Université Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi Bordj Bou Arréridj
Faculté des mathématiques et d'Informatique
Département des mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme

MASTER

FILIÈRE : MATHÉMATIQUE APPLIQUÉE

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires de Da Prato-Grisvard(Cadre commutatif).

Présenté par :
Soumia Laraba

Devant le jury :

Dr.	Debbiche Hanane	Université : BBA	- Président
Dr.	Berrah Abdelmalek	Université : BBA	- Encadreur
Dr.	Maadadi Asma	Université : BBA	- Examinateur

Année universitaire
2020/2021

Dédicace

✎ .....Je dédie ce travail

Au début, tout le mérite revient à Allah, Merci mon Dieu pour ce succè

Puis à ceux qui se sont fatigué
mon héro

Mebarka.

Sans oublier, je dédie mon encadreur ce qui m'aide à réaliser ce travail pas à pas, Merci Monsieur Abdelmalek Berrah. A
veux remercier mon frère, mon bras droit Laaraba Mohamed.
Et à la fin, je préfère, aussi, de me remercier pour toute la fatigue afin de créer mon chemin de succè

je suis là!

✳ ✳ ✳

Laaraba soumia

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le clément et le miséricordieux louange à Allah le tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté, la force et la patience d'entamer et de mener à bien ce modeste travail. Je adressons nos vifs remerciements à nos parents nos familles et nos frères qui nous ont encouragés et aidés d'arriver à ce stade de nos études. Nous tenons à remercier tout particulièrement mon encadreur,Mr. ABDEL MALEK BERAH qui nous a orientés et aidés durant l'élaboration de ce travail, par ses conseils, sa patience sa grande disponibilité et sa générosité. Nos remerciements vont également à tous les enseignant de la Faculté des Mathématiques et informatique à Bordj Bou Arréridj ,Mr.BEN SAID Fares et. Nous tenons aussi à exprimer nos gratitudes et nos sincères remerciements à tous les membres du jury pour avoir accepté de juger et de mettre en valeur ce mémoire. Nos remerciements vont aussi à tous Nos amis en particulier ZOUINA KHLIFI et ASMA BOUKADJAR et ZAID ABDELMOUMENE et à tous les gens aimables et serviables qui nous ont soutenus durant nos études. Enfin, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire de fin d'études .

♡

Merci à tous

Résumé

Dans ce travail, on a étudié l'équation

$$Ax + Bx - \lambda x = y, \tag{1}$$

où x est l'inconnu dans un espace de Banach X, et $y \in X$ donné, A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X de domaine $D(A)$ et $D(B)$ respectivement dans le cas commutatif, on a présenté les hypothèses sur les opérateurs A et B et discuté l'existence, l'unicité et la régularité maximal de la solution x du problème (1).
Enfin on a donné une application sur l'équation de chaleur.

Abstract

In this work, we study the equation,

$$Ax + bx - \lambda x = y. \tag{2}$$

where x is the unknown in a Banach space X, and $y \in X$, A and B are two closed linear operators in X of domain $D(A)$ and $D(B)$ respectively in the commutative case. We present the assumptions on the operators A and B and discuss the existence, uniqueness and maximal regularity of the solution x of the problem (2).
Finally, we gave an application for the heat equation.

Table des matières

Introduction Générale

Le développement de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires fermés dans les espaces de Banach quelconques fut introduit par Grisvard (1967) [9], Da Prato (1969) [2] et Da Prato-Grisvard (1975) [1].

L'une des raisons importantes de l'émergence de cette théorie est son interet dans la physique. Plusieurs problèmes concrets de la physique et de la mécanique régit par des équations aux dérivées partielles, s'écrivent sous forme de sommes d'opérateurs.
L'objectif de notre travaille est de voir et essayer de comprendre la description de la méthode de Da Parto-Grisvard dans le cas commutatif pour la résolution d'un certain problème lié a ces faits.
Le présent document est constitué de trois chapitres :
Dans le premier chapitre, nous présenterons quelques notions de base sur l'analyse fonctionnelle et en théorie des sommes d'opérateurs. Ces notions concernent les opérateurs linéaires fermés, l'intégrale de Dunford et l'intégration complexe.
Dans le second chapitre, nous présenterons les principaux résultats de la méthode de Da Prato et Grisvard dans le cas commutatif. Ces résultats concernent la résolution de l'équation

$$\begin{cases} Lx - \lambda x = y, \\ x \in D_L, \end{cases} \tag{3}$$

avec

$$\begin{cases} Lx = Ax + Bx, \\ x \in D_L = D_A \cap D_B, \end{cases}$$

où f est une fonction donnée dans l'espace X, λ est un réel positif fixé, A et B sont deux opérateurs linéaires fermés de domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$ dans un espace de Banach X.
Dans le dernier chapitre, nous donnerons une application de la méthode des sommes d'opérateurs pour la résolution d'un problème régit par une équation aux dérivées partielles de type parabolique.

CHAPITRE 1

QUELQUES RAPPELS

Ce chapitre a pour objectif l'introduction et le rappel de certaines notions utilisées dans la totalité du mémoire. Tout lecteur intéressé par plus de détails est prier de voir les références.

