t, \omega) : (t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$ où ω est un élément d'un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P_r)$, et t un élément de T .

La variable aléatoire $X_t : \omega \rightarrow X(t, \omega)$ est dite ***t*-section** du processus.

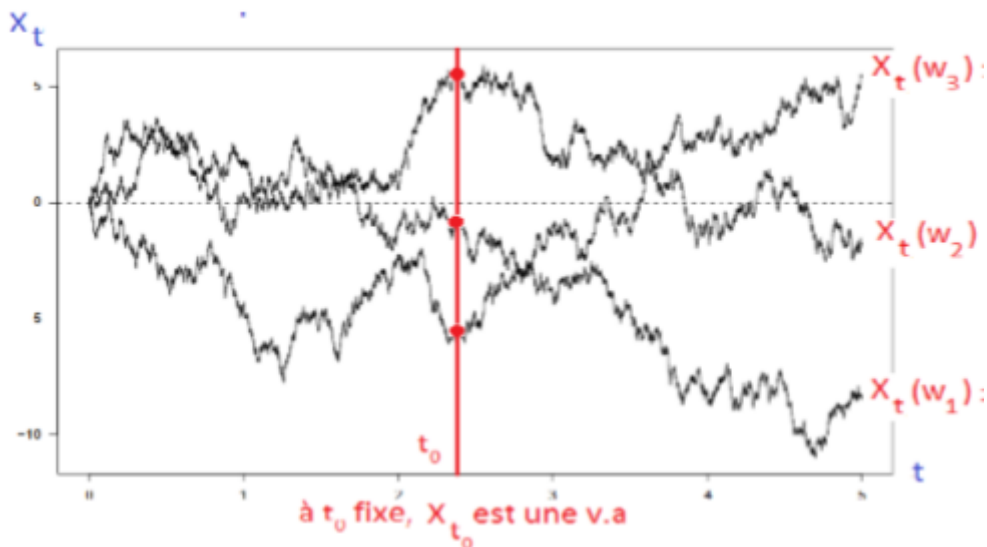


Fig 1 : Quelques exemples de réalisations d'un processus stochastiques

- Exemples 2.1**
1. Le nombre d'emails dans votre boîte de réception à la fois $T = \{1, 2, 3, \dots\}$.
 2. Votre solde bancaire au jour t .
 3. Le nombre de canaux occupés dans une liaison téléphonique au temps $t > 0$.

Processus stochastique continu et discret

Définition 2.2 Soit $(\Omega, P(\Omega), P_r)$ un espace de probabilités.

• Un processus stochastique **à temps discret** est une famille $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires. Dans ce cas l'ensemble des indices T est dénombrable (fini ou infini), on note $T = \mathbb{N}$.

• Un processus stochastique **à temps continu** est une famille $X = (X_n)_{n \in \mathbb{R}^+}$ de variables aléatoires. Dans ce cas l'ensemble des indices T est infini non dénombrable, on note $T = \mathbb{R}^+$.

Exemple 2.1 Un processus stochastique à temps continu élémentaire, $\{X(t), t \geq 0\}$, est obtenu en définissant

$$X(t) = Yt \text{ pour } t \geq 0$$

où Y est une variable aléatoire qui suit une loi quelconque.

La moyenne

Définition 2.3 La moyenne $E[X(t)]$ d'un processus stochastique $X(t, \omega)$ est dénotée par $m_X(t)$, soit :

$$m_X(t) = E\{X(t, \omega)\} = \int_{\epsilon} x f_X(x, t) dx$$

Lorsque $m_X(t) = 0, \forall t$, le processus est dit **centré**.

Exemple 2.2 Un processus aléatoire $\{X(t), t \in T\}$ avec $m_X(t) = 5$.

