

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



Mémoire :

Présenté par

CHAREF MARIAM
HAMZAOUI NACIRA

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques appliquées
Spécialité : Analyse mathématique et applications

Thème :

Sur les équations intégrales non-linéaires et leurs résolutions

Soutenu publiquement Juin 2020 devant le jury composé de

ADIMI HADJER	Président	MCB
HAMANI FATIMA	Encadrant	MAA
MAADADI ASMA	Examineur	MCB

Promotion 2020/2021

Remerciements

En premier lieu j'adresse ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Madame Fatima HAMANI, son sérieux et sa compétence m'ont été très utiles pour même a bien ce travail,

Merci a tous les enseignants et les étudiants,

Département mathématique,

Pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'il ont met a notre disposition pour réaliser ce travail.

Enfin, nous remercions toutes les personnes, famille, amis, qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Oh, dont je porte le nom avec fierté
Oh mon cœur tremble à sa voix
Oh toi qui secoues les conseils en sa présence
Merci mon père
Quelle était la raison de mon existence ?
toi qui aspire à le voir
Salutations, amour, respect et appréciation à ma mère
Aux oiseaux de paradis Afaf et Houda
A mon foie et mon cœur mon frère Ayman
Merci
Et tous les mots d'amour et merci
à celui qui m'a soutenu et s'est tenu à mes côtés
A mon partenaire de vie Ayoub
A tous, je dédie cet humble travail
Nous demandons à Allah de faire de lui un phare pour chaque étudiant de la connaissance.

MARIAM

Dédicace

Je dédie cette mémoire à :
A mes très chers parents

Aucune dédicace, aucun mot ne pourrait exprimer à leur juste valeur la gratitude et l'amour que je vous porte.

Je mets entre vos mains, le fruit de longues années d'études, de longs mois de distance de votre amour de votre tendresse, de longs jours d'apprentissage.

Loinne de vous, votre soutien et votre encouragement m'ont toujours donné de la force pour persévérer et pour prospérer dans la vie.

Chaque ligne de cette mémoire chaque mot et chaque lettre vous exprime la reconnaissance, le respect, l'estime et le merci d'être mes parents.

NACIRA

Table des matières

Introduction	6
1 Rappels et notions fondamentales	8
1.1 Espaces fonctionnels	8
1.2 La compacité dans les espaces fonctionnels	9
1.3 Opérateurs compacts	10
1.4 Opérateurs intégraux	10
1.5 Classification des équations intégrales	12
1.6 Théorème du point fixe de Banach	14
1.6.1 Existence et unicité des solutions pour les équations intégrales non-linéaires	15
2 Résolution des équations intégrales non-linéaires	18
2.1 Méthode de décomposition d'Adomian (M.D.A)	18
2.2 La méthode des approximations successives (M.A.S)	23
2.3 Méthode de perturbation homotopique (M.P.H)	24
2.4 Méthode de projection	26
2.5 Méthode de collocation	28
2.6 Méthode de quadrature	28
3 Applications et exemples numériques	32
3.1 Application de la méthode de décomposition d'Adomian (M.D.A)	32
3.2 Application de la méthode des approximations successives (M.A.S)	34
3.3 Application de la méthode de (M.P.H)	35
3.4 Application de la méthode de collocation	37
3.4.1 Méthode de collocation-Legendre pour l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm	37
3.4.2 Méthode de collocation-Legendre pour l'équation intégrale non-linéaire de Volterra	39
Conclusion	42

Notations

E : Espace vectoriel.
 X : Espace de Banach.
 \mathbb{R} : Ensemble de tout les nombres réel.
 Ω : Ensemble borné de \mathbb{R} .
 $C(\Omega, \mathbb{R})$: Espace des fonctions continues.
 L : Constante.
 V_j : Recouvrement.
 ε : Erreur.
 $\overline{\Omega}$: Adhérence de Ω .
 T : Opérateur.
 K : Noyau d'un opérateur intégral.
 u : Solution cherchée.
 Nf : Opérateur de Nemystki.
 λ : Paramètre.
 p : Paramètre d'homotopie.
 A_n : Polynômes d'Adomains.
 H_n : Polynômes de perturbation.
 $H(u, p)$: Homotopie.
 P : Opérateur de projection.
 φ_j : Bases.
 C_j : Coefficients.
 R_n : Résidu.
 x_i : Points de collocation.
 w_j : Poids.
 $\mathcal{L}_i(x)$: Polynômes de Lagrange.
 $L(x)$: Polynômes de Legendre .

Introduction

Les équations intégrales non-linéaires ont été un domaine actif de recherche en analyse fonctionnelle, non seulement en tant qu'applications de nouvelles idées et techniques, mais aussi en influençant leur développement.

Ces équations sont présentées dans une variété d'applications en physique mathématique, telles que l'atténuation des ondes, le transfert radiatif et les ondes dans les fluides. Dans certains cas, comme dans l'œuvre d'Abel sur les équations intégrales sont un modèle mathématique qui surgit naturellement dans la représentation de l'une des situations physiquement intéressantes.

Tous les problèmes scientifiques modélisés par des équations(EDO, EDP, équation intégrale) linéaire ou non-linéaire sont difficiles à résoudre analytiquement même la solution analytique n'est pas utilisée dans les simulation, ce qui montre l'importance des solutions approchées.

Dans la plupart des cas, nous utilisons ici la technique des méthodes spectrales pour approximer la solution d'une équation intégrale non-linéaire de type Fredholm et Volterra.

Notre objectif dans ce mémoire est de présenter quelques méthodes de résolution des équations intégrales non-linéaires de type Fredholm ou de Volterra.

Dans cette étude nous avons traitées les points suivantes : Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions fondamentales de l'analyse fonctionnelle, la compacité dans les espaces fonctionnels, et on présente les opérateurs compacts, intégraux, et quelques opérateurs non-linéaires, puis nous présentons la classification des équations intégrales. Dans cette partie du travail nous donnons un rappel à la théorie du point fixe de Banach pour prouver l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales non-linéaires.

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter quelques méthodes élémentaires pour la résolution approchée d'équation non-linéaire en particulier la méthode de décomposition d'Adomian, des approximations successives et de perturbation homotopique. Ainsi, l'utilisation des méthodes numériques revêt une importance critique dans la recherche des solutions approchées aux équations intégrales de deuxième espèce non-linéaires qui sont : la méthode de projection et la méthode de collocation, qui est basée sur les méthodes quadratures.

Le troisième chapitre est consacré essentiellement à illustrer la validation de ces méthodes par des exemples instructifs.

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre, on donne des notions générales sur la compacité et les opérateurs, nous allons présenter la forme générale d'équations intégrales et les classifier. Ensuite on parle sur la relation entre les opérateurs et les équations intégrales.

La dernière partie est consacrée à la question d'existence et d'unicité, nous présentons le théorème du point fixe de Banach et ces applications.

1.1 Espaces fonctionnels

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On appelle une norme sur l'espace E , toute application notée par $\|\cdot\|$ définie sur E à valeur dans \mathbb{R} qui vérifiant :
 $\forall x, y \in E, \forall \alpha :$

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemple 1.1. Dans l'espace $E = \mathbb{R}$ on l'application $\|x\| = |x|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et la valeur absolue de x est une norme pour \mathbb{R} .

Définition 1.2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon, \forall m > N_\varepsilon, \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Espace complet Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E est une suite convergente dans E , pour la distance associé à la norme.

Espace de Banach On appelle $(E, \|\cdot\|)$ espace de Banach tout espace vectoriel normé et complet.

Exemple 1.2. $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{K}^\times, \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces de Banach.

Produit scalaire Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , un produit scalaire sur E est application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ possédant les propriétés suivantes :

pour tout x, y, z dans E et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$1. \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle .$$

$$2. \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle .$$

$$3. \langle x, x \rangle \geq 0 .$$

$$4. \langle x, x \rangle = 0 \text{ implique } x = 0 .$$

Espace de Hilbert On dit que E est un espace de Hilbert si E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associé à ce produit scalaire.

Exemple 1.3. l'espace $(l^2, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert

Espace des fonctions continues Soit Ω un intervalle fermé de \mathbb{R} , on note par $C(\Omega, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions f continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{\Omega} |f(x)| .$$

Espace des fonctions intégrables Soit $\Omega = [a, b] (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de \mathbb{R} et $1 \leq p \leq +\infty$:

1) Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \int_{\Omega} |f(t)|^p dt < \infty\} .$$

On muni cet espace vectoriel de la norme

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} (|f(t)|^p dt) \right]^{\frac{1}{p}} ,$$

qui le rend complet.

2) Pour $p = +\infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \exists L > 0 \text{ tel que } |f|(t) \leq L \text{ p.p sur } \Omega\} .$$

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \exists L > 0 \text{ tel que } |f(t)| \leq L \text{ p.p sur } \Omega\}$. C'est un espace vectoriel complet muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf\{L \geq 0, |f(t)| \leq L \text{ p.p sur } \Omega\} .$$

Remarque 1.1.

L'espace $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ muni $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach, pour tout $p \in [1, \infty[$.

1.2 La compacité dans les espaces fonctionnels

Définition 1.3. Soit Ω un ensemble d'un espace normé E , on dit que Ω est un ensemble compact, si de tout recouvrement de Ω par des ouverts de Ω , On peut extraire un sous recouvrement fini, i.e.,

$$\forall V_j, j \in J \text{ "ouvert", telle que } \Omega \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(n)}, j(n) = 1.2 \dots N$$

tel que :

$$\Omega \subset \bigcup_{n=1}^N V_{j(n)},$$

où V_j est un recouvrement.

Définition 1.4. Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Théorème 1.1. (voir [9])

Toute ensemble bornée et de dimension finie d'un espace normé est relativement compact.

Définition 1.5. on dit que f est équicontinue on point $x_0 \in \Omega$, si est seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in C(\Omega, \mathbb{R}), \forall x \in \Omega, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.2. (d'Arzela Ascoli) (voir [9])

On dit que l'ensemble $G \subset C(\Omega, \mathbb{R})$ est relativement compact si G est borné et équicontinu, c'est-à-dire, vérifiant les conditions suivantes :

- i) S'il existe un constant $L > 0$ tel que : $|f(x)| \leq L$ pour tout $x \in \Omega$ et $f \in G$,
- ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

pour tout $x, y \in \Omega$ et pour tout $f \in G$.

