Université Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi Bordj Bou Arréridj
Faculté des mathématiques et de l'informatique
Département des mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme

MASTER

FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Mathématiques appliquées

Résolution des équations différentielles partielles d'ordre fractionnaire moyennant des approches semi-analytique

---

Présenté par :
NEFNAF Asma
KERROUCHE Ibtissem

Sous la direction de :
Mme. ABBAS DJOUAHER

Soutenu publiquement le 07 Juillet 2021, Devant le jury :

F. BELMECHRI	MAA	Université de Bordj Bou Arréridj	Président
T. SALHI	MCB	Université de Bordj Bou Arréridj	Examinateur

Année universitaire
2020/2021

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIMENTS

En premier lieu, nous remercions Allah le tout puissant de nous avoir donné la force pour achever ce travail ainsi que la force pour dépasser toutes les difficultés.

Nous aimerions tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse Madame **ABBAS Djouaher** pour la confiance qu'elle nous a donnée en l'acceptant pour nous guider et pour ses conseils avisés. Sa rigueur scientifique m'a permis d'arriver aux objectifs fixés au départ de ma thèse.

Nous adressons nos remerciements au Madame **BELMECHRI Fierouz** , pour l'honneur qu'il nos a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Nos vifs remerciements vont également à monsieur **SALHI Tayeb**, MCB à Université Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi Bordj Bou Arréridj, pour l'honneur qu'il nos a fait en acceptant de faire partie de ce jury.

Nous adressons un grand merci à toute nos familles en particulier nos parents qui a toujours été présente lorsque nous en avons eu besoin,nos professeurs dés la primaire jusqu'à l'université,nos amies,nos proches.

Nous tenons à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

DÉDICACES

Je Dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents **MUSTAPHA** et **ABLA** , qui sont la lumière de ma vie,qui ont tant soufré et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils,leur affection et leurs encouragements.

J e vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.

A mes chèrs frères **ZIAD**, **YAKOUB** et **AYOUB**.

A mes chères sœurs **DIHIA** , **SONIA** , **KENZA** et **BOUCHRA**.

A mes petites d'amour : **Bouzid** , **Abd el raouf** ,**Tarek** et **Zakaria**.

Et sans oublier mes chères amies : **Chahrazad** et **Rania**.

IBTISSEM

DÉDICACES

Avec les sentiments d'amour et de gratitude je dédie ce modeste travail :

A mon Père **NACIR** , en signe d'amour,de reconnaissance et de gratitude pour tous les soutiens et les sacrifices dont il a fait preuve à mon égard.

A ma Mère **FATIMA AL ZOHRA** , ma raison d'être, ma raison de vivre, la lanterne qui éclaire mon chemin et n'illumine de douceur et d'amour.

A mon mari **AISSA**, tu m'as donné quelque chose de beau qui ne finit jamais .

A mon fils **Djawad**, que dieu le protège , il est prunelle de mes yeux.

A mes chèrs frères **NABIL**, **SOFAINE**, **MADJER** et **HAMZA**.

A mes chères sœurs **ZINA**, **ABIR**, **AFFAF**.

A tout mes chèrs neveu de ma famille sans exception.

Et sans oublier mes chères amies : **HADJER** et **AMINA**.

A toute tous mes proches de la famille **NEFNAF** et **SAAD SAUD**.

ASMA

LISTES DES NOTATIONS

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

$L^p(\Omega)$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty[$ intégrables sur Ω.

$C(\Omega)$: espace des fonctions continues sur Ω.

$C^n(\Omega)$: espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dérivables n fois et $f^{(n)}$ continues.

$AC(\Omega)$: espace des fonctions absolument continues surΩ.

$AC^n(\Omega)$: espace des fonctions dérivables à l'ordre $n-1$ et elle que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.

$\Gamma(.)$: la fonction Gamma.

$B(.,.)$:la fonction Bêta.

$E_\alpha(.)$: la fonction de Mittag-Leffler.

$I^\alpha f$: intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

$D^\alpha f$: dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

${}^cD^\alpha f$: dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Quand on a introduit la notion de dérivée, on s'est rendu compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à fonction dérivée elle-même et par la même introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration opérateur inverse de la dérivée peut éventuellement être comme une dérivée d'ordre " moins un" on peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire. La théorie de dérivée fractionnaire ou bien d'ordre fractionnaire est aussi ancienne que le calcul classique tel que connu de nos jours. Ses origines remontent à la fin du $17^{\text{ième}}$ siècle, l'époque où Isaac Newton et Gottfried Wihelm Leibniz ont développés les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction f quand il a annoncé dans une lettre à Guillaume l'Hôpital datée du 30 septembre 1695 avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$, qui lui a répondu : que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$.

Les équations différentielles fractionnaires (EDF)ont trouvées des applications dans beaucoup des problèmes en mécanique et physique. Comme dans la plupart du temps, ces équations ne peuvent être pas résolues exactement et les méthodes approximatives et quelques méthodes analytiques doivent être utilisées pour résoudre des problèmes non linéaires incluent comme la méthode décomposition adomian ADM, la méthode des perturbations homotopique (HPM) ou la méthode des itérations du variationnelles (VIM). Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux 19 ième siècle par Riemann et Liouville, leur but était de prolonger la dérivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers.

Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire d'ordre α et les définitions les plus utilisées sont celle de Riemann-Liouville et de Caputo.Chaque définition utilise l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville[13].

L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ dans un intervalle $[0,T]$ de Riemann-Liouville est définie par :

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

La dérivée fractionnaire d'ordre α sur $[0,T]$ au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n}\right) \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau = \frac{d^n}{dt^n} \left(I^{n-\alpha} f(t)\right).$$

La dérivée fractionnaire d'ordre α sur $[0;T]$ au sens de Caputo est définie par :

$$ {}^{c}D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)d\tau=I^{n-\alpha}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f(t)\right), $$

avec $n=[\alpha]+1,[\alpha]$ désigne la partie entière de α et $D^{n}=\left(\frac{d}{dt}^{n}\right)$ désigne la dérivée d'ordre n et Γ est la fonction Gamma.

Ce travail est divisé en trois chapitres comme suit :

Dans le **premier chapitre**, nous allons mentionner les concepts des certaines fonctions spéciaux, intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi que certaines de leurs caractéristiques et la relation entre eux.

Dans le **deuxième chapitre** : "Méthode ADM et Méthode VIM", on rappellera la Méthode d'Itération Variationnelle et celle d'Adomian, ces méthodes numériques sont applicables sur des EDF linéaires ainsi que sur des problèmes non linéaires.

Finalement, **le troisième chapitre** portera sur les : "Equations Différentielles Fractionnaires : Applications semi-Analytique". On présentera quelques applications semi-Analytique sur les équations différentielles fractionnaires en utilisant l'approche de Caputo.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE DU CALCUL FRACTIONNAIRE

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que les fonctions spécifiques pour l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire et d'autres notions dont on aura besoin dans la suite de notre travail.

1.1 Espaces fonctionnels

Ici on rappelle quelques définitions d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires.

1.1.1 Espace des fonctions intégrables

Définition 1.1. [13] Soit $\Omega = [0,T]\,(0 < T < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$

1) Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurables et

$$\int_0^\tau |f(t)|^p dt < \infty.$$

2) Pour $p = +\infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurable f bornées presque partout (p.p) sur Ω.

Théorème 1.1. *[13] Soit* $\Omega = [0,T]\,(0 < T < +\infty)$ *un intervalle fini de* $\mathbb{R}$.

1) Pour $1 \leq p < +\infty$*, l'espace* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\tau |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

2) l'espace $L^\infty(\Omega)$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = inf\{M \geq 0 : |f(t)| \leq M \quad p.p\ sur \quad \Omega\}.$$

1.1.2 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.2. [8] Soit $\Omega = [0,T]\,(0 < T < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à n continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \max_{t\in\Omega} |f^{(k)}(t)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ est l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{t\in\Omega} |f(t)|.$$

Définition 1.3. [8] Soit $\Omega = [0,T]\,(0 < T < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.
On désigne par $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est-à-dire :

$$AC(\Omega) = \{f/\exists\varphi \in L^1(\Omega) : f(t) = c + \int_0^t \varphi(s)ds\},$$

et on appelle $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω.

Définition 1.4. [8] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par $C^n_\mu(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont des dérivées continues sur Ω jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$ c'est-à-dire :

$$AC^n(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}, f^k \in C(\Omega), k \in \{0,1,2,3,...,n-1\}, f^{(n-1)} \in AC(\Omega)\}.$$

En particulier $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$.
Une caractérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.2. *[8] une fonction $f \in AC^n(\Omega), n \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si elle est représentée sous la forme :*

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

Théorème de Fubini

Définition 1.5. [8] Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite élémentaire s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $c < d$, et des fonctions φ_1, φ_2 continues sur $[a, b]$ et ϕ_1, ϕ_2 continues sur $[c, d]$, telles que $\varphi_1 \leq \varphi_2(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, $\phi_1(y) \leq \phi_2(y)$ pour tout $y \in [c, d]$ et :

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.3. *[8] soient A une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur A. Avec les notation de la définition précédent, on a :*

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

1.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

La compréhension des définitions et l'utilisation du calcul fractionnaire seront facilitées en donnant quelques définitions mathématiques nécessaires de quelques fonctions utiles telles que les fonctions Gamma, Bêta d'Euler et La fonction Mittag-Leffler puis on introduit quelques propriétés liées à ces fonctions. Pour plus de détails voir [13, 9].