La moyenne de les variables aléatoires $U = X(6)$ et $V = X(9)$ est :

$$\begin{aligned} E(U) &= E[X(6)] \\ &= m_X(6) = 5 \\ E(V) &= E[X(9)] \\ &= m_X(9) = 5 \end{aligned}$$

Fonction cumulative

Définition 2.4 Considérons le processus stochastique $\{X(t), t \in T\}$, pour tout $t_0 \in T$, $X(t_0) = X$ est une variable aléatoire, et c'est une fonction de distribution $F_{X(t_0)}(x)$ ou $F_X(x; t_0)$ est une fonction de distribution du premier ordre du processus aléatoire $X(t)$ définie comme :

$$F_X(x; t_0) = P(X(t_0) \leq x)$$

Fonction d'autocorrélation

Définition 2.5 La fonction d'autocorrélation d'un processus stochastique $X(t)$ est notée par $\Gamma_{XX}(t, s)$, qui pour chaque valeur du couple (t, s) , est égale au moment du second ordre du couple aléatoire $(X(t), X(s))$, soit :

$$\Gamma_{XX}(t, s) = E\{X(t)X(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t, s) dx_1 dx_2$$

Exemple 2.3 *Considérons le processus $X(t) = \alpha \cos(2\pi F_c(t) + \theta)$.*

Où

α : amplitude(capacité) $F_c(t)$: fréquence porteuse θ : phase

$\theta \sim U(-\pi, \pi)$ c'est à dire $f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ si $-\pi \leq \theta \leq \pi$

La fonction d'autocorrélation du processus $X(t)$ est :

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}.$$

Soit $t_1 = t$ $t_2 = t + \tau$ et $\tau \in \mathbb{R}$ $\tau = t_2 - t_1$ le décalage temporel

$$\begin{aligned} \Gamma_{XX}(t, t + \tau) &= E\{[\alpha \cos(2\pi F_c(t) + \theta)][\alpha \cos(2\pi F_c(t + \tau) + \theta)]\} \\ &= \alpha^2 E\{[\cos(2\pi F_c(t) + \theta)][\cos(2\pi F_c(t + \tau) + \theta)]\} \\ \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} \alpha = 2\pi F_c(t) + \theta \\ \beta = 2\pi F_c(t + \tau) + \theta \\ \alpha + \beta = 2\pi F_c(2t + \tau) + 2\theta \\ \alpha - \beta = 2\pi F_c(\tau) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{XX}(t, t + \tau) &= \frac{\alpha^2}{2} E\{\cos(2\pi F_c(2t + \tau) + 2\theta) + \cos(2\pi F_c(\tau))\} \\ &= \frac{\alpha^2}{2} (E\{\cos(2\pi F_c(2t + \tau) + 2\theta)\} + E\{\cos(2\pi F_c(\tau))\}). \end{aligned}$$

Le premier terme est 0, et $E\{\cos(2\pi F_c(\tau))\} = \cos(2\pi F_c(\tau))$ est la constante

$$\Gamma_{XX}(t, t + \tau) = \frac{\alpha^2}{2} \cos(2\pi F_c(\tau)).$$

Existence de la fonction d'autocorrélation

Théorème 2.1 *Soit $X(t)$ un processus stochastique. La fonction d'autocorrélation de ce processus, $\Gamma_{XX}(t, s)$, existe si et seulement si le processus $X(t)$ est un processus du second ordre, c'est à dire $E\{X^2(t)\} < \infty, \forall t$.*

Démonstration 1 *Le grand mérite de ce théorème réside dans le fait d'associer d'une façon bijective les processus stochastiques à énergies finies à ceux possédant une fonction d'autocorrélation. En utilisant l'inégalité de Schwartz, nous pouvons écrire :*

$$|\Gamma_{XX}(t, s)| = |E\{X(t)X(s)\}| \leq \sqrt{E\{|X(t)|^2\}E\{|X(s)|^2\}}.$$

Par conséquent, si le processus $X(t)$ est du second ordre, alors, $\Gamma_{XX}(t, s) < \infty$.

Inversement, si $\Gamma_{XX}(t, s) < \infty$, alors : $E\{X^2(t)\} = E\{X(t)X(t)\} = \Gamma_{XX}(t, t) < \infty$, donc, il s'agit d'un processus du second ordre.