Corollaire 1.3. Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de \mathbb{R} , chaque sous ensemble borné de l'espace $(C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est relativement compact dans $(C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1.3 Opérateurs compacts

Définition 1.6. Soit E, F deux espaces normés et $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. On dit que T est un opérateur compact si $T(u)$ est relativement compact dans F .

Théorème 1.4.

Un opérateur compact est un opérateur borné, mais la réciproque est fausse.

Démonstration.

On pose $B(0, 1) = \{u \in E, \|u\| \leq 1\}$, alors $T(B(0, 1))$ est relativement compact, d'où $\|Tu\| \leq L, \forall x \in B(0, 1)$, donc T est borné.

La réciproque :

L'opérateur identique $\mathcal{I} : E \rightarrow E$ est borné, mais il n'est pas compact car, $\mathcal{I}(B(0, 1)) = B(0, 1)$ n'est pas relativement compact sauf si E est de dimension finie. \square

1.4 Opérateurs intégraux

Maintenant nous allons définir une classe importante d'opérateurs définis à l'aide d'intégral dites "opérateurs intégraux" dont le domaine d'intégration est un domaine Ω mesurable dans \mathbb{R} .

Définition 1.7. Soit $\Omega \in \mathbb{R}$ un ensemble compact, K une fonction continue définie sur $\Omega \times \Omega$ dans \mathbb{R} , T un opérateur linéaire définie sur $C(\Omega, \mathbb{R})$ tel que :

$$T(u(x)) = \int_{\Omega} k(x, t)u(t)dt, \quad x \in \Omega,$$

cette forme est une forme générale d'un opérateur intégral linéaire T et dit aussi opérateur à noyau ou $K(x, t)$ est le noyau d'un opérateur intégral, la norme de cette opérateur est définie par :

$$\|T\| = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |k(x, t)| dt, \quad x \in \Omega.$$

Théorème 1.5.

Soit $T : C(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow C(\Omega, \mathbb{R})$ un opérateur intégral avec un noyau continu alors T est compact.

Théorème 1.6.

Soit

$$T(u(x)) = \int_{\Omega} k(x, t)u(t)dt, \quad x \in \Omega,$$

si $K(x, t) \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ alors T est un opérateur compact continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Quelques exemples Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle borné et fermé de \mathbb{R} .

- l'opérateur intégral de Fredholm tel que la région d'intégration est finie est :

$$T(u(x)) = Id - \lambda \int_a^b k(x, t, u(t))dt.$$

- l'opérateur intégral de Volterra est :

$$T(u(x)) = Id - \lambda \int_a^x k(x, t, u(t))dt.$$

- l'opérateur intégral de Wiener-Hopf est :

$$Id - \lambda \int_a^{\infty} k(x, t, u(t))dt.$$

- l'opérateur intégral d'Abel est :

$$T(u(x)) = Id - \lambda \int_a^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt.$$

Quelques types des opérateurs non-linéaires (voir [10])

Opérateur de superposition de Nemystki Soit $\Omega \in \mathbb{R}$ un ensemble ouvert et $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée, l'opérateur de Nemystki Nf associe à chaque fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $Nf(u) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$Nf(u)(x) = f(x, u(x)), \quad x \in \Omega.$$

Opérateur intégrale de Hammerstein Soit $\Omega \in \mathbb{R}$ un ensemble ouvert et $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée, l'opérateur intégral de Hammerstein est donné par :

$$T(u(x)) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y, u(y))dt, \quad x \in \Omega,$$

cet opérateur apparaît comme la composition de l'opérateur intégral linéaire de Fredholm T du noyau k avec l'opérateur de Nemystki Nf associé à f , c'est-à-dire :

$$T(f) = AN(f).$$

Opérateur intégral d'Uryson Soit $\Omega \in \mathbb{R}$ un ensemble ouvert et $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée, l'opérateur intégral d'Uryson est donné par :

$$T(u(x)) = \int_{\Omega} K(x, t, u(t))dt, \quad x \in \Omega.$$

1.5 Classification des équations intégrales

Dans cette partie, on va définir les équations intégrales et les classifier, puis distinguer ceux qui sont linéaires et qui sont non-linéaires.

Définition 1.8. La forme générale d'une équation intégrale linéaire est donnée par :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int k(x, t)u(t)dt, \quad (1.1)$$

ou $\alpha(x)$, $f(x)$ et $k(x, t)$ sont des fonctions données.

- $u(x)$ est la fonction qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégrale est l'inconnu à déterminer.
- λ : est un paramètre réel ou complexe tel que : $\lambda \neq 0$.
- la fonction $k(x, t)$ est appelée noyau de l'équation intégrale.

Les types des équations intégrales linéaires

Équation intégrale de Fredholm

Définition 1.9. Toute équation intégrale sous la forme 1.1 avec les bornes d'intégration sont fixées s'appelle : équation intégrale de Fredholm s'écrit sous la forme :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt, \quad (1.2)$$

i) Si $\alpha(x) = 0$ l'équation (1.1) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = 0,$$

et elle est dite de première espèce.

ii) Si $\alpha(x) = 1$ l'équation (1.1) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = u(x),$$

et elle est dite de deuxième espèce.

iii) Si $\alpha(x)$ est continue et s'annule en certains points, mais pas en tous les points de $[a, b]$, l'équation (1.1) s'appelle de troisième espèce.

Remarque 1.2.

- Si $f(x) = 0$ alors

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt,$$

l'équation (1.1) est dite équation homogène.

- Si $f(x) \neq 0$ donc l'équation (1.1) est dite équation non homogène.

Exemple 1.4.

- L'équation

$$u(x) = x^2 + \cos x - 1 + \int_{-1}^1 (x - t)u(t)dt,$$

est de deuxième espèce.

- L'équation

$$x + 1 + \lambda \int_{-1}^1 ((x^2 - t)u(t))dt = 0,$$

est de première espèce.

- L'équation

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^1 ((x^2 - t)u(t))dt,$$

est homogène.

Équation intégrale de Volterra

Définition 1.10. Les équations intégrales de Volterra de première espèce, de seconde espèce ou homogène sont définies de la même manière précédente sauf que la borne supérieur d'intégration est un variable " $b = x$ ". donc ce type des equations écrit sous la forme :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt. \quad (1.3)$$

Remarque 1.3.

- L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation de Fredholm. Il suffit que le noyau K vérifier la condition $k(x, t) = 0$ pour $x < t$.
- Les équations intégrales non-linéaires sont définies de la même manière précédente sauf que la fonction inconnue reste dans le noyau.

- Nous pouvons donc définir l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm comme suit :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, u(t))dt, \quad (1.4)$$

mais si $k(x, t, u(t)) = k(x, t)f(t, u(t))$ alors 1.4 est dite l'équation d'Hammerstein. Et de la même manière, on définit l'équation intégrale non-linéaire de Volterra comme suit :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t))dt. \quad (1.5)$$

1.6 Théorème du point fixe de Banach

Cette partie est consacrée à établir certains résultats d'existence et d'unicité pour la résolution d'une équation de la forme :

$$u = f + Tu,$$

ou T est un opérateur défini sur un espace de Banach X .

Ces résultats sont basées sur le théorème du point fixe de Banach.

Définition 1.11. Soit X un espace de Banach et T est un opérateur borné, on dit que T est un opérateur contractant s'il existe une constante positive $0 < L < 1$, tel que :

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq L \|u_1 - u_2\|, \quad \forall u_1, u_2 \in X.$$

Théorème 1.7. (Banach 1992)

Soit T un opérateur contractant dans un espace de Banach X , alors T admet une solution unique u dans X , cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Démonstration.

En fixant un élément arbitraire $u \in X$ et considère la suite $T_n(u)$, $n = 1, \dots, \infty$, soit

$$u_n = T^n(u), \quad n = 1, 2, \dots$$

. On note :

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\| &\leq \|u_n - u_{n-1}\| + \dots + \|u_{m+1} - u_m\| \\ &= \|T(u_{n-1}) - T(u_{n-2})\| + \dots + \|T(u_m) - T(u_{m-1})\| \\ &\leq L \|u_{n-1} - u_{n-2}\| + \dots + L \|u_m - u_{m-1}\| \\ &\leq (L^{n-1} + L^{n-2} + \dots + L^{m-1}) \|u_1 - u\| \\ &\leq \frac{L^{m-1}}{1-L} \|u_1 - u\|, \end{aligned}$$

supposons que $n > m \geq 1$, cela donne $\|u_n - u_m\| \rightarrow 0$, si n, m tend vers ∞ donc la suite (u_n) est une suite de Cauchy, et comme X est un espace de Banach alors u_n est convergente

$$u_n \rightarrow u_0 \in X,$$

si n tend vers ∞ , u_0 est un point fixe de T par :

$$\begin{aligned} \|T(u_0) - u_0\| &\leq \|T(u_0) - T(u_n)\| + \cdots + \|u_{n+1} - U_0\| \\ &\leq L \|u_0 - u_n\| + \cdots + \|u_{n+1} - u_0\|. \end{aligned}$$

Cette dernière est convergente si n tend vers ∞ donc

$$T(u_0) = u_0.$$

Pour l'unicité :

Supposons que u_0, v_0 deux points fixes de T , tel que $u_0 \neq v_0$.

$$\begin{aligned} \|u_0 - v_0\| &= \|T(u_0) - T(v_0)\| \\ &\leq L \|u_0 - v_0\| \\ &< \|u_0 - v_0\|. \end{aligned}$$

Donc

$$u_0 = v_0.$$

□

1.6.1 Existence et unicité des solutions pour les équations intégrales non-linéaires

Application du théorème du point fixe de Banach sur l'équation intégrale non-linéaire de Volterra

Théorème 1.8.