1.2.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.6. [13] Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$.
La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.1}$$

Exemple 1.1.

1. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$.
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{-1}{2}} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$. (on pose le changement de variable $t = \tau^2$, (L'intégrale de Gauss)).

$\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z < 1$.

Propriétés :

1. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad Re(z) > 0, \tag{1.2}$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z} dt = \left[-e^{-t} t^{z}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

2. La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$ et en utilisant la relation (1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1! \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\
&\vdots \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!
\end{aligned}$$

3. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$. (par récurrence $\forall n\in\mathbb{N}$)

- Pour $n=0$, on a $\Gamma\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{0!\sqrt{\pi}}{4^0(0!)}=\sqrt{\pi}$.

- Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n. C-à-d que supposons que $\Gamma\left((n-1)+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}((n-1)!)}$, est vérifiée. Alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}\\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}\\
&= \frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}\\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.1. La relation de récurrence (1.2) permet de définir : $z\longrightarrow\Gamma(z)$ pour les valeurs négatives de z, tel que pour $-1<z<0$, on aura : $0<z+1<1$. Alors, $\Gamma(z+1)$ est bien définie par la formule (1.1), mais pas $\Gamma(z)$. On peut définir $\Gamma(z)$ par la relation :

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}. \tag{1.3}$$

Ainsi pour : $-(n+1)<z<-n, n\in\mathbb{N}^*$, on aura :

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Exemple 1.2.

1. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$.
2. $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$.

1.2.2 La fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.7. [13] La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombres complexes α et β par :

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \qquad Re(\alpha)>0 \quad , \quad Re(\beta)>0. \tag{1.4}$$

Proposition 1.4. *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{C}; \quad Re(\alpha)>0 \quad , \quad Re(\beta)>0). \tag{1.5}$$

PREUVE. Soit $D=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{\beta-1}e^{-y}dy\right),\\ &= \int\int_D x^{\alpha-1}y^{\beta-1}e^{-(x+y)}dxdy.\end{aligned}$$

En utilisant un changement de cordonnées, considérons les nouvelles cordonnées

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=\frac{x}{x+y}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=uv \\ y=u(1-v)\end{cases}$$

et :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u\end{vmatrix}=-uv-u(1-v)=-u.$$

De même que le domaine D' correspondant à D dans les cordonnées u,v est :

$$D'=\{(u,v)/u\geq 0, \quad 0\leq v\leq 1\}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\int\int_D x^{\alpha-1}y^{\beta-1}e^{-(x+y)}dxdy &= \int\int_{D'}(uv)^{\alpha-1}(u(1-v))^{\beta-1}e^{-u}|-u|dudv,\\
&= \int\int_{D'}u^{\alpha+\beta-1}(v)^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}e^{-u}dudv,\\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 u^{\alpha+\beta-1}(v)^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}e^{-u}dudv,\\
&= \left(\int_0^{+\infty}u^{\alpha+\beta-1}e^{-u}du\right)\left(\int_0^1(v)^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}dv\right),\\
&= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

par conséquent :

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

□

Exemple 1.3. Calculons $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\pi.$$

Proposition 1.5.

1. $B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$.

2. $B(\alpha,1)=\frac{1}{\alpha}$.

PREUVE.

1. nous avons :

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}=B(\beta,\alpha).$$

2. On a :

$$B(\alpha,1)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}=\frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha)}=\frac{1}{\alpha}.$$

□

1.2.3 la fonction de Mittage-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Elle est aussi largement utilisée dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire, cette fonction à été introduite par G .M. Mittag-Leffler [10].

Définition 1.8. [13] Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie par :

$$E_\alpha\ (z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \qquad \alpha > 0 \tag{1.6}$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Wiman [15] et elle est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad \alpha, \beta > 0 \tag{1.7}$$

Exemple 1.4.

1. $E_0(z) = \dfrac{1}{1-z}, \quad \mid z \mid < 1.$
2. $E_1(z) = E_{1,1}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$
3. $E_2(z) = E_{2,1}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{z})^{2k}}{(2k)!} = \cosh\sqrt{z}.$
4. $E_{2,2}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z}\sinh z\ .$

1.3 Intégration fractionnaire

Le but de cette partie est d'introduire les deux plus importantes approches du calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, y compris quelques unes de leurs propriétés.

1.3.1 Intégrale fractionnaire sur un intervalle [a, b]

Définition 1.9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$
Notons par $I_a^1 f$ la primitive qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a,b] : (I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau.$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(t) &= \int_a^t I^1 f(u)du \\ &= \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau)d\tau\right) du \\ &= \int_a^t \left(\int_\tau^t du\right) f(\tau)d\tau \\ &= \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

En répétant n fois, on arrive à la $n^{\text{ième}}$ primitive de la fonction f sous la forme :

$$\left(I_a^{(n)} f\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{(n-1)} f(\tau)d\tau, \quad t > 0, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.8}$$

Cette formule est appelée formule de Chauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$.

1.3.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.10. [8] Supposons que $\alpha > 0, a < t, \alpha, a, t \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1([a,b])$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche de la fonction $f(t)$ pour un ordre non entier α est définie par :

$$\forall t \in [a,b], \quad I_{a^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)} f(\tau)d\tau, \tag{1.9}$$

où : $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma donnée par (1.1).
De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite

d'ordre $\alpha > 0$ de f, par :

$$\forall t \in [a,b], \quad I_{b^-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{(\alpha-1)} f(\tau) d\tau. \tag{1.10}$$

Remarque 1.2. Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).

Théorème 1.6. *[8] Pour toute fonction $f \in L^1([a,b])$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :*

$$I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta} f(t)] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(t), \quad pour \quad \alpha > 0, \beta > 0, \tag{1.11}$$

pour presque tout $t \in [a,b]$. Si de plus $f \in C([a,b])$, alors cette identité est vraie $\forall t \in [a,b]$.

PREUVE. La preuve découle directement de la définition :

$$I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta} f(t)] \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{dt}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_a^{\tau} \frac{f(u)}{(\tau-u)^{1-\beta}} du.$$

Or : $f \in \mathbb{C}[a;b]$, d'après le théorème de Fubini et par le changement

$$t = u + s(t-u),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta} f(t)] &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(u)}{(\tau-u)^{1-\alpha-\beta}} du \\ &= I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(t). \end{aligned}$$

Où : $B(\alpha,\beta)$désigne la fonction Bêta. □

Proposition 1.7. *Pour $\alpha > 0$,$\beta > 0$, on a :*

1.

$$\left(I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}. \tag{1.12}$$

2.

$$\left(I_{b^-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-t)^{\alpha+\beta-1} \tag{1.13}$$

PREUVE.

1.
$$\left(I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-1}d\tau, \tag{1.14}$$

En effectuant le changement de variable :

$$\tau = a + s(t-a),$$

où : $s = 0$ quand $\tau = a$ et $s = 1$ quand $\tau = t$ et $d\tau = tds$, alors (1.14) devient :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t ((t-a)-s(t-a))^{\alpha-1}(s(t-a))^{\beta-1}(t-a)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta), \quad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

2. Même idée (le changement de variable est $(b-\tau = s(b-t)$). □

Exemple 1.5.

1 **/ L'intégrale de $f(t) = (t-a)^{\beta}$ au sens de Riemann-Liouville.**

Soient $\alpha > 0, \beta > -1$, alors on a :

$$I_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}d\tau. \tag{1.15}$$

En effectuant le changement de variable :

$$\tau = a + s(t-a),$$

où : $s = 0$ quand $\tau = a$ et $s = 1$ quand $\tau = t$ et $d\tau = tds$, alors (1.15) devient :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} s^\beta (t-a)^{\beta+1} ds, \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds, \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{(\beta+1)-1} ds.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta (1.4) puis la relation (1.5), on arrive à :

$$\begin{aligned}
I^\alpha f(t) &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ est donnée par :

$$I^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.16}$$

On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ où on a :

$$I^1 (t-a)^\beta = \frac{1}{\beta+1} (t-a)^{\beta+1}.$$

2 / **L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par** :

$$I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha.$$

En particulier, si $a = 0$,

$$I^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha.$$

1.4 Dérivées fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville et de Caputo qui sont les plus utilisées.

1.4.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant : $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha]+1$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: En s'inspirant de la relation classique $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d^2}{dt^2}\left(I_a^1\right)$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre α, $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}\right).$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$ et $n = [\alpha]+1$, on peut poser :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n}\left(I_a^{n-\alpha}\right).$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 1.11. [8] Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche de la fonction f d'ordre $\alpha > 0$ notée $D_{a^+}^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], \quad D_{a^+}^\alpha f(t) &= D^n I_{a^+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d^n}{dt^n}\right)\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{1.17}$$

où : $n = [\alpha]+1$

en particulier, si $\alpha = n-1 \in \mathbb{N}^*, a = 0$, alors :

$$D_0^{n-1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^n}{dt^n}\right)\int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{d^n}{dt^n} f(\tau)d\tau = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t) = f^{(n-1)}(t).$$

Ainsi la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Si de plus $0 \leq \alpha < 1$, alors $n = 1$,d'où :

$$D^{\alpha}_{a^+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

Définition 1.12. la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de la fonction f est définie par :

$$\forall t \in [a,b], \quad D^{\alpha}_{b^-} f(t) = (-1)^n D^n (I^{n-\alpha}_{b^-} f)(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.18}$$

Exemple 1.6.

