Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

LEKBIR ZOHRA ET SAHLI MEROUA

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Systèmes Dynamiques

Thème

Étude mathématique de quelques problèmes de chaleur parabolique et hyperbolique

---

Soutenu publiquement le 6 Juillet 2021 devant le jury composé de

MANI ABDELOUAHAB	MAA	Président
DEBBICHE HANENE	MCB	Encadrant
HAMMAR HENA	MAA	Examinateur

Promotion 2020/2021

Table des matières

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À la personne la plus idéale, c'est vrai qu'elle n'est pas avec moi pour récolter le fruit de ses sacrifices, ses efforts continus, son affection qui me représente un soutien infaillible aux moments les plus difficiles, mais elle reste toujours la plus présente, à l'âme de mon père qui a fait de moi ce que je suis, que Dieu l'accueille en son vaste paradis.

À la plus tendre du monde, mon pilier, mon exemplaire, et ma plus grande force, ma chère maman qui est toujours là pour moi et ce que je la souhaite toute la santé et la longévité.

À mes chères sœurs Ismahane et Nadjet, toutes les deux qui m'ont soutenu et de n'avoir jamais douté de moi.

À mes frères Tamim et Noufel pour leur tendresse et leur complicité.

À ma promotrice qui j'avais l'honneur d'être son étudiante Dr. Debbiche Hanene.

À ma binôme adorée Sahli Maroua.

À toute la famille Lekbir.

À tous les enseignants qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

À tous les amis et les collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel.

À tous ceux que j'aime et à tous ceux qui m'aiment.

Zohra

Dédicace

*J*e dédie ce modeste travail accompagné d'un profond amour :

À celle qui m' a arrosé de tendresse et d'espoir durant ces années, à la source d'amour qui m'a encouragé

Ma chère maman.

À mon support dans ma vie, à mon ombre qui m'a protégé

Mon cher papa.

À mes très chères sœurs

Sonde .

À mes adorables frères

Sohaib et I .

À ma très jolie binôme

Zohra.

À ma honorable encadrant qui m'a dirigé

Dr : Debbiche Hanene.

À ma grande famille

Sahli.

À tous ceux qui m'aiment et à tous ceux que j'aime.

« *Meroua.* »

Remerciements

Tout d'abord nous tenons à remercier DIEU tout puissant de nous avoir donnés la santé, la volonté, le courage et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à remercier très sincèrement notre encadrant Dr. Debbiche Hanene qui nous a permis de passer ce mémoire dans les meilleures conditions possibles, elle a toujours été disponible, patiente et compréhensive, nous la sommes notamment reconnaissantes d'avoir consacré du temps à examiner notre travaux et faite avec nous un grand effort de son cœur, merci encore une fois pour sa motivation professionnelle, ses judicieux conseils et critiques constructives, ses corrections et ses encouragements.

Nous remercions également les membres du jury Mr. Mani Abdelouahab et Mme. Hammar Hena pour l'honneur qu'ils nous ont accordés en acceptant de juger notre travail, merci pour leur présence, et pour leur lecture attentive de ce mémoire, ainsi que pour les remarques qu'ils nous adresseront lors de cette soutenance afin d'améliorer notre travail.

Nous souhaitons aussi à remercier les enseignants du département Mathématiques et Informatique qui ont contribué à la réussite de ce parcours universitaire.

Pour conclure, nous adressons à remercier tous les amis sans exception et les autres camarades de la promotion et du département, et à tous ceux qui nous ont apportés du soutien de près ou de loin.

Merci à tous

Introduction

Les équations aux dérivées partielles constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifique et dans la modélisation de nombreux problèmes en physique, biologie et économie ou ailleurs. Par exemple en physique, ces équations correspondant à la traduction mathématique des lois de la physique :

-Thermique : équation de la chaleur.

Cette équation est une équation aux dérivées partielles parabolique pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduit initialement en 1807 par Joseph Fourier $(1768-1830)$ donnée par la loi

$$q = -K\nabla u,$$

qui exprime le flux de la chaleur q proportionnellement au gradient de température. Alors dans ce cas la chaleur propage à vitesse infinie. Cette propriété connue sous le nom de "paradoxe de la chaleur".

Pour corriger ce paradoxe et obtenir une meilleure description de la réalité Maxwell-Cattaneo a proposé un modèle dans lequel la chaleur se propage à vitesse finie donné par la loi

$$b\frac{\partial q}{\partial t} + q = -K\nabla u,$$

où $b > 0$ est le temps de relaxation qui doit être très faible et $b\frac{\partial q}{\partial t}$ est l'inertie thermique qui évite le phénomène de propagation infinie.

Cette modification de la loi de Fourier permet d'obtenir le modèle hyperbolique de l'équation de la chaleur.

La résolution des équations aux dérivées partielles d'évolution nécessite des conditions initiales (initialement à $t = 0$) et des conditions aux limites. Il existe un grand nombre de conditions aux limites possibles, en fonction de la formulation du problème. On cite par exemple les conditions aux limites de Dirichlet (nommée d'après Johann Dirichlet $(1805-1859)$) et de Neumann (nommée d'après Carl Neumann $(1832-1925)$).

Les questions fondamentales sur l'étude d'une EDP sont

- L'existence des solutions,
- L'unicité de solution,

éventuellement en fonction de données aux limites.
L'étude théorique des EDP fait appel à presque toutes les branches de l'analyse par exemple l'analyse fonctionnelle, la théorie des équations différentielles ordinaires,... .
Ce travail concerne l'étude mathématique de quelques problèmes de chaleur parabolique et hyperbolique.
Ce mémoire est composé de trois chapitres
Le premier chapitre se concentre sur quelques notions essentielles d'analyse fonctionnelle (Espace de Hilbert, espaces de Lebesgue, espace de Sobolev, ...) et la théorie des équations différentielles ordinaires (EDO) (Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz et lemme de Gronwall).
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'équation de la chaleur parabolique avec la condition aux limites de Dirichlet homogène sur le bord (voir [20])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(K(x,t)\nabla u) = f(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \\ u(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

où K est la conductivité thermique et f est une fonction donnée.
On présente la méthode de Galerkin pour montrer l'existence de solutions de la formulation variationnelle associée à ce problème.
On peut résumer cette méthode en trois étapes :

- Recherche de solutions approchées.
- Estimations a priori.
- Passage à la limite (existence de solutions faibles).

Ensuite, on donne un résultat d'unicité de la solution faible.
Dans le dernier chapitre, on présente la méthode de Galerkin comme dans le chapitre 2 mais pour l'équation de la chaleur hyperbolique avec des conditions aux limites mixtes (Dirichlet homogène-Neumann) (voir [3])

$$\begin{cases} b\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(K(x,t)\nabla u) = f(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \\ u(x,t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1\times]0,T[, \\ (K\nabla u)\cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma_2\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0 \qquad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1. \end{cases}$$

De plus, on donne un résultat d'unicité de la solution faible de ce problème.
Enfin, on termine notre travail par une conclusion générale.

1 Préliminaires et notions fondamentales

Ce chapitre rappelle quelques notions fondamentales et les principaux résultats mathématiques de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans ce travail.

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires de l'espace de Hilbert

Définition 1.1. *Soit H un espace vectoriel réel resp complexe. On appelle **produit scalaire** sur H toute forme bilinéaire, symétrique resp hermitienne qui est définie positive.*

On notera $< x, y >$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in H$. Cela signifie que l'application

$$\begin{aligned} < \cdot, \cdot >: H \times H &\mapsto \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ } ou \text{ } \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto < x, y >, \end{aligned}$$

vérifie

- Pour tout $y \in H$, l'application $x \in H \mapsto < x, y > \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
- Pour tous $x, y \in H$ on a :

$$\begin{aligned} < y, x > &= < x, y > \quad \text{si l'espace est réel,} \\ < y, x > &= \overline{< x, y >} \quad \text{si l'espace est complexe.} \end{aligned}$$

- Pour tout $x \in H, < x, x > \geqslant 0$ et $< x, x > = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Définition 1.2. *Si l'espace vectoriel H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est **un espace pré-hilbertien**.*

Comme $< x, x > \geqslant 0$ on peut poser $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$ définit une norme hilbertienne sur H.

Théorème 1.1. [5] *(**Inégalité de Cauchy-Schwarz**) Pour tous $x, y \in H$ on a,*

$$|< x, y >| \leqslant \| x \| \; \| y \| \, .$$

Exemple 1.1. *Le produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^d$ *est défini par*

$$< x, y > = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j,$$

où $x = (x_1, ..., x_d), y = (y_1, ..., y_d)$.

Définition 1.3. *Si un* ***espace pré-hilbertien*** *est complet pour sa norme hilbertienne, on dit que c'est un* ***espace de Hilbert****.*

Exemple 1.2. *L'espace vectoriel* ℓ^2 *des suites de scalaires* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *pour lesquelles la série* $\sum_{n\geqslant 0} \mid x_n \mid^2$ *converge, muni de la norme*

$$x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^2, \quad \| x \|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mid x_n \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

est ***un espace de Hilbert****.*

Définition 1.4. *(***Système orthonormal***) On dit que* $(w_n)_{n\in I}$ *est un* **système orthonormal** *dans* H *si*

- $\forall n \neq m \in I, \quad < w_n, w_m >= 0$ *(ie,* $(w_n)_{n\in I}$ *est un système orthogonal),*
- $\forall n \in I, \quad \| w_n \| = \sqrt{< w_n, w_n >} = 1.$

Théorème 1.2. [13] **(Projection sur un sous espace vectoriel de dimension finie)** *Soit* $w_1, ..., w_n$ *un système orthonormal fini et* $V = Vect\,[w_1, ..., w_n]$ *le sous espace vectoriel de* H *engendré par les* w_i*. Alors*

$$\forall x \in H, \; P_V(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, w_i > w_i.$$

Définition 1.5. *(****Partie dense****) Soit* E *un espace métrique et* A *une partie de* E*. On dit que* A *est dense dans* E *si l'une des conditions équivalentes suivante est vérifiée*

- *Pour* $x \in E$*, il existe une suite* (y_n) *d'éléments de* A *qui converge vers* x*.*
- *Pour tout* $x \in E$*, et pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $y \in A$ *avec* $\| y - x \| \leqslant \varepsilon$*.*
- *L'adhérence* $\overline{A}$ *de* A *est égale à* E*.*

Définition 1.6. *(****Base hilbertienne****) Un* **système orthonormal** *total* $(w_n)_{n\in I}$ *de* H *(ie, l'espace vectoriel engendré par les* (w_n) *est dense dans* H*) appelé* **une base hilbertienne de** H*.*

Définition 1.7. *On dit qu'un espace métrique* E *est* **séparable** *s'il existe un sous ensemble* $D \subset E$ *dénombrable et dense.*

Exemple 1.3. *Les espaces vectoriels* $\mathbb{R}^d$ *ou* $\mathbb{C}^d$ *munis d'une norme quelconque sont séparables. En effet,* $\mathbb{Q}^d$ *est dense dans* $\mathbb{R}^d$*, et l'ensemble*

$$\{(x_1 + iy_1, ..., x_d + iy_d) : \; (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{Q}^d \quad et \quad (y_1, ..., y_d) \in \mathbb{Q}^d\},$$

est dense dans $\mathbb{C}^d$*.*

Théorème 1.3. [5] *Tout espace de Hilbert* **séparable** *admet une base hilbertienne.*

1.2 Espaces de Lebesgue

Dans toute la suite Ω désigne un domaine (ouvert et connexe) borné de $\mathbb{R}^d$ et régulier (par exemple de classe C^1) muni de la mesure de Lebesgue dx. On note $\partial\Omega = \Gamma$.

Définition 1.8. (p.p presque partout) *Une propriété $P(x)$ est dite* **presque partout** *si l'ensemble des points où elle est fausse est négligeable (ie, un ensemble négligeable est un ensemble de mesure nulle).*

Exemple 1.4. $(f = g \quad p.p \;\Leftrightarrow\; \mu(x \in X : f(x) \neq g(x)) = 0)$.