Soit $K(x, t, u)$ une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur le carré $a \leq x, t \leq b$ et satisfait la condition de Lipschitz par rapport à u , i.e.;

$$\|K(x, t, u_1) - K(x, t, u_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\|.$$

Alors pour tout $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ l'équation intégrale non-linéaire de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, u(t)) dt, \quad a \leq x \leq b,$$

admet une solution unique continue pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

On considère l'espace de Banach $X = C(\Omega, \|\cdot\|)$ des fonctions continues de Ω dans \mathbb{R} muni de la norme de convergence uniforme

$$\|u\| = \max_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

On définit sur l'espace X l'opérateur $T : X \rightarrow X$ par :

$$T(u(x)) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t)) dt, \quad x \in \Omega, \quad (1.6)$$

il est clair que Tu est continu, donc l'équation intégrale (1.6) est équivalente au problème de point fixe

$$Tu = u,$$

où T est défini par (1.6), donc, a fini de prouver que l'équation (1.6) admet une solution unique, il faut montrer que l'opérateur T admet un point fixe unique, pour cela, il suffit de montrer qu'il existe $n_0 \geq 1$. Tel que T^{n_0} est un opérateur contractant pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient u_1, u_2 deux éléments de X et $x \in \Omega$, nous allons montrer que pour tout $n \geq 1$

$$\|T^n u_1 - T^n u_2\| \leq \frac{\lambda^n L^n}{n!} \|u_1 - u_2\|.$$

En effet, pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} |T(u_1(x)) - T(u_2(x))| &= \left| \lambda \int_a^x [K(x, t, u_1(t)) - K(x, t, u_2(t))] dt \right| \\ &\leq |\lambda| \int_a^x |u_1(t) - u_2(t)| dt \\ &\leq |\lambda| L \|u_1 - u_2\| (x - a) \\ &\leq |\lambda| L(b - a) \|u_1 - u_2\| \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq |\lambda| L(b - a) \|u_1 - u_2\|.$$

Supposons que cette propriété est vraie pour $n = m$, et montrons qu'elle est valable pour $n = m + 1$.

$$\begin{aligned} |T^{m+1}(u_1(x)) - T^{m+1}(u_2(x))| &= |T(T^m(u_1(x))) - T(T^m(u_2(x)))| \\ &= \left| \lambda \int_a^x [K(x, t, T^m(u_1(x))) - K(x, t, T^m(u_2(x)))] dt \right| \\ &\leq |\lambda| \int_a^x L \frac{|\lambda|^m L^m (b - a)^m}{m!} \|u_1 - u_2\| dt \\ &\leq \frac{|\lambda|^{m+1} L^{m+1} (b - a)^{m+1}}{(m + 1)!} \|u_1 - u_2\|, \end{aligned}$$

d'où

$$\|T^{m+1}(u_1(x)) - T^{m+1}(u_2(x))\| \leq \frac{|\lambda|^{m+1} L^{m+1} (b - a)^{m+1}}{(m + 1)!} \|u_1 - u_2\|,$$

comme la suite $\frac{|\lambda|^m L^m (b - a)^m}{m!}$ est convergente vers 0 il existe n_0 tel que

$$\frac{|\lambda|^{n_0} L^{n_0} (b - a)^{n_0}}{n_0!} < 1,$$

ce qui montre que T^{n_0} est un opérateur contractant. \square

Application du théorème du point fixe de Banach sur l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm

Théorème 1.9.

Soit $K(x, t, u)$ une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur le carré $a \leq x, t \leq b$ et satisfait la condition de Lipschitz par rapport à u , i.e ;

$$\|K(x, t, u_1) - K(x, t, u_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\|.$$

Alors pour tout $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t, u(t)) dt, \quad x \in \Omega,$$

admet une solution unique continue pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

On considère l'espace de Banach $X = C(\Omega, \|\cdot\|)$ des fonctions continues de Ω dans \mathbb{R} muni de la norme de convergence uniforme

$$\|u\| = \max_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

□

On définit sur l'espace X l'opérateur $T : X \rightarrow X$ défini par :

$$T(u(x)) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t, u(t)) dt, \quad x \in \Omega, \quad (1.7)$$

il est clair que Tu est continu, donc l'équation intégrale (1.6) est équivalente au problème de point fixe

$$Tu = u.$$

où T est défini par (1.7), a fin de prouver que l'équation (1.7) admet une solution unique, il faut montrer que l'équation (1.7) admet un point fixe unique.

Résolution des équations intégrales non-linéaires

Ce chapitre est consacré à la résolution des équations intégrales non-linéaires par des méthodes classiques telles que la méthode de décomposition d'Adomian, la méthode des approximations successives et par une méthode récente appelée perturbation homotopique, ces méthodes ont été utilisées pour obtenir des solutions formelles ou bien la solution exacte, il fournit également des méthodes numériques qui revêtent une importance critique dans la recherche des solutions approchées aux équations intégrales non-linéaires de deuxième espèce qui sont la méthode de projection et la méthode de collocation qui est basée sur les méthodes de quadratures.

2.1 Méthode de décomposition d'Adomian (M.D.A)

Dans la seconde partie du XXe siècle, George Adomian un mathématicien américain, a proposé une nouvelle méthode [Adomian, 1981] pour résoudre les équations différentielles et aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires, les problèmes algébriques, intégrales, intégrodifférentielles, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur, la technique utilise une décomposition de l'opérateur non-linéaire en une série de fonction, chaque terme de cette série est un polynôme généralisé appelé polynôme d'Adomian.

La méthode décompositionnelle consiste à calculer les solutions des équations sous la forme d'une série infinie convergente vers la solution du problème :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (2.1)$$

dans cette partie, nous utilisons l'algorithme d'Adomian pour trouver des polynômes d'Adomian. La représentation des termes non-linéaires par des polynômes d'Adomian pour résoudre les équations intégrales non-linéaires.

Calcul des polynômes d'Adomian

La méthode de décomposition d' Adomian suppose que la fonction linéaire inconnue peut être représentée par une série infinie (2.1), où les composantes $u_n(x)$, $n \geq 0$ sont déterminées de manière récursive qui implique généralement des intégrales simples qui peuvent être facilement

évalués.

Pour établir cette relation, nous substituons (2.1) dans l'équation intégrale non-linéaire :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t)F(u(t))dt, \quad (2.2)$$

tel que : $u(x)$ est le terme linéaire représenté par une somme infinie de composants. Les termes non-linéaires sont $u^2(t), u^3(t), e^{(u(x))}, \sin(u(x)), \dots$, qui sont substitués dans l'équation (2.2) alors on trouve une représentation spéciale, s'appelle les polynômes d'Adomian A_n , $n \geq 0$.

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [F(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i)]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Où les polynômes d'Adomian A_n peuvent être évalués pour toutes les fonctions non-linéaires. La formule générale (2.3) peut être facilement utilisée comme suit : on a la fonction $F(u(x))$ est non-linéaire, alors d'après (2.3) les polynômes d'Adomian sont donnés par :

$$\begin{cases} A_0 = F(u_0), \\ A_1 = u_1 F'(u_0), \\ A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0), \\ A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_0^3 F'''(u_0), \\ A_4 = u_4 F'(u_0) + (\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3) F''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 F'''(u_0) \\ \quad + \frac{1}{4!} u_1^4 F''''(u_0). \end{cases}$$

Tout d'abord, A_0 dépend que de u_0 , A_1 dépend que de u_0 et u_1, \dots .

Deuxièmement, nous substituons les formules dernières dans (2.3) on obtient :

$$\begin{cases} F(u) = A_0 + A_1 + A_2 + \dots \\ F(u) = F(u_0) + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)F'(u_0) + \frac{1}{2!}(u_1^2 + 2u_1 u_2 + u_2^2 + \dots)F''(u_0) \\ \quad + \frac{1}{3!}(u_1^3 + 3u_1^2 u_2 + 6u_1 u_2 u_3 + \dots)F'''(u_0) + \dots \\ F(u) = F(u_0) + (u - u_0)F'(u_0) + \frac{1}{2!}(u - u_0)^2 F''(u_0) + \dots \end{cases}$$

Cette dernière confirme un fait que la série dans les polynômes A_n est une série de Taylor sur une fonction u_0 et non sur un point comme dans la série de Taylor standard. Dans ce qui suit, nous allons calculer des polynômes d'Adomian pour certains termes non-linéaires qui peuvent apparaître dans les équations intégrales non-linéaires.

1^{ère} cas

Les quatre premiers polynômes d'Adomian pour $F(u) = u^2$ sont donnés par

$$\begin{cases} A_0 = F(u_0) = u_0^2, \\ A_1 = u_1 F'(u_0) = 2u_0 u_1, \\ A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) = u_0 u_2 + u_1^2, \\ A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_0^3 F'''(u_0) \\ \quad = 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2, \end{cases}$$

2^{ème} cas

Les quatre premiers polynômes d'Adomian pour $F(u) = \sin(u)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} A_0 = F(u_0) = \sin u_0, \\ A_1 = u_1 F'(u_0) = u_1 \cos u_0, \\ A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) \\ \quad = u_2 \cos u_0 - \frac{1}{2!} u_1^2 \sin u_0, \\ A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_0^3 F'''(u_0) \\ \quad = u_3 \cos u_0 - u_1 u_2 \sin u_0 - \frac{1}{3!} u_1^3 \cos u_0, \end{cases}$$

3^{ème} cas

Les quatre premiers polynômes d'Adomian pour $F(u) = e^u$ sont donnés par :

$$\begin{cases} A_0 = F(u_0) = e^{u_0}, \\ A_1 = u_1 F'(u_0) = u_1 e^{u_0}, \\ A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) \\ \quad = (u_2 - \frac{1}{2!} u_1^2) e^{u_0}, \\ A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_0^3 F'''(u_0) \\ \quad = (u_3 - u_1 u_2 - \frac{1}{3!} u_1^3) e^{u_0}, \end{cases}$$

Principe de la méthode On utilise cette méthode sur l'équation intégrale de Volterra non-linéaire :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t) F(u(t)) dt, \quad (2.4)$$

on a

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

En substituant cette dernière dans l'équation (2.4) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = x + \int_0^x K(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) dt,$$

telles que A_n sont les polynômes d'Adomian pour $F(u(x))$.