1 / **La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\beta}$ au sens de Riemann-Liouville.**

$$D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha}(t-a)^{\beta}.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $n-1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$, d'après (1.17),et la relation (1.16), (Voir l'exemple(1.5) on a :

$$D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta}. \tag{1.19}$$

En tenant compte de :

$$\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta} = \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.20}$$

On substitue le résultat (1.20), dans la formule (1.19), pour obtenir :

$$D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ est donnée par :

$$D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.21}$$

On pose : $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{3}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}(t-a)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}(t-a) \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(t-a). \end{aligned}$$

2 / **la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante** $f(t) = C$ **est non nulle, sa valeur est** :

$$D^{\alpha}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

Proposition 1.8. *pour* $\alpha \geq 0, \beta > 0$*, on a :*

1. $\left(D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.$
2. $\left(D_b^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}.$

1.4.2 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans les propositions suivantes :

Proposition 1.9. *pour* $n-1 < \alpha < n$ *,* $m-1 < \beta < m$ *on a :*

1. *Soit* $\alpha > \beta > 0$ *alors pour* $f \in L^1([a,b])$*, l'égalité :*

$$D^{\alpha}(I^{\alpha}f(t)) = f(t),$$

est vraie pour tout $t \in [a,b]$.

2. *Soit* $\alpha > \beta > 0$, $f \in L^1([a,b])$, *la relation :*

$$D^{\beta}(I^{\alpha} f(t)) = I^{\alpha-\beta} f(t).$$

est vrai presque partout sur $t \in [a,b]$.

3. *Pour* $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, *si les dérivées fractionnaires* $D^{\alpha} f$ *et* $D^{k+\alpha} f$ *existent , alors :*

$$D^k(D^{\alpha} f(t)) = D^{k+\alpha} f(t).$$

4. *Si* $f(t) \in C^n([a,b])$, *alors ;*

$$I^{\alpha} D^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

PREUVE.

1. En utilisant (1.17) et la théorème(1.3) , on a pour $n = [\alpha] + 1$

$$D^{\alpha}(I^{\alpha} f(t)) = D^n I^{n-\alpha} I^{\alpha} f(t) = f(t),$$

est vraie pour presque tout $t \in [a,b]$.

2. D'après (1.17) et la théorème(1.3) on obtient :
pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :

$$\begin{aligned} D^{\beta}(I^{\alpha} f(t)) &= D^n I^{n-\beta}(I^{\alpha} f)(t) \\ &= D^n \left(I^{n+\alpha-\beta} f\right)(t) \\ &= D^n I^n \left(I^{\alpha-\beta} f\right)(t) \\ &= I^{\alpha-\beta} f(t). \end{aligned}$$

3. On a pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} D^k\left(D^\alpha f(t)\right) &= D^k D^n I^{n-\alpha} f(t) \\ &= D^{k+n} I^{n-\alpha+k-k} \\ &= D^{k+n} I^{k+n-(k+\alpha)} f(t) \\ &= D^{k+\alpha} f(t). \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} I^\alpha D^\alpha f(t) &= I^\alpha\left(I^{n-\alpha} D^n f(t)\right) \\ &= I^n D^n f(t) \\ &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. \end{aligned}$$

□

1.4.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans cette section nous présentons la définition et quelques propriétés de la dérivation au sens de Caputo.

Définition 1.13. La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^cD_a^\alpha f(t)$ d'ordre $\alpha > 0$, sur l'intervalle $[a,b]$ est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :

$$ {}^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right), \tag{1.22}$$

où :

$$n = [\alpha] + 1, si \quad \alpha \notin \mathbb{N}, n = \alpha \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{N}. \tag{1.23}$$

Si $\alpha = 0$, alors :

$$\left({}^cD^0\right)_a f(t) = f(t).$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, la relation (1.22) prend la forme :

$$^{c}D_{a}^{\alpha} f(t) = D_{a}^{\alpha} \left(f(t) - f(a)\right).$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (1.22) est définie pour les fonctions f pour lesquelles la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville existe ; en particulier elle est définie pour les fonctions $f \in AC^{n}([a,b])$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.10. *Soit $\alpha \geq 0$ et soit n donné par (1.23). Si $f \in AC^{n}([a,b])$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo $^{c}D_{a}^{\alpha} f(t)$ existe presque partout sur $[a,b]$.*

a) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors $^{c}D_{a}^{\alpha} f(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
(^{c}D_{a}^{\alpha} f)(t) &= I_{a}^{n-\alpha} \frac{d^{n}}{dt^{n}} f(t), \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a,b])$, alors :

$$\begin{aligned}
(^{c}D_{a}^{\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{-\alpha} f^{'}(\tau) d\tau, \qquad (1.25) \\
&= I_{a}^{1-\alpha} f^{'}(t).
\end{aligned}$$

b) Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$$(^{c}D_{a}^{\alpha} f)(t) = f^{(n)}(t).$$

Exemple 1.7.

1 **/ La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle**

$$^{c}D^{\alpha} C = 0. \qquad (1.26)$$

2 / **La dérivée fractionnaire de la fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Caputo**

soit p un entier et $0 < n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}, \tag{1.27}$$

d'où :

$$^{c}D^{P}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau,$$

en effectuant le changement de variable $\tau = a+s(t-a)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau,\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_a^1 (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds,\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p},\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p},\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ est donnée par :

$$^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.$$

3 **/ la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction** $f(t) = e^{\lambda t}$.

$$\begin{aligned}
{}^{c}D_a^{\alpha}(e^{\lambda t}) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\frac{d^n}{d\tau^n}(e^{\lambda\tau})d\tau, \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\lambda^n e^{\lambda\tau})d\tau, \\
&= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k\tau^k}{k!}d\tau, \\
&= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_a^t (1-\frac{\tau}{t})^{n-\alpha-1}\tau^k d\tau.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable :

$$\tau = yt, \quad d\tau = tdy$$

où : $y = \frac{a}{t}$ quand $\tau = a$ et $y = 1$ quand $\tau = t$.
On obtient :

$$\begin{aligned}
{}^{c}D_a^{\alpha}(e^{\lambda t}) &= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_{\frac{a}{t}}^{1}(1-y)^{n-\alpha-1}y^{k+1-1}d\tau, (si \quad a=0) \\
&= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}B(n-\alpha, k+1).
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta (1.4) puis de la relation (1.5) on arrive à :

$$\begin{aligned}
{}^{c}D_a^{\alpha}(e^{\lambda t}) &= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}, \\
&= \lambda^n t^{n-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^k}{\Gamma(k+n-\alpha+1)}, \\
&= \lambda^n t^{n-\alpha}E_{1,n-\alpha+1}(t\lambda).
\end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction Mittag-Leffler (1.6), donc on a la dérivée fractionnaie au sens de Caputo de la fonction $f(t) = e^{\lambda t}$ donnée par :

$$ {}^{c}D^{\alpha}(e^{\lambda t}) = \lambda^{n} t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(t\lambda). \tag{1.28}$$

1.4.4 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo ont les propriétés résumées dans la proposition suivante :

Proposition 1.11. *soit* $\alpha > 0, \beta > 0$ *;* $n = [\alpha] + 1$ *.si* $f(t) \in (C^{p}[a,b], p = [\alpha+\beta]+1)$ *,alors*

$$\left({}^{c}D^{\alpha}({}^{c}D^{\beta} f)\right)(t) = \left({}^{c}D^{\alpha+\beta} f\right)(t). \tag{1.29}$$

PREUVE. On a :

$$\begin{aligned}
\left({}^{c}D^{\alpha}({}^{c}D^{\beta} f)\right)(t) &= \left({}^{c}D^{\alpha}(I^{n-\beta} D^{n} f)\right)(t), \\
&= \left(I^{n-\alpha} D^{n}(I^{n-\beta} D^{n} f)\right)(t), \\
&= \left(I^{n-(\alpha+\beta)} D^{n} I^{n} D^{n}\right) f(t), \\
&= \left(I^{n-(\alpha+\beta)} D^{n} f\right)(t), \\
&= \left({}^{c}D^{\alpha+\beta} f\right)(t).
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.12. *soit* $f(t)$ *une fonction tels que* $D^{\alpha} f(t)$ *et* ${}^{c}D^{\alpha} f(t)$ *existent, avec* $n-1 < \alpha < n$ *,* $n \in \mathbb{N}$ *alors on a :*

$$D^{\alpha} f(t) \neq {}^{c}D^{\alpha} f(t). \tag{1.30}$$

1.4.5 La relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

La relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par :

Théorème 1.13. *Soit* $\alpha > 0$ *avec* $n-1 < \alpha < n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, et soit f une fonction telle que les dérivées fractionnaires* ${}^cD_a^\alpha f$ *et* $D_a^\alpha f$ *existent alors :*

$$({}^cD_a^\alpha)\, f(t) = D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}. \tag{1.31}$$

En particulier, $0 < \alpha < 1$ *on a :*

$$({}^cD_a^\alpha)\, f(t) = D_a^\alpha f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(-\alpha+1)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$$({}^cD_a^\alpha) f(t) = D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right].$$

Remarque 1.3. Si $f(a) = f^{'}(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, la dérivée au sens de Caputo coïncide avec celle de Riemann-Liouville pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, C'est-à-dire :

$${}^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t)$$

CHAPITRE 2

QUELQUES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement quelques méthodes : la méthode de décomposition d'adomian (ADM), la méthode d'itération variationnelle(VIM),puis nous étudions leurs convergences.