1.1 Opérateur linéaire, borné, fermé et fermable

Définition 1.1 (Opérateur linéaire)**.** Soient E et F deux espaces vectoriels normés , On appelle opérateur linéaire , toute application linéaire $u \longmapsto Tu \in F$ définie sur un sous espace vectoriel $D(T) \subset E$ nommé domaine de (T) .

$$D(T) = \{x \in E,\ T \text{ est défini en} x\}.$$

Définition 1.2 (Opérateur borné)**.** Soit $(E, ||.||_E, F, ||.||_F)$ deux espaces de Banach sur même corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle opérateur borné de E dans F toute application linéaire continue $T : E \longmapsto F$

$$\exists c > 0,\ \|Tx\|_F \leq c\|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Exemple 1.1.1. $I : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$
est bien borné car :

$$\|Ix\| = \|x\| \leq c\|x\| \ , \qquad \forall c \geq 1.$$

Définition 1.3 (Opérateur non borné)**.** Un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H est un couple $(D(T), T)$ ou $D(T)$ est un sous espace vectoriel de H et T est un opérateur linéaire défini $D(T)$ dans H , on dit que T est un opérateur non borné de domaine $D(T)$.

Définition 1.4 (Graphe d'un opérateur)**.** Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H , le graphe T est le sous espace vectoriel noté : $G(T)$ de $H \times H$ défini par

$$G(T) = \{(x, Tx),\ x \in D(T)\}.$$

Définition 1.5 (Opérateur fermé)**.** Soient E et F deux espaces de Banach, on dit que T est un opérateur fermé si son graphe $G(T)$ est fermé dans $E \times F$, on note $CL(E, F)$ l'espace des opérateurs fermés de E dans F.

Exemple 1.1.2. Soit T un opérateur non borné défini sur $H^1(]0,1[)$ avec $T = -i\dfrac{d}{dx}$ où : $H^1(]0,1[)$ est l'espace de Sobolev d'indice 1

$$H^1(]0,1[) : \Big\{f \in L^2(]0,1[); f' \in L^2(]0,1[\Big)\}.$$

Alors : T est un opérateur fermé.

Proposition 1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longmapsto F$ un opérateur linéaire alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *T est fermé.*
2. *$\forall (x_n) \subset D(T)$ et $\{x_n \longmapsto x_0$ dans E, $Tx_n \longmapsto y_n$ dans $F\}$,*
   alors $x_0 \in D(T), y_0 = Tx_0$.
3. *$(D(T), ||.||_{D(T)})$ est complet.*

Définition 1.6 (Opérateur fermable)**.** Un opérateur T linéaire est dit fermable si T admet une extension fermée.

Proposition 1.2. *La plus petite extension fermée d'un opérateur fermable est appelée la fermeture de T notée $\overline{T}$.*

Proposition 1.3. *Si A est fermable, B fermé et $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset B$.*

Preuve. $\overline{A}$ est une extension fermée de A. Soit B extension fermée de A.

$$A \subset B,\; G(A) \subset G(B) \Rightarrow \overline{G(A)} \subset \overline{G(B)} = G(B),$$

d'où : $\overline{A} \subset B$. ■

Remararque 1.1.1. Si T est fermable alors

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)}.$$

1.2 Critère d'inversibilité

Définition 1.7. Soient X et Y deux espaces de Banach et $T_1 : X \to Y$ un opérateur linéaire borné, on dit que :

a) T_1 inversible à gauche s'il existe un opérateur $T_2 : Y \to X$ linéaire et borné telle que $T_2T_1 = Id_X$

b) T_1 est inversible à droite s'il existe un opérateur $T_2 : Y \to X$ linéaire et borné telle que : $T_1T_2 = Id_Y$

c) T_1 est un inversible s'il inversible à gauche et à droite .

Théorème 1.4. *Soient X et Y deux espaces de Banach et $T_1 : X \to Y$ un opérateur linéaire et borné, les assertions suivantes sont équivalentes*

i) T_1 inversible à gauche.

ii) T_2 injectif et a image fermé.

iii) Il existe $c > 0$ telle que : $||T_1x||_Y \leq C||x||_X, \forall x \in X$.

1.3 Résolvante, Spectre et Commutateur

Soit $T : D_T \subset E \longmapsto E$ un opérateur linéaire, on appelle ensemble des résolvante de T l'ensemble

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - T),\ \text{inversible}\}.$$

pour $\lambda \in \rho(T)$ on note la fonction résolvante $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$.

Théorème 1.5. *Soit $T \in B(H)$, l'application résolvante de T est $R(\lambda,T) = (\lambda I_H - T)^{-1}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\forall \lambda, \mu \in \rho(T)$

$$R(\lambda,T) - R(\mu,T) = (\mu - \lambda)R(\lambda,T)R(\mu,T) = (\mu - \lambda)R(\mu,T)R(\lambda,T).$$

2. *$R(.,T)$ est une application analytique sur $\rho(T)$.*
3. *Si $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|$; alors $\lambda \in \rho(T)$ et $R(\lambda,T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$.*
4. $\frac{d^nR}{d\lambda^n}(\lambda,T) = (-1)^n n! R^{n+1}(\lambda,T)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \rho(T)$.

Définition 1.8 (Commutateur d'un opérateur)**.** On dit que les résolvantes des opérateurs linéaire T_1 et T_2 commutative si :
$\left[(T_1 - \lambda I)^{-1}, (T_2 - \mu I)^{-1}\right] = 0.$
Ou $[.,.]$ représente le commutative défini par
$\left[(T_1 - \lambda I)^{-1}\right], (T_2 - \mu I)^{-1} = (T_1 - \lambda I)^{-1}(T_2 - \mu I)^{-1} - (T_2 - \mu I)^{-1}(T_1 - \lambda I)^{-1}$.

Définition 1.9 (Spectre d'un opérateur)**.** $\delta(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/(\lambda I - T)$ n'est pas inversible$\}$. On dit que λ est une valeur propre de T si $\lambda I - T$ n'est pas injective .