Alors on a :

$$\begin{cases} u_0(x) = f(x), \\ u_{k+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x, t) A_k(t) dt, \quad k > 0. \end{cases}$$

Donc la solution est donnée par :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x).$$

La convergence de la méthode

Afin de généraliser et faciliter l'étude sur la convergence de cette méthode, on va utiliser la notation opérationnel pour les équations intégrales à étudier, il suffit d'écrire l'équation sous la forme :

$$u - Au = f, \quad (2.5)$$

où A est un opérateur intégral et f une fonction inconnue comme indiqué précédemment dans le principe de la méthode et après la substitution de (2.1) et (2.3) dans (2.5) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f + \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (2.6)$$

On a besoin de rappeler quelques notions élémentaires sur la convergence des séries.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série numérique de terme u_n , on dit que la série est convergente si la suite des sommes partielles S_n est convergente. Ce que veut dire :

$$\begin{cases} S_1 = u_1, \\ S_2 = u_1 + u_2, \\ \vdots \\ S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S,$$

donc, la suite des sommes partielles (S_n) est convergente et puisque $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ d'où u_n est convergente.

Théorème 2.1. *Si la série des opérateurs $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ est converge alors la série des solutions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est converge aussi. i.e :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n < +\infty \text{ alors } \sum_{n=0}^{\infty} u_n < +\infty.$$

On note que la méthode d'Adomian appliquée à (2.5) se ramène à la recherche

$$S_n = \sum_{i=0}^n S_i,$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ c'est-à-dire} \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_1 = S_0 + S_1 = 0 + u_1, \\ S_2 = S_0 + S_1 + S_2 = 0 + u_1 + u_2, \\ \vdots \\ S_{n+1} = S_0 + S_1 + \cdots + S_n = 0 + u_1 + \cdots + u_n. \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente d'après le théorème précédent on a alors le résultat suivante.

Corollaire 2.2. *Si A est une contraction alors les séries $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sont convergentes, de plus*

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est satisfait l'équation

$$u - Tu = f$$

c'est-à-dire : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ solution de cette équation.

Satisfait la relation suivante :

$$\begin{cases} S_0 = 0 & u_0 = f, \\ S_{n+1} = A(u_0 + S_n), & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

en conclure le résultat de convergence suivante.

Théorème 2.3. *Si l'opérateur A est une contraction alors $(S_n)_{n \geq 0}$ satisfaisant la relation de récurrence*

$$S_{n+1} = A(u_0 + S_n),$$

avec $S_0 = 0$, $n \geq 0$ converge vers S où $S = A(u_0 + S)$.

En effet :

A partir la relation (2.1) et de $\delta < 1$, on a :

$$\begin{aligned} \|S_{n+1} - S\| &= \|A(u_0 + S_n) - A(u_0 + S)\| \\ &\leq \|A\| \|S_n - S\| \\ &\leq \delta \|S_n - S\| \\ &\leq \delta^n \|S_1 - S\| \end{aligned}$$

d'où :

$$S_n \rightarrow S.$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n \geq 1} u_n,$$

et comme $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente d'après le théorème précédent, on a alors le résultat suivant.

Corollaire 2.4. *Si T est une contraction alors les séries $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sont convergentes, de plus*

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est satisfait l'équation

$$u - Au = f$$

c'est-à-dire : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ solution de cette équation.

2.2 La méthode des approximations successives (M.A.S)

C'est une méthode itératives fondée sur le principe du point fixe, cette méthode est parfois appelée méthode d'itération de Picard, la méthode des approximations successives résoudre tout problème en trouvant des approximations successives de la solution en commençant par une estimation initiale égale à $0, 1, x$ où $f(x)$.

Cette dernière est utilisée pour déterminer les autres termes a partir d'une relation de récurrence, dans tous les cas cette méthode peut être appliquée avec succès pour résoudre les équations intégrales non-linéaires.

Considérons l'équation intégrale sous la forme :

$$u(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, t, u(t))dt, \quad (2.7)$$

pour résoudre cette équation en utilisant la relation récurrente suivante :

$$\begin{cases} u_0(x) = 0, \text{ où } 1 \text{ où } x \text{ où } f(x), \\ u_{n+1}(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, t, u_n(t))dt, \end{cases}$$

c'est-à-dire en substituant $u_0(x)$ dans le côté droit de l'équation itérative, on obtient :

$$\begin{cases} u_1(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, t, u_0(t))dt, \\ u_2(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, t, u_1(t))dt, \\ \vdots \\ u_n(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, t, u_{n-1}(t))dt. \end{cases}$$

et par conséquent, on trouve la solution $u(x)$ par passage à la limite, $n \rightarrow \infty$, c.à.d. :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}(x).$$

La convergence de la méthode

Théorème 2.5. *Supposons que $K(x, t, u(t))$ est continu pour $a \leq x \leq b$ et soit $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$. En outre, supposons que :*

$$|K(x, t, u_1) - K(x, t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|, \quad a \leq x \leq t \leq b, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour une certaines constante L , alors l'équation intégrale (2.1) admet une solution unique $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$.

Par ailleurs, la méthode itérative précédente converge pour toute estimation initiale $u_0 \in C(\Omega, \mathbb{R})$.

Démonstration (voir [3])

2.3 Méthode de perturbation homotopique (M.P.H)

La méthode de perturbation homotopique a été établie par Ji-Haun-He en 1999.

Cette méthode a été utilisée par beaucoup de chercheurs et appliquée pour résoudre plusieurs équations différentielles ou équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires.

La solution numérique de la méthode MPH est considérée une série de fonction qui converge rapidement vers la solution exacte. Cette méthode permet de transformer la résolution d'un problème difficile en un problème simple à résoudre.

La méthode MPH est basée sur l'hypothèse de l'existence d'un petit paramètre $p \in [0, 1]$, affublé à l'équation étudiée. (voir [?])

Description de la méthode pour l'équation intégrale non-linéaire de deuxième espèce

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, considérons l'équation intégrale non-linéaire de Volterra de deuxième espèce :

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)[y(t)]^r dt, \quad a \leq x, t \leq b, \quad (2.8)$$

et aussi le type d'équation intégrale non-linéaire de Fredholm suivante :

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)[y(t)]^r dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (2.9)$$

Pour expliquer (M.P.H), nous reconstituons (2.9) comme :

$$L(u) = u(x) - f(x) - \int_a^x K(x, t)[u(t)]^r dt = 0, \quad (2.10)$$

avec la solution $u(x) = y(x)$.

On définit l'homotopie $H(u, p)$ tel que :

$$H(u, 0) = F(u), \quad H(u, 1) = L(u).$$

où $F(u)$ est un opérateur fonctionnel avec une solution disons u_0 et on définit un homotopie convexe $H(u, p)$ par :

$$H(u, p) = (1 - p)F(u) + pL(u) = 0, \quad (2.11)$$

qui peut être obtenu facilement et tracer en continu une courbe implicitement définie à partir d'un point de départ $H(u_0, 0)$ jusqu'à une fonction solution $H(y, 0)$.

Le paramètre de plongement p augmente de façon monotone de zéro à un lorsque le problème trivial $F(u) = 0$ est continuellement déformé au problème d'origine $L(u) = 0$ avec $p \in [0, 1]$.

La solution de l'équation (2.8) où (2.9) par la méthode de perturbation d'homotopie est donnée par :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n, \quad (2.12)$$

Par conséquence, la série (2.12) est convergente dans la plupart des cas vers la solution exacte s'il existe, c.à.d. :

$$y(x) = \lim_{p \rightarrow 1} u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

et aussi le taux de convergence dépend de $L(u)$. (voir [?])

On a :

$$F(u) = u(x) - f(x), \quad (2.13)$$

on substitution les équations (2.12), (2.10) et (2.13) dans l'équation (2.11) on obtient : la relation récurrente suivante :

$$\begin{cases} p^0 : u_0(x) = f(x), \\ p^{n+1} : u_{n+1}(x) = \int_a^b K(x, t) H_n(t) dt, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Où les H_n sont les polynômes de He qui peuvent être calculés en utilisant la formule :

$$H_n(u_0, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left(\left(\sum_{k=0}^n p^k u_k \right)^r \right)_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Remarque 2.1. La formule (2.3) est la formule standard de la méthode de décomposition d'Adomian, le théorème suivant est la preuve de cette remarque.

Théorème 2.6. *La méthode de décomposition d'Adomian est la méthode de perturbation homotopique avec un homotopie convexe donné par :*

$$H(u, p) = u(x) - f(x) - p \int_a^b K(x, t, u_n(t)) dt = 0.$$

Description de la méthode pour l'équation intégrale non-linéaire de première espèce

Si on considère l'équation intégrale de Fredholm non-linéaire de première espèce sous la forme :

$$f(x) = \int_a^b k(x, t, y(t)) dt,$$

Si le noyau $k(x, t)$ est séparable, et

$$\left| 1 - \int_a^b k(x, t) dt \right| < 1.$$

Alors, on définit l'opérateur :

$$L(u) = f(x) - \int_a^b k(x, t, u(t)) dt = 0.$$

Alors, on construit une homotopie convexe sous la forme :

$$H(u, p) = (1 - p)F(u)(x) + pL(u)(x) = 0,$$

tel que p est un paramètre $p \in [0, 1]$, la méthode de perturbation d'homotopie applique l'expression suivante :

$$u = \sum_0^{\infty} p^n u_n,$$

par conséquence :

$$y(x) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_0^{\infty} p^n u_n(x).$$

La dernière série converge vers la solution exacte.

$$\begin{cases} u_0(x) &= 0, \\ u_1(x) &= f(x) \\ u_{n+1}(x) &= u_n(x) - \int_a^b k(x, t, u_n(t)) dt, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

2.4 Méthode de projection

Définition 2.1. Soit E un espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E , on dit que E est un somme direct de E_1 et E_2 et on écrit $E = E_1 \oplus E_2$ si pour tout $v \in E$ peut être décomposé sous manière unique

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in E_1, \quad v_2 \in E_2.$$

En outre, si E est muni d'un produit scalaire et que :

$$\forall v_1 \in E_1, \forall v_2 \in E_2, \langle v_1, v_2 \rangle = 0,$$

alors E est appelé la somme direct orthogonal de E_1 et E_2 .

Proposition 2.7. Soit E un espace vectoriel, puis $E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement s'il existe un opérateur linéaire $P : E \rightarrow E$ tel que

$$P^2 = P,$$

avec $v_1 = P(v)$ et $v_2 = (\mathcal{I} - P)(v)$ et aussi : $E_1 = P(E)$ et $E_2 = (\mathcal{I} - P)(E)$.