2.1 Méthode de décomposition d'Adomian (ADM)

Dans la seconde partie du XXe siècle, George Adomian (21 mars 1922 - 1996) un mathématicien américain a proposé une nouvelle méthode [1] pour résoudre les équations différentielles et aux dérivées partielles linéaires et non linéaires , les problèmes algébriques, intégrales, intégrodifférentielles, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur. La technique utilise une décomposition de I'opérateur non linéaire en une série de fonction, chaque terme de cette série est un polynôme généralisé appelé polynôme d'Adomian .
La méthode décompositionnelle consiste à calculer les solutions des équations sous la forme d'une série infinie convergente vers la solution du problème donné [4].

2.1.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, considérons l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$Au = g, \tag{2.1}$$

où :
A : est un opérateur différentiel ordinaire ou partiel non linéaire (contenant des termes linéaire et des termes non linéaires) d'un espace de Hilbert H dans lui-même.
g : une fonction donnée.
On cherche $u \in H$ solution du (2.1).
Le terme linéaire de l'opérateur A est décomposée en $L+R$, où L est un opérateur différentiel facilement inversible et R représente le reste de l'opérateur linéaire. Le terme non -linéaire de A est noté N . On a :

$$A = L+R+N,$$

l'équation (2.1) s'écrire alors :

$$L(u)+N(u)+R(u) = g. \tag{2.2}$$

En multipliant l'équation (2.2) par L^{-1} aux deux côtés de l'équation (après la décomposition), on obtient :

$$L^{-1}(Lu+Nu+Ru) = L^{-1}g$$

$$L^{-1}L(u) = L^{-1}g - L^{-1}N(u) - L^{-1}R(u) \tag{2.3}$$

où : $L^{-1} = \int\int\cdots\int (.)\,(dt)^n$ est l'inverse de l'opérateur L.
Puisque :

$$L^{-1}(Lu) = u - \phi,$$

et ϕ est la constante de l'intégration.
Par conséquent, l'équation (2.3) devient :

$$u = L^{-1}(g) - L^{-1}N(u) - L^{-1}R(u). \tag{2.4}$$

La méthode d'Adomian consiste à chercher la solution u sous la forme d'une séries :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \tag{2.5}$$

on remplaçant(2.5) dans (2.4),on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = L^{-1}(g) - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) N\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right). \tag{2.6}$$

Pour pouvoir construire la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dont les éléments sont calculés récursivement, on note par $N(u)$ est la somme de la série :

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{2.7}$$

Où chaque A_n est fonction de $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$.
La méthode propose la construction d'une série de polynômes spéciaux appelés polynômes d'Adomian lesquels sont obtenus à partir des relations suivantes :

$$u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^i u_i) = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots \tag{2.8}$$

$$N(u(\lambda)) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda^i u_i)\right) = N\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^n A_n)\right) = \cdots, \tag{2.9}$$

où λ est un paramètre introduit par convenance.
De (2.8) et (2.9) en déduit :

$$A_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.10}$$

En remplaçant (2.7) dans (2.6) on trouve :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = L^{-1}(g) - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (A_n)\right). \tag{2.11}$$

Les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ peuvent être identifiés par les formules :

$$\begin{cases} u_0 = \phi + L^{-1}g \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ \qquad \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{cases} \tag{2.12}$$

Ainsi, La solution de (2.2) est déterminée.
Mais, en pratique, les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ne peuvent être tous Calculés, on utilise alors l'approximation :

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \qquad \text{avec :} \qquad \lim_{n \longrightarrow \infty} \phi_n = u.$$

La question qu'on peut se poser est comment déterminer les $(A_n)_{n \geq 0}$ et à quelles conditions la méthode converge.

2.1.2 Les polynômes d'Adomian

l'étape la plus importante de la méthode est celle du calcul des polynômes d'Adomian.

Définition 2.1. Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule suivante [2] :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i)\right]_{\lambda_{=0}}, \end{cases} \tag{2.13}$$

la formule proposée par G Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian

$(A_n)_{n\geq 0}$ est la suivante [1] :

$$
\begin{aligned}
A_0(u_0) &= N(u_0)\\
A_1(u_0,u_1) &= u_1\frac{\partial}{\partial u}N(u_0)\\
A_2(u_0,u_1,u_2) &= u_2\frac{\partial}{\partial u}N(u_0)+\frac{1}{2!}u_1^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}N(u_0)\\
A_3(u_0,u_1,u_2,u_3) &= u_3\frac{\partial}{\partial u}N(u_0)+u_1u_2\frac{\partial^2}{\partial u^2}N(u_0)+\frac{1}{3!}u_1^3\frac{\partial^3}{\partial u^3}N(u_0)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n=\sum_{v=0}^{n}c(v,n)N^{(v)}(u_0),n\geq 1, \tag{2.14}$$

où : $c(v,n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par $m!$) des v termes u_i dont la somme des indices i est égales à n,m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

Exemple 2.1. Soit l'opérateur non linéaire définit par :

$$N(u)=\cos u$$

Par définition on a :

$$
\begin{aligned}
A_0(u_0) &= N(u_0)=\cos(u_0)\\
A_1(u_0,u_1) &= u_1\frac{\partial}{\partial u_0}\cos(u_0)=-u_1\sin u_0\\
A_2(u_0,u_1,u_2) &= u_2\frac{\partial}{\partial u_0}\cos(u_0)+\frac{1}{2!}u_1^2\frac{\partial^2}{\partial u_0^2}\cos(u_0)=-u_2\sin u_0-\frac{1}{2!}u_1^2\cos u_0\\
A_3(u_0,u_1,u_2,u_3) &= u_3\frac{\partial}{\partial u_0}\cos(u_0)+u_1u_3\frac{\partial^2}{\partial u^2}N(u_0)\cos u_0+\frac{1}{3!}u_1^3\frac{\partial^3}{\partial u_0^3}\cos(u_0)\\
&= -u_3\sin u_0-u_1u_3\cos u_0+\frac{1}{3!}u_1^3\sin u_0\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Une autre méthode de calcul des polynômes d'Adomian

Pour calculer les polynômes d'Adomain, on utilise les deux formules :

$$u(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i \qquad \text{et} \qquad N(u(\lambda))=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n A_n,$$

on développe $N(u(\lambda))$ sous forme de puissance de λ et par comparaison, les A_n sont donnés par les coefficients de λ^n.

Exemple 2.2. Soit l'opérateur non linéaire définit par :

$$\begin{aligned} N(u) &= uu_x \\ u(\lambda) &= \sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i = u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\cdots \\ u_x(\lambda) &= \sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_{ix} = u_{0x}+\lambda u_{1x}+\lambda^2 u_{2x}+\cdots \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} N(u_x(\lambda)) &= (u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\cdots)(u_{0x}+\lambda u_{1x}+\lambda^2 u_{2x}+\cdots) \\ N(u_x(\lambda)) &= u_0u_{0x}+\lambda(u_0u_{1x}+u_1u_{0x})+\lambda^2(u_0u_{2x}+u_1u_{1x}+u_2u_{0x})+\cdots \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$N(u_x(\lambda))=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n A_n = uu_x = A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\cdots$$

En comparant les deux formules, on trouve :

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0u_{0x} \\ A_1 &= u_1u_{0x}+u_0u_{1x} \\ A_2 &= u_0u_{2x}+u_1u_{1x}+u_2u_{0x}. \end{aligned}$$

Les restes des A_n, se calculent de la même façon.

2.1.3 Convergence de la méthode ADM

D'importants théorèmes ont été donnés impliquant des conditions suffisantes de convergence. Toutes ces conditions portent sur l'opérateur non linéaire N.
En effet, de la relation (2.12) on déduit :

Théorème 2.1.

$$\textit{Si} \qquad \sum_{n\geq 0} A_n < +\infty \qquad \textit{alors} \qquad \sum_{n\geq 0} u_n < +\infty \tag{2.15}$$

et réciproquement.
Les premières preuves de convergence ont été citées par Yves Cherruault. Elles sont basées sur la théorème du point fixe.
Donnons les grandes lignes de la démonstration (voir[3] pour plus de détails).
Notons d'abord que la méthode décompositionnelle appliquée à (2.1) se ramène à la recherche d'une suite :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

avec : $S_0 = 0$ *et vérifiant la relation récurrente suivante :*

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n), S_0 = 0, u_0 = g, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

On en déduit le résultat de convergence suivant :

Théorème 2.2. *Si l'opérateur N est une contraction (c'est-à-dire vérifie* $\|N\| < \delta < 1$*) alors la suite* $(S_n)_n$ *satisfaisant la relation de récurrence* $S_{n+1} = N(u_0 + S)$ *avec* $S_0 = 0, n \geq 0$ *converge vers S solution de* $S = N(u_0 + S)$.

PREUVE. De la relation (2.14), on a :

$$\begin{aligned}
\|S_n - S\| &= \|N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S)\| \\
&\leq \|N\| \, \|S_n - S\| \\
&\leq \delta \, \|S_n - S\| \\
&\leq \delta^2 \, \|S_{n-1} - S\| \\
&\leq \delta^3 \, \|S_{n-2} - S\| \\
&\;\vdots \\
&\leq \delta^n \, \|S_1 - S\| .
\end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite $(S_n)_n$ vers S.

Par ailleurs, on a :

$$\sum_{n \geq 0} A_n = \sum_{n \geq 1} u_n,$$

et comme $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente d'après le Théorème(2.1) , on a alors le résultat suivant : □

Corrollaire : Si N est une contraction alors les séries des u_n et des A_n sont convergentes. De plus, $\sum_{n \geq 0} u_n$ est solution de l'équation :

$$Au = g.$$

Exemple 2.3. Soit l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, t \geq 0 \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{2.17}$$

On a :

$$Lu = u' \qquad et \qquad Nu = u^2$$

avec $L = \dfrac{d}{dt}(.)$.