Définition 1.9. *(L'espace des fonctions intégrables $L^1(\Omega)$) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction mesurable f est sommable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si*

$$\int_\Omega \mid f(x) \mid dx < +\infty.$$

Définition 1.10. *(L'espace $L^2(\Omega)$) On désigne par $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ de carré sommable muni du produit scalaire et de la norme associée*

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)\, dx, \quad \| f \|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \mid f(x) \mid^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 1.5. *La fonction ln est dans l'espace $L^2(0,1)$ ie,*

$$\int_0^1 (ln(x))^2 dx < +\infty.$$

On a,

$$\int_0^1 [ln(x)]^2 dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 (ln(x))^2 dx,$$

on intègre par parties, on obtient

$$\int_a^1 (ln(x))^2 dx = -a(ln(a))^2 - 2\int_a^1 ln(x)\, dx,$$

on intègre par parties, on obtient

$$\int_a^1 (ln(x))^2 dx = -a(ln(a))^2 + 2a\, ln(a) + 2(1-a).$$

D'où

$$\int_0^1 (ln(x))^2 dx = \lim_{n \to 0^+} (-a(ln(a)^2 + 2a\, ln(a) + 2(1-a)),$$

comme

$$\lim_{a \to 0^+} a\, ln(a) = 0,$$

et

$$\lim_{a \to 0^+} a\,(ln(a))^2 = 0,$$

on obtient

$$\int_0^1 (ln(x))^2 dx = 2,$$

d'où le résultat.

Théorème 1.4. (Riesz Frisher) [16] *L'espace* $L^2(\Omega)$ *muni du produit scalaire* $(.,.)_{L^2(\Omega)}$ *est un* **espace de Hilbert**.

Théorème 1.5. [5] *Les espaces* $L^1(\Omega)$ *et* $L^2(\Omega)$ *sont des espaces séparables.*

Proposition 1.1. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*** [5] *Soient* $f, g \in L^2(\Omega)$. *Alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega | fg | \, dx \leqslant \| f\|_{L^2(\Omega)} \| g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Définition 1.11. *(L'espace* $L^\infty(\Omega)$*) On désigne par* $L^\infty(\Omega)$ *l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur* Ω*, c'est à dire qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $| f(x) | \leqslant C$ *p.p dans* Ω *muni de la norme*

$$\begin{aligned} \| f \|_{L^\infty(\Omega)} &= inf\,\{C > 0 \quad tel\ que \quad | f(x) | \leqslant C \quad p.p \quad dans\ \Omega\} \\ &= \sup ess\,\{| f(x) |, x \in \Omega\}. \end{aligned}$$

Exemple 1.6. *La fonction indicatrice de* Q *définie sur* $\mathbb{R}$ *qui vaut* 1 *en chaque nombre rationnel et* 0 *partout ailleurs est dans* $L^\infty(\mathbb{R})$ *et coïncide dans cet espace avec la fonction constante de valeur nulle du fait que l'ensemble des rationnels est négligeable.*

Théorème 1.6. [1] *Les espaces* $L^1(\Omega)$ *et* $L^\infty(\Omega)$ *sont des* ***espaces de Banach*** *(ie, espace vectoriel normé complet).*

Proposition 1.2. [5] $L^\infty(\Omega)$ *n'est pas séparable.*

Définition 1.12. *Soient* $(\mathcal{X}, \| \cdot \|_{\mathcal{X}})$ *et* $(\mathcal{Y}, \| \cdot \|_{\mathcal{Y}})$ *deux espaces normés*

- $\mathcal{X} \hookrightarrow_{continue} \mathcal{Y}$, *signifie* $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ *avec l'injection continue c-à-d*

$$\exists c > 0, \| u \|_{\mathcal{Y}} \leqslant c\| u \|_{\mathcal{X}}, \ \forall u \in \mathcal{X}.$$

- $\mathcal{X} \hookrightarrow_{compacte} \mathcal{Y}$ *si de toute suite bornée dans* $\mathcal{X}$, *on peut extraire une sous suite converge dans* $\mathcal{Y}$.

Théorème 1.7. [9] *Supposons que*

$$mes(\Omega) =| \Omega |= \int_\Omega dx < \infty,$$

alors, on a

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \sqrt{| \Omega |} \, \| u \|_{L^\infty(\Omega)},$$

(ie, $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow_{continue} L^2(\Omega)$*), et*

$$\| u \|_{L^1(\Omega)} \leqslant | \Omega | \ \| u \|_{L^\infty(\Omega)},$$

(ie, $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow_{continue} L^1(\Omega)$*). De plus, on a*

$$\| u \|_{L^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{| \Omega |} \ \| u \|_{L^2(\Omega)},$$

(ie, $L^2(\Omega) \hookrightarrow_{continue} L^1(\Omega)$*).*

Définition 1.13. (Dual topologique) *Soit* $(E, \| \, . \, \|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé. On appelle* ***dual topologique*** *de* E *et l'on note* E' *l'ensemble des formes linéaires continues de* E *dans* $\mathbb{K}$*.*

Théorème 1.8. [5] *Le dual topologique de* $L^1(\Omega)$ *est* $L^\infty(\Omega)$ *et le dual topologique de* $L^2(\Omega)$ *est* $L^2(\Omega)$*.*

Définition 1.14. *Soit* f *une fonction de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*. On appelle* **support** *de* f *l'ensemble fermé de* $\mathbb{R}^d$ *qui est l'adhérence de* $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$*,*

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}^d.$$

Définition 1.15. *L'espace* $D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ *est l'espace des fonctions* **infiniment dérivables** $C^\infty(\Omega)$ **à support compact.**

Exemple 1.7. *Dans* $\mathbb{R}^d$*, la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} exp\left(\frac{-1}{1-\|x\|^2}\right) & si \quad \| x \| < 1, \\ 0 \quad sinon, \end{cases}$$

appartient à $D(\mathbb{R}^d)$ *et son support est la boule fermée* $\overline{B}(0,1)$ *pour la norme utilisée*

$$\overline{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d, \| x \| \leqslant 1\}.$$

Théorème 1.9. [5] *L'espace* $D(\Omega)$ *est dense dans* $L^2(\Omega)$ *et dans* $L^1(\Omega)$*.*

Définition 1.16. ***(Distribution)*** *Le dual topologique de* $D(\Omega)$ *sur* $\mathbb{R}$ *est* $D'(\Omega)$ *(un élément* $T \in D'(\Omega)$ *si* $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ *linéaire et continue). L'espace* $D'(\Omega)$ *désigne l'ensemble des distributions sur* Ω*.*

Définition 1.17. (La dérivée d'une distribution) *Soit* $T \in D'(\Omega)$*. Les dérivées premières de* T *au sens de distribution sont définies par*

$$< \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi >= - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >, \ \forall i = 1, ..., d.$$

Définition 1.18. (Dérivation faible) *Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$, on dit que v est **dérivable au sens faible** dans $L^2(\Omega)$, s'il existe des fonctions $\psi_i \in L^2(\Omega)$ pour $i \in \{1, ..., d\}$ telles que pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \psi_i(x)\phi(x)dx,$$

chaque ψ_i est appelée la i^{eme} dérivée partielle faible de v et notée désormais $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$.

Définition 1.19. (*Espace réflexif*) *Soient E un espace vectoriel normé et $J : E \to E''$ tel que*

$$J(x)(f) = < f, x >_{E',E}, \ \forall x \in E, \forall f \in E'$$

*où $< \cdot, \cdot >_{E',E}$ désigne le produit de dualité entre E' et E. (L'application $f \mapsto < f, x >_{E',E}$ définie de E dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur E'). Un espace E est dit **réflexif** si J est bijectif de E dans E'' (E''est le bidual topologique de E c'est à dire le dual topologique de E').*

Proposition 1.3. [5] *Soit E un espace de Banach réflexif et F un sous espace vectoriel fermé de E. Alors, F est réflexif.*

Théorème 1.10. [5] *L'espace $L^2(\Omega)$ est réflexif, mais les espaces $L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs.*

1.3 Espaces de Sobolev

Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Définition 1.20. *On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω que l'on note par $H^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ ayant des dérivées au sens des distributions dans $L^2(\Omega)$ en d'autre terme*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, ..., d \right\},$$

où les dérivées $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, 2, ..., d$ sont prises au sens des distributions.

L'espace $H^1(\Omega)$ muni de produit scalaire

$$< u, v >_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx + \sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx,$$

et dont la norme qui définie par

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \left(< u, u >_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega | u |^2 dx + \sum_{i=1}^d \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour la topologie induite par cette norme, une suite $(u_n)_n$ de $H^1(\Omega)$ converge vers $u \in H^1(\Omega)$ si $u_n \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^2(\Omega)$ pour tout $i = 1, ..., d$.

Exemple 1.8. *Soit* $\Omega =]-1,+1[$. *Montrons que la fonction*

$$u(x) = \frac{1}{2}(\mid x \mid + x) \in H^1(\Omega),$$

et que

$$u'(x) = H(x) = \begin{cases} 1 \ si \quad 0 < x < 1, \\ 0 \ si \ -1 < x < 0. \end{cases}$$

La fonction u est continue et bornée sur Ω. *Elle appartient donc à* $L^2(\Omega)$. *Montrons que sa dérivée au sens de distribution vaut* H. *En effet pour tout* $\varphi \in D(\Omega)$, *on a*

$$-\int_\Omega u\varphi'\,dx = -\int_{-1}^0 u\varphi'\,dx - \int_0^1 u\varphi'\,dx = \int_0^1 \varphi\,dx = \int_\Omega H\varphi\,dx.$$

Ainsi, $u \in H^1(\Omega)$ *et* $u' = H$. *Or* H *est bornée sur* Ω, *et donc* $H \in L^2(\Omega)$.

Théorème 1.11. [16] *L'espace* $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ *est* ***un espace de Hilbert*** *séparable et réflexif.*

Théorème 1.12. [1] *L'espace* $C^1(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $H^1(\Omega)$.

Remarque 1.1. [5] *On a toujours l'injection suivante*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow_{compacte} L^2(\Omega).$$

On considère le théorème de trace suivant

Théorème 1.13. *(***Théorème de trace***)* [16] *On peut définir de façon unique la trace* $\gamma_0(v)$ *de* $v \in H^1(\Omega)$ *sur* Γ *de façon que* $\gamma_0(v)$ *coïncide avec la définition usuelle*

$$\gamma_0(v(x)) = v(x), \quad x \in \Gamma,$$

si $v \in C^1(\overline{\Omega})$. *De plus l'application*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma),$$

est linéaire et continue.

Proposition 1.4. *(***Formule de Green***)* ([4], [5]) *Pour tous* $u, v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Gamma \gamma_0(u)\gamma_0(v)\cdot n_i\,dY,$$

où $(n_i)_{i=1}^d$ *sont les composantes de* n *avec* n *est le vecteur unitaire de la normale extérieur à* Γ. *De plus, pour tout* $u \in H^1(\Omega)$ *et* $v \in (H^1(\Omega))^d$ *on a*

$$\int_\Omega u\,div(v)\,dx = -\int_\Omega v\cdot\nabla u\,dx + \int_\Gamma \gamma_0(u)(\gamma_0(v)\cdot n)\,dY,$$

où $div(v) = \sum_i^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, *qui désigne la divergence de* v *et* $v \cdot n = \sum_i^d v_i\,n_i$.

Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.21. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $(H^1(\Omega)), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ (l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ muni de sa norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$)*

$$H_0^1(\Omega) = \{\overline{\varphi \in D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}\}.$$

Remarque 1.2. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions qui s'annulent au bord, ie,*

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v_{|\Gamma} = 0\}.$$

Théorème 1.14. [5] *On a $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un **espace de Hilbert**.*

Démonstration. Par définition $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ (qui est un *espace de Hilbert*) donc c'est aussi un **espace de Hilbert**. □

Théorème 1.15. ***(Inégalité de Poincaré)*** [16] *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega |\, v(x)\, |^2 dx \leqslant C \int_\Omega |\, \nabla v(x)\, |^2 dx, \tag{1.1}$$

où C ne dépend que de Ω.