Définition 2.2. Soit X un espace de Banach, un opérateur $P \in \mathcal{L}(X)$ tel que $P^2 = P$ est appelé un opérateur de projection, si X est un espace de Hilbert alors l'opérateur P est appelé un opérateur de projection orthogonal. Il est facile de remarquer que l'opérateur de projection P est orthogonal si et seulement si :

$$\langle P(v), (\mathcal{I} - P)(u) \rangle = 0, \quad \forall u, v \in X.$$

Principe de la méthode

Considérons l'équation intégrale écrite en notation d'opérateur suivante :

$$(\mathcal{I} - T)u = f, \tag{2.14}$$

et l'opérateur T est supposé être compact sur un espace de Banach X dans X avec X est un espace de Banach, $C(\Omega, \mathbb{R})$ où $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ définit par :

$$Tu = \int_{\Omega} K(x, t, u(t)) dt. \tag{2.15}$$

On choisit une suite de sous-espace de dimension finie $u_n \subset X$, $n \geq 1$, avec u_n ayant la dimension d , et ont une base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$.

Soit v_n une autre suite de sous-espace de dimension finie de X , et soit $P_n : X \rightarrow v_n$ une suite d'opérateurs de projection, nous cherchons une fonction u_n pour approcher u par la suite u_n , $n = 1, \dots, \infty$, il suffit de prendre une suite $\{\varphi_j\}$, $j = 1, \dots, d$ comme base de l'espace X_n et écrire u_n sous la forme :

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^d C_j \varphi_j(x). \quad (2.16)$$

En substituant (2.16) dans l'équation (2.14) on obtient :

$$\sum_{j=1}^d C_j \varphi_j(x) - \int_{\Omega} K(x, t, \sum_{j=1}^d C_j \varphi_j(t)) dt = f(x),$$

et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu :

$$R_n(u_n) = (\mathcal{I} - T)(u_n) - f.$$

On choisissons u_n et déterminer les coefficients C_j de tel sorte que le résidu $R_n(u_n)$ soit petit, c.à.d. :

$$R_n(u_n) \rightarrow 0.$$

Si P_n est la projection orthogonale on a :

$$P_n R_n(u_n) = 0.$$

Cela équivaut :

$$P_n u_n - P_n T u_n = P_n f.$$

Afin que $P_n u_n = u_n$ donc

$$u_n - P_n T u_n = P_n f.$$

Le but est que la fonction qui en résulte $u_n(x)$ sera une bonne approximation de la solution $u(x)$.
convergence de la méthode (voir [5])

Lemme 2.8. Soit X un espace de Banach, et soit $\{P_n\}$ une famille de projection bornée en X avec

$$P_n u \rightarrow u \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, u \in X.$$

Si

$$T : X \rightarrow X$$

un opérateur compacte alors :

$$\|T(\mathcal{I} - P_n)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Théorème 2.9. Supposons que $T : X \rightarrow X$ borné, avec X un espace de Banach, et supposons que $\lambda - T : X \rightarrow X$ tel que :

$$\|T(\mathcal{I} - P_n)\| \rightarrow 0.$$

Alors pour tout n grand et $n \geq N$, l'opérateur $(\lambda - P_n T)^{-1}$ est borné.

2.5 Méthode de collocation

Application de la méthode de projection

Pour résoudre l'équation intégrale non-linéaire de la forme :

$$u(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, t, u(t))dt,$$

on va choisir des points distincts $x_1, \dots, x_N \in \Omega$ tel que

$$R_n(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, N.$$

$$R_n(x_i) = u_n(x_i) - \int_{\Omega} K(x_i, t, u_n(t))dt - f(x_i), \quad i = 0, \dots, N, \quad (2.17)$$

en substituant l'équation (2.16) dans l'équation (2.17) on obtient :

$$\sum_{j=0}^N C_j \varphi_j(x_i) - \int_{\Omega} K(x_i, t, \sum_{j=0}^N C_j \varphi_j(t))dt = f(x_i), \quad i = 0, \dots, N. \quad (2.18)$$

Soit $P_n : X \rightarrow v_n$ avec $v = C(\Omega, \mathbb{R})$ et soit $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$.

On définit $P_n u$ comme élément de v_n , l'interpolation de u aux points de collocation x_1, \dots, x_N .

$$P_n(u(x)) = u_n(x) = \sum_{j=1}^N C_j \varphi_j(x).$$

Donc

$$P_n(u(x_i)) = f(x) + \sum_{j=1}^N C_j \int_{\Omega} K(x_i, t, \sum_{j=0}^N C_j \varphi_j(t))dt, \quad i = 0, \dots, N,$$

d'où

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^N C_j \varphi_j(x).$$

Les coefficients C_j sont déterminés par la résolution du système :

$$\sum_{j=1}^N C_j \varphi_j(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

ce système admet une solution unique si

$$\det(\varphi_j(x_i)) \neq 0.$$

2.6 Méthode de quadrature

Chacune des méthodes numériques précédemment nécessite l'évaluation des intégrales définies afin de produire une fonction qui se rapproche de la solution d'une équation intégrale de Fredholm

sur l'intervalle $[a, b]$, le but de toute méthode de quadrature numérique est d'approximer l'intégrale définie d'une fonction continue $f(x)$ en un intervalle fermé $[a, b]$, avec une somme finie donc

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \varepsilon,$$

chaque méthode de quadrature nécessite un ensemble prédéterminé x_1, \dots, x_n de nœuds avec $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq b$, et un ensemble de poids positifs w_1, w_2, \dots, w_n , le terme d'erreur ε dépend de n, a, b , et les valeurs d'une dérivée supérieure de f a un point intérieur de l'intervalle, le choix de la méthode peut dépendre de la forme de f et l'intervalle d'intégration.

Il existe de nombreuses formules de quadratures de ce type, elle appartient à deux choses principales, les formules de quadrature de Newton nécessitant des nœuds, de sorte que :

$$\Delta_x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, \dots, n,$$

et un ensemble spécifique de poids qui ne dépendent pas des formules de nœuds de ce type incluent la règle de trapèze, de simpson et de Bode.

D'autre part, les nœuds dans les formules de quadratures gaussiennes sont choisies pour être les zéros d'un polynôme orthogonal de degré n , et les poids sont donnés en fonction de ces polynômes et de leurs dérivés évalués aux nœuds, nous notons à cet égard les formules de quadratures Gaussiennes couramment utilisées qui sont (voir [6]) :

- Gauss-Radau :

En fixant $x_n = b$, donc la quadrature de Gauss-Radau convient aux problèmes avec un point limite.

- Gauss-Lobatto :

Qui est le plus couramment utilisée en l'approximation spectrale.

Maintenant nous considérons l'équation intégrale non-linéaire :

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, u(t))dt, \quad (2.19)$$

où $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$, après avoir choisi une méthode numérique approximative, nous substituons chaque nœud x_i dans l'équation intégrale (3.3), pour obtenir $n + 1$ équations suivantes :

$$u(x_i) = f(x_i) + \int_a^b K(x_i, t, u(t))dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

En substituant les nœuds et les poids positifs indiqués pour la méthode choisie, la valeur de chacune de ces intégrales peut être exprimée sous la forme :

$$\int_a^b K(x_i, t, u(t))dt = \sum_{j=0}^n w_j K(x_i, x_j, u(x_j)) + \varepsilon(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

où $\varepsilon(x_i)$ c'est l'erreur de la méthode de quadrature.

La remplacement de l'intégrale définie par les sommes finies produit les $n + 1$ équations :

$$u(x_i) = f(x_i) + \sum_{j=0}^n w_j K(x_i, x_j, u(x_j)) + \varepsilon(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

après avoir rejeté les termes d'erreurs, nous arrivons au système :

$$y_i = f(x_i) + \sum_{j=0}^n w_j K(x_i, x_j, y_j), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

de $n + 1$ équations et de $n + 1$ inconnues y_i , il était nécessaire de remplacer la valeur exacte $u(x_i)$ par la valeur approximative y_i car les termes d'erreur ont été ignorés, si $\varepsilon(x_i)$ est petite alors y_i est approchée de $u(x_i)$.

L'interpolation de Lagrange

Une fonction d'interpolation continue $y(x)$ peut être construite sur l'intervalle $[a, b]$ qui passe par tout les point de $[a, b]$.

On va définir une fonction d'interpolation continue comme suit :

$$y(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n w_j K(x, x_j, y_j),$$

donc la formule classiques d'interpolation de Lagrange est défini par :

$$y(x) = \sum_{i=1}^n y_i \mathcal{L}_i(x),$$

avec $\{\mathcal{L}_i(x)\}_{i=1}^N$ est la base des polynômes de Lagrange associée à l'ensemble des points $\{x_i\}_{i=1}^N$ est défini par :

$$\mathcal{L}_i(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq N \\ i \neq k}} \frac{(x - x_k)}{x_i - x_k}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Les polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux jouent un rôle fondamentale dans l'analyse des méthodes de projections, il est donc essentiel de comprendre certaines propriétés générales des polynômes orthogonaux.

Une suite des polynômes orthogonaux est une suite $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ des polynômes avec $\deg(P_n) = n$ tel que :

$$\langle P_i, P_j \rangle = 0 \quad \text{si } i \neq j,$$

puisque l'orthogonalité n'est pas modifiée en multipliant une constante non nul, on peut normaliser le polynôme donc les coefficients de x^n .

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}^n x^{n-1} + \dots + a_0^n. \quad (2.20)$$

Les polynômes orthogonaux peut être générés par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} P_0 = 1, \\ P_1 = x - \alpha_1, \\ P_{n+1} = (x - \alpha_{n+1})P_n - B_{n+1}P_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{\int_a^b xwP_n^2 dx}{\int_a^b wP_n^2 dx}, \\ \beta_{n+1} = \frac{\int_a^b xwP_n P_{n-1} dx}{\int_a^b wP_{n-1}^2 dx}. \end{cases}$$

On a plusieurs types des polynômes orthogonaux, notamment : les polynômes de Jacobi, polynôme de Chebychev et de Legendre, ce dernier est beaucoup utilisé dans notre travail.