La variance

Définition 2.6 La variance d'un processus stochastique $X(t)$, également fonction du temps est donnée par :

$$\sigma_X^2 = \text{Var}[X(t)] = E[X(t) - m_X(t)]^2 = E[X_t^2] - [m_X(t)]^2$$

Exemple 2.4 Un processus aléatoire $\{X(t), t \in T\}$ avec $m_X(t) = 5$ et

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = 25 + 3e^{-0.6|t_1-t_2|}.$$

La variance de les variables aléatoires $U = X(6)$ et $V = X(9)$ est :

$$\text{Var}(U) = E\{[X(6)]^2\} - \{E[X(6)]\}^2,$$

$$\text{puisque } \Gamma_{XX}(t_1, t_1) = E\{[X(t_1)]^2\}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(U) &= \Gamma_{XX}(t_1, t_2) - \{m_X(6)\}^2 \\ &= \Gamma_{XX}(6, 6) - 25 \\ &= 25 + 3e^{-0.6|6-6|} - 25 \\ &= 28 - 25 \\ &= 3.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\text{Var}(V) &= \Gamma_{XX}(t_1, t_1) - \{m_X(9)\}^2 \\ &= \Gamma_{XX}(9, 9) - 25 = 25 + 3e^{-0.6|9-9|} - 25 \\ &= 28 - 25 \\ &= 3\end{aligned}$$

La fonction d'autocovariance

Définition 2.7 La fonction d'autocovariance d'un processus stochastique $X(t)$ est la fonction non aléatoire $\text{Cov}_X(t, s)$ définie qui, pour chaque valeur du couple (t, s) , est égale à la covariance du couple aléatoire $(X(t), X(s))$, soit :

$$\text{Cov}_X(t, s) = E\{(X(t) - m_X(t))(X(s) - m_X(s))\}$$

Exemple 2.5 Un processus aléatoire $\{X(t), t \in T\}$ avec $m_X(t) = 5$ et

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = 25 + 3e^{-0.6|t_1-t_2|}$$

La covariance des variables aléatoires $U = X(6)$ et $V = X(9)$ est :

$$\text{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = \Gamma_{XX}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$

$$\text{Cov}(U, V) = \Gamma_{XX}(6, 9) - m_X(6)m_X(9)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{XX}(6, 9) &= 25 + 3e^{-0.6|6-9|} \\ &= 25 + 3e^{-1.8} \\ &= 25.496\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, V) &= 25.496 - 25 \\ &= 0.496 \end{aligned}$$

2.2 Quelques types de processus stochastiques

Processus stochastiques stationnaires au sens strict

Définition 2.8 *Un processus stochastique est stationnaire au sens strict d'ordre N si ses caractéristiques probabilistes sont invariantes pour tout changement de l'origine des temps*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = F(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau),$$

pour tout τ , et toute suite d'instants t_n , $n = 1, \dots, N$.

Exemple 2.6 *Un exemple élémentaire de processus stochastique stationnaire au sens strict est obtenu en posant que*

$$X(t) = Y \quad \text{pour } t \geq 0,$$

où Y est une variable aléatoire quelconque.

Processus stochastiques stationnaires large

Définition 2.9 *Un processus stochastique $\{X(t), t \in T\}$ du second ordre est appelé stationnaire au sens large ou faiblement stationnaire si sa fonction moyenne et sa fonction d'autocorrélation ne changent pas par décalage dans le temps.*

$X(t)$ est stationnaire au sens large si, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

1. $E[X(t_1)] = E[X(t_2)] = m_X$ constante pour $\begin{cases} t_1 = t \\ t_2 = t + \tau \text{ et } \tau \in \mathbb{R} \\ \tau = t_2 - t_1; \end{cases}$
2. $\Gamma_{XX}(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)] = \Gamma_{XX}(\tau)$.