Cette inégalité est fausse dans l'espace $H^1(\Omega)$, prendre par exemple $v = 1$.

Corollaire 1.1. [16] *La semi-norme de $H^1(\Omega)$ définie par*

$$|\, v\, |_{H^1(\Omega)} = \|\, \nabla v\, \|_{L^2(\Omega)},$$

vérifie dans $H_0^1(\Omega)$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|\, \nabla v\, \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\, v\, \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{1+C}\, \|\, \nabla v\, \|_{L^2(\Omega)}\, .$$

C'est donc une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. De plus, on a

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad (u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)},$$

définit un produit scalaire (associé à la norme) sur $H_0^1(\Omega)$.

Définition 1.22. *(**Dualité**) **Le dual** de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est appelé $H^{-1}(\Omega)$. On note*

$$< L, \phi >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = L(\phi),$$

le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual pour toute forme linéaire continue $L \in H^{-1}(\Omega)$ et toute fonction $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Puisque $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $D'(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues et denses.

Espace de Sobolev $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$

Définition 1.23. *L'espace de Sobolev des fonctions nulles sur une partie de bord est défini par*

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \quad sur\, \Gamma_1\},$$

où Γ_1 est une partie de Γ.
On suppose que Γ_1 de mesure non nulle ($mes(\Gamma_1) =\mid \Gamma_1 \mid \neq 0$) l'espace $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ est fermé dans $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.5. [16] *On suppose que $mes(\Gamma_1) > 0$, alors pour toute fonction $v \in H^1_{\Gamma_1}$ on a l'inégalité de Poincaré (1.1).*

Espace de Sobolev $H^2(\Omega)$

Définition 1.24. *L'espace de Sobolev d'ordre 2 sur Ω est définie par*

$$H^2(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega), \, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall i, j = 1, ..., d \right\}.$$

On lui associé le produit scalaire

$$(u,v)_{H^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx + \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x)dx.$$

La norme associée est notée par

$$\| v \|_{H^2(\Omega)} = \left(\| v \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla v \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.16. [16] *$(H^2(\Omega), \| \cdot \|_{H^2(\Omega)})$ est un* ***espace de Hilbert .***

1.4 Espaces de Lebesgue et de Sobolev dépendants du temps

Dans cette section, on introduit quelques outils fondamentaux pour l'étude des problèmes d'évolution.
Pour $T > 0$, $X =]0, T[$ et on considère un espace de Banach B de norme $\|.\|_B$.

Espace $L^2(X; B)$

Définition 1.25. *On définit*

$$L^2(X;B) = \left\{ f : X \to B \quad \text{mesurable telle que} \quad \int_X \| f(t) \|_B{}^2 dt < +\infty \right\},$$

que l'on muni de la norme

$$\| f \|_{L^2(X;B)} = \left(\int_X \| f(t) \|_B{}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.17. [11] *On a les résultats suivants*

- *Si l'espace B est séparable (resp. réflexif) alors l'espace $L^2(X;B))$ est aussi séparable (resp. réflexif).*
- *L'ensemble des fonctions continues à valeurs dans B, $C(X;B)$ est dense dans $L^2(X;B)$.*
- *Si B est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_B$ alors l'espace $L^2(X;B)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*
$$(u,v)_{L^2(X;B)} = \int_X (u(t),v(t))_B dt.$$

Définition 1.26. ***(Dualité)*** *Le dual de $L^2(X;B)$ est $L^2(X;B'))$ où B' est le dual topologique de B.*

Espace $L^\infty(X;B)$

Définition 1.27. *On définit l'espace de Banach suivant*

$$L^\infty(X;B) = \{ f : X \to B \quad \text{mesurable} \quad \exists C > 0, \| f(t) \|_B \leqslant C \text{ pour presque tout } t \},$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \| f \|_{L^\infty(X;B)} &= inf\{C > 0 \mid \ \| f(t) \|_B \leqslant C \text{ pour presque tout } t\} \\ &= \sup ess_{t \in X} \| f(t) \|_B . \end{aligned}$$

Définition 1.28. ***(Ensemble relativement compact)*** *Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite (u_n) de G, il existe une sous suite $(u_{n(k)})$ qui converge dans E.*

Théorème 1.18. [21] *Soient B_0, B, B_1 trois espaces de Banach tels que, $B_0 \subset B \subset B_1$ et $B_0 \hookrightarrow_{compacte} B$. Si F est borné dans $L^\infty(X;\, B_0)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \left\{ \dfrac{\partial f}{\partial t},\, f \in F \right\}$ est borné dans $L^2(X;\, B_1)$ alors F est relativement compact dans l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans B $(C([0,T];\, B))$.*

Espace $H^1(X;B)$

Définition 1.29. *On définit l'espace de Sobolev à valeur dans l'espace de Banach B comme suit*

$$H^1(X;B) = \left\{ u \in L^2(X;B),\, u' \in L^2(X;B) \right\},$$

où la dérivée u' est prise au sens des distributions muni de la norme

$$\| u \|_{H^1(X;B)} = \| u \|_{L^2(X;B)} + \| u' \|_{L^2(X;B)},$$

ou la norme équivalente

$$\| u \|_{H^1(X;B)} = \Big(\| u \|^2_{L^2(X;B)} + \| u' \|^2_{L^2(X;B)} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.6. [11] *On a les résultats suivants*

- *Si B est séparable alors $H^1(X;B)$ est aussi séparable.*
- *Si B est séparable réflexif alors $H^1(X;B)$ est réflexif.*
- *Si $u \in H^1(X;B)$ alors u est continue sur X. De plus, on a ($H^1(X;B) \subset C([0,T];\, B)$ avec l'injection continue).*

Espace $W^{1,\infty}(X;B)$

Définition 1.30. *L'espace $W^{1,\infty}(X;B)$ est défini par*

$$W^{1,\infty}(X;B) = \{u \in L^\infty(X;B), u' \in L^\infty(X;B)\},$$

où u' est prise au sens des distributions muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(X;B)} = \|u\|_{L^\infty(X;B)} + \|u'\|_{L^\infty(X;B)}.$$

Théorème 1.19. [11] *L'espace $W^{1,\infty}(X;B)$ est un espace de Banach.*
De plus, on a

$$W^{1,\infty}(X;B) \hookrightarrow_{continue} C([0,T];\, B).$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz et lemme de Gronwall

Théorème 1.20. (Cauchy-Lipschitz) [8] *Soit $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ un système différentiel d'ordre 1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que :*
$A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont continues sur I.
Pour tout t_0 de I et Y_0 de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une unique solution Y sur I de ce système différentiel telle que $Y(t_0) = Y_0$.

Lemme 1.1. ***(de Gronwall)*** [14] *Soient ψ et $y : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant*

$$\exists c \leqslant 0, \quad \forall t \in [a,b], \quad y(t) \leqslant c + \int_a^t \psi(s)y(s)ds.$$

Alors,

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leqslant c \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds \right).$$

1.5 Topologies faible et faible*

Soit E un espace de Banach, **la topologie faible** $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E c'est à dire avec le minimum d'ensembles ouverts, rendant continues toutes les applications

$$\varphi_f : x \in E \mapsto < f, x >_{E',E} \in \mathbb{R}, \forall f \in E'.$$

On définit la convergence d'une suite de E pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ de la façon suivante

Définition 1.31. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in E$ et on note*

$$x_n \rightharpoonup x \ \ si \ \ \forall f \in E', \quad < f, x_n >_{E',E} \to < f, x >_{E',E} .$$

Proposition 1.7. [5] *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E on a les propriétés suivantes*

- *Si $x_n \to x$ fortement alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement.*
- *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement alors $(\| x_n \|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\| x \| \leqslant \liminf \| x_n \|$.*
- *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement et si $f_n \to f$ fortement dans E', (c'est à dire $\| f_n - f \|_{E'} \to 0$) alors, $< f_n, x_n >_{E',E} \to < f, x >_{E',E}$.*

Théorème 1.21. [5] *L'espace de Banach E est **réflexif** si et seulement si de toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E admet une sous suite extraite faiblement convergente.*

Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto \varphi_x(f) = f(x)$ on obtient ainsi une famille d'applications linéaires de E' dans $\mathbb{R}$.
La topologie faible* est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$.
On définit la convergence d'une suite de E' pour la topologie faible* de la façon suivante

Définition 1.32. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E', on dit que f_n converge vers f pour la topologie faible* et l'on note*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad si \quad \forall x \in E \quad (< f_n, x >_{E',E} \rightharpoonup < f, x >_{E',E}) .$$

Proposition 1.8. [5] *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E', on a les propriétés suivantes*

- *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ alors $\| f_n \|$ est bornée et $\| f \| \leqslant \liminf \| f_n \|$.*
- *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ et si $x_n \to x$ dans E alors $< f_n, x_n >_{E',E} \to < f, x >_{E',E}$.*

Théorème 1.22. ***(Banach-Alaoglu)*** [5] *L'ensemble $B_{E'} = \{f \in E' : \| f \|_{E'} \leqslant 1\}$ est compact pour la topologie faible*.*

Théorème 1.23. [5] *Soit E un espace de Banach séparable, alors de toute suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E' admet une sous suite faiblement* convergente.*

Remarque 1.3. (Convergence faible dans les espaces de Lebesgue)

(i) *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $L^2(\Omega)$ *converge fortement vers* u *dans* $L^2(\Omega)$ *si*

$$\lim_{n\to+\infty} \| u_n - u \|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

On note $u_n \to u$.

(ii) *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $L^2(\Omega)$ *converge faiblement vers* u *dans* $L^2(\Omega)$ *si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (u_n(x) - u(x))\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall\varphi \in L^2(\Omega).$$

On note $u_n \rightharpoonup u$.

(iii) *On parle de convergence faible* dans* $L^\infty(\Omega)$ *au lieu de convergence faible car le dual de* $L^\infty(\Omega)$ *contient strictement* $L^1(\Omega)$ *et il est strictement plus grand que* $L^1(\Omega)$. *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement* vers* u *si* $u_n, u \in L^\infty(\Omega)$ *et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (u_n(x) - u(x))\,\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall\varphi \in L^1(\Omega),$$

et on note $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$.

Exemple 1.9. *Soit* $\alpha > 0$, *on définit la suite suivante*

$$u_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & si \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0 & si \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Montrons que

$$u_n \longrightarrow 0, \quad dans \quad L^2(0,1) \Leftrightarrow 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2},$$
$$u_n \rightharpoonup 0 \quad dans \quad L^2(0,1) \Leftrightarrow 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}.$$

En effet,

$$\| u_n \|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 | u_n |^2 \; dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^{2\alpha}\,dx = n^{2\alpha-1}.$$

Donc

$$u_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2(0,1) \quad si \quad 2\alpha - 1 < 0 \;\; (ie,\; 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}).$$

Pour montrer que $u_n \rightharpoonup 0$ *dans* $L^2(0,1)$, *on doit prouver la convergence suivante*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall\varphi \in L^2(0,1).$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ *et comme l'espace vectoriel des fonctions en escalier est dense dans l'espace* $L^2(0,1)$ *et* $\| u_n \|_{L^2(0,1)} = 1$, *il suffit de prouver le résultat lorsque* φ *est une fonction en escalier, ce qui signifie qu'il existe* $0 = a_0 < a_1 < ... < a_m = 1$ *tel que* $\varphi(x) = b_i$ *pour* $x \in]a_i, a_{i+1}[\quad 0 \leqslant i \leqslant m-1$. *On obtient donc, pour* n *suffisamment grand*

$$\int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx = b_0 \int_{a_0}^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{2}}\,dx = b_0(n^{\frac{-1}{2}}),$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

2

Étude de l'équation de la chaleur parabolique

L'objectif de ce chapitre est de présenter la méthode de Galerkin pour montrer l'existence de solutions faibles de l'équation de la chaleur parabolique (dont la capacité thermique est constante égale à 1 et la conductivité thermique dépend de x et t) muni de la condition nulle au bord (condition de Dirichlet homogène) avec une condition initiale à l'instant $t = 0$. Ensuite, on donne un résultat d'unicité.