Les polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre notés par $L_n(x)$ sont orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec $w(x) = 1$, et la normalisation $L_n(1) = 1$, le polynôme de Legendre est satisfait les trois relation de récurrence :

$$\begin{cases} L_0(x) = 1, \\ L_1(x) = x, \\ (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \end{cases} \quad (2.21)$$

et la relation d'orthogonalité est :

$$\int_{-1}^1 L_k(x)L_j(x)dx = \frac{1}{K + \frac{1}{2}}\delta_{kj}. \quad (2.22)$$

Le polynôme de Legendre est défini comme la normalisation de problème Sturm-Liouville singulier

$$((1-x^2)L'_n(x))' + n(n+1)L_n(x) = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Par la formule (3.3) en déduire que :

$$\int_{-1}^1 L'_k(x)L'_j(x)(1-x^2)dx = \frac{k(k+1)}{k\frac{1}{2}}\delta_{kj}. \quad (2.23)$$

Les polynômes $L'_k(x)$ sont orthogonaux entre eux par rapport a la fonction de poids $w(x) = 1-x^2$, autre utile des polynômes de Legendre comprennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^x \ln(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{2n+1}(L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)), \quad n \geq 1, \\ L_n(x) = \frac{1}{2n+1}(L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x)), \\ L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \\ L'_n(\pm 1) = \frac{1}{2}(\pm 1)^{n-1}n(n+1), \\ L'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)L_k(x). \\ L''_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (k + \frac{1}{2})(n(n+1) - k(k+1))L_k(x). \end{array} \right.$$

Pour la série-Legendre les points de quadrature et les poids sont :

- Legendre-Gauss X_j sont les zéros de L_{N+1} est :

$$w_j = \frac{2}{(1-x_j)(L'_{n+1}(x_j))^2}, \quad 0 \leq j \leq N.$$

- Legendre-Gauss-Radau :

$$x_0 = -1, \quad x_n = 1, \quad \{x_j\}_{j=1}^{N-1}$$

sont les zéros de $L'_N(x)$ et $w_j = \frac{2}{N(N+1)} \cdot \frac{1}{[L_N(x_j)]^2}$, $0 \leq j \leq N$.

Applications et exemples numériques

3.1 Application de la méthode de décomposition d'Adomain (M.D.A)

Exemple 3.1. On utilise la méthode de décomposition d'Adomain pour résoudre l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm de deuxième espèce suivante :

$$u(x) = \frac{7}{8}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xt u^2(t) dt,$$

la solution exacte est : $u_e(x) = x$

on a :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

on substituant cette dernière dans l'équation précédente on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \frac{7}{8}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xt \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) dt,$$

telque A_n sont les polynômes d'Adomian pour $u^2(x)$.

Alors on utilise la relation suivante :

$$\begin{cases} u_0(x) = \frac{7}{8}x, \\ u_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xt A_n(t) dt. \end{cases}$$

Ceci donne consécutivement

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \frac{7}{8}x, \\ u_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xtA_0(t)dt = \frac{49}{512}x, \\ u_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xtA_1(t)dt \\ \quad = \frac{1}{2} \int_0^1 xt2u_0(t)u_1(t)dt \\ \quad = \frac{343}{16384}x. \\ u_3(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xtA_2(t)dt \\ \quad = \frac{1}{2} \int_0^1 xt(u_0u_2 + u_1^2)dt \\ \quad = \frac{7203}{1572864}x \\ u_4(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xtA_3(t)dt \\ \quad = \frac{1}{2} \int_0^1 xt2(u_0u_3 + u_1u_2)dt \\ \quad = \frac{151263}{201326592}x \\ u_5(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xtA_4(t)dt \\ \quad = \frac{1}{2} \int_0^1 xt2(u_0u_4 + u_1u_3)dt \\ \quad = \frac{1764735}{6442449504}x \\ \vdots \end{array} \right.$$

La solution est donnée sous forme d'une série :

$$u(x) = \frac{7}{8}x + \frac{49}{512}x + \frac{343}{16384}x + \dots$$

qui converge vers la solution exacte :

$$u_e(x) = x.$$

Comparaison entre les itérés et la solution exacte

Les itérés $u_i(x)$ obtenus par la méthode d'Adomian sont $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ on a

$$\|u_i(x) - u_e(x)\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{|u_i(x) - u_e(x)|\}.$$

TABLE 3.1 – Comparaison entre les itérés et la solution exacte pour l'exemple 3.1

i	$u_i(x)$	$u_e(x)$	$\ u_i(x) - u_e(x)\ _\infty$
0	$\frac{7}{8}x$	x	0.125
1	$\frac{49}{512}x$	x	0.904
2	$\frac{343}{16384}x$	x	0.979
3	$\frac{7203}{1572864}x$	x	0.995
4	$\frac{151263}{201326592}x$	x	0.999
5	$\frac{1764735}{6442449504}x$	x	0.999

3.2 Application de la méthode des approximations successives (M.A.S)

Exemple 3.2. Considérons l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm suivante :

$$u(x) = \cos(x) + 1 - \frac{5\pi^2}{144} - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{36} \int_0^\pi x(u(t) + u^2(t))dt,$$

la solution exacte est :

$$u_e(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}.$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = 0, \\ u_1(x) = \cos(x) + 1 - \frac{\pi}{12} - \frac{5\pi^2}{144} + \frac{1}{36} \int_0^\pi x(u_0(t) + u_0^2(t))dt, \\ \quad = 0,395506 + \cos(x), \\ u_2(x) = 0,471163 + \cos(x), \\ u_3(x) = 0,490522 + \cos(x), \\ u_4(x) = 0,495728 + \cos(x), \\ u_5(x) = 0,497145 + \cos(x), \\ u_6(x) = 0,4975 + \cos(x), \\ \vdots \\ u_{n+1}(x) = \cos(x) + 0,49\dots \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Donc la solution exacte est donnée par :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}.$$

Comparaison entre les itérés et la solution exacte

Les itérés $u_i(x)$ obtenus par la méthode des approximation successives sont $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ on a

$$\|u_i(x) - u_e(x)\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{|u_i(x) - u_e(x)|\}.$$

TABLE 3.2 – Comparaison entre les itérés et la solution exacte pour l'exemple 3.2

i	$u_i(x)$	$u_e(x)$	$\ u_i(x) - u_e(x)\ _\infty$
0	0	$\cos(x) + \frac{1}{2}$	1
1	$0.395 + \cos(x)$	$\cos(x) + \frac{1}{2}$	0.395
2	$0.471 + \cos(x)$	$\cos(x) + \frac{1}{2}$	0.471
3	$0.490 + \cos(x)$	$\cos(x) + \frac{1}{2}$	0.490
4	$0,495728 + \cos(x)$	$\cos(x) + \frac{1}{2}$	0.003
5	$0,497145 + \cos(x)$	$\cos(x) + \frac{1}{2}$	0.003

3.3 Application de la méthode de (M.P.H)

Exemple 3.3. On considère l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm de deuxième espèce suivante :

$$u(x) = \frac{7}{8}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xtu^2(t)dt,$$

Nous utilisons la relation récurrente suivante :

$$\begin{cases} p^0 : & u_0(x) = f(x), \\ p^{n+1} : & u_{n+1}(x) = \int_{\Omega} K(x,t)H_n(t)dt, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Alors on obtient :

$$\begin{cases} u_0(x) = \frac{7}{8}x, \\ u_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xtu_0(t)^2 dt = \frac{49}{512}x, \\ u_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xt(2u_0(x)u_1(x))dt = \frac{1}{2} \int_0^1 xt \frac{7}{8}x \left(\frac{49}{512}x\right) dt, \\ \quad = \frac{343}{16384}x. \\ \vdots \\ u_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xtu_0(t)u_1(t) \cdots u_{n-1}(t)dt. \end{cases}$$

par conséquent, la solution est :

$$\begin{cases} u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ \quad = \frac{7}{8}x + \frac{49}{512}x + \frac{343}{16384}x + \cdots \\ \quad \simeq x. \end{cases} \quad (3.2)$$

Comparaison entre les itérés et la solution exacte

Les itérés $u_i(x)$ obtenus par la méthode d'Adomian sont $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$, on a

$$\|u_i(x) - u_e(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} \{|u_i(x) - u_e(x)|\}.$$

TABLE 3.3 – Comparaison entre les itérés et la solution exacte pour l'exemple 3.3

i	$u_i(x)$	$u_e(x)$	$\ u_i(x) - u_e(x)\ _{\infty}$
0	$\frac{7}{8}x$	x	0.125
1	$\frac{49}{512}x$	x	0.904
2	$\frac{343}{16384}x$	x	0.979
3	$\frac{7203}{1572864}x$	x	0.995
4	$\frac{151263}{201326592}x$	x	0.999
5	$\frac{1764735}{6442449504}x$	x	0.999

Remarque 3.1.

D'après le tableau de la comparaison entre la solution exacte et la solution d'approximation de la méthode de décomposition d'Adomian et de perturbation d'homotopique on remarque que les deux méthodes sont équivalentes.

Exemple 3.4. Soit l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm de première espèce suivante :

$$e^x = \int_a^b e^{(x-2t)} u^2(t) dt.$$

Alors on a :

$$y(x) = u^2(x) \Rightarrow u(x) = \pm \sqrt{y(x)},$$

d'où

$$e^x = \int_0^1 e^{(x-2t)} y(t) dt.$$

Et on a :

$$\left| 1 - \int_0^1 e^{(x-2t)} dt \right| = 0.3678 < 1,$$

On utilise la récurrence suivante :

$$\begin{cases} y_0(x) = 0, \\ y_1(x) = e^x, \\ y_{n+1}(x) = v_n(x) - \int_0^1 e^{(x-2t)} y_n(t) dt, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Par conséquence :

$$\begin{cases} y_2(x) = y_1(x) - \int_0^1 e^{(x-2t)} y_1(t) dt = e^{(x-1)}, \\ y_3(x) = y_2(x) - \int_0^1 e^{(x-2t)} y_2(t) dt = e^{(x-2)}, \\ y_4(x) = y_3(x) - \int_0^1 e^{(x-2t)} y_3(t) dt = e^{(x-3)}, \\ \vdots \\ y_n(x) = y_2(x) - \int_0^1 e^{(x-2t)} y_{n-1}(t) dt = e^{(x-n-1)}. \end{cases}$$

Donc la solution exacte est donnée par :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \frac{e^{(x+1)}}{e-1}.$$

d'où

$$u(x) = \pm \frac{\sqrt{e^{(x+1)}}}{e-1}.$$

Comparaison entre les itérés et la solution exacte

Les itérés $u_i(x)$ obtenus par la méthode d'approximation successive $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$, on a

$$\|u_i(x) - u_e(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} \{|u_i(x) - u_e(x)|\}.$$