La fonction moyenne m_X n'est pas fonction du temps, et $\Gamma_{XX}(t, t + \tau)$ n'est qu'une fonction du décalage temporel.

• Un processus aléatoire **en temps discret** $\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au sens large si

1. $m_X(n) = m_X \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
2. $\Gamma_{XX}(n_1, n_2) = \Gamma_{XX}(n_1 - n_2) \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

• Un processus aléatoire **en temps continu** $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire au sens large si

1. $m_X(t) = m_X \quad \forall t \in \mathbb{R}$
2. $\Gamma_{XX}(t, t + \tau) = \Gamma_{XX}(t_1 - t_2) = \Gamma_{XX}(\tau) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

Remarque 2.1

- Un processus stochastique au sens strict est également un processus stochastique au sens large ;
- L'inverse n'est pas vrai.

Processus stochastiques indépendents et identiquement distribués

Définition 2.10 On dit qu'un processus aléatoire $(X(t), t \in T)$ est indépendant et distribué de manière identique s'il y'a un nombre fini, disons K de variable aléatoire $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_K)$ qui sont mutuellement indépendantes et ont une fonction de distribution cumulative commune $F_X(\cdot)$.

La fonction de distribution cumulative commune et la fonction de densité pour $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$ sont respectivement donnés par :

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_k; t_1, t_2, \dots, t_k) = \prod_{i=1}^k F_X(x_i; t_i)$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_k; t_1, t_2, \dots, t_k) = \prod_{i=1}^k f_X(x_i; t_i)$$

Processus à accroissements indépendants

Définition 2.11 On dit que le processus stochastique $\{X(t), t \in T\}$ est un **processus à accroissements indépendants** si :

- $X(0) = 0$;
- pour toute famille finie d'instant $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les $\ll n \gg$ variables aléatoires

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}),$$

sont indépendantes.

Exemple 2.7 Soient $(T = \mathbb{N})$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes.

On considère $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, le processus discret des sommes partielles.

On parle de marche aléatoire.

Alors $(S_n)_{n \geq 1}$ est un processus à accroissements indépendants.

Si en plus les variables aléatoires $X_n, n \geq 1$, sont de même loi (les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées, le processus est à accroissements indépendants et stationnaires.

Processus gaussiens

Définition 2.12 (variable aléatoire gaussienne) Une variable aléatoire réelle X suit une loi normale (ou gaussienne) de paramètres μ et σ^2 , $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si elle a la densité suivante

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

μ est appelé la moyenne et σ l'écart-type.

Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on parle de loi normale standard ou loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

Définition 2.13 (Loi marginales) Les variables aléatoires réels X et Y sont appelées

variables aléatoires réels marginales du couple (X, Y) ;

les lois des variables aléatoires réels X et Y sont appelées lois marginales du couple (X, Y) .

Définition 2.14 • Un **vecteur aléatoire** de dimension n est une fonction

$X = (X_1, \dots, X_n)$ qui associe un vecteur $(X_1(s), \dots, X_n(s))$ de nombres réels à chaque élément s d'un espace échantillon S associé à une expérience aléatoire E .

Chacune des composantes X_k du vecteur est une variable aléatoire.

On désigne par $S_X (\subset \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des valeurs possibles de X .

• (**Vecteurs gaussiens**) Soit le vecteur aléatoire $X = [X_1 X_2 \dots X_K]^{tr} \in \mathbb{R}^K$, où $X_k (k = 1, 2, \dots, K)$ est une variable aléatoire de moyenne μ_k et de variance $\sigma_k^2 (k = 1, 2, \dots, K)$. Le vecteur X est dit vecteur aléatoire gaussien à K dimensions si et seulement si toute combinaison linéaire $Y = a_0 + \sum_{k=1}^K a_k X_k$ est une variable aléatoire gaussienne.

Exemple 2.8 Un exemple de vecteur aléatoire gaussien est le vecteur (X_1, \dots, X_n) composé de n variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales. En effet, $a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ est une somme de variables aléatoires normales indépendantes qui suit également une loi normale.