L^{-1} représente une simple intégration de 0 à t. On trouve :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(0) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.18}$$

Les polynômes d'Adomian sont :

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0^2, \\
A_1 &= 2u_0u_1, \\
A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2, \\
A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

par conséquent on a :

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1, \\
u_1 &= -L^{-1}(A_0) = -t, \\
u_2 &= -L^{-1}(A_1) = t^2, \\
u_3 &= -L^{-1}(A_2) = -t^3, \\
u_4 &= -L^{-1}(A_3) = t^4, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

par (2.18), on a la solution de (2.17) donnée par :

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 - t + t_2 - t_3 + t_4 - \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1+t}.
\end{aligned}$$

2.2 Méthode d'itération variationnelle(VIM)

La méthode d'itération variationnelle (VIM) a été proposée et développée par le mathématicien chinois Je-Haun-He au début des années 1990 [5, 6, 7], elle a été proposée la première fois pour résoudre des problèmes en mécanique. Cette méthode a été employée pour résoudre une grande variété de problèmes linéaires et non-linéaires avec des approximations successives rapidement convergentes vers la solution exacte si elle existe.
La méthode est basée sur la détermination du multiplicateur de Lagrange de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle.

2.2.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, on considère l'équation différentielle non-linéaire suivante [5] :

$$L(u)+N(u)=g(t), \tag{2.19}$$

où :
L : est un opérateur linéaire défini par $L=\frac{d^m}{dt^m}$, $m \in \mathbb{N}^*$
N : est un opérateur non linéaire,
g : est une fonction connue.
Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode itérative variationnelle suivante :

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)+\int_0^t \lambda(\tau)\left[L(u_n(\tau))+N(\tilde{u_n}(\tau))-g(\tau)\right]d\tau, n \geq 0, \tag{2.20}$$

où :
λ : est un multiplicateur générale de Lagrange.
n : est un indice représente la n^{ime} approximation et $\tilde{u_n}(t)$ est considéré comme une variation restreinte c'est à dire $\delta \tilde{u_n}(t)=0$.

Pour résoudre l'équation (2.19) par la méthode VIM, on doit d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ qui va être identifier de manière optimale via intégration par parties. Alors les approximations successives u_n de la solution $u(t)$ vont être obtenues en utilisant le multiplicateur de Lagrange et une fonction u_0 bien choisie (qui doit être au moins satisfaire les conditions initiales), par conséquent, la solution exacte sera la limite :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(t) = u(t). \tag{2.21}$$

La méthode d'itération variationnelle devrait être employée en suivant deux étapes essentielles[12, 14]

1. La détermination de multiplicateur de Lagrange λ.
   - Si $m = 1$, $\quad \lambda(t) = -1, \quad u_0(x) = u(0)$.
   - Si $m = 2$, $\quad \lambda(t) = t - \tau, \quad u_0(x) = u(0) + xu'(0)$,

   d'une manière générale :
   $\lambda(t) = \frac{1^m}{(m-1)!}(t-\tau)^{m-1}$, $u_0(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{k!} x^k$, $c_k = u^k(0)$.

2. La détermination d'une formule d'itération :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \frac{1^m}{(m-1)!}(t-\tau)^{m-1} \left[L(u_n(\tau)) + N(\tilde{u_n}(\tau)) - g(\tau)\right] d\tau.$$

2.2.2 Analyse de Convergence

Dans cette section, nous présentons le théorème de convergence de la méthode d'itération variationnelle (VIM). La méthode transforme l'équation différentielle donnée en une suite de fonction récurrentes. La limite de cette suite est considérée comme la solution de l'équation différentielle donnée.

Théorème 2.3. *[12, 14] Soit X est un espace de Banach et $B : X \to X$ est une application non linéaire. On suppose que l'application vérifie la condition :*

$$\|B(u) - B(\bar{u})\| \leq \gamma \|u - \bar{u}\|, \forall u, \bar{u} \in X, \tag{2.22}$$

où : $0 < \gamma < 1$. Alors, l'application B possède un point fixe unique, $u \in X$, tel que

$B(u) = u$. De plus, la suite :

$$u_{n+1} = B(u_n), \tag{2.23}$$

converge vers point fixe de B, pour tout choix arbitraire $u_0 \in X$

PREUVE.

$$\begin{aligned}
\|u_k - u_l\| &\leq \|u_k - u_{k-1}\| + \cdots + \|u_{l+1} - u_l\| = \|B_{k-1} - B_{k-2}\| + \cdots + \|B_l - B_{l-1}\| \\
&\leq \gamma\|u_{k-1} - u_{k-2}\| + \cdots + \gamma\|u_l - u_{l-1}\| \\
&\leq \left(\gamma^{k-2} + \gamma^{k-3} + \cdots + \gamma^{l-l}\right)\|u_1 - u_0\| \\
&\leq \frac{\gamma^{l-1}}{1-\gamma}\|u_1 - u_0\|.
\end{aligned}$$

On peut supposer que $1 < l < k$, cela donne $\|u_k - u_l\| \longrightarrow 0$, comme $k, l \longrightarrow \infty$,donc $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. Puisque X est un espace de Banach, la suite converge vers un point fixe.
D'après le théorème (2.3), pour l'application non linéaire

$$B(u_n) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)\left[Lu_n(\tau) + N\bar{u}_n(\tau) - g(\tau)\right]d\tau, \tag{2.24}$$

une condition suffisante pour la convergence de la méthode d'itération variationnelle est que B doit être strictement contractante. De plus, la suite (2.23) converge vers un point fixe de B qui est la solution du problème (2.19). □

Exemple 2.4. Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = 0, \quad 0 < t \leq 1 \\ u(0) = 1, u'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

La correction fonctionnelle de l'équation (2.25), selon la VIM est donnée par :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)(u_n''(\tau) + u_n(\tau))d\tau.$$

Le multiplicateur de Lagrange $\lambda(\tau)$ peut être identifié comme étant $\lambda(\tau) = \tau - t$, donc la formule d'itération peut être obtenue comme suit :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (\tau - t)(u_n''(\tau) + u_n(\tau))d\tau. \tag{2.26}$$

D'après la formule (2.26), nous obtenons les premiers termes de la solution approchée :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1, \\ u_1(t) &= 1 - \frac{1}{2!}t^2, \\ u_2(t) &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4, \\ u_3(t) &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6, \\ &\vdots \end{aligned}$$

et comme :

$$u(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(t),$$

nous pouvons exprimer la solution de l'équation (2.25) sous forme d'une série convergente vers la solution exacte donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{2k!} \\ &= cos(t). \end{aligned}$$

Exemple 2.5. Considérons l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} u'(t) = u^2(t) + 1, \quad 0 < t \leq 1 \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

La correction fonctionnelle de l'équation (2.27) selon la méthode VIM, est donnée par :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)\left(u_n'(\tau)) - (\tilde{u_n}(\tau)) - 1\right) d\tau.$$

Le multiplicateur de Lagrange $\lambda(\tau)$ peut être identifié comme étant $\lambda = -1$, donc la formule d'itération peut être obtenue comme suit :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \lambda(\tau)\left(u_n'(\tau)) - (\tilde{u_n}(\tau)) - 1\right) d\tau. \tag{2.28}$$

D'après la formule (2.28), nous obtenons les premiers termes de la solution approchée :

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= 0,\\
u_1(t) &= t,\\
u_2(t) &= t + \frac{1}{3}t^3,\\
u_3(t) &= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^6 + \frac{1}{63}t^7,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

et comme :

$$u(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(t),$$

nous pouvons exprimer la solution de l'équation (2.27) sous forme d'une série convergente vers la solution exacte donnée par :

$$\begin{aligned}
u(t) &= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^6 + \frac{1}{63}t^7 + \cdots\\
&= \tan(t).
\end{aligned}$$

CHAPITRE 3

LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES EDF

3.1 Equations différentielles fractionnaires EDF

Dans cette section on va discuter sur les types des equations différentielles d'ordre fractionnaire. On commence par donner une définition d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire (EDF) :

Définition 3.1. Soit $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Alors :

$$D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), \tag{3.1}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville.
De la même manière :

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), \tag{3.2}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo.

3.1.1 Equation différentielle fractionnaire de type de Riemann-Liouville

On commence par l'équation homogène de type Riemann-Liouville.

Lemme 3.1. *Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $u \in \mathbb{C}(0,1) \bigcap \mathbb{L}(0,1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville :*

$$D^{\alpha}_{0^+}u(t) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{3.3}$$

admet une solution unique :

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n},$$

où : $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$.

PREUVE. Soit $\alpha > 0$, on a :

$$D^{\alpha}_{0^+} t^{\alpha-m} \;=\; 0, \quad \text{avec} \quad m = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (3.3), admet une solution particulière, comme :

$$u(t) = C_m t^{\alpha-m} = 0, \quad \text{avec} \quad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.4}$$

où : $C_m \in \mathbb{R}$.
Donc la solution générale de (3.3) donné comme une des solutions particulières (3.4) , C-à-d :

$$u(t) \;=\; C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}. \tag{3.5}$$

où : $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$. □

3.1.2 Equation différentielle fractionnaire de type de Caputo

On commence par l'équation homogène de type Caputo.