TABLE 3.4 – Comparaison entre les itérés et la solution exacte pour l'exemple 3.4

i	$u_i(x)$	$u_e(x)$	$\ u_i(x) - u_e(x)\ _\infty$
0	0	$\frac{\sqrt{e^{(x+1)}}}{e-1}$	1,5819
1	e^x	$\frac{\sqrt{e^{(x+1)}}}{e-1}$	1,1363
2	e^{x-1}	$\frac{\sqrt{e^{(x+1)}}}{e-1}$	0,6256
3	e^{x-2}	$\frac{\sqrt{e^{(x+1)}}}{e-1}$	1,2141
4	e^{x-3}	$\frac{\sqrt{e^{(x+1)}}}{e-1}$	1,4466
5	e^{x-4}	$\frac{\sqrt{e^{(x+1)}}}{e-1}$	1,5321

3.4 Application de la méthode de collocation

3.4.1 Méthode de collocation-Legendre pour l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm

On considère l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce de la forme :

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, t)F(u(t))dt, \quad (3.3)$$

comme nous avons déjà vu, la méthode de collocation consiste à chercher une solution approchée $u_N(x)$, de sorte que cette solution soit satisfait l'équation (3.3) aux points de collocation, on peut prendre comme points de collocation les nœuds $\{x_i\}_i^N = 0$ de Legendre-Gauss de sorte que

$$u_N(x_i) = f(x_i) + \int_0^1 K(x_i, t)F(u_N(t))dt, \quad (3.4)$$

les intégrales qui sont apparus dans le schéma (3.4) seront approchés par le quadrature de Legendre-Gauss, on transforme l'intervalle $[0, 1]$ à l'intervalle $[-1, 1]$ en utilisant la transformation suivante :

$$S = 2t - 1, \quad t \in [0, 1],$$

on obtient ;

$$\int_0^1 K(x_i, t)F(u_N(t))dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K(x_i, \frac{S+1}{2})F(u_N(\frac{S+1}{2}))ds, \quad (3.5)$$

soit $\{\mathcal{L}_i\}_{i=0}^N$ est la base des polynômes de Lagrange associée à les nœuds de Legendre-Gauss $\{x_j\}_{j=0}^N$, pour approximer la partie non-linéaire dans le schéma (3.5) on utilisé l'interpolation de Lagrange comme suit :

$$F(u_N(\frac{S+1}{2})) = \sum_{j=0}^N F(u_N(x_j))\mathcal{L}_j(\frac{S+1}{2}),$$

l'équation (3.5) devient :

$$u_N(x_i) = f(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N w_k K(x_i, \frac{S_{k+1}}{2}) \sum_{j=0}^N F(u_N(x_j))\mathcal{L}_j(\frac{S_k+1}{2}), \quad (3.6)$$

avec $\{w_K\}_{k=0}^N$ sont les poids de Legendre-Gauss, donc pour $i = 0, 1, \dots, N$, l'équation (3.3) forme un system non-linéaire de $(N + 1)$ équations et $(N + 1)$ inconnues, ce system est résolu par la méthode de Newton pour déterminer les inconnues $\{u_N(x_i)\}_{i=0}^N$.

On utilisé l'interpolation de Lagrange pour trouver la solution approchée $u_N(x)$ par :

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^N u_N(x_i) \mathcal{L}_i(x) \sim u(x).$$

Exemple 3.5. On se propose de résoudre par la méthode de collocation-Legendre l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm suivante :

$$u(x) = 2 - \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)x - x^2 + \int_0^1 xt\sqrt{u(t)}dt,$$

avec la solution exact de cette équation est

$$u_e(x) = 2 - x^2.$$

Les résultats numériques sont présentés dans le tableau 3.6 pour $n = 10$ et la figure 3.4.1

TABLE 3.5 – Résultats numériques pour l'exemple 3.5

x	valeur exacte $u_e(x)$	valeur approximative $u_n(x)$	Erreur absolue $\varepsilon = \max_{[0,1]} u_n(x) - u(x) $
0.000e+00	2.000e+00	2.000e+00	4.440e-16
1.000e-01	1.990e+00	1.990e+00	3.419e-14
2.000e-01	1.960e+00	1.960e+00	6.972e-14
3.000e-01	1.910e+00	1.910e+00	1.039e-13
4.000e-01	1.840e+00	1.840e+00	1.387e-13
5.000e-01	1.750e+00	1.750e+00	1.736e-13
6.000e-01	1.640e+00	1.640e+00	2.078e-13
7.000e-01	1.510e+00	1.510e+00	2.429e-13
8.000e-01	1.360e+00	1.360e+00	2.779e-13
9.000e-01	1.190e+00	1.190e+00	3.128e-13
1.000e+01	1.718e+00	1.718e+00	3.474e-13

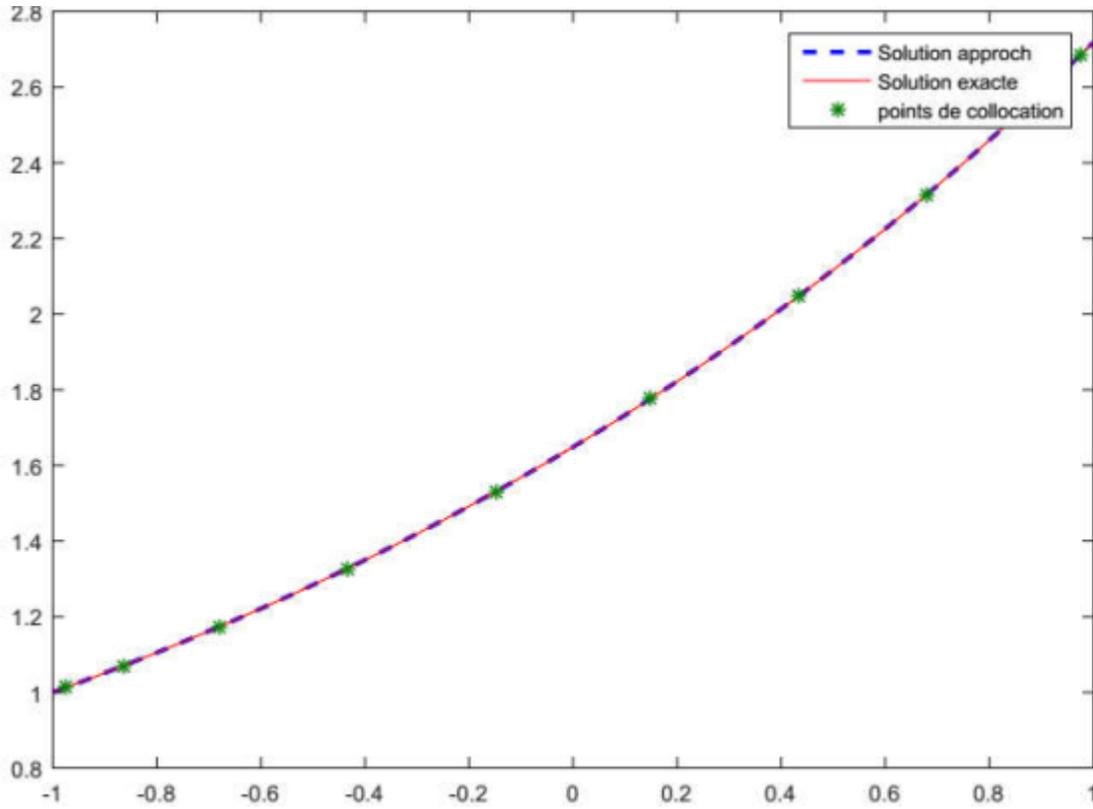


FIGURE 3.1 – La solution exacte, la solution approchée et les points de collocation pour l’exemple 3.5

3.4.2 Méthode de collocation-Legendre pour l’équation intégrale non-linéaire de Volterra

On considère l’équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce de la forme :

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt, \quad (3.7)$$

on va appliquer la même procédure qu’auparavant pour l’équation de Fredholm (3.3), en tenant compte les différences entre les deux équations.

On a :

$$u_N(x_i) = f(x_i) + \int_0^{x_i} K(x_i,t)F(u_N(t))dt, \quad (3.8)$$

on transforme l’intervalle $[0, x]$ à l’intervalle $[-1, 1]$, en utilisant la transformation suivante :

$$t = \frac{1+x}{2}s + \frac{x-1}{2}, \quad s, x \in [-1, 1],$$

on obtient :

$$\int_a^x K(x_i,t)F(u_N(t))dt = \frac{1+x_i}{2} \int_{-1}^1 K(x_i, \frac{1+x_i}{2}s + \frac{x_i-1}{2})F(u_N(\frac{1+x_i}{2}s + \frac{x_i-1}{2}))ds. \quad (3.9)$$

On utilise l’interpolation de Lagrange pour approximer les parties non-linéaires dans le schéma précédant

$$F(u_N(\frac{s_1+x_i}{2}s + \frac{x_i-1}{2})) = \sum_{j=0}^N F(u_N(x_j))\mathcal{L}_j(\frac{1+x_i}{2}s + \frac{x_i-1}{2}).$$

Avec $\{\mathcal{L}\}_{j=0}^N$ sont les polynômes de Lagrange associées a l'ensemble des nœuds de Legendre-Gauss $\{x_j\}_{j=0}^N$.