Définition 2.15 (processus gaussien) Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est gaussien ssi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+$, le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est gaussien.

Autrement dit $X = (X_t)_{t \in T}$ est gaussien ssi toute combinaison linéaire de ses marginales $a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in T$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$).

Remarque 2.2 Les conséquences suivantes sont immédiates :

- Toutes les marginales d'un processus gaussien sont bien sûr gaussiennes.
- Toute combinaison linéaire de marginales d'un processus gaussien est encore gaussienne.

2.3 Continuité et dérivation d'un processus stochastique

Continuité en probabilité

Définition 2.16 Le processus $X(t)$ est **continu en probabilité à l'instant** t_0 si et seulement si :

$$\lim_{s \rightarrow 0} Pr\{|X(t_0 + s) - X(t_0)| > \alpha\} = 0, \quad \forall \alpha > 0$$

Continuité en moyenne quadratique

Définition 2.17 Soit $X(t), t \in T$ un processus stochastique, $X(t)$ est dit **continu en moyenne quadratique à l'instant** t_0 si et seulement si :

$$\lim_{s \rightarrow 0} E\{[X(t_0 + s) - X(t_0)]^2\} = 0$$

Théorème 2.2 *La continuité en moyenne quadratique d'un processus stochastique implique sa continuité en probabilité.*

Démonstration 2 *Par l'inégalité de Bienaymé tchebychev :*

$$P_r\{|X(s) - X(t)| \geq h\} \leq E\{[X(s) - X(t)]^2\}/h^2, \quad h > 0.$$

Lorsque s tend vers t , et étant donnée la continuité en moyenne quadratique, on obtient :

$$\lim_{s \rightarrow t} P_r\{|X(s) - X(t)| > h\} = 0.$$

Par conséquent, le processus $X(t)$ est continu en probabilité.

Théorème 2.3 *Le processus stochastique $X(t)$ est continu en moyenne quadratique*

si et seulement si sa fonction d'autocorrélation $\Gamma_X(t_1, t_2)$ est une fonction continue à $t_1 = t_2 = t$.

Exemple 2.9 *On considère le processus stochastique, $X(t)$ dont la fonction d'autocorrélation est donnée par :*

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = \sigma^2 \min(t_1, t_2).$$

Ce processus, représente la modélisation mathématique du mouvement brownien pour

$t_1 = t_2 = t$, nous avons :

$$|\Gamma_{XX}(t_1, t_2) - \Gamma_{XX}(t, t)| = \sigma^2 |\min(t_1, t_2) - t| \leq \max(|t_1 - t|, |t_2 - t|).$$

Par conséquent,

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t} |\Gamma_{XX}(t_1, t_2) - \Gamma_{XX}(t, t)| = 0;$$

ce qui signifie que la fonction $\Gamma_{XX}(t_1, t_2)$ est continue à $t_1 = t_2 = t$.

Donc $X(t)$ est un processus continu en moyenne quadratique.

Dérivation d'un processus stochastique

Définition 2.18 *Le processus stochastique $X(t)$ est **dérivable au sens quadratique** si et seulement s'il existe un processus stochastique $X'(t)$ tel que :*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E \left\{ \left[\frac{X(t + \delta) - X(t)}{\delta} - X'(t) \right]^2 \right\} = 0.$$

*Le processus stochastique $X'(t)$ est appelé **le processus dérivé** du processus $X(t)$.*

Chapitre 3

Mouvement Brownien

3.1 Introduction sur le Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est l'un des processus stochastiques le plus important, il a pu être observé sous diverses formes, et tout a commencé aux alentours des années **20** et **30**, lorsque le botaniste **Ecossais Brown** observa le mouvement des particules de pollen en suspension dans l'eau.

Quelques années plus tard (**1877**) **Delsaux** explique ce mouvement en mettant en lumière l'interaction des particules de pollen avec les molécules d'eau qui provoquent un changement incessant de direction de trajectoire via de multiples chocs thermiques.