2.1 Position du problème

On considère l'équation de la chaleur parabolique dans un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière régulier $\partial\Omega = \Gamma$, sur un intervalle de temps $[0, T]$ suivante (voir [3])

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + div(q) = f(x,t) \quad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{2.1}$$

où a est la capacité thermique et q le flux de la chaleur et f est la dissipation d'énergie c'est une donnée du problème.
On suppose que le phénomène de conduction de la chaleur est décrit par la loi de Fourier [12]

$$q = -K(x,t)\nabla u,$$

où K est la matrice de conductivité thermique du matériau. Cette loi exprime le flux de la chaleur proportionnellement au gradient de la température. Donc, on a

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - div(K(x,t)\nabla u) = f(x,t) \quad \Omega \times [0,T].$$

Dans le cas simplifié où la capacité et la conductivité thermiques sont constantes par exemple $a(x,t) = 1$ et $K(x,t) = (K_{ij}(x,t))_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$, avec

$$K_{ij}(x,t) = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

On obtient l'équation suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t) \quad dans\ \Omega \times [0,T],$$

où Δ est Laplacien $\left(\Delta u = div\,(\nabla u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)$. Cette équation est assortie d'une condition initiale

$$u(x,0) = u_0 \quad \text{pour } x \in \Omega,$$

et d'une condition aux limites de Dirichlet homogène

$$u(x,t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0,T[,$$

où u_0 est une fonction donnée. Donc, on a le problème suivant :
Trouver $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \\ u(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Ce problème a été étudié par [20]. On va considérer dans cette partie le problème (P_1) donné par
Problème (P_1) : Trouver $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(K(x,t)\nabla u) = f(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \\ u(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

La matrice de conductivité thermique K est symétrique et satisfait

$$K \in L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega))^{d\times d}), \tag{2.2}$$
$$\exists K_0 > 0 \text{ tel que}, \quad \sum_{i,j=1}^{d} K_{ij}(x,t)\alpha_i\alpha_j \geqslant \sum_{i,j=1}^{d} K_0 \mid \alpha_i \mid^2 \text{ p.p dans } \Omega \times]0,T[, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^d.$$

On suppose que

$$t \mapsto K(\cdot,t) \quad \text{et} \quad t \mapsto f(\cdot,t) \quad \text{sont continues.} \tag{2.3}$$

Pour étudier ce problème. En utilisant le même technique comme dans [2] et dans [20]

2.2 Formulation variationnelle du problème

La formulation variationnelle est dite aussi la formulation faible, c'est une autre manière d'énoncer un problème physique réagi par des équations différentielles aux dérivées partielles.
L'intérêt de cette approche est de pouvoir disposer de concepts et de propriétés de l'analyse fonctionnelle, en particulier ceux des espaces de Hilbert et de Sobolev...etc.
On suppose que la norme de l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ est définie par

$$\| u \|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne.

Proposition 2.1. *Supposons que f est un élément de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et que u_0 est un élément de $L^2(\Omega)$. Le problème (P_1) conduit au problème variationnel suivant,*

Problème (P_2) *Trouver $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, vérifiant l'équation variationnelle suivante*

$$\Big\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \Big\rangle + \int_\Omega K(x,t)\,\nabla u \cdot \nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x,t)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad p.p \quad t \in]0,T[, \tag{2.4}$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = u_0 \quad dans \quad \Omega,$$

où $\Big\langle .,. \Big\rangle$ désigne le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.

Démonstration. En multipliant l'équation de la chaleur parabolique par une fonction test φ de $H_0^1(\Omega)$, en intégrant en espace, on obtient

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\,\varphi(x)\,dx - \int_\Omega div(K(x,t)\,\nabla u)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f\,\varphi(x)\,dx. \tag{2.5}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$-\int_\Omega div(K(x,t)\,\nabla u)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega K(x,t)\,\nabla u \cdot \nabla\varphi(x)\,dx - \int_\Gamma \varphi(x)\,(K(x,t)\,\nabla u)\cdot n\;dY.$$

Comme $\varphi = 0$ sur Γ on a

$$-\int_\Omega div(K(x,t)\,\nabla u)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega K(x,t)\,\nabla u \cdot \nabla\varphi(x)\,dx.$$

En remplaçant dans (2.5) on trouve (2.4). □

2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Lemme 2.1. [11] *Soit u une fonction de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ telle que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ soit dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Alors u s'identifie à une fonction de $C([0,T];L^2(\Omega))$ vérifiant*

$$\| u(.,T) \|^2_{L^2(\Omega)} - \| u(.,0) \|^2_{L^2(\Omega)} = 2\int_0^T \Big\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u \Big\rangle\,dt.$$

Théorème 2.1. *Le problème (P_2) admet une unique solution.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème est décomposée en quatre étapes :

Étape 1 : Construction de la solution approchée par la méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode approximative utilisée pour déterminer l'existence des solutions des équations aux dérivées partielles d'évolution.

Pour montrer l'existence de solutions en utilisant la méthode de Galerkin qui approche un problème en dimension infinie par un problème en dimension finie, qui aura une unique solution.

Comme $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable alors il admet une base hilbertienne $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Donc on peut considérer les espaces $V_m = Vect\,(w_1, ..., w_m)$ qui sont les approximations de l'espace $H_0^1(\Omega)$. Notamment l'union $\cup_m V_m$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.
Avec la densité de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on suppose que les $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ forme une base orthogonale de $H_0^1(\Omega)$ et une base orthonormale dans $L^2(\Omega)$ (voir [2]). Pour tout $m \geqslant 1$, on cherche une fonction u_m donnée par

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k^m(t) w_k, \tag{2.6}$$

tel que pour tout $j \in \{1, ..., m\}$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial t}(x,t)\, w_j(x)\, dx + \int_\Omega K(x,t)\nabla u_m(x,t)\cdot\nabla w_j(x)\, dx = \int_\Omega f(x,t)\, w_j(x)\, dx, \tag{2.7}$$

avec $u_m \in C([0,T], V_m)$ et $u_m(\cdot,0) = u_{m0}$ est définie comme la projection orthogonale de u_0 dans $L^2(\Omega)$ sur V_m tel que

$$\begin{array}{ll} u_{m0} & \longrightarrow u_0 \quad dans \quad L^2(\Omega). \\ & m \longrightarrow +\infty \end{array}$$

En remplaçant u_m par son expression (2.6) dans (2.7) on obtient donc le système de m équations différentielles linéaires à m inconnues suivant :

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial c_k^m}{\partial t}(t) \int_\Omega w_j(x) w_k(x)\, dx + \sum_{k=1}^{m} c_k^m(t) \int_\Omega K(x,t)\nabla w_j(x)\cdot\nabla w_k(x)\, dx = \int_\Omega f(x,t) w_j(x)\, dx.$$

En utilisant l'orthonormalité de $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ dans $L^2(\Omega)$ ce système prend la forme

$$\frac{\partial X}{\partial t} + A(t)\, X = F(t), \tag{2.8}$$

où

$$X = (c_k^m(t))_{1\leqslant k\leqslant m}\,, \quad A(t) = \left(\int_\Omega K(x,t)\nabla w_j(x)\cdot\nabla w_k(x)\, dx\right)_{1\leqslant j,k\leqslant m},$$
$$F(t) = \left(\int_\Omega f(x,t) w_j(x)\, dx\right)_{1\leqslant j\leqslant m}, \quad X = (c_i)_{1\leqslant i\leqslant m}\,.$$

On peut récrire le système (2.8) sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(t) = -A(t)\, X + F(t) = \mathcal{G}(t, X), \\ X(0) = X_0,\ X_0 = (c_k^m(0))_{1\leqslant k\leqslant m}. \end{cases}$$

De (2.3) on a $A(t)$ et $F(t)$ sont continues en temps. Donc, ce système admet une unique solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz.
De plus, comme $F_j \in L^2(0,T)$ et $A_{j,k} \in L^\infty(0,T)$ alors la fonction $\mathcal{G} \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ et donc

$(c_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ appartenant à $H^1(0,T;\mathbb{R}^m)$.

Étape 2 : **Estimations a priori**

En multipliant (2.7) par $c_j^m(t)$. En sommant de $j=1,...,m$, on obtient

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t} u_m(x,t)\,dx + \int_\Omega K(x,t)\nabla u_m(x,t)\cdot\nabla u_m(x,t)\,dx = \int_\Omega f(x,t)\,u_m(x,t)\,dx, \tag{2.9}$$

tel que,

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t} u_m(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \mid u_m(x,t)\mid^2 dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\| \, u_m(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.10}$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\| \, u_m(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega K(x,t)\nabla u_m(x,t)\cdot\nabla u_m(x,t)\,dx = \int_\Omega f(x,t)\,u_m(x,t)\,dx,$$

en utilisant (2.2), on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega K(x,t)\nabla u_m(x,t)\cdot\nabla u_m(x,t)\,dx &\geqslant \quad K_0\int_\Omega \mid \nabla u_m(x,t)\mid^2 dx \\ &= \quad K_0\| \, \nabla u_m(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.11}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,t)u_m(x,t)\,dx &\leqslant \| \, f(\cdot,t)\, \|_{L^2(\Omega)}\| \, u_m(\cdot,t)\, \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C_p\| \, f(\cdot,t)\, \|_{L^2(\Omega)}\| \, \nabla u_m(\cdot,t)\, \|_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.12}$$

où C_p est la constante de Poincaré.

De (2.10)-(2.12) l'équation (2.9) devient

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\| \, u_m(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)} + K_0\,\| \, \nabla u_m(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_p\,\| \, f(\cdot,t)\, \|_{L^2(\Omega)}\| \, \nabla u_m(\cdot,t)\, \|_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant l'inégalité de Young (voir [5])

$$ab \leqslant \frac{\delta}{2}a^2 + \frac{1}{2\delta}b^2, \quad \forall a,b\in\mathbb{R}, \forall\delta>0,$$

on obtient

$$C_p\,\| \, f(\cdot,t)\, \|_{L^2(\Omega)}\| \, \nabla u_m(\cdot,t)\, \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{K_0}{2}\,\| \, \nabla u_m(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2K_0}\,C_p^2\,\| \, f(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}\| \, u_m(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)} + K_0\,\| \, \nabla u_m(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_1\| \, f(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)},$$

où $\mathcal{C}_1 = \frac{1}{K_0}C_p^2$.