Lemme 3.2. *Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $u \in \mathbb{C}(0,1) \bigcap \mathbb{L}(0,1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo :*

$$^{C}D^{\alpha}_{0^+}u(t) = 0, \tag{3.6}$$

admet une solution unique :

$$u(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}, \tag{3.7}$$

où : $C_m \in \mathbb{R}$, *avec* $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

PREUVE. Soit $\alpha > 0$, on a :

$$^{C}D^{\alpha}_{0^+} t^m = 0, \text{pour} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (3.6), admet une solution particulière, comme

$$u(t) = C_m t^m, \text{pour} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3.8}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.
Donc la solution générale de (3.6), donnée comme une somme des solutions particulières (3.8), C-à-d :

$$u(t) = C_0 + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}.$$

□

Lemme 3.3. *Supposons que* $u \in \mathbb{C}^n([0,1])$. *Alors :*

$$I^{\alpha}_{0^+} {}^{C}D^{\alpha}_{0^+} u(t) = u(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}. \tag{3.9}$$

où : $C_m \in \mathbb{R}$ *, avec* $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

PREUVE. Soit $\alpha > 0$, Pour tout $u \in \mathbb{C}^n([0,1])$, on a :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{0^+} {}^{C}D^{\alpha}_{0^+} u(t) &= u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k, \\ &= u(t) - \left[u(0) + u'(0)t + \frac{u''(0)}{2} t^2 + \cdots + \frac{u^{n-1}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

On pose : $C_m = -\dfrac{u^m(0)}{m!} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. On trouve facilement l'égalité (3.9). □

Lemme 3.4. *Soit* $1 < \alpha \leq 2$, *et* $z \in \mathbb{C}([0.1])$.
Alors l'unique solution de problème aux limites :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0^+}u(t) = z(t), & 0 < t < 1 \\ u(0) + u'(0) = 0, & u(1) + u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

est donnée par :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)z(s)ds \quad ,$$

tel que :

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1} + (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \dfrac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & si \quad 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \dfrac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \dfrac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & si \quad 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

3.2 Application de la méthode ADM pour les équations de Riccati

Nous allons considérer dans cette partie que la dérivée fractionnaire utilisée est au sens de Caputo.
Nous présentons l'équation différentielle fractionnaire de Riccati :

$$ {}^{C}D^{\alpha}u(t) = A(t) + B(t)u(t) + C(t)u(t)^2, \tag{3.12}$$

avec $u^{(j)}(0) = c_j$ et $m-1 < \alpha \leq m, \quad t > 0$, où $A(t), B(t), C(t)$ sont des fonctions données et c_j sont des constante arbitraire.
Appliquant l'opérateur inverse de l'opérateur ${}^{C}D^{\alpha}_{0}$, aux deux d côtés de l'équation (3.12) et en utilisant les conditions initiales, on trouve :

$$u(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{t^j}{j!} + I^{\alpha}\left[A(t) + B(t)u(t) + C(t)u(t)^2\right] \tag{3.13}$$

La méthode ADM donnée la solution par la série suivante :

$$u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t), \tag{3.14}$$

et la fonction non linéaire définie en (3.13) soit décomposée comme suit :

$$N(u)=u^2=\sum_{n=0}^{\infty}A_n \tag{3.15}$$

où les A_n sont les polynômes Adomian.

Substitution les séries de décomposition (3.14) et (3.15) dans les deux côtés de (3.13),on trouve :

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)=\sum_{j=0}^{m-1}c_j\frac{t^j}{j!}+I^{\alpha}\left[A(t)+B(t)\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)+C(t)\sum_{n=0}^{\infty}A_n\right]. \tag{3.16}$$

A partir de cette équation, les itérations sont déterminer par l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} u_0=\sum_{j=0}^{m-1}c_j\frac{t^j}{j!}+I^{\alpha}(A(t)), \\ u_{n+1}=I^{\alpha}(B(t)u_n+C(t)A_n), \quad n\geq 0 \end{cases}$$

Exemple 3.1. [11] Considérons l'équation fractionnaire suivante de Riccati :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u=-u^2(t)+1 \\ u(0)=0, \quad 0<\alpha\leq 1 \end{cases} \tag{3.17}$$

La solution exacte, quand $\alpha=1$ est :

$$u(t)=\frac{e^{2t}-t}{e^{2t}+1} \tag{3.18}$$

On a quand $t\to\infty$, $\quad u(t)\to 1$.

Pour trouver la solution, nous utilisons le schéma suivant :

$$\begin{cases} u_0=u(0)+I^{\alpha}(1)=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ u_{n+1}=-I^{\alpha}(A_n) \quad , \quad n\geq 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

où les A_n sont les polynômes d'Adomian pour le terme non linéaire
tel que :

$$F(u) = u^2.$$

En utilisant le schéma ci-dessus et la définition des polynômes d'Adomian, les premiers termes de la série de décomposition sont donnés par :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha} \\
u_1 &= -I^{\alpha}(A_0) = -I^{\alpha}(F(u_0)) = -I^{\alpha}u_0^2 = -\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\alpha^2\Gamma(1+3\alpha)}t^{3\alpha} \\
u_2 &= -I^{\alpha}(A_1) = -I^{\alpha}F'(u_0) = -I^{\alpha}(2u_0u_1) = \frac{16\Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)}{\alpha\Gamma(1+3\alpha)\Gamma(1+5\alpha)}t^{5\alpha} \\
u_3 &= -I^{\alpha}(A_2) = -I^{\alpha}(u_2F'(u_0) + \frac{1}{2}u_1^2F''(u_0) = -I^{\alpha}(2u_0u_1) = -I^{\alpha}(2u_0u_2+u_1^2) \\
&= -\frac{(32\alpha^2\Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)\Gamma(1+3\alpha)+\Gamma(1+2\alpha)^2\Gamma(1+5\alpha))\Gamma(1+6\alpha)}{\alpha^4\Gamma(1+3\alpha)^2\Gamma(1+5\alpha)\Gamma(1+7\alpha)}t^{7\alpha} \\
u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\alpha^2\Gamma(1+3\alpha)}t^{3\alpha} + \frac{16\Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)}{\alpha\Gamma(1+3\alpha)\Gamma(1+5\alpha)}t^{5\alpha} + \cdots \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

-Le premier cas :

remplaçons $\alpha = 1$ dans (3.20) , on obtient la solution approximative sous forme d'une série :

$$\begin{aligned}
u(t) &= t - 0.333333t^3 + 0.133333t^5 - 0.0539683t^7 + 0.0218695t^9 - 0.00886324t^{11} \\
&\quad +0.00359213t^{13} - 0.00145583t^{15} + 0.000590027t^{17} - 0.000239129t^{19} \\
&\quad +0.0000969154t^{21}.
\end{aligned}$$

-Le deuxième cas :

Dans ce cas, nous examinerons l'équation fractionnaire de Riccati (3.20) . Pour $\alpha =$

$\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} u(t) &= 2\sqrt{t} - 3.00901t^{\frac{3}{2}} + 7.24332t^{\frac{5}{2}} - 19.6157t^{\frac{7}{2}} + 55.9634t^{\frac{9}{2}} - 164.385t^{\frac{11}{2}} \\ &\quad +491.925t^{\frac{13}{2}} - 1491.22t^{\frac{15}{2}} + 4563.65t^{\frac{17}{2}} - 14068.5t^{\frac{19}{2}} + 43620.6t^{\frac{21}{2}}. \end{aligned}$$

Pour simplifier , soit $t^{\frac{1}{2}} = x$, alors :

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x - 3,00901x^3 + 7,24332x^5 - 19,6157x^7 + 55,9634x^9 - 164 - 385x^{11} \\ &\quad +491,925x^{13} - 1491,22x^{15} + 4563,65x^{17} - 14068,5x^{19} + 43620,6x^{21}. \end{aligned}$$

3.3 le système WBK fractionnaire

Dans ce paragraphe, on utilise la méthode ADM pour résoudre l'équation du Whitham-Broer-Kaup avec dérivée fractionnaire spatio-temporelle.
On considère alors

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} u + u\left(D_x^{\beta} u\right) + D_x^{\beta} v + A u_{xx} = 0 \\ D_t^{\alpha} v + u\left(D_x^{\beta} v\right) + v\left(D_x^{\beta} u\right) + B u_{xxx} + A v_{xx} = 0 \qquad ,0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1. \end{cases} \tag{3.21}$$

Où D_t^{α} et D_x^{β} désignent les dérivées fractionnaires, A et B sont des constantes réelles.
On prend, comme condition initiale, les fonctions :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ v(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{3.22}$$

Pour $\alpha = \beta = 1$, le système (3.21) se réduit à :

$$\begin{cases} u_t + u u_x + v_x + A u_{xx} = 0 \\ v_t + (uv)_x + B u_{xxx} + A v_{xx} = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Pour résoudre le problème (3.21), avec la méthode ADM, on écrit (3.21) sous la forme :

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} u = -u\left(D_x^{\beta} u\right) - D_x^{\beta} v - A u_{xx} \\ D_t^{\alpha} v = -u\left(D_x^{\beta} v\right) - v\left(D_x^{\beta} u\right) - B u_{xxx} - A v_{xx}, \end{cases} \tag{3.24}$$

où $0 < \alpha \leq 1$, $\quad 0 < \beta \leq 1$.

On applique J^{α} à (3.24) et en tenant compte de (3.22), on obtient :

$$\begin{cases} u(x,t) = f(x) - J^{\alpha}\left(P_1(u(x,t))\right) J^{\alpha}\left(D_x^{\beta} v\right) - A J^{\alpha}\left(u_{xx}\right) \\ v(x,t) = g(x) - J^{\alpha}\left(P_2(u(x,t)), v(x,t))\right) - J^{\alpha}\left(P_3(u(x,t), v(x,t))\right) - B J^{\alpha}\left(u_{xxx}\right) + A J^{\alpha}\left(v_{xx}\right), \end{cases} \tag{3.25}$$

où : $P_1(u(x,t)) = u(D_x^{\beta} u)$, $P_2(u(x,t), v(x,t)) = u(D_x^{\beta} v)$ et $P_3(u(x,t), v(x,t)) = v(D_x^{\beta} u)$.