Vers **1900**, **Louis Bachelier**, qui a étudié le comportement des cours boursiers de Paris et a pu observer des augmentations très irrégulières.

Dans les années **1920**, **Norbert Winer**, a développé le cadre probabiliste entièrement rigoureux de ce modèle. Ce type d'incrément est maintenant appelé un mouvement brownien.

Définition 3.1 *Un processus stochastique $B = B_t, t \geq 0$ est un mouvement brownien standard si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $B(0) = 0$.
- B est à accroissements indépendants, c.à.d pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t, \dots \leq t_n$ les variables aléatoires $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes,
- Les trajectoires sont presque sûrement continues c.à.d la fonction $t \rightarrow B(t, \omega)$ est continue pour presque partout ω ,
- Pour $t > 0$ la variable aléatoire B_t suit la loi gaussienne $N(0, t)$.

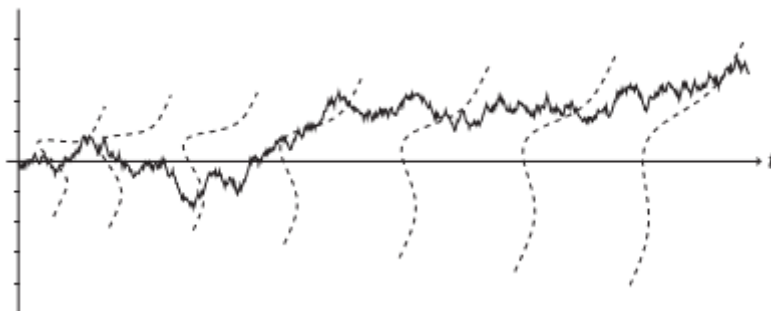


Fig 2 :Trajectoire du Mouvement Brownien

3.2 Construction de Mouvement Brownien par le biais de la marche aléatoire

Afin de construire un mouvement brownien standard, on pose d'abord une constante entière $N \geq 1$. Initialement, on définit $B_N(0) = 0$. Par la suite, les changements d'états ont lieu aux instants de forme $\frac{K}{N}$ pour $K \geq 1$. L'état est alors ou bien augmenté de $\frac{1}{N}$ ou bien diminué de $\frac{1}{N}$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque cas, indépendamment des autres changements. On définit ainsi :

$$B_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sqrt{\frac{n}{N}} \frac{S_n}{\sqrt{n}},$$

où $n = \lfloor Nt \rfloor$ représente la partie entière de Nt , et $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ avec

$$\xi_K = \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2}, \end{cases}$$

et ce indépendamment pour $K \geq 1$. Puisque $|\frac{t-n}{N}| < \frac{1}{N}$, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{N}} = \sqrt{t}.$$

D'autre part, comme $E(\xi_K) = 0$ et $Var(\xi_K) = (\xi_K^2) = 1$ le théorème limite central garantit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_r \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x \right) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy,$$

pour $-\infty < x < +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_r (B_N(t) \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{y^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dy,$$

pour $-\infty < x < +\infty$. Cela signifie que $B_N(t)$ tend en distribution vers une variable aléatoire de loi $N(0, t)$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

Remarque 3.1 1. Dans la construction du mouvement brownien standard, il suffit en fait que les variables aléatoires ξ_K pour $K \geq 1$ soient indépendantes d'espérance 0 et de variance 1.

2. Comme le suggère la construction en escalier, les trajectoires du mouvement brownien standard sont continues, car la hauteur des marches $\frac{1}{\sqrt{N}}$ est de plus en plus petite, mais elles sont nulle part différentiables, car le rapport de la hauteur des marches sur leur largeur, donné par \sqrt{N} , est de plus en plus grand. En fait, c'est le cas presque sûrement, c'est-à-dire avec probabilité 1.