On intègre de 0 à s, on obtient

$$\int_0^s \frac{\partial}{\partial t}\| \, u_m(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + K_0\int_0^s \| \, \nabla u_m(\cdot,t)^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leqslant \mathcal{C}_1\int_0^s \| \, f(\cdot,t)\, \|^2_{L^2(\Omega)}\,dt,$$

donc

$$\| u_m(\cdot,s) \|^2_{L^2(\Omega)} + K_0 \int_0^s \| \nabla u_m(\cdot,t) \|^2_{L^2} \, dt \leqslant \mathcal{C}_2 + \| u_{m0} \|^2_{L^2(\Omega),}$$

où $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \| f \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$.
Comme u_{m0} est définie comme la projection orthogonale de u_0 dans $L^2(\Omega)$ sur V_m et la suite (u_{m0}) est bornée dans $L^2(\Omega)$, alors il existe $\mathcal{C}_3 > 0$,

$$\| u_{m0} \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| u_0 \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_3.$$

D'où

$$\| u_m(\cdot,s) \|^2_{L^2(\Omega)} + K_0 \int_0^s \| \nabla u_m(\cdot,t) \|^2_{L^2(\Omega)} dt \leqslant \mathcal{C}_4.$$

Donc, on obtient les estimations suivantes

$$\| u_m \|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} \leqslant C, \tag{2.13}$$

et

$$\| u_m \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C, \tag{2.14}$$

où C est une constante indépendante de m.
Maintenant, on montre qu'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C, \tag{2.15}$$

où C est une constante indépendante de m.
Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, pour tout $m \geqslant 1$, on définit φ_m comme la projection orthogonale pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$ de φ sur V_m. Avec (voir [2])

$$\varphi_m = \sum_{j=1}^m \beta_j^m w_j,$$

et

$$\varphi_m \to \varphi \quad \textit{fortement} \quad \textit{dans} \quad H_0^1(\Omega).$$

En multipliant (2.7) par β_j^m et en sommant de $j = 1, ..., m$ pour $m \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t} \varphi_m(x) \, dx + \int_\Omega K(x,t) \nabla u_m(x,t) \cdot \nabla \varphi_m(x) \, dx = \int_\Omega f(x,t) \varphi_m(x) \, dx, \tag{2.16}$$

ie,

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t} \varphi_m(x) \, dx = - \int_\Omega K(x,t) \nabla u_m(x,t) \cdot \nabla \varphi_m(x) \, dx + \int_\Omega f(x,t) \varphi_m(x) \, dx,$$

d'où

$$\left| \int_\Omega \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t} \varphi_m(x) \, dx \right| \leqslant \int_\Omega |K(x,t) \nabla u_m(x,t) \cdot \nabla \varphi_m(x)| \, dx + \int_\Omega | \, f(x,t) \, \varphi_m(x) \, | \, dx.$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t}\,\varphi_m(x)\,dx\right| &\leqslant \| K(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u_m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi_m\|_{L^2(\Omega)}\\ &+ C_p\| f(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi_m\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant \Big[\| K(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\| u_m(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} + C_p\| f(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\Big]\|\varphi_m\|_{H_0^1(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

Comme $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale de $L^2(\Omega)$ et φ_m est la projection orthogonale pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$ de φ sur V_m on a (voir [2])

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial t},\varphi_m\right) = \left(\frac{\partial u_m}{\partial t},\varphi_j\right),\quad \forall j\geqslant m,\quad \|\varphi_m\|_{H^1(\Omega)}\leqslant\|\varphi\|_{H^1(\Omega)},$$

et

$$\|\nabla\varphi_m\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\|\varphi_m\|_{H^1(\Omega)}\leqslant\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\leqslant\mathcal{C}_p\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)},$$

où $\mathcal{C}_p$ est la constante de Poincaré et $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.
Puisque les $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$, la suite $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ converge fortement vers φ dans $H_0^1(\Omega)$ et on obtient

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial t},\varphi_m\right) = \left(\frac{\partial u_m}{\partial t},\varphi\right).$$

D'où, pour presque tout $t\in]0,T[$

$$\left|\int_\Omega \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t}\,\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \mathcal{C}_p\big(\| K(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\| u_m(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} + C_p\| f(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\big)\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\,.$$

Donc,

$$\left\|\frac{\partial u_m(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_p\Big(\| K(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\| u_m(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} + C_p\| f(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\Big).$$

En utilisant $(a+b)^2\leqslant 2a^2+2b^2$, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial u_m(\cdot,t)}{\partial t}\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} &\leqslant \mathcal{C}_p^2(\| K(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\| u_m(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} + C_p\| f(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)})^2\\ &\leqslant 2\mathcal{C}_p^2(\| K(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\| u_m(\cdot,t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_p^2\| f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

On a donc,

$$\int_0^T \left\|\frac{\partial u_m(\cdot,t)}{\partial t}\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \leqslant 2\mathcal{C}_p^2(\| K\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\| u_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + C_p^2\| f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}),$$

de (2.13), on obtient

$$\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\leqslant C.$$

Étape 3 : Passage à la limite $m \longrightarrow +\infty$

D'après les estimations (2.13) et (2.14), la suite $(u_m)_{m\geqslant 1}$ est bornée dans les espaces $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)$. De plus, de l'estimation (2.15), la suite $\left(\dfrac{\partial u_m}{\partial t}\right)_{m\geqslant 1}$ est bornée dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. On peut donc extraire une sous-suite notée encore $(u_m)_{m\geqslant 1}$ tel que on a les convergences suivantes

$$u_m \rightharpoonup u \quad faiblement \quad dans \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

$$u_m \rightharpoonup u \quad faiblement * \quad dans \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$\frac{\partial u_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \quad faiblement \quad dans \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

En rappelant que $(\varphi_m)_{m\geqslant 1}$ converge fortement vers φ dans $H_0^1(\Omega)$. Alors pour tout $\chi \in D(0,T)$

$$\varphi_m\chi(t) \longrightarrow \varphi\chi(t) \quad dans \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

En utilisant le théorème 1.18, on trouve

$$u_m \longrightarrow u \quad fortement \quad dans \quad C([0,T];\mathcal{H}),$$

où $\mathcal{H}$ est un espace de Banach tel que $L^2(\Omega) \subset \mathcal{H} \subset H^{-1}(\Omega)$ avec l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{H}$ est compacte. On en déduit que

$$u_m(0) \longrightarrow u(0) \quad fortement \quad dans \quad \mathcal{H}.$$

Donc, on a aussi

$$u_m(0) \longrightarrow u(0) \quad fortement \quad dans \quad L^2(\Omega),$$

or

$$\lim_{m\to+\infty} u_m(0) = u_0 \quad fortement \quad dans \quad L^2(\Omega).$$

Par unicité de la limite $u(0) = u_0$.

De (2.16), pour tout $\chi \in D(0,T)$, on a

$$\int_0^T \left(\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial t}(x,t)\varphi_m(x)\,dx\right)\chi(t)\,dt + \int_0^T \left(\int_\Omega K(x,t)\nabla u_m(x,t)\cdot\nabla\varphi_m(x)\,dx\right)\chi(t)dt$$
$$= \int_0^T \left(\int_\Omega f(x,t)\varphi_m(x)\,dx\right)\chi(t)\,dt.$$

En passant à la limite quand $m \longrightarrow +\infty$, en utilisant les convergences obtenues, on obtient

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t},\varphi\right\rangle \chi(t)\,dt + \int_0^T \left[\int_\Omega K(x,t)\nabla u(x,t)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx\right]\chi(t)\,dt$$
$$= \int_0^T \left[\int_\Omega f(x,t)\varphi(x)\,dx\right]\chi(t)\,dt, \quad \forall\chi\in D(0,T), \forall\varphi\in H_0^1(\Omega).$$

Donc, on a bien (2.4).

Étape 4 : L'unicité de solution

Si u_1 et u_2 sont deux solutions, on pose $u = u_1 - u_2$ alors

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right\rangle + \int_\Omega K(x,t)\, \nabla u(x,t) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx = 0,$$

on peut prendre pour tout t, φ la fonction $u(.,t)$ comme fonction test. D'après le lemme 2.1, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \parallel u(\cdot,t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega K(x,t)\nabla u(x,t) \cdot \nabla u(x,t)\, dx = 0,$$

vraie pour presque tout t. En utilisant (2.2), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \parallel u(\cdot,t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + K_0 \parallel \nabla u(\cdot,t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0.$$

On intègre en 0 et t on obtient

$$\parallel u(.,t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + 2K_0 \int_0^t \parallel \nabla u(.,s) \parallel^2 ds \leqslant 0,$$

car $u_1(\cdot,0) = u_2(\cdot,0) = u_0$. Pour tout $t > 0$. Donc,

$$u_1(.,t) = u_2(.,t).$$

□

Remarque 2.1. *Si on suppose que $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Par densité de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.*
On considère une suite $(u_0)_n$ de fonction de $H_0^1(\Omega)$ convergeant dans $L^2(\Omega)$ vers u_0, et une suite (f_n) d'éléments de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ convergeant vers f dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Le problème associé à $(u_0)_n$ et (f_n) a une unique solution u_n.

3

Étude de l'équation de la chaleur hyperbolique

Dans ce chapitre, on introduit le modèle hyperbolique de l'équation de la chaleur selon Cattaneo (dont la capacité thermique est constante égale à 1 et la conductivité thermique dépend de x et t) avec des conditions aux limites mixtes (Dirichlet homogène et de Neumann non homogène) et une condition initiale en $t = 0$ (voir [3] où les auteurs ont pris la capacité et la conductivité thermique dépend de x et t avec des conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet non homogènes. Pour ramener à la condition de Dirichlet homogène, ils ont fait un changement d'inconnue). Puis, on présente la méthode de Galerkin pour montrer que la formulation variationnelle associée à ce problème admet au moins une solution. Finalement, on donne un résultat d'unicité.

3.1 Description du problème

Dans le cas simplifié de l'équation de la chaleur parabolique (2.1) où a et K sont constantes avec la condition aux limites de Dirichlet et $f = 0$, la chaleur se propage à vitesse infinie car le principe maximum implique que si $u(x, t_0) \geq 0$ avec $u(x, t_0) \neq 0$ alors $u(x, t) > 0$ pour tout $t > 0$. (ie, paradoxe de la chaleur voir [5]). Cette propriété ne correspond pas à la réalité physique notamment dans des situations présentant forts gradients de température ou des temps d'observation très courts.

Pour pallier à ce paradoxe Maxwell-Cattaneo a proposé un modèle dans lequel la chaleur se propage à vitesse finie. Cette loi de transfert de la chaleur est appelée loi de Cattaneo [6], elle s'écrit sous la forme

$$b\frac{\partial q}{\partial t} + q = -K\nabla u,$$

où b est le temps de relaxation. La valeur de b est très faible ($0 < b << 1$) (de l'ordre 10^{-13} à 10^{-10} seconde) et q le flux de la chaleur .

L'équation de la chaleur hyperbolique dans le cas simplifié où la capacité thermique est constante égale 1 et $f = 0$ est donnée par (voir [3])

$$b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - div(K\nabla u) = 0.$$

Ce qui peut se décompose en

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + div(q) = 0 \\ q + b\dfrac{\partial q}{\partial t} = -K\nabla u. \end{cases}$$

Dans ce travail, on considère le problème hyperbolique suivant avec Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière régulière, $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Problème (P_1) : Trouver $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} b\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(K(x,t)\nabla u) = f(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \\ u(x,t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1 \times]0,T[, \\ (K\nabla u)\cdot n = g \qquad \text{sur } \Gamma_2 \times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0 \qquad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1. \end{cases}$$

3.2 Formulation variationnelle du problème

On suppose que

$$t \mapsto f(\cdot,t) \quad \text{est continue.} \tag{3.1}$$

On introduit l'espace suivant

$$V_0 = \{\varphi \in H^1(\Omega),\ \varphi = 0 \ \text{sur } \Gamma_1\},$$

V_0 est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ donc V_0 est un espace de Hilbert pour la norme $H^1(\Omega)$, ie,

$$\| u \|_{V_0} = \left(\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons que

$$u_0 \in V_0,\ u_1 \in L^2(\Omega),\ f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ g \in H^1(0,T;L^2(\Gamma_2)).$$

La matrice K est symétrique et satisfait

$$\begin{cases} K_{ij} \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega)), \\ \exists\, K_0 > 0 : \displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} K_{ij}(x,t)\,\alpha_i\alpha_j \geqslant \sum_{i,j=1}^{d} K_0 \mid \alpha_i \mid^2 \quad \text{p.p dans } \Omega\times]0,T[,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.2}$$

On suppose de plus que

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial K_{ij}}{\partial t}(x,t)\,\alpha_i\alpha_j \geqslant 0 \quad \text{p.p dans } \Omega\times]0,T[,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^d.$$

On notera

$$M = \left\| \frac{\partial K}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega))^{d\times d})}, \tag{3.3}$$

$$\beta = \| K \|_{L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega))^{d\times d})} . \tag{3.4}$$

Notons que b est une constante strictement positive.
Dans toute la suite, on note $u''(t)$ au lieu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $u'(t)$ au lieu $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Proposition 3.1. *La formulation variationnelle du problème* (P_1) *est donnée par*
Problème(P_2) *: Trouver* $u \in L^2(0,T;V_0)$ *avec* $u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *et* $u'' \in L^2(0,T;V_0')$ *vérifiant le problème suivant (au sens des distributions)*

$$b < u''(t), w > +(u'(t), w) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla w) = (f(t), w) + (g(t), w)_{\Gamma_2} \quad \forall w \in V_0, \tag{3.5}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.6}$$

$$u'(0) = u_1, \tag{3.7}$$

où $(.,.)$ *est le produit scalaire dans* $L^2(\Omega)$, $< .,. >$ *est le produit de dualité entre* V_0 *et* V_0', $(.,.)_{\Gamma_2}$ *est le produit scalaire dans* $L^2(\Gamma_2)$, V_0' *est l'espace dual de* V_0