1.4 Opérateurs sectoriels

Définition 1.10. Soit A un opérateur linéaire fermé dans un espace de Banach E. On dit que A est sectoriel si

1. $D(A)$ et $Im(A)$ sont denses dans E.
2. $Ker A = \{0\},]-\infty, 0] \subset \rho(A)$ et il existe une constante $M \geq 1$ telle que

$$\left\|t(A + It)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq M \text{ pour tout } t \geq 0$$

Si A est sectoriel, alors il existe un angle θ tel que le secteur

$$\sum_{\theta} = \{z \in \mathbb{C}/\{0\} : |argz| < \theta\},$$

soit contenu dans $\rho(-A)$ et sur lequel la majoration précédente reste vérifiée i.e

$$\sup_{z \in \sum_\theta} \left\|z(zI + A)^{-1}\right\| = M_\theta < \infty.$$

Définition 1.11. A est dit positif si $]-\infty, 0] \subset \rho(A)$ et il existe $C \geq 0$ telle que

$$\left\|(A - t)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |t|},\ \forall t \leq 0.$$

1.5 Intégrale de Dunford

1.5.1 Fonctions holomorphes

Définition 1.12. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que

- f est holomorphe en z_0 si $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$.
  Cette limite est alors notée par $f^{'}(z_0)$, c'est le nombre dérivée de f en z_0.

- f est holomorphe (ou analytique) sur U si f est holomorphe en tout point de U.

Proposition 1.6. *Toutes les opérations légitimes sur les fonctions holomorphes comme : somme, produit, rapport et composition donnent encore une fonction holomorphe.*

1.5.2 Les formules intégrales de Cauchy

Théorème 1.7. ***(Formule intégrale de Cauchy)***
Supposons que f soit analytique dans un domaine simplement connexe D et que C soit tout contour fermé simple se trouvant entièrement dans D.
Alors pour tout point z_0 dans C,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-z_0} dz. \tag{1.1}$$

Théorème 1.8. ***(Formule intégrale de Cauchy pour les dérivés)***
Supposons que f soit analytique dans un domaine simplement connexe D et que C soit tout contour fermé simple se trouvant entièrement dans D.
Alors pour tout point z_0 dans C,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

1.5.3 Théorème des résidus

Définition 1.13 (Résidus)**.** Supposons que z_0 est un point singulier essentielle isolé ou un pôle d'une fonction $f(z)$ par ailleurs analytique dans un anneau autour de z_0 ; on peut développer cette fonction en série de Laurent. Le coefficient de $(z-z_0)^{-1}$ s'appelle résidu de $f(z)$à z_0.

Théorème 1.9 (Théorème des résidus)**.** *Soit C un contour simple fermé et $f(z)$ est une fonction analytique sur C et à l'intérieure de C, sauf en un nombre fini de points singulier z_n appartenant à l'intérieure de C. Alors*

$$\oint_C f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k).$$

1.5.4 Intégrale de Dunford

Soit X un espace de Banach complexe et A un opérateur linéaire fermé. Notons par $H(A)$ l'espace des fonctions à variable complexe qui sont holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A. La formule analogue à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes est définit par l'intégrale de Dunford suivante

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)(z-A)^{-1} \, dz,$$

où γ est une courbe simple et $f \in H(A)$.
L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas de γ.

CHAPITRE 2

MÉTHDE DE DA-PRATO-GRISVARD (CADRE COMMUTATIF)

Dans ce chapitre, on donne quelques notions sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires [6]. Plus précisément, soit X un espace de Banach complexe, A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaine respectifs D_A et D_B dans X et leurs ensembles résolvants $\rho(A)$ et $\rho(B)$ non vides.

On définit l'opérateur L (l'opérateur somme) par

$$\begin{cases} D_L & = D_A \cap D_B, \\ Lx & = Ax + Bx, \ x \in D_L. \end{cases}$$

On considère l'équation suivante

$$Ax + Bx = y, \tag{2.1}$$

où y est un vecteur donné de X, $x \in X$ est l'inconnue de l'équation précédente. l'équation (2.1) s'écrit : $Lx = y$

Définition 2.1. Une solution stricte de (2.1) est un élément $x \in D_L$ satisfaisant (2.1).

Définition 2.2. On dit que x est une solution **forte** de (2.1) si et seulement s'il existe (x_n) une suite dans D_L telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} Lx_n = y.$$

Théorème 2.1. *On a les résultats suivants*

1. *Une solution* ***stricte*** *de (2.1) est une solution* ***forte*** *de (2.1).*
2. *Si L est* ***fermé*** *alors les deux notions de solution* ***stricte*** *et* ***forte*** *sont* ***équivalentes****.*
3. *La somme de deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermée.*
4. *Si L est fermable alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   - *i)* $\forall y \in X, \exists$ *une solution* ***forte*** *de (2.1),*
   - *ii)* $0 \in \rho(L)$ *i.e* $: \exists(\bar{L} + 0I)^{-1}$ *donc* $(\bar{L})^{-1}$ *existe avec* $\overline{L}$ *c'est le prolongement fermé de* L*.*
5. *Si L est* ***fermé*** *alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   - *i)* $\forall y \in X, \exists$ *une solution stricte de (2.1),*
   - *ii)* $0 \in \rho(L)$ *i.e* $: \exists(L + 0I)^{-1}$ *donc* L^{-1} *existe.*

L'intérêt de L réside dans la notion de solution **forte** de l'équation.

$$Lx - \lambda x = y, \ \lambda \text{ étant un paramètre spectral.} \tag{2.2}$$

On dit que x est une solution **forte** de (2.2) s'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in D_L$ telle que

$$\begin{cases} x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x, \\ Lx_n - \lambda x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y. \end{cases}$$

Remarquons $x \in D_{\bar{L}}$ et $\bar{L}x - \lambda x = y$. Par conséquent, l'équation (2.2) admet une solution forte unique pour tout $y \in X$ si et seulement si λ est un point de l'ensemble résolvant de $\bar{L}$.