3. Le mouvement brownien standard sur tout intervalle $[0, t]$ pour $t > 0$ étant la limite d'une contraction d'une marche aléatoire symétrique sur les entiers sur un intervalle de temps de plus en plus grand, et une telle marche étant récurrente, le nombre de visites à 0 de ce mouvement de l'instant 0 à tout instant $t > 0$ est infini avec probabilité 1.

3.3 Covariance de Mouvement Brownien

Un processus gaussien est une famille de variables aléatoires normales telles que tout nombre fini d'entre elles a une distribution normale multivariée.

Ainsi, les incréments de mouvement brownien sont un processus gaussien.

Considérons la covariance entre les positions de mouvement brownien à tout instant s et t , où $s < t$. C'est la valeur attendue du produit des écarts de ces variables aléatoires à partir de leurs moyennes respectives

$$\text{Cov}[B(s), B(t)] = E[\{B(s) - E[B(s)]\}\{B(t) - E[B(t)]\}].$$

Comme $E[B(s)]$ et $E[B(t)]$ sont nuls, $\text{Cov}[B(s), B(t)] = E[B(s)B(t)]$.

Notons que les intervalles de temps correspondants $[0, s]$ et $[0, t]$ ne chevauchent pas. Exprimer $B(t)$ comme la somme des variables aléatoires indépendantes $B(s)$ et l'incrément suivant $\{B(t) - B(s)\}$, $B(t) = B(s) + \{B(t) - B(s)\}$. Puis

$$\begin{aligned} E[B(s)B(t)] &= E[B(s)^2 + B(s)\{B(t) - B(s)\}] \\ &= E[B(s)^2] + E[B(s)\{B(t) - B(s)\}]. \end{aligned}$$

En raison de l'indépendance, le deuxième terme peut être écrit comme le produit de $E[B(s)]$, et

$$\begin{aligned} E[B(s)B(t)] &= E[B(s)^2] + E[B(s)]E[B(t) - B(s)] \\ &= s + 0 \cdot 0 = s, \end{aligned}$$

si $t < s$ alors $E[B(s)B(t)] = t$. Généralement pour tout moment s et t

$$E[B(s)B(t)] = \min(s, t).$$

Pour les incréments pendant deux intervalles de temps sans chevauchement $[t_1, t_2]$ et $[t_3, t_4]$, $\Delta B(t_1)$ est indépendant de $\Delta B(t_3)$, donc la valeur attendue du produit des incréments browniens sur ces intervalles de temps non chevauchants est égale au produit des valeurs attendues

$$\begin{aligned} E[\{B(t_2) - B(t_1)\}\{B(t_4) - B(t_3)\}] &= E[B(t_2) - B(t_1)]E[B(t_4) - B(t_3)] \\ &= 0 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

alors que $E[B(t_1)B(t_3)] = t_1 \neq E[B(t_1)]E[B(t_3)]$.

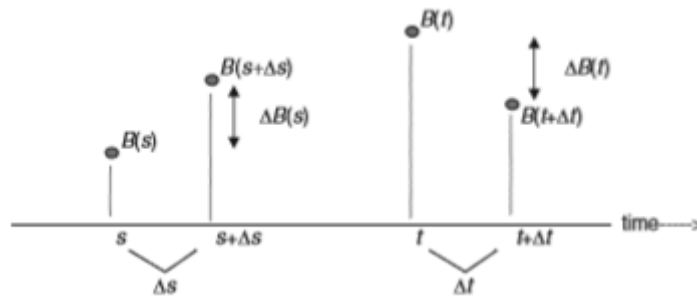


Fig 3 : Intervalles de temps sans chevauchement.