Démonstration. En multipliant l'équation hyperbolique par une fonction test $w \in V_0$, en intégrant en espace, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega b\,u''(t)w(x)\,dx + \int_\Omega u'(t)w(x)\,dx - \int_\Omega div(K(x,t)\,\nabla u)\,w(x)\,dx\\ &= \int_\Omega f(x,t)\,w(x)\,dx\, + \int_\Omega g(t)\,w(x)\,dx.\end{aligned} \tag{3.8}$$

En utilisant la formule de Green on obtient

$$-\int_\Omega div(K(x,t)\,\nabla u)\,w(x)\,dx = \int_\Omega K(x,t)\,\nabla u\cdot\nabla w(x)\,dx - \int_\Gamma (K(x,t)\,\nabla u)\cdot n)\,w(x)\,dx.$$

Comme $w = 0$ sur Γ_1 et $((K\nabla u)\cdot n) = g \quad$ sur $\Gamma_2\times\,]0,T[$, on obtient

$$-\int_\Omega div(K(x,t)\,\nabla u)\,w(x)\,dx = \int_\Omega K(x,t)\,\nabla u\cdot\nabla w(x)\,dx - \int_{\Gamma_2} g(t)\,w(x)\,dx. \tag{3.9}$$

En remplaçant (3.9) dans (3.8) on obtient (3.5)

3.3 Résultat d'existence et d'unicité pour le problème (P_2)

3.3.1 Résultat d'existence

Méthode de Galerkin

Comme l'espace V_0 est un espace de Hilbert séparable alors il admet une base hilbertienne $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ on note $V_m = Vect(w_1, ..., w_m)$. Avec la densité de V_0 dans $L^2(\Omega)$, on suppose que les

$(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ forment une base orthogonale de V_0 et une base orthonormale dans $L^2(\Omega)$.
Pour tout $m \geq 1$, la décomposition u_m sur la base $(w_1, ..., w_m)$ est comme suit

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k^m(t) w_k. \tag{3.10}$$

On cherche les coefficients $c_k^m(t)$, $\quad (0 \leqslant t \leqslant T)$ et $k = 1, ..., m$ vérifiant pour tout $j \in \{1, ..., m\}$

$$b < u_m''(t), w_j > +(u_m'(t), w_j) + (K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla w_j) = (f(t), w_j) + (g(t), w_j)_{\Gamma_2}, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} u_m(x,0) &= u_{0m} \quad dans\ V_0, \\ u_m'(x,0) &= u_{1m} \quad dans \quad L^2(\Omega), \end{aligned}$$

où u_{0m} est la projection orthogonale de u_0 dans V_0 sur l'espace généré par $\{w_1, ..., w_m\}$ et de même pour u_{1m} dans $L^2(\Omega)$. De plus $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \in H^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. En effet en remplaçant u_m par son expression (3.10) on a

$$\begin{aligned} & b\sum_{k=1}^{m} c_k''^m(t)(w_k, w_j) + \sum_{k=1}^{m} c_k'^m(t)(w_k, w_j) + \sum_{k=1}^{m} c_k^m(t)(K(x,t)\nabla w_k, \nabla w_j) \\ & = (f(t), w_j) + (g(t), w_j)_{\Gamma_2} \quad \forall 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Avec,

$$\begin{aligned} \lim_{m\to+\infty} u_{0m} &= u_0 \quad dans\, V_0, \\ \lim_{m\to+\infty} u_{1m} &= u_1 \quad dans\, L^2(\Omega). \end{aligned}$$

On obtient donc le système suivant

$$\begin{cases} b\, X'' + X' + A(t)\, X = F, \\ X(0) = X_0, \\ X'(0) = X_1, \end{cases} \tag{3.12}$$

où

$$\begin{aligned} X &= (c_k^m(t))_{1\leqslant k\leqslant m}, \quad X_0 = (c_k^m(0))_{1\leqslant k\leqslant m}, \quad X_1 = (c_k'^m(0))_{1\leqslant k\leqslant m} \\ A(t) &= ((K(x,t)\nabla w_k, \nabla w_j))_{1\leqslant j,k\leqslant m}, \quad X = (c_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \\ F(t) &= ((f(t), w_j) + (g(t), w_j)_{\Gamma_2})_{1\leqslant j\leqslant m}. \end{aligned}$$

Par le changement de variable suivant

$$Y = \begin{pmatrix} X' \\ X \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} X'' \\ X' \end{pmatrix},$$

on obtient,

$$\begin{pmatrix} bI & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} Y' = \begin{pmatrix} F(t) - X' - A(t)X \\ X' \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{pmatrix} bI & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} Y' = \begin{pmatrix} -I & -A(t) \\ I & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On note par

$$B_1 = \begin{pmatrix} bI & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \; B_2(t) = \begin{pmatrix} -I & -A(t) \\ I & 0 \end{pmatrix}, \; \mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice B_1 est inversible. Donc on a

$$Y' = \mathcal{A}(t)Y + \mathcal{B}(t) = \mathcal{G}(t, Y),$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{A}(t) = B_1^{-1} B_2(t) \\ \mathcal{B}(t) = B_1^{-1} \mathcal{F}(t). \end{cases}$$

Comme $K_{ij} \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega))$ et $g \in H^1(0, T; L^2(\Gamma_2))$ alors $K_{ij} \in C([0, T]; L^\infty(\Omega))$ et $g \in C([0, T]; L^2(\Gamma_2))$. Donc, de (3.1) on a $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont continues en temps. De plus, $\mathcal{G} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^{2m})$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système d'équations différentielles ordinaires admet une unique solution dans l'intervalle $[0, T]$ et $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ appartenant à $H^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.

□

Estimations a priori de la solution approchée

Lemme 3.1. [11] *Soient $\mathcal{X}_0 = V_0$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}' = L^2(\Omega)$, $\mathcal{X}_1 = V_0'$ les injections de $\mathcal{X}_0$ dans $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}_1$ sont continues et denses. De plus, l'injection de $\mathcal{X}_0$ dans $\mathcal{X}$ est compacte. Si $\varphi \in L^2(0, T; V_0)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0, T; V_0')$ alors $\varphi \in C([0, T], L^2(\Omega))$. De plus, on a*

$$\begin{aligned} \int_0^T < \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \varphi > \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \|\varphi(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2} \|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

on a la formule la plus générale suivante

$$\int_0^T < \frac{\partial u(t)}{\partial t}, v(t) > \, dt = \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(u, v) \, dt - \int_0^T < \frac{\partial v(t)}{\partial t}, u(t) > \, dt$$

$$= (u(T), v(T)) - (u(0), v(0)) - \int_0^T < \frac{\partial v(t)}{\partial t}, u(t) > \, dt,$$

$$\forall u, v \in L^2(0, T; V_0), \quad \forall \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; V_0').$$

Proposition 3.2. *Sous les hypothèses précédentes sur les données, on a les estimations suivantes*

$$\| u_m \|_{L^\infty(0,T;V_0)} \leqslant C, \tag{3.13}$$

$$\| u_m' \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C, \tag{3.14}$$

où C est une constante strictement positive indépendante de m .

Démonstration. En multipliant l'équation (3.11) par $c_k'^m$ et en sommant sur $k = 1, 2, ..., m$, on obtient

$$b < u_m''(t), \sum_{k=1}^{m} c_k'^m(t)\, w_k > + \Big(u_m'(t), \sum_{k=1}^{m} c_k'^m(t)\, w_k \Big) + \Big(K(x,t) \nabla u_m(t), \sum_{k=1}^{m} c_k'^m(t)\, \nabla w_k \Big)$$
$$= \Big(f(t), \sum_{k=1}^{m} c_k'^m(t)\, w_k \Big) + \Big(g(t), \sum_{k=1}^{m} c_k'^m(t)\, w_k \Big)_{\Gamma_2},$$

d'où

$$\begin{aligned} & b \left\langle u_m''(t), u_m'(t) \right\rangle + \big(u_m'(t), u_m'(t) \big) + \big(K(x,t) \nabla u_m(t), \nabla u_m'(t) \big) \\ & = \big(f(t), u_m'(t) \big) + \big(g(t), u_m'(t) \big)_{\Gamma_2}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

comme

$$< u_m''(t), u_m'(t) >= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \| u_m'(t) \|^2_{L^2(\Omega)},$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2} \frac{\partial}{\partial t} \| u_m'(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| u_m'(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + (K(x,t) \nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)) \\ & = (f(t), u_m'(t)) + (g(t), u_m'(t))_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

Puisque K dépend de x et de t, alors

$$(K(x,t) \nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (K(x,t) \nabla u_m(t), \nabla u_m(t)) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial K}{\partial t} \nabla u_m(t), \nabla u_m(t) \right),$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2} \frac{\partial}{\partial t} \| u_m'(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| u_m'(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (K(x,t) \nabla u_m(t), \nabla u_m(t)) \\ & \leqslant \| f(t) \|_{L^2(\Omega)} \| u_m'(t) \|_{L^2(\Omega)} + (g(t), u_m'(t))_{\Gamma_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial K}{\partial t} \nabla u_m(t), \nabla u_m(t) \right). \end{aligned} \tag{3.16}$$

En intègre entre $(0, s)$ avec $0 < s < T$ et en utilisant (3.3), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2} \| u_m'(s) \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \| u_m'(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \, dt + \frac{1}{2} (K(x,s) \nabla u_m(s), \nabla u_m(s)) \\ & \leqslant \frac{b}{2} \| u_m'(0) \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} (K(x,0) \nabla u_m(0), \nabla u_m(0)) + \int_0^s \| f(t) \|_{L^2(\Omega)} \| u_m'(t) \|_{L^2(\Omega)} \, dt \\ & + \int_0^s (g(t), u_m'(t))_{\Gamma_2} \, dt + \frac{M}{2} \int_0^s \| \nabla u_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \, dt. \end{aligned} \tag{3.17}$$

En utilisant l'intégration par parties,

$$\int_0^s \int_{\Gamma_2} g(t)u_m'(t)\,dx\,dt = -\int_0^s \int_{\Gamma_2} g'(t)u_m(t)\,dx\,dt + \left[\int_{\Gamma_2} g(t)u_m(t)\,dx\right]_0^s$$
$$= -\int_0^s \int_{\Gamma_2} g'(t)u_m(t)\,dx\,dt + \int_{\Gamma_2} g(s)u_m(s)\,dx - \int_{\Gamma_2} g(0)u_m(0)\,dx.$$

En remplaçant dans l'inéquation (3.17) et de (3.2) et (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2} \parallel u_m'(s) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \parallel u_m'(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)}\ dt + \frac{K_0}{2} \parallel \nabla u_m(s) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \frac{b}{2} \parallel u_m'(0) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{2} \parallel \nabla u_m(0) \parallel^2_{L^2(\Omega)^2} + \int_0^s \parallel f(t) \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel u_m'(t) \parallel_{L^2(\Omega)}\ dt \\
&+ \parallel g(s) \parallel_{L^2(\Gamma_2)} \parallel u_m(s) \parallel_{L^2(\Gamma_2)} + \parallel g(0) \parallel_{L^2(\Gamma_2)} \parallel u_m(0) \parallel_{L^2(\Gamma_2)} \\
&+ \int_0^s \parallel g'(t) \parallel_{L^2(\Gamma_2)} \parallel u_m(t) \parallel_{L^2(\Gamma_2)}\ dt + \frac{M}{2} \int_0^s \parallel \nabla u_m(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)}\ dt.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Par le théorème de trace, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\parallel \vartheta \parallel_{L^2(\Gamma_2)} \leqslant \gamma \parallel \vartheta \parallel_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \vartheta \in H^1(\Omega). \tag{3.19}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2} \parallel u_m'(s) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \parallel u_m'(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \frac{K_0}{2} \parallel \nabla u_m(s) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \frac{b}{2} \parallel u_1 \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{2} \parallel u_0 \parallel^2_{V_0} + \int_0^s \parallel f(t) \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel u_m'(t) \parallel_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&+ \gamma \parallel g(s) \parallel_{L^2(\Gamma_2)} \parallel u_m(s) \parallel_{V_0} + \gamma \parallel g(0) \parallel_{L^2(\Gamma_2)} \parallel u_0 \parallel_{V_0} \\
&+ \gamma \int_0^s \parallel g'(t) \parallel_{L^2(\Gamma_2)} \parallel u_m(t) \parallel_{V_0}\, dt + \frac{M}{2} \int_0^s \parallel \nabla u_m(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)}\, dt.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