Avec la méthode d'Adomian, la solution s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t) \qquad , \qquad v(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x,t). \tag{3.26}$$

On décompose ensuite les opérateurs $P_i(u)$, $i \in \{1,2,3\}$ comme suit :

$$\begin{aligned} P_1(u) &= \sum_{i=0}^{\infty} A_i, \\ P_2(u,v) &= \sum_{i=0}^{\infty} B_i, \\ P_3(u,v) &= \sum_{i=0}^{\infty} C_i. \end{aligned}$$

D'après la définition (2.1)(Les polynômes d'Adomian) précédent, on a :

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[P_1\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right) D_x^{\beta}\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0} \\ B_i &= \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[P_2\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right), \left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k v_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right) D_x^{\beta}\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k v_k\right)\right]_{\lambda=0} \\ C_i &= \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[P_3\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k v_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k v_k\right) D_x^{\beta}\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}. \end{aligned}$$

En effet, on peut facilement calculer ces polynômes. En voici quelques un :

$$\begin{gathered} A_0 = u_0 D_x^\beta u_0 \\ A_1 = u_1 D_x^\beta u_0 + u_0 D_x^\beta u_1 \\ A_2 = u_2 D_x^\beta u_0 + u_1 D_x^\beta u_1 + u_0 D_x^\beta u_2 \\ A_3 = u_3 D_x^\beta u_0 + u_2 D_x^\beta u_1 + u_1 D_x^\beta u_2 + u_0 D_x^\beta u_3. \end{gathered} \tag{3.27}$$

Les quatre premiers termes de B_n sont :

$$\begin{gathered} B_0 = u_0 D_x^\beta v_0 \\ B_1 = u_1 D_x^\beta v_0 + u_0 D_x^\beta v_1 \\ B_2 = u_2 D_x^\beta v_0 + u_1 D_x^\beta v_1 + u_0 D_x^\beta v_2 \\ B_3 = u_3 D_x^\beta v_0 + u_2 D_x^\beta v_1 + u_1 D_x^\beta v_2 + u_0 D_x^\beta v_3. \end{gathered} \tag{3.28}$$

Et ceux de $C_n$sont donnés par :

$$\begin{gathered} C_0 = v_0 D_x^\beta u_0 \\ C_1 = v_1 D_x^\beta u_0 + v_0 D_x^\beta u_1 \\ C_2 = v_2 D_x^\beta u_0 + v_1 D_x^\beta u_1 + v_0 D_x^\beta u_2 \\ C_3 = v_3 D_x^\beta u_0 + v_2 D_x^\beta u_1 + v_1 D_x^\beta u_2 + v_0 D_x^\beta u_3. \end{gathered} \tag{3.29}$$

On substitue (3.27) , (3.28) et (3.29) dans (3.25), on obtient la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0(x,t) = f(x) \quad , \quad u_{n+1}(x,t) = -J^\alpha(A_n) - J^\alpha(D_x^\beta v_n) - AJ^\alpha(u_{nxx}) \\ v_0(x,t) = g(x) \quad , \quad v_{n+1}(x,t) = -J^\alpha(B_n) - J^\alpha(C_n) - bJ^\alpha(u_{nxxx}) + AJ^\alpha(v_{nxx}). \end{cases} \tag{3.30}$$

3.3.1 Le WBK fractionnaire Temporel et l'ADM

On reconsidère le système du Whitham-Broer-Kaup avec dérivée fractionnaire en t :

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = -uu_x - v_x - Au_{xx} \\ D_t^\alpha v = uv_x - vu_x - Bu_{xxx} + Av_{xx}, \end{cases} \tag{3.31}$$

avec la condition initiale :

$$\begin{cases} u_0(x,0) = f(x) = w - 2ck\coth(k\mu) \\ v_0(x,0) = g(x) = -2c(c+A)k^2 csch^2(k\mu), \end{cases} \tag{3.32}$$

où $c = \sqrt{B+A^2}$, $\mu = x + x_0$,x_0,k et w sont des constantes réelles.

La solution exacte de (3.31), pour le cas où $\alpha = 1$; s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} u(x,t) = w - 2ck\coth(k(\mu - wt)) \\ v(x,t) = -2c(c+A)k^2 csch^2(k(\mu - wt)). \end{cases} \tag{3.33}$$

Pour pouvoir obtenir des solutions numériques de (3.30)) ; on substitue la condition initiale (3.32) et les polynômes d'Adomian (3.27) , (3.28) et (3.29) dans l'expression (3.30), On obtient :

$$\begin{cases} u_0(x,t) = f(x), \\ v_0(x,t) = g(x) \end{cases} \tag{3.34}$$

$$\begin{cases} u_1(x,t) = -J^{\alpha}(A_0) - J^{\alpha}(v_{0x}) - AJ^{\alpha}(u_{0xx}) = f_1\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ v_1(x,t) = -J^{\alpha}(B_0) - J^{\alpha}(C_0) - bJ^{\alpha}(u_{0xxx}) + AJ^{\alpha}(v_{0x}) = g_1\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{cases} \tag{3.35}$$

$$\begin{cases} u_2(x,t) = -J^{\alpha}(A_1) - J^{\alpha}(v_{1x}) - AJ^{\alpha}(u_{1xx}) = f_2\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ v_2(x,t) = -J^{\alpha}(B_1) - J^{\alpha}(C_1) - bJ^{\alpha}(u_{1xxx}) + AJ^{\alpha}(v_{1x}) = g_2\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \end{cases} \tag{3.36}$$

$$\begin{cases} u_3(x,t) = -J^{\alpha}(A_2) - J^{\alpha}(v_{2x}) - AJ^{\alpha}(u_{2xx}) = f_3\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \\ v_3(x,t) = -J^{\alpha}(B_2) - J^{\alpha}(C_2) - bJ^{\alpha}(u_{2xxx}) + AJ^{\alpha}(v_{2x}) = g_3\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}, \end{cases} \tag{3.37}$$

où :

$$\begin{cases} f_1 = -ff_x - g_x - Af_{xx} \\ g_1 = -fg_x - gf_x + Ag_{xx} - Bf_{xxx} \end{cases}$$

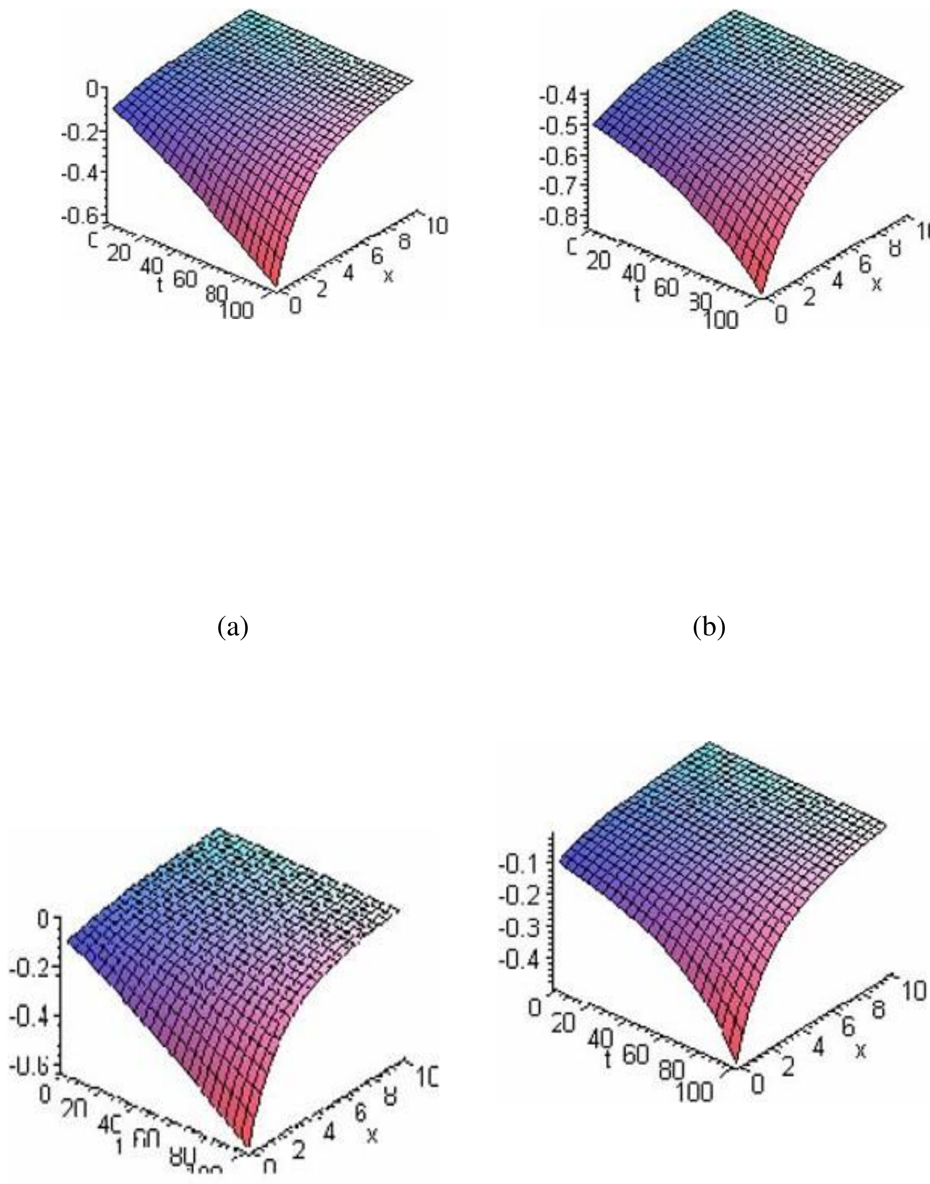
$$\begin{cases} f_2 = -f_1 f_x - f f_{1x} - g_{1x} - A f_{1xx} \\ g_2 = -f_1 g_x - g_1 f_x - f g_{1x} - g f_{1x} + A g_{1xx} - B f_{1xxx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3 = -f_2 f_x - f_1 f_{1x} - f f_2 - g_{2x} A f_{2xx} \\ g_3 = -f_1 g_x - f_1 g_{1x} - f g_{2x} - g_2 f_x - g_1 f_{1x} - g f_{2x} + A g_{2xx} - B f_{2xxx}, \end{cases}$$

par conséquent, on a la solution :

$$\begin{cases} u(x,t) = f(x) + f_1 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + f_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + f_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \cdots \\ v(x,t) = g(x) + g_1 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + g_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + g_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \cdots \end{cases} \tag{3.38}$$