Caractéristique importante du mouvement brownien

Proposition 3.1 *Un processus stochastique $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à trajectoires presque sûrement continue est un mouvement brownien si et seulement si c'est un processus gaussien centé de covariance $\min\{t, s\}$.*

3.4 Propriétés sur le Mouvement Brownien

Si (B_t) est un mouvement brownien, alors il en est de même pour les processus suivants :

— **Autosimilarité(invariance par changement d'échelle) :**

$$X_t = \frac{1}{\alpha} B_{\alpha^2 t} \text{ pour la constante } \alpha \neq 0.$$

— **Inversion du temps(invariance par inversion de temps) :**

$$X_t = t B_{\frac{1}{t}} \text{ pour } t > 0 \text{ et } X_0 = 0.$$

— **Symétrique :**

$$X_t = -B_t.$$

— **Retournement du temps(invariance par arrêt du temps) :**

$$X_t = B_{t+s} - B_s.$$

Démonstration 3 — Pour tout $\alpha \neq 0$ $X_t = \frac{1}{\alpha} B_{\alpha^2 t}$ est un mouvement brownien (standard).

En effet : X_t est un processus gaussien car ses lois fini dimensionnelles en sont de B ; le processus est centré, a trajectoires continues (car X l'est) et de fonction de covariance

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_s; X_t) &= E(X_s X_t) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} E(B_{\alpha^2 s} B_{\alpha^2 t}) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \text{inf}(\alpha^2 s, \alpha^2 t) \\ &= \text{inf}(s, t) \\ &= \text{Cov}(B_s, B_t). \end{aligned}$$

— Le processus X_t défini par $X_t = t B_{\frac{1}{t}}$ si $t > 0$ et $X_0 = 0$ est un mouvement brownien standard.

En effet, X_t est gaussien car a nouveau ses lois fini dimensionnelles sont des transformations linéaires de celles de B , le processus est centré de covariance,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_s, X_t) &= E(X_s X_t) \\ &= ts E(B_{\frac{1}{t}} B_{\frac{1}{s}}) \\ &= st \text{inf}\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) \\ &= \text{inf}(t, s) \\ &= \text{Cov}(B_t, B_s). \end{aligned}$$

— Il est clair que X_T est un processus gaussien, centré à trajectoires continues et sa covariance est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_T, B_s) &= \text{Cov}(B_T - B_{T-t}, B_T - B_{T-s}) \\ &= \text{Cov}(B_T, B_T) - \text{Cov}(B_T, B_{T-s}) - \text{Cov}(B_{T-t}, B_T) + \text{Cov}(B_{T-t}, B_{T-s}) \\ &= T - (T - s) - (T - t) + T - \max(t, s) \\ &= \min(t, s). \end{aligned}$$

Conclusion

L'intérêt aux processus stochastiques ne cesse de grandir, puisque ils sont appliqués dans des domaines divers notamment celui des finances.

Nous avons choisi, en particulier, le mouvement Brownien et l'étude de ses propriétés et caractéristiques fondamentales, par ce qu'il est le concept clé dans la construction des intégrales stochastiques.

Bibliographie

- [1] Appel. W ; *Probabilités pour les Non-Probabilistes*; H and K Edition 68; **boulevard de Port-Royal 75005 Paris.**
- [2] Breton. J. Ch ; *Processus stochastiques*; **Université de Rennes 1 ; 2020.**
- [3] Boudib. S ; *Introduction aux processus gaussiens*; **Université MOHAMED KHIDER, BISKRA ; 2019.**
- [4] Eledum. H. Y ; *Lecture Notes on in Stochastic Processes*; **University of Tabuk-Faculty of Science ; 2018.**
- [5] Gautier C ; Warusfel.A ; Caminade. B ; de Monicault. G ; Nicolas. S. ; *Mathématiques Tout-EN-UN.ECE 2^e année*; **DUNOD ; 2006.**
- [6] Lefebvre. M ; *Processus stochastiques appliqués*; **HERMANN ; 2005.**
- [7] Lessard. S ; *Processus stochastiques*; **ellipes ; 2014.**
- [8] Robert. P Dobrow ; *Brownian Motion*; **Wiley. J and Sons, Inc ; 2016.**
- [9] Solaiman. B ; *Processus stochastiques pour l'ingénieur*; **presses polytechniques et universitaires romandes ; 2006.**
- [10] Suquet. Ch ; *Probabilités via l'intégrale de Riemann*; **ellipses ; 2013.**