En appliquant l'inégalité de Young

$$ab \leqslant \frac{\delta}{2}a^2 + \frac{1}{2\delta}b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \delta > 0, \tag{3.21}$$

on obtient

$$\parallel f(t) \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel u_m'(t) \parallel_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{3}{2} \parallel u_m'(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{6} \parallel f(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)}\ .$$

En remplaçant ces inégalités dans (3.20), on trouve

$$
\begin{aligned}
&\frac{b}{2} \| u_m'(s) \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \| u_m'(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt + \frac{K_0}{2} \| \nabla u_m(s) \|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \frac{b}{2} \| u_1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{2} \| u_0 \|^2_{V_0} + \frac{1}{6} \| f \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&+\gamma \| g(s) \|_{L^2(\Gamma_2)} \| u_m(s) \|_{V_0} + \gamma \| g(0) \|_{L^2(\Gamma_2)} \| u_0 \|_{V_0} \\
&+\gamma \int_0^s \| g'(t) \|_{L^2(\Gamma_2)} \| u_m(t) \|_{V_0} \ dt + \frac{3}{2} \int_0^s \| u_m'(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt \\
&+\frac{M}{2} \int_0^s \| \nabla u_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
&\frac{b}{2} \| u_m'(s) \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{K_0}{2} \| \nabla u_m(s) \|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_1 + \frac{1}{2} \int_0^s \| u_m'(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt + \gamma \| g(s) \|_{L^2(\Gamma_2)} \| u_m(s) \|_{V_0} \\
&+\gamma \int_0^s \| g'(t) \|_{L^2(\Gamma_2)} \| u_m(t) \|_{V_0} \ dt + \frac{M}{2} \int_0^s \| \nabla u_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt,
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

où

$$
C_1 = \frac{b}{2} \| u_1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{2} \| u_0 \|^2_{V_0} + \frac{1}{6} \| f \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \gamma \| g(0) \|_{L^2(\Gamma_2)} \| u_0 \|_{V_0} .
$$

En utilisant l'inégalité de Young (3.21), on obtient

$$
\gamma \int_0^s \| g'(t) \|_{L^2(\Gamma_2)} \| u_m(t) \|_{V_0} \ dt \leqslant \frac{\gamma^2}{2M} \int_0^s \| g'(t) \|^2_{L^2(\Gamma_2)} \ dt + \frac{M}{2} \int_0^s \| u_m(t) \|^2_{V_0} \ dt,
$$

et aussi

$$
\gamma \| g(s) \|_{L^2(\Gamma_2)} \| u_m(s) \|_{V_0} \leqslant \frac{K_0}{4} \| u_m(s) \|^2_{V_0} + \frac{\gamma^2}{K_0} \| g(s) \|^2_{L^2(\Gamma_2)} .
$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
\int_0^s \| u_m(t) \|^2_{V_0} \ dt &= \int_0^s \| u_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt + \int_0^s \| \nabla u_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt \\
&= \int_0^s \left\| \int_0^t u_m'(\sigma)\, d\sigma + u_m(0) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \ dt + \int_0^s \| \nabla u_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt \\
&\leqslant 2 \int_0^s \left(t \int_0^t \| u_m'(\sigma) \|^2_{L^2(\Omega)} \ d\sigma \right) dt + 2 \int_0^s \| u_m(0) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt \\
&+ \int_0^s \| \nabla u_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt \leqslant s^2 \int_0^s \| u_m'(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt \\
&+ 2s \| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \| \nabla u_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \ dt,
\end{aligned}
$$

et

$$\| u_m(s) \|_{V_0}^2 \leqslant 2s \int_0^s \| u_m'(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \ dt + 2 \| u_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u_m(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

En remplaçant dans (3.23), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} \| u_m'(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{K_0}{4} \| \nabla u_m(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 \ &\leqslant \ C_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{K_0 s}{2} + \frac{s^2 M}{2} \right) \int_0^s \| u_m'(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \ dt \\ &+ \ (Ms + \frac{K_0}{2}) \| u_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma^2}{2M} \| g' \|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_2))} \\ &+ \ \frac{\gamma^2}{K_0} \| g(s) \|_{L^2(\Gamma_2)}^2 + M \int_0^T \| \nabla u_m(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \ dt. \end{aligned}$$

On note

$$C_2 = C_1 + (MT + \frac{K_0}{2}) \| u_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma^2}{2M} \| g' \|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_2))}^2 + \frac{\gamma^2}{K_0} \| g \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_2))}^2,$$

et

$$C_3 = \frac{1 + T^2 M + K_0 T}{2},$$

on obtient donc

$$\frac{b}{2} \| u_m'(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{K_0}{4} \| \nabla u_m(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2 + C_3 \int_0^s \| u_m'(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \ dt + M \int_0^s \| \nabla u_m(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \ dt.$$

En prenant

$$C' = min \left(\frac{b}{2}, \frac{K_0}{4} \right), \quad C'' = max(C_3, M).$$

On a

$$C' \left(\| u_m'(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u_m(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leqslant C_2 + C'' \int_0^s \left(\| u_m'(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u_m(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt.$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on a

$$\| u_m'(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u_m(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant \frac{C_2}{C'} + \frac{C''}{C'} \int_0^s \frac{C_2}{C'} \exp \left(\frac{C''}{C'} (s-t) \right) dt,$$

d'où

$$\| u_m'(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u_m(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant \frac{C_2}{C'} \exp \left(\frac{C''}{C'} s \right),$$

on obtient les estimations suivantes

$$\| u_m' \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C, \tag{3.24}$$

et

$$\| \nabla u_m \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C, \tag{3.25}$$

avec

$$C = \frac{C_2}{C'} \exp \left(\frac{C''}{C'} T \right).$$

□

Théorème 3.1. *(***Passage à la limite quand** $m \to +\infty$*) Le problème* (P_2) *admet au moins une solution.*

Démonstration. En utilisant la proposition 3.2, on déduit que $(\nabla u_m)_{m\geq 1}$ et $(u'_m)_{m\geq 1}$ sont bornées respectivement dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Donc, on peut extraire une sous suite de $(u_m)_{m\geq 1}$ notée encore $(u_m)_{m\geq 1}$ et une sous suite de $(u'_m)_{m\geq 1}$ notée encore $(u'_m)_{m\geq 1}$ vérifiant les convergences faibles suivantes

$$\begin{aligned} &u_m \rightharpoonup u \quad \textit{faiblement dans } L^2(0,T;V_0) \\ &u_m \rightharpoonup u \quad \textit{faiblement}^* \textit{ dans } L^\infty(0,T;V_0) \end{aligned} \tag{3.26}$$

et

$$\begin{aligned} &u'_m \rightharpoonup u' \quad \textit{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ &u'_m \rightharpoonup u' \quad \textit{faiblement}^* \textit{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Montrons maintenant que u est solution de (3.5) - (3.7). En effet, soit $w \in V_0$, il existe une suite de la forme :

$$w_m = \sum_{j=1}^{m} \mu_j^m w_j,$$

telle que $w_m \to w$ dans V_0. Alors, pour tout $\varphi \in D(0,T)$

$$w_m\varphi(t) \to w\varphi(t) \quad \text{fortement} \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;V_0),$$

et

$$w_m\varphi'(t) \to w\varphi'(t) \quad \text{fortement} \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;V_0).$$

En multipliant (3.11) par $\varphi(t)\mu_j^m$ et en sommant de $j = 1, ..., m$ pour $m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} &b\langle u''_m(t), \varphi(t)\, w_m\rangle + (u'_m(t), \varphi(t)\, w_m) + (K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla(\varphi(t)\, w_m)) \\ &= (f(t), \varphi(t)\, w_m) + (g(t), \varphi(t)\, w_m)_{\Gamma_2}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

En intégrant entre $(0,T)$, on a

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big(-b(u'_m(t), \varphi'(t)\, w_m) + (u'_m(t), \varphi(t)\, w_m) + (K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla(\varphi(t)\, w_m))\Big)\, dt \\ &= \int_0^T (f(t), \varphi(t)\, w_m)\, dt + \int_0^T (g(t), \varphi(t)\, w_m)_{\Gamma_2}\, dt. \end{aligned} \tag{3.29}$$

En utilisant (3.26) - (3.27), on passe à la limite quand $m \to +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big(-b(u'(t), \varphi'(t)\, w) + (u'(t), \varphi(t)\, w) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla(\varphi(t)\, w))\Big)\, dt \\ &= \int_0^T (f(t), \varphi(t)\, w)\, dt + \int_0^T (g(t), \varphi(t)\, w)_{\Gamma_2}\, dt. \end{aligned} \tag{3.30}$$

On écrit aussi

$$\begin{aligned}&\int_0^T\Big(-b(u'(t),w)\varphi'(t)+(u'(t),w)\varphi(t)+(K(x,t)\nabla u(t),\nabla w)\varphi(t)\Big)\,dt\\&=\int_0^T(f(t),w)\varphi(t)\,dt+\int_0^T(g(t),w)_{\Gamma_2}\varphi(t)\,dt.\end{aligned}\tag{3.31}$$

On en déduit que (3.5) a bien lieu.

En réintégrant par parties dans (3.31), on obtient pour $\varphi\in D(0,T)$

$$\begin{aligned}b\int_0^T<u''(t),w\,\varphi(t)>\,dt=-\int_0^T\Big((u'(t),w)\varphi(t)-(K(x,t)\nabla u(t),\nabla w)\varphi(t)\Big)\,dt\\+\int_0^T(f(t),w)\varphi(t)\,dt+\int_0^T(g(t),w)_{\Gamma_2}\varphi(t)\,dt.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (3.19) comme dans la proposition 3.2 on obtient

$$\left|\int_0^T<u''(t),w\,\varphi(t)>\,dt\right|\leqslant C\parallel\varphi w\parallel_{L^2(0,T;V_0)},\quad\forall\varphi\in D(0,T).\tag{3.33}$$

La densité de $D(0,T)$ dans $L^2(0,T)$ implique que (3.33) reste vraie pour tout $\varphi\in L^2(0,T)$.

D'où $u''\in L^2(0,T;V_0')$.

Maintenant, on montre que les conditions initiales sont satisfaites c'est à dire

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1.$$

En utilisant le théorème 1.18, on trouve

$$u_m\to u\quad fortement\ \ dans\ \ C([0,T];L^2(\Omega)).$$

D'où

$$u_m(0)\to u(0)\quad dans\quad L^2(\Omega).$$

D'autre part, on a

$$\lim_{m\to+\infty}u_m(0)=u_0\quad dans\quad V_0\quad\text{et donc dans}\quad L^2(\Omega).$$

Par unicité de la limite, on trouve $u(0)=u_0$.