(cadre commutatif)

2.1 Sommes d'opérateurs de type parabolique-elliptique (cadre commutatif)

On impose quelques conditions supplémentaires qui conduisent aux problèmes appelés " **problèmes paraboliques ou elliptiques**". Ces problèmes seront traité seulement dans le cas où les opérateurs A et B commutent (au sens de la résolvante). Dans ce cas l'opérateur S_λ défini par

$$S_\lambda y = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y dz,$$

joue un rôle fondamental dans l'expression et l'analyse des solutions de l'équation (2.1).
Où γ_λ est la courbe sectorielle (voir figure 2.1) infinie de Jordan joignant $\infty e^{-i\theta_0}$ vers $\infty e^{i\theta_0}$ définie par :

$$\gamma_\lambda = \left\{z : arg z = -\theta_0, |z| > \frac{\lambda}{2|\cos\theta_0|}\right\} \bigcup \left\{z : Re z = -\frac{\lambda}{2}, |z| \leq \frac{\lambda}{2\cos\theta_0|}\right\}$$
$$\bigcup \left\{z : arg z = \theta_0, |z| > \frac{\lambda}{2|\cos\theta_0|}\right\}.$$

Remararque 2.1.1. La courbe γ_λ demeure dans $(\sum\limits_{A} - \lambda) \cap \sum\limits_{-B}$ et sépare les spectres $\sigma(A-\lambda)$ et $\sigma(-B)$.

Fonctions : $z \longmapsto (A-\lambda-z)^{-1}$ est définie et analytique à droite de γ_λ, et $z \longmapsto (B+z)^{-1}$ est définie et analytique à gauche de γ_λ.

2.1.1 Construction de la solution

Soit $(X; \|.\|_X)$ un espace de Banach complexe quelconque et soient A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaine D_A et D_B dans $X(D_A \subset X, \ D_B \subset X)$. On se propose d'étudier

$$\begin{cases} Ax + Bx - \lambda x = y, \ y \in X, \\ x \in D_A \cap D_B. \end{cases} \tag{2.3}$$

(C'est l'équation (2.2). Avec $L_x = A_x + B_x$.

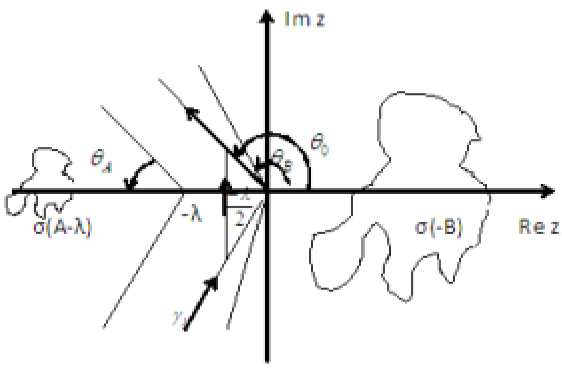

FIGURE 2.1: Présentation graphique de la construction de la courbe γ_λ

On suppose les deux hypothèses $(H1)$ et $(H2)$:

$$(H1)\begin{cases} \exists \theta_A, \theta_B \in [0,\pi[\text{ tels que} \\ i)\ \rho(A) \supset \sum_A = \{z \in \mathbb{C} : |argz| < \pi - \theta_A\} \\ \forall z \in \sum_A ; \left\|(A-z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{C_A(\theta)}{|z|}, \\ ii)\ \rho(B) \supset \sum_B = \{z \in \mathbb{C} : |argz| < \pi - \theta_B\} \\ \forall z \in \sum_B ; \left\|(B-z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \dfrac{C_B(\theta)}{|z|}, \\ C_A \text{ et } C_B \text{ fonctions numériques paires et convexes} \\ iii)\ \theta_A + \theta_B < \pi. \end{cases}$$

Remararque 2.1.2. D_A et D_B sont des espaces de Banach munis des normes de graphe

$$\|x\|_{D_A} = \|x\|_X + \|Ax\|_X \text{ et } \|x\|_{D_B} = \|x\|_X + \|Bx\|_X .$$

Commutativité au sens des résolvantes

$$H2)\begin{cases} \forall z \in \rho(A), \forall z' \in \rho(B) : \left[(A-zI)^{-1}, (B-z'I)\right] = 0, \\ \text{ou } \left[(A-zI)^{-1}, (B-z'I)\right] = (A-zI)^{-1}(B-z'I) - (B-z'I)(A-zI)^{-1}. \end{cases}$$

Remararque 2.1.3. L'hypothèse $\theta_A + \theta_B < \pi$ implique que l'un des deux angles θ_A, θ_B est nécessairement plus petit que $\dfrac{\pi}{2}$.En effet

$$\theta_A + \theta_B < \pi \Longrightarrow \theta_B < \pi - \theta_A \Longrightarrow \exists \theta_0 \text{ tel que } \theta_B < \theta_0 < \pi - \theta_A.$$

On cherche une solution x de la forme

$$x = (A + B - \lambda I)^{-1} y.$$

C'est -à-dire on trouve une formule de représentation de $(A+B-\lambda I)^{-1}$.

La résolution de (2.3) est basée essentiellement sur une construction explicite de la solution sous la forme

$$x = S_\lambda y = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1} (B + z)^{-1} y \, dz.$$

On considère donc dans la suite cet opérateur

$$y (\in X) \mapsto S_\lambda y = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1} (B + z)^{-1} y \, dz.$$

Maintenant, on donne quelques propriétés de S_λ.