Nous traçons des solutions numériques pour le système(3.31) avec $\alpha = \frac{1}{2}$ ainsi que la solution exacte (3.33)lorsque $\alpha = \beta = 1$. Les figures (3.1.a) et (3.1.c)représentent la solution numérique de (3.31) vérifiant la condition initiale (3.32). Les figures (3.1.b) et (3.1.d) représentent la solution exacte de (3.33)



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.1 – Dans (a) la solution numérique de $u(x,t)$-(3.38), dans (b) la solution exacte de $u(x,t)$-(3.33), dans (c) la solution numérique de $v(x,t)$-(3.38) ; dans (d) la solution exacte de $v(x,t)$-(3.33) $A = B = \frac{3}{2}, w = 0.005, k = 0.1, x_0 = 10, \alpha = \frac{1}{2}$.

3.3.2 Le WBK fractionnaire Spacial et l'ADM

On reconsidère le système de Whitham-Broer-Kaup avec dérivée fractionnaire en x

$$\begin{cases} u_t = -u\left(D_x^\beta u\right) - D_x^\beta v - Au_{xx} & ,0 < \beta \leq 1 \\ v_t = -u\left(D_x^\beta v\right) - v\left(D_x^\beta u\right) - Bu_{xxx} + Av_{xx} \end{cases} \tag{3.39}$$

on prend :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) = x^4 \\ v(x,0) = g(x) = x^3. \end{cases} \tag{3.40}$$

Pour calculer la solution numérique de (3.39), on substitue (3.27), (3.28), (3.29) et la condition initiale (3.40) dans l'expression (3.30) on obtient :
Les trois premiers termes de la série sont donnés par :

$$\begin{cases} u_0(x,t) = x^4 \\ v_0(x,t) = x^3. \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\begin{cases} u_1(x,t) = -jJ^\alpha(A_0) - J^\alpha\left(D_x^\beta v_0\right) - AJ^\alpha(u_{0xx}) = \left(f_1 x^{8-\beta} + f_2 x^2\right) t \\ v_1(x,t) = -J^\alpha(B_0) - J^\alpha(C_0) - bJ^\alpha(u_{0xxx}) + AJ^\alpha(v_{0xx}) = \left(g_1 x^{7-\beta} + g_2 x\right) t, \end{cases} \tag{3.42}$$

$$\begin{cases} u_2(x,t) = -J(A_1) - J\left(D_x^\beta v_1\right) - Aj(u_{1xx}) = \left(f_3 x^{12-2\beta} + f_4 x^{6-\beta} + f_5\right) \frac{t^2}{2} \\ v_2(x,t) = -J(B_1) - J(C_1) - bJ(u_{1xxx}) + AJ(v_{1xx}) = \left(g_3 x^{11-2\beta} + g_4 x^{5-\beta}\right) \frac{t^2}{2}, \end{cases} \tag{3.43}$$

où :

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)},\\
f_2 &= -3-12A,\\
f_3 &= -f_1\left(\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)}+\frac{\Gamma(9)}{\Gamma(9-2\beta)}\right),\\
f_4 &= -f_2\left(\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)}+\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)}\right)-A\,(8-\beta)\,(7-\beta)\,f_1-(7-\beta)\,g_1,\\
f_5 &= -g_2-2Af_2.
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
g_1 &= -\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\beta)}-\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-2\beta)},\\
g_2 &= 6A-24B,\\
g_3 &= -f_1\left(\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\beta)}+\frac{\Gamma(9)}{\Gamma(9-2\beta)}\right)-g_1\left(\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)}+\frac{\Gamma(8)}{\Gamma(8-2\beta)}\right),\\
g_4 &= -f_2\left(\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\beta)}+\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)}\right)-\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)}g_2-B\,(8-\beta)\,(7-\beta)\,(6-\beta)\,f_1\\
&\quad +A\,(7-\beta)\,(6-\beta)\,g_1-\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\beta)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la solution de l'équation (3.39), vérifiant la condition (3.40) est donnée par la formule :

$$\begin{cases} u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t)+\cdots \\ v(x,t)=v_0(x,t)+v_1(x,t)+v_2(x,t)+\cdots \end{cases} \tag{3.44}$$

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons essayées d'introduire quelques unes des méthodes les plus utilisées dans le calcul des approximations numériques des équations différentielles d'ordre fractionnaire (EDF). Nous avons citées par exemple la méthode ADM qui nous appliquons cette méthode dans le dernière chapitre pour résoudre l'équation de Riccati et l'équation de Whitham-Broer-Kaup (WBK) .

On peut conclure, que la méthode proposée est très puissante et efficace pour trouver des solutions approximatives et analytiques pour des équation différentielles d'ordre fractionnaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Adomian. A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of mathematical analysis and applications*, 135(2) :501–544, 1988.

[2] G. Adomian. *Solving frontier problems of physics : the decomposition method*, volume 60. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] Y. Cherruault. Convergence of adomian's method. *Kybernetes*, 1989.

[4] Y. Cherruault, G. Saccomandi, and B. Some. New results for convergence of adomian's method applied to integral equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 16(2) :85–93, 1992.

[5] J. H. He. Variational iteration method–a kind of non-linear analytical technique : some examples. *International journal of non-linear mechanics*, 34(4) :699–708, 1999.

[6] J. H. He. Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems. *Applied mathematics and computation*, 114(2-3) :115–123, 2000.

[7] J. H. He. Variational iteration method—some recent results and new interpretations. *Journal of computational and applied mathematics*, 207(1) :3–17, 2007.

[8] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier, North-Holland, 2006.

[9] K. S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Wiley, Sons Inc, New York, 1993.

[10] G. Mittag-Leffler et al. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène : cinquième note. *Acta mathematica*, 29 :101–181, 1905.

[11] O. S. Odetunde and O. A. Taiwo. A decomposition algorithm for the solution of fractional quadratic riccati differential equations with caputo derivatives. *Am. J. Comput. Appl. Math*, 4(3) :83–91, 2014.

[12] Z. M. Odibat. A study on the convergence of variational iteration method. *Mathematical and Computer Modelling*, 51(9-10) :1181–1192, 2010.

[13] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, New York, 1999.

[14] M. Tatari and M. Dehghan. On the convergence of he's variational iteration method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1) :121–128, 2007.

[15] A. Wiman. Über den fundamentalsatz in der teorie der funktionen $e_a(x)$. *Acta Mathematica*, 29(1) :191–201, 1905.

ملخص

في هذا العمل قدمنا طريقة ادوميان لحل معادلة ريكاتي ذات المشتقات الجزئية ذات رتبة كسرية زمنية حيث المشتق كسري، و المعادلات ذات المشتقات الجزئية غير الخطية تظهر بشكل طبيعي في المجالات العلمية مثل الفيزياء، اللزوجة، الطب، الخ. من اجل توضيح دقة و صحة هذه الطريقة من خلال تطبيقها على العديد من الأمثلة الملموسة، ومن المهم إيجاد حلول تحليلية أو تقريبية على الأقل لهذه المشكلات.

الكلمات المفتاحية : المعادلات ذات المشتقات الجزئية الغير خطية ذات رتبة كسرية ، طريقة ادوميان.

Résumé

Dans ce travail, la méthode Adomian(ADM) est proposée pour résoudre l'équation de Riccati et WBK d'ordre fractionnaire temporelle, dans le cadre des dérivées fractionnaire, les équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire qui est apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, la viscoélasticité, la médicine, etc. Afin d'illustrer la précision et la validité de cette méthode ont été démontrées en les appliquant à de nombreux exemples concrets, et il est important de trouver des solutions analytiques ou du moins approximatives à ces problèmes.

Mots-Clés : équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire, la méthode Adomian.(ADM).

Abstract

In this work Adomian (ADM) method is proposed to solve the generalized time fractional Riccati equation, in the frame of fractional derivatives, non-linear partial differential equations of a fractional order occur naturally in different scientific fields such as physics, viscoelasticity, medicine, etc. In order to illustrate the accuracy and validity of this method have been proven by applying them to many concrete examples, and it is important or even necessary to find analytical or at least approximate solutions to these problems.

Keywords : fractional order non-linear partial differential equations Adomian (ADM) method,