Pour prouver que $u'(0)=u_1$, on prend $\varphi\in C^\infty([0,T];\mathbb{R})$ telle que $\varphi(T)=0$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^T\Big(b<u''(t),w>\varphi(t)+(u'(t),w)\varphi(t)+(K(x,t)\nabla u(t),\nabla w)\varphi(t)\Big)\,dt\\&=\int_0^T\Big(f(t),w)\varphi(t)+(g(t),w)_{\Gamma_2}\varphi(t)\Big)\,dt.\end{aligned}$$

Puisque $u''\in L^2(0,T;V_0')$, on intègre par parties on a

$$\begin{aligned}&\int_0^T\Big(-b(u'(t),w)\varphi'(t)+(u'(t),w)\varphi(t)+(K(x,t)\nabla u(t),\nabla w)\varphi(t)\Big)\,dt\\&=\int_0^T\Big((f(t),w)\varphi(t)+(g(t),w)_{\Gamma_2}\varphi(t)\Big)\,dt+b<u'(0),w>\varphi(0).\end{aligned}\tag{3.34}$$

En intégrant par parties dans (3.28), on trouve

$$\begin{aligned}&\int_0^T \Big(- b(u_m'(t), w_m)\varphi'(t) + (u_m'(t), w_m)\varphi(t) + (K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla w_m)\varphi(t)\Big)\, dt \\ &= \int_0^T \Big(f(t), w_m)\varphi(t) + (g(t), w_m)_{\Gamma_2}\varphi(t)\Big)\, dt + b(u_m'(0), w_m)\varphi(0),\end{aligned} \tag{3.35}$$

en passant à la limite quand m tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^T (-b(u'(t), w)\varphi'(t) + (u'(t), w)\varphi(t) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla w)\varphi(t))\ dt \\ &= \int_0^T \Big((f(t), w)\varphi(t) + (g(t), w)_{\Gamma_2}\varphi(t)\Big)\, dt + b(u_1, w)\varphi(0).\end{aligned}$$

Donc

$$< u_1 - u'(0), w >= 0, \quad \forall w \in V_0.$$

Alors

$$u_1 - u'(0) = 0_{V_0'},$$

d'où

$$u'(0) = u_1 \quad dans \quad V_0'.$$

□

3.3.2 Résultat d'unicité

Théorème 3.2. *La solution du problème* (P_2) *est unique.*

Démonstration. Supposons que le problème (P_2) admet deux solutions u_1 et u_2, donc elles vérifient au sens des distributions :

$$b < u_1''(t), w > +(u_1'(t), w) + (K(x,t)\nabla u_1(t), \nabla w) = (f(t), w) + (g(t), w)_{\Gamma_2} \quad \forall w \in V_0,$$

$$b < u_2''(t), w > +(u_2'(t), w) + (K(x,t)\nabla u_2(t), \nabla w) = (f(t), w) + (g(t), w)_{\Gamma_2} \quad \forall w \in V_0.$$

En retranchant, et on pose $u = u_1 - u_2$, on obtient

$$b < u''(t), w > +(u'(t), w) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla w) = 0 \quad \forall w \in V_0, \tag{3.36}$$

avec u satisfait les conditions initiales suivantes

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

On fixe $0 \leqslant s \leqslant T$, et on donne

$$\psi(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^s u(\sigma)\, d\sigma & 0 \leqslant t \leqslant s \\ 0 \quad s \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

On a alors $\psi \in H^1(0,T;V_0)$, donc

$$\int_0^s \Big(b < u'', \psi > + (u', \psi) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla\psi) \Big)\, dt = 0.$$

Comme $\psi' \in L^2(0,T;V_0)$ et $u'(0) = \psi(s) = 0$, en intégrant par parties on trouve

$$\int_0^s \Big(-b(u', \psi') - (u, \psi') + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla\psi) \Big)\, dt = 0.$$

Comme $\psi' = -u$ quand $0 < t < s$, on obtient

$$\int_0^s \Big(b(u', u) + (\psi', \psi') - (K(x,t)\nabla\psi', \nabla\psi) \Big)\, dt = 0.$$

Puisque $\| \psi' \|^2_{L^2(0,s;L^2(\Omega))} \geqslant 0$, on a

$$\int_0^s \Big(b(u', u) - (K(x,t)\nabla\psi', \nabla\psi) \Big)\, dt \leqslant 0.$$

Donc

$$\int_0^s \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{b}{2} \| u \|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}(K(x,t)\nabla\psi, \nabla\psi) \right) dt \leqslant \int_0^s \Big(\frac{\partial K}{\partial t}\nabla\psi, \nabla\psi \Big)\, dt.$$

En utilisant (3.2) et (3.3), on a

$$\frac{b}{2} \| u(s) \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{K_0}{2} \| \nabla\psi(0) \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant M \int_0^s \| \psi(t) \|^2_{V_0}\, dt.$$

On définit $w(t) = \displaystyle\int_0^t u(\sigma)\, d\sigma$ pour tout $t \in [0,T]$. On obtient

$$\frac{b}{2} \| u(s) \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{K_0}{2} \| \nabla w(s) \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant M \int_0^s \| w(t) - w(s) \|^2_{H^1(\Omega)}\, dt.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_0^s \| w(t) - w(s) \|^2_{H^1(\Omega)}\, dt &= \int_0^s \| w(t) - w(s) \|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \int_0^s \| \nabla(w(t) - w(s)) \|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \\
\leqslant\ & 2\int_0^s \| w(t) \|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + 2\int_0^s \| w(s) \|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \\
+\ & 2\int_0^s \| \nabla w(t) \|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + 2\int_0^s \| \nabla w(s) \|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \\
\leqslant\ & 2\int_0^s \| w(t) \|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + 2s \| w(s) \|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^s \| \nabla w(t) \|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + 2s \| \nabla w(s) \|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

de plus

$$\| w(s) \|^2_{L^2(\Omega)} = \left\| \int_0^s u(\sigma)\, d\sigma \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \left(\int_0^s \| u(\sigma) \|_{L^2(\Omega)}\, d\sigma \right)^2 \leqslant s \int_0^s \| u(\sigma) \|^2_{L^2(\Omega)}\, d\sigma,$$

d'où

$$2\int_0^s \parallel w(t) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \; dt \leqslant s^2 \int_0^s \parallel u(\sigma) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \; d\sigma.$$

Alors,

$$\begin{aligned}&\frac{b}{2} \parallel u(s) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{K_0}{2} - 2Ms\right) \parallel \nabla w(s) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leqslant 2M \int_0^s \parallel \nabla w(t) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \; dt + 3s^2 \int_0^s \parallel u(\sigma) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \; d\sigma,\end{aligned}$$

On choisit $s_0 > 0$ tel que

$$\frac{K_0}{2} - 2Ms_0 \geqslant \frac{1}{2},$$

donc pour tout $s \in [0, s_0]$, on trouve

$$\frac{b}{2} \parallel u(s) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \parallel \nabla w(s) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant 2M \int_0^s \parallel \nabla w(t) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \; dt + 3s_0^2 M \int_0^s \parallel u(\sigma) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \; d\sigma.$$

On note $C_1 = 3\, s_0^2\, M$, on obtient

$$\frac{b}{2} \parallel u(s) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \parallel \nabla w(s) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant 2M \int_0^s \parallel \nabla w(t) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \; dt + C_1 \int_0^s \parallel u(t) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \; dt.$$

On pose $C_2 = \dfrac{max(2M, C_1)}{min(\frac{b}{2}, \frac{1}{2})}$, on trouve

$$\parallel u(s) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 + \parallel w(s) \parallel_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant C_2 \int_0^s \Big(\parallel u(t) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 + \parallel w(t) \parallel_{H^1(\Omega)}^2 \Big) \; dt.$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\parallel u(s) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 + \parallel w(s) \parallel_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant 0, \quad \forall s \in [0, s_0].$$

On en déduit l'unicité de la solution $u = 0$, donc $u_1 = u_2$ sur $[0, s_0]$. On applique le même raisonnement dans chaque intervalle $[s_0; 2s_0], [2s_0; 3s_0], ..., etc$ afin d'aboutir au résultat. □

Conclusion

En mathématique et en physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique selon Fourier et hyperbolique selon Cattaneo.
Dans ce travail

- On a fait quelques notions de base d'analyse fonctionnelle qui sont nécessaires pour étudier ce genre de problèmes.
- On a présenté la méthode de Galarkin pour montrer l'existence des solutions faibles de la formulation variationnelle dans les deux cas suivants
  - Équation de la chaleur parabolique avec la condition de Dirichlet homogène sur le bord.
  - Équation de la chaleur hyperbolique avec des conditions aux limites mixtes (Dirichlet homogène-Neumann).

De plus, on a donné un résultat d'unicité.

Bibliographie

[1] R. Adams. Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] M. Boukrouche, I. Boussetouan, L. Paoli. Unsteady 3D-Navier-Stokes system with Tresca's friction law, Quarteley of Applied Mathematics, Vol 78, pp 525-543, 2020.

[3] I. Boussetouan. Etude théorique et numérique de quelques problèmes écoulements et de chaleur hyperbolique, Thèse de doctorat, Université Jean Monnet Saint Etienne, 2012.

[4] F. Boyer, P. Fabrie. Mathématical tools for the study of the incomprissible Navier-Stokes equations. Vol 183, Springer, New york, 2013.

[5] H. Brezis. Analyse fonctionnelle théorie et applications, Dunod, Paris, 1999.

[6] C. Cattaneo. Sulla Conduzione del Calore, Atti del Seminario Matematico e Fisico Dellà Universita di Modena, Vol 3, pp. 83-101, 1948.

[7] B. Dacorogna. Introduction to the calculus of variations,British Library Cataloguing-in-Publication Data, 2004.

[8] R. Danchin. Équations différentielles L3 de Mathématiques, 2010-2011.

[9] F. Demengel, G. Demengel. Espaces fonctionnels, Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles, EDP Sciences, Paris, 2007.

[10] J. Droniou. Quelques Résultats sur les Espaces de Sobolev, Polycopié de l'école doctorale de Maths- Info de Marseille, 2001.

[11] J. Droniou. Intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles, hal-01382368, version 1, Polycopié de l'école doctorale de Math-Info de Marseille, 2001.

[12] J. Fourier. Théorie analytique de la chaleur, ed. Firmin Didot, Paris, 1822. Réedition Jacques Gabay, Sceaux, 1988.

[13] M. L. Gallardo. Notes du cours sur les espaces de Hilbert, Licence 3-ième année, Université de Tours, année 2007-2008.

[14] X. Gourdon. Analyse, 2e édition, Ellipses, 2008 .

[15] A. Keddi. Comportement asymptotique de quelques systèmes thermoélastiques, Université Djilali Liabes, Sidi Bel Abbes, 2018.

[16] G. Leborgne. Approximations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques et éléments finis, 2003.

[17] H. Le Dert. Équations aux dérivées partielles non linéaires, Mathématiques et Applications, Vol. 72, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

[18] E. Maitre. Notes du Cours Éléments Finis, ENSIMAG 2A,Version du 21 février 2011.

[19] A. Munnier. Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Maitre de conférences, Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré, Nancy 1, France, 2007-2008 .

[20] R. Roux. Méthodes numériques déterministes, Université Pierre et Marie Curie, Master professionnel IFMA, 2013 - 2014.

[21] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 146, 65-95, 1987.

Résumé

Ce travail est destiné à l'étude variationnelle de l'équation de la chaleur dans les deux cas suivants :

- Équation de la chaleur parabolique avec la condition de Dirichlet homogène sur le bord.
- Équation de la chaleur hyperbolique avec des conditions aux limites mixtes (Dirichlet homogène-Neumann).

On présente la méthode de Galerkin pour montrer l'existence de la température solution faible de chaque problème. Finalement, on donne un résultat d'unicité.

Mots Clés : Équation parabolique, équation hyperbolique, étude variationnelle, méthode de Galerkin.

Abstract

The aim of this travail is the varitional study of the heat equation in the following two cases :

- Parabolic heat equation with the homogeneous Dirichlet boundary condition.
- Hyperbolic heat equation with mixed boundary conditions (homogeneous Dirichlet-Neumann).

We present the Galerkin's method to show the existence of the temperature weak solution of the each problem. Finally, we give a uniqueness result.

Key Words : Parabolic equation, hyperbolic equation, variational study, Galerkin's method.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو الدراسة التغيرية لمعادلة الحرارة في الحالتين التاليتين:

- معادلة الحرارة المكافئية مع شرط الحدود ديريكلي المتجانس.
- معادلة الحرارة الزائدية بشروط حدية مختلطة (ديريكلي متجانس- نيومان).

نقدم طريقة غلاركين لاثبات وجود درجة الحرارة حل ضعيف لكل مشكل. اخيرا، نقدم نتيجة الوحدانية.

الكلمات المفتاحية: معادلة الحرارة المكافئية، المعادلة الزائدية، الدراسة التغيرية، طريقة غلاركين.