Proposition 2.2. *Sous les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H2)$ *on a*

$$S_\lambda \in L(X),\ ie\ : \exists N > 0 : \|S_\lambda\| \leq \frac{N}{\lambda}.$$

Preuve. On a

$$\left\|(B+z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_B(\theta)}{|z|},$$

et

$$\left\|(A-\lambda-z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_A(\theta)}{|\lambda+z|}.$$

De ces majorations, on trouve

$$\begin{aligned}
\|S_\lambda(y)\|_X &= \left\|\frac{-1}{2\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}\ y\ dz\right\| \\
&\leq \frac{-1}{2\pi}\int_{\gamma_\lambda}\left\|(A-\lambda-z)^{-1}\right\|\left\|(B+z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(x)}\|y\|\ \ |dz| \\
&\leq \frac{k}{2\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{|dz|}{|z|\,|\lambda+z|}\|y\|_X\,.
\end{aligned}$$

Posons $z = \lambda \grave{z}$ avec $\lambda > 0$, d'où

$$\|S_\lambda(y)\|_X \leq \frac{k}{2\pi\lambda}\int_{\gamma_\lambda}\frac{d\grave{z}}{|\grave{z}|\,|1+\grave{z}|}\|y\|_X\,.$$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{\gamma_\lambda}\frac{d\grave{z}}{|\grave{z}|\,|1+\grave{z}|}$ est convergente, alors il existe $N > 0$ tel que

$$\|S_\lambda(y)\|_X \leq \frac{N}{\lambda}\|y\|_X\,.$$

∎

Proposition 2.3. *Soit* $\lambda > 0$ *sous les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H2)$ *on a*

1. $\forall x \in D(A+B) = D_A \cap D_B$ *alors :*

$$S_\lambda(Ax + Bx - \lambda x) = x,$$

donc S_λ *est inverse à gauche, pour* $x \in D_A \cap D_B$.

2. *Si* $x \in D_A + D_B$ *alors :*

$$S_\lambda x \in D_A \cap D_B \text{ et } (A+B-\lambda I)S_\lambda x = x,$$

donc S_λ *est inverse à droite mais sur* D_A *ou* D_B *.*
C'est une proposition centrale dans la théorie des sommes.
Pour démontrer cette proposition on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1.1. *Supposons que* $(H1)$ *et* $(H2)$ *sont vérifiées et* $x \in D(A) \cap D(B)$, *alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\ dz = 0,$$

et

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\ dz = x.$$

Preuve. On écrit

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\,dz=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\,dz,$$

où

$$\gamma_R=\{z\in\gamma_\lambda:|z|\leq R\},$$

et

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz\\ &= -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{\overline{R}}}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz\end{aligned}$$

telle que $\gamma_{\bar{R}}$ est la courbe γ_R dans le sens inverse. Posons $\Gamma_R=\gamma_R\cup C_R$ avec

$$C_R=\left\{Re^{i\theta}:\theta_0\leq\theta\leq 2\pi-\theta_0\right\},$$

et

$$\Gamma_R^{'}=\gamma_{\bar{R}}\cup C_R^{'},$$

avec

$$C_R^{'}=\left\{Re^{i\theta}:-\theta_0\leq\theta\leq\theta_0\right\}.$$

On a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\,dz=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_R}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\,dz-\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\,dz.$$

La fonction $\dfrac{(B+z)^{-1}Bx}{z}$ est analytique sur Γ_R et décroît comme $\dfrac{1}{|z|^2}$, donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_R}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\,dz=0$$

grâce au théorème de Cauchy, de plus

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\,dz=0.$$

Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\,dz=0,$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{\overline{R}}}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_R'}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz\\ &\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R'}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz\\ \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{\overline{R}}}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_R'}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz\\ &\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R'}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz\end{aligned}$$

la fonction $\dfrac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}$ n'est pas analytique à l'origine et décroît comme $\dfrac{1}{|z|^2}$ sur Γ'_R, donc d'après la formule des résidus on aura

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'_{\bar{R}}}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz = x.$$

De plus

$$\lim_{R\longrightarrow\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{C'_R}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz = 0.$$

Donc

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\,dz = x.$$

■

Preuve. (de la proposition 2.2.2)

1. Soit $x\in D(L)$, montrons que $S_\lambda(Lx-\lambda x)=x$. On doit calculer pour $x\in D_A\cap D_B$

$$I=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}[Ax+Bx-\lambda x]\,dz$$

On écrit :

$$\begin{aligned}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}[Ax+Bx-\lambda x] &= (B+z)^{-1}\left[(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x\right]\\ &+(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx\\ &=(B+z)^{-1}x+z(B+z)^{-1}x\\ &+(A-\lambda-z)^{-1}x-z(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}x\\ &=(B+z)^{-1}x+(A-\lambda-z)^{-1}x\end{aligned}$$

mais

$$\begin{cases}(B+z)^{-1}x &= \dfrac{x}{z}-\dfrac{B(B+z)^{-1}x}{z}=\dfrac{x}{z}-\dfrac{(B+z)^{-1}Bx}{z} \quad (\text{car } x\in D_B)\\ (A-\lambda-z)^{-1}x &= \dfrac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)^{-1}x}{z}-\dfrac{x}{z}.\end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}[Ax+Bx-\lambda x] &= \frac{-(B+z)^{-1}Bx}{z}+\frac{x}{z}\\ &+\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)^{-1}x}{z}-\frac{x}{z}\\ &=\frac{-(B+z)^{-1}Bx}{z}+\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)^{-1}x}{z}\end{aligned}$$

(grâce à la 1^{ere} identité des résolvantes). D'où

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\,dz-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)^{-1}x}{z},\\ I &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)^{-1}x}{z}+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\,dz,\end{aligned}$$