Par le quadrature de Legendre-Gauss, nous approximations les intégrales (3.9), l'équation (3.8) devient :

$$u_N(x_i) = f(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N w_k K(x_i, \frac{1+x_i}{2}x_k + \frac{x_i-1}{2}) [\sum_{j=0}^N F(u_N(x_j)) \mathcal{L}(\frac{1+x_i}{2}x_k + \frac{x_i+1}{2})],$$

avec $\{w_k\}_{k=0}^N$ sont les poids de Legendre-Gauss, donc pour $i = 0, 1, \dots, N$, l'équation (3.8) forme un système non-linéaire qu'est résolu par la méthode de Newton pour déterminer les inconnues

$$\{u_N(x_i)\}_{i=0}^N.$$

La solution approchée de l'équation (3.7) par cette méthode est donnée par :

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^N u_N(x_i) \mathcal{L}(x) \sim u(x).$$

Exemple 3.6. On se propose de résoudre par la méthode de collocation-Legendre l'équation intégrale non-linéaire de Volterra suivante :

$$u(x) = e^x - \frac{1}{2}(e^2x - 1) + \int_0^x u^2(t) dt.$$

avec la solution exact de cette équation est :

$$u_e(x) = e^x.$$

TABLE 3.6 – Résultats numériques pour l'exemple 3.6

x	valeur exacte $u_e(x)$	valeur approximative $u_n(x)$	Erreur absolue $\varepsilon = \max_{[0,1]} u_n(x) - u(x) $
0.000e+00	1.000+00	1.000e+00	2.680e-12
1.000e-01	1.105e+00	1.105e+00	7.900e-13
2.000e-01	1.221e+00	1.221e+00	6.175e-13
3.000e-01	1.349e+00	1.349e+00	1.807e-13
4.000e-01	1.491e+00	1.491e+00	4.145e-13
5.000e-01	1.648e+00	1.648e+00	6.237e-13
6.000e-01	1.822e+00	1.822e+00	2.324e-13
7.000e-01	2.013e+00	2.013e+00	3.401e-13
8.000e-01	2.225e+00	2.225e+00	6.039e-13
9.000e-01	2.459e+00	2.459e+00	7.132e-13
1.000e+01	2.718e+00	2.718e+00	2.169e-12

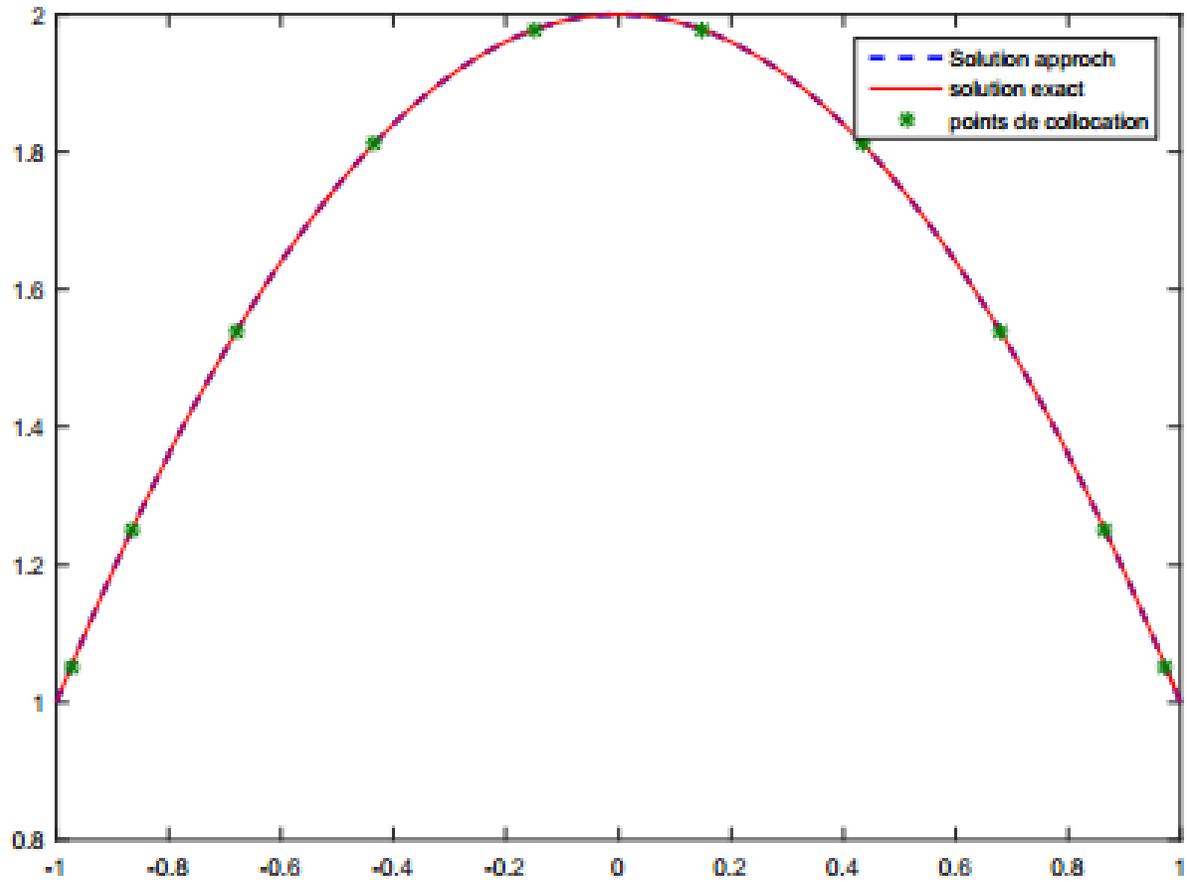


FIGURE 3.2 – La solution exacte, la solution approchée et les points de collocation pour l'exemple 3.6

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié la résolution numérique par la méthode de projection pour résoudre les équations intégrales non-linéaires dans un cadre fonctionnel, cette méthode permet de approximer la valeur d'une fonction et pour relier la solution exacte des équations à la solution numérique obtenue, où la solution est écrite sous forme d'une série finie des bases d'un polynôme orthogonale multiplier par des coefficients c_j sera déterminé à partir de la résolution d'un système non-linéaire par la méthode de Newton, puis par la méthode de collocation qui est basée sur les méthodes quadratures, cette dernière transforme les intégrales à des sommes finies. Avant d'étudier les méthodes numériques, on va étudier quelques méthodes classiques.

Au début, on commence par la méthode de décomposition d'Adomian qui est la mère des méthodes, où la solution s'écrit sous la forme d'une série infinie, chaque terme de cette série est un polynôme appelé polynôme d'Adomian, pour trouver ces polynômes nous utilisons l'algorithme d'Adomian, cette méthode est très efficace et converge rapidement vers la solution exacte, ensuite par la méthode des approximations successives qu'est appelée aussi la méthode d'itératives de Picard, puisque elle est basée sur les itérations, cette méthode est appliquée avec succès et converge rapidement, à la fin, on va étudier une méthode récente appelée la méthode de perturbation homotopique, cette méthode est basée sur un petit paramètre $p \in [0, 1]$, en conclure à partir de la comparaison entre la méthode de décomposition d'Adomian et la méthode de perturbation homotopique que les deux méthodes sont équivalentes.

Bibliographie

- [1] MUSTAPHA DILMI, *Sur la convergence des méthodes spectrales pour les équations intégrales*, Thèse de doctorat Université de M'sila, 2018.
- [2] JI-HUAN HE, *A coupling methode of a homotopy techinique and a perturbation techinique for non-linear problems*, Internat, J,Non-linear Mech (2000).
- [3] SOMIA GUECHI, *Méthodes computationnelles pour la résolution des équations intégrales Non-linéaires*, Thèse de doctorat Université de M'sila, 2017.
- [4] ASGHAR GHORBANI, JAFAR SABERI-NADJAFI, *Exact solutions for nonlinear integral equations by a modified homotopy perturbation method*, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, 2008.
- [5] E. ATKINSON KENDALL, *The Numerical solution of integral equation of the second kind*, New work, University of Iowa, British, 1997.
- [6] JIE-SHEN TAO TANG, *Spectral and High-Oder Methods with applications*, Science press, China,2006.
- [7] JIE SHEN, TAO TANG, LI-LIAN WANG, *Spectral Methods Algorithms, Analysis and applications*, 2011.
- [8] M.NADIR, *Cours d'analyse fonctionnelle*, Université de M'sila, 2004.
- [9] M.NADIR, *Cours sur les équations intégrales*,Université de M'sila, 2008.
- [10] RADU PRECUP, *Methods in Non-linear integral equations*, Babes-Bolyai University, Cluj-Romania, 2002.
- [11] M. RAHMAN, *Integral equations and their application*,Dalhousie University, canada, 2007.
- [12] ABDUL-MAJID WAZWAZ, *linear and Non-linear Integral equations*,Vol. 639. Berlin : Springer, 2011.
- [13] M. STEPHEN ZEMYAN, *The classical theory of integral equations*, Springer Science Business Media, 2012

ملخص :

هذه المذكرة عبارة عن دراسة عامة حول المعادلات التكاملية الغير خطية وحلها، حيث قمنا بإثبات الوجود و الوحدانية لهذه المعادلات في فضاء الدوال المستمرة حيث قمنا بحلها بطرق فعالة مثل : طريقة التحليل، طريقة التقريب المتتالي، طريقة الاضطراب التماثلي، طريقة الإسقاط، طريقة الانتظام التي تعتمد على التريبع ومقارنة في كل طريقة الحل الدقيق مع الحل التقريبي من أجل توضيح وتبين فعالية هذه الطرق.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية غير الخطية، طريقة التقريبات المتتالية، كثيرات حدود ادوميان، طريقة الاضطراب التماثلي، طريقة الإسقاط، طريقة الانتظام.

Résumé

Ce mémoire est une étude générale sur les équations intégrales non-linéaires et leurs résolutions, nous avons prouvées l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales non-linéaires dans l'espace des fonctions continues, nous avons également consacré notre travail à la résolution des équations intégrales non-linéaires par diverses méthodes d'approximation telles que la méthode de décomposition d'Adomian, des approximations successives, de perturbation homotopique, de projection et la méthode de collocation qu'est basée sur les méthodes de quadratures. Nous avons données certains exemples et en comparant les résultats obtenus par la solution exacte de chaque exemple pour illustrer l'efficacité de ces méthodes.

Mots Clés : Equations intégrales non-linéaires, Méthode des approximations successives, Polynôme d'Adomian, Méthode de perturbation homotopique, Méthode de projection, Méthode de collocation.

Abstract

This thesis is a general study on non-linear integral equations and their resolutions, we have proved the existence and uniqueness of the solution of non-linear integral equations in the space of continuous functions, we have also devoted our work to the resolution of nonlinear integral equations by various approximation methods such as the Adomian decomposition method, successive approximations, homotopic perturbation, projection and the collocation method that is based on quadrature methods.

We have given some examples and comparing the results obtained by the exact solution of each example to illustrate the effectiveness of these methods.

Key Words : Non-linear integral equations, Method of successive approximations, Adomian polynomials, Homotopic perturbation method, Projection method, Collocation method.