$I = I_1 + I_2$. On montre que : $I_2 = 0$ à gauche de γ_λ l'application

$$\begin{aligned} z &\longmapsto \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z} \\ \rho(B) &\longmapsto X \end{aligned}$$

est analytique à valeurs dans l'espace Banach X et est en $O(\frac{1}{|z|^2})$, donc $I_2 = 0$ (d'après le théorème de Cauchy). En effet, on considère

$$\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R \{z \in \gamma_\lambda : |z| \leq R\},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\, dz &= \lim_{R\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\, dz \\ &= \lim_{R\longrightarrow+\infty} -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\, dz \quad (\text{sens } (-)) \end{aligned}$$

Pour $z \in C_R$, on pose : $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [\theta_0, 2\pi-\theta_0]$ $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ d'où

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\, dz &= \lim_{R\longrightarrow+\infty} -\frac{1}{2i\pi}\int_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0} \frac{(B+Re^{i\theta})^{-1}}{Re^{i\theta}}\, Rie^{i\theta}d\theta \\ = \lim_{R\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0} (B+Re^{i\theta})^{-1}Bx\, d\theta = 0. \end{aligned}$$

Pour I_1, on utilise le théorème des résidus (à droite). On écrit que

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{R\longrightarrow+\infty} -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda |z|\leq R} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\, dz \\ &= \lim_{R\longrightarrow+\infty} -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\, dz. \end{aligned}$$

$\Gamma_R = \gamma_\lambda \cup C_R$, donc

$$I_1 = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\, dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_R} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\, dz,$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\lambda} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\, dz &= 2\pi i Res\left[\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}, z=0\right] \\ &= 2\pi i x \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_\lambda} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\, dz \\ &= -x \end{aligned}$$

Le $(-)$ avec le sens de la courbe se compensent, le pôle $z = 0$ étant à droite.
Pour C_R on a :

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty} -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\, dz = 0 \quad (\text{lemme de Jordan}).$$

2. $x \in D_A + D_B \Longrightarrow \exists x_0 \in D_A$ et $x_1 \in D_B$ $: x = x_0 + x_1$.
   Puisque les rôles de A et B étant symétrique, il suffit considérer par exemple le cas

où

$x \in D_B$ (ou D_A) alors :

$$S_\lambda x = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}x \; dz.$$

Montrons que : $S_\lambda x \in D_B$ (i.e : s'il existe $BS_\lambda x$?). Il suffit de montrer que

$$(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}x \in D_B.$$

On a

$$(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}x = (B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}x \in D_B,$$

et

$$B(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}x = B(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}x,$$

$$\begin{aligned}
B(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}x &= (B+z-z)(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}x \\
&= (A-\lambda-z)^{-1}x - z(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}x \\
&= (A-\lambda-z)^{-1}\left[x - z(B+z)^{-1}x\right] \\
&= (A-\lambda-z)^{-1}\left[x - (z+B-B)(B+z)^{-1}x\right] \\
&= (A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}x \\
&= (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx.
\end{aligned}$$

Donc : $S_\lambda x \in D_B$ et $B(S_\lambda x) = S_\lambda(B_x)$. Il reste à montrer que $S_\lambda x \in D_A$, on a

$$(B+z)^{-1}x = \frac{x}{z} - \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
S_\lambda x &= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}x \; dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}\left[\frac{x}{z} - \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\right] \; dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx \; \frac{dz}{z} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}x \; \frac{dz}{z},
\end{aligned}$$

et grâce à la formule des résidus on obtient

$$S_\lambda x = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx \; \frac{dz}{z} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}x \; \frac{dz}{z} \tag{2.4}$$

(le $(+)$ provient du sens du parcours et du fait qu'on a

$$(A-\lambda-z)^{-1} = -\left(z-(A-\lambda)^{-1}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
A(S_\lambda x) &= A(A-\lambda)^{-1}x + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} A(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx \; \frac{dz}{z} \\
&= A(A-\lambda)^{-1}x + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (\lambda+z)(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx \; \frac{dz}{z} \\
&+ \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (B+z)^{-1}Bx \; \frac{dz}{dx}.
\end{aligned}$$

L'intégrale $+\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_\lambda}(B+z)^{-1}Bx\ \frac{dz}{dx}$ (en intégrant à gauche de γ_λ)

$$\begin{aligned}
A(S_\lambda x) &= x+\lambda(A-\lambda)^{-1}x+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}\frac{Bx}{z}\ dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx\ dz\\
&= x+\lambda\left[(A-\lambda)^{-1}x+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx\ dz\right]\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx\ dz\\
&= x+\lambda(S_\lambda x)+(-B(S_\lambda x)).
\end{aligned}$$

D'après (2.4), on obtient

$$A(S_\lambda x)+B(S_\lambda x)-\lambda(S_\lambda x)=x.$$

Donc

$$(A+B-\lambda)(S_\lambda x)=x\ (S_\lambda \text{ inverse à droite}).$$

■

2.2 Solutions strictes pour un second membre dans un espace d'interpolation

Pour suivre l'étude de l'équation (2.1) on a besoin de certains espaces d'interpolation
On définit des espaces intermédiaires entre D_A et X (ou D_B et X) pour des opérateurs "sectoriels" A (ou B) vérifiant $(H1)$.

Définition 2.3.

1 Pour $\theta \in]0,1[$ et$p \in [1,+\infty[$ on note $D_A(\theta,p)$ le sous espace de X suivant : $D_A(\theta,p) = \left\{u \in X : \|t\theta^A(A-t)^{-1}u\|_X \in L_*^p\right\}$ muni de la norme $\|u\|_{D_A(\theta,p)} = \|u\|_X + \Big(\int_0^{+\infty} \|t\|^\theta A(A-t)^{-1}u|$

où L_*^p est l'espace des fonctions de puissance p intégrable pour la mesure $\dfrac{dt}{t}$, Pour $p = +\infty$ on a $D_A(\theta,\infty) = \left\{u \in X : \sup\limits_{t>0} \|t\theta^A(A-t)^{-1}u\|_X < +\infty\right\}$ muni de la norme $\|u\|_{D_A(\theta,p)} = \|u\|_X + \sup\limits_{t>0} \|t\theta^A(A-t)^{-1}u\|_X$.

2 Si $p \in [1,\infty]$, on définit l'espace $L_*^p(\mathbb{R}_+,X)$ par

$$f \in L_*^p(\mathbb{R}_+,X) \Longleftrightarrow \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \quad \text{est fortement mesurable et} \\ \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} = \|f(t)\|_{L_*^p} < \infty. \end{cases}$$

On définit l'espace $L_*^\infty(\mathbb{R}_+,X)$ par

$$f \in L_*^\infty(\mathbb{R}_+,X) \Longleftrightarrow \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \quad \text{est fortement mesurable et} \\ Sup\ ess_{0<t<1} \|f(t)\|_X < \infty. \end{cases}$$

1. Soit $p \in [1,\infty]$

Théorème 2.4. *(Solution stricte)*
Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X vérifiant (H_1) et (H_2). Alors pour tout $y \in D_A(\theta,+\infty) + D_B(\theta,+\infty)$ où $\theta \in]0,1[$, il existe une unique solution stricte $x = S_\lambda y \in D_A \cap D_B$ de $A_x + B_x - \lambda x = y$.

Preuve. On suppose que $y \in D_B(\theta,+\infty)$

$$x = S_\lambda y = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz$$

$$\begin{aligned} y \in D_B(\theta,+\infty) &\Longleftrightarrow \sup_{r>0} \left\|r^\theta B(B+r)^{-1}y\right\|_X < +\infty \\ &\Longleftrightarrow \sup_{\substack{|z|>0 \\ z\in\gamma_\lambda}} \left\|z^\theta B(B+z)^{-1}y\right\|_X < +\infty. \end{aligned}$$

Montrons que $x = S_\lambda y \in D_B$ c'est à dire

$$\left\|\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} B(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}y\ dz\right\| < +\infty.$$

On a

$$(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1} = (B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}y,$$

et

$$\begin{aligned}B(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y &= (B+z-z)(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}y\\ &= (A-\lambda-z)^{-1}y - z(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}y\\ &= (A-\lambda-z)^{-1}y - z(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\\ &= (A-\lambda-z)^{-1}\left[y - z(B+z)^{-1}y\right]\\ &= (A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y,\end{aligned}$$

et

$$\left\|B(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\right\|_X \leq \frac{C}{|z+\lambda|\,|z|^\theta}\,\|y\|_{D_B(0,+\infty)}$$

car

$$\left\|B(B+z)^{-1}y\right\| \leq \frac{\|y\|_{D_B(0,+\infty)}}{|z|^\theta},$$

et

$$\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)} = \|y\|_X + \sup\left\|z^\theta B(B+z)^{-1}y\right\|_X.$$

Ainsi l'intégrale $\dfrac{-1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_\lambda} B(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz$ est absolument convergente de plus $x \in D(B)$ et

$$Bx = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y\ dz.$$

Pour prouver que $x \in D(A)$ on utilise l'identité de la résolvante suivante

$$(B+z)^{-1}y = \frac{y}{z} - \frac{B(B+z)^{-1}y}{z}.$$

On a

$$\begin{aligned}x &= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz\\ &= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}\left[\frac{y}{z} - \frac{B(B+z)^{-1}y}{z}\right]\ dz\\ &= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}y\frac{dz}{z} + \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y\ \frac{dz}{z},\end{aligned}$$

en utilisant la formule des résidus on trouve

$$x = (A-\lambda)^{-1}y + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y\ \frac{dz}{z}$$

donc $x \in D(A)$, et

$$\begin{aligned}(A-\lambda)x &= y + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda)(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y\ \frac{dz}{z}\\ &= y + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}B(B+z)^{-1}y\ \frac{dz}{z} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y\ \frac{dz}{z}\\ &= y - Bx,\end{aligned}$$

car $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_\lambda}B(B+z)^{-1}y\ \frac{dz}{z}$ est nulle, alors on a le résultat. ■

2.2.1 Régularité maximale

Théorème 2.5. *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_1) *et* $y \in D_B(\theta,+\infty)$. *Alors* $x = S_\lambda y \in D_A \cap D_B$ *et de plus on a* Ax *et* $Bx \in D_B(\theta,+\infty)$

Preuve. On doit montrer les régularités suivantes

$$Bx \in D_B(\theta,+\infty) \ i.e : \sup_{r>0} \left\| r^\theta B(B-r)^{-1} Bx \right\|_X < +\infty,$$

et

$$Ax \in D_B(\theta,+\infty) \ i.e : \sup_{r>0} \left\| r^\theta B(B-r)^{-1} Ax \right\|_X < +\infty.$$

Soit $r > 0$, assez très grand $(r > \lambda)$, supposons que γ_λ passe à droite du point $z = -r$. On calcule : $B(B-r)^{-1}x$.
On a

$$\begin{aligned}
B(B-r)^{-1}x = B(B-r)^{-1}S_\lambda y \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} B(B-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (B-r+r)^{-1}(B-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} r(B-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} r(B-r)^{-1}(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}y\ dz
\end{aligned}$$

On utilise la 2^{eme} identité de la résolvante :

$$(B-r)^{-1}(B+z)^{-1} = \frac{1}{r+z}\left[(B-r)^{-1} - (B+z)^{-1}\right]$$

Il vient

$$\begin{aligned}
B(B-r)^{-1}x &= x - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}y\ dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}y\ dz \\
&= x + I + \int_{\gamma_\lambda} \frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}y\ dz.
\end{aligned}$$

L'intégrale

$$I = -\int_{\gamma_\lambda} \frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}y\ dz = 0$$

(En intégrant à droite de γ_λ, la fonction $\dfrac{(A-\lambda-z)^{-1}y}{r+z}$ est analytique à droite de λ et $(+z \neq 0)$ et on a

$$B(B-r)^{-1}x = x + r(B-r)^{-1}x,$$

alors $C_R = \gamma_R \cup \Gamma_R$.On a

$$\begin{aligned}
B(B-r)^{-1}x = x + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{r+z-z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz \\
&= x + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz \\
&= x - x - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz,
\end{aligned}$$

D'où
$$B(B-r)^{-1}x=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\ dz.$$
Posons
$$I=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}y\ dz.$$

$$\begin{aligned}I&=\lim_{R\longrightarrow+\infty}\left(-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}y\ dz\right)\\&=\lim_{R\longrightarrow+\infty}\left[\left(-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}y\ dz\right)-\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_R}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}y\ dz\right]\\&=\lim_{R\longrightarrow+\infty}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_R}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}y\ dz,\end{aligned}$$
car
$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}y\ dz=0.$$
Posons $z=Re^{i\theta}\Rightarrow dz=Rie^{i\theta}d\theta$ et $(B-r)^{-1}=\xi$; on obtient
$$\begin{aligned}I&=\lim_{R\longrightarrow+\infty}\left(-\frac{1}{2i\pi}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{r}{r+Re^{i\theta}}(A-\lambda-Re^{i\theta})^{-1}\xi Rie^{i\theta}d\theta\right)\\&=\lim_{R\longrightarrow+\infty}\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{r}{r+Re^{i\theta}}(A-\lambda-Re^{i\theta})^{-1}\xi Re^{i\theta}d\theta\right)\\&\left\|\lim_{R\longrightarrow+\infty}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{r}{r+Re^{i\theta}}(A-\lambda-Re^{i\theta})^{-1}\xi Re^{i\theta}d\theta\right\|\underset{R\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow 0}.\end{aligned}$$

D′ou

$$\begin{aligned}B(B-r)^{-1}Bx&=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y\ dz\\\left\|B(B-r)^{-1}Bx\right\|_x&=\left\|-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y\ dz\right\|_x\\&\leq k\int_{\gamma_\lambda}\left|\frac{z}{\lambda+z}\right|.\frac{1}{|r+z|}.\frac{1}{|z|^\theta}\left|dz\right|\|y\|_{D_B}(\theta,+\infty).\end{aligned}$$

En remplaçant z par rz on obtient
$$\left\|B(B-r)^{-1}Bx\right\|_x\leq k\left[\int_{\gamma_\lambda}\left|\frac{1}{1+z}\right|.\frac{1}{|z|^\theta}\left|dz\right|\right]\frac{\|y\|_{D_B}(\theta,+\infty)}{r^\theta}.$$

D'où
$$\begin{aligned}\left\|r^\theta B(B-r)^{-1}Bx\right\|_x&\leq kr^\theta\left[\int_{\gamma_\lambda}\left|\frac{1}{1+z}\right|.\frac{1}{|z|^\theta}\left|dz\right|\right]\frac{\|y\|_{D_B}(\theta,+\infty)}{r^\theta}\\&\leq k\left[\int_{\gamma_\lambda}\left|\frac{1}{1+z}\right|.\frac{1}{|z|^\theta}\left|dz\right|\right]\|y\|_{D_B}(\theta,+\infty)\\&\leq k'\|y\|_{D_B}(\theta,+\infty)\text{ où }k^{'}=k\left[\int_{\gamma_\lambda}\left|\frac{1}{1+z}\right|.\frac{1}{|z|^\theta}\left|dz\right|\right].\end{aligned}$$

Donc
$$Bx\in D_B(\theta,+\infty).$$

■

Lemme 2.2.1. *Pour r assez grand $(r > \lambda), \forall z \in \gamma_\lambda$, $\exists k > 0$ tels que*

$$|z+r| \geq kr \Rightarrow |z+r| \geq k|z|,$$

et

$$|z-r| \geq kr \Rightarrow |z-r| \geq k|z|.$$

Preuve. Soit $z \in \gamma_\lambda$ et $r > 0$. D'après le schéma on a

$$\begin{aligned} |z \pm r| &\geq ab = r \sin \delta \\ &\geq kr, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |z \pm r| &\geq cd = r|z| \sin \delta \\ &\geq k|z|. \end{aligned}$$

■

Lemme 2.2.2. *Soit $v \in]0,1[$ alors il existe $C > 0$ telle que pour $r > 0$*

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^v} \leq \frac{C}{r^v}, \ \forall z \in \gamma.$$

Preuve. C'est une conséquence du lemme précédent. On pose

$$\gamma = \gamma_r \cup (\gamma - r),$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_r &= \{z \in \gamma : |z| \leq r\}, \\ \gamma - \gamma_r &= \{z \in \gamma : |z| > r\}, \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^v} &= \int_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^v} + \int_{\gamma - \gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^v} \\ \int_\gamma \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^v} &= \int_{\substack{z \in \gamma \\ |z| \leq r}} \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^v} \\ &\leq \frac{k}{r} \int_0^r \frac{|dz|}{|z|^v} \\ &\leq \frac{k}{r} \left[|z|^{1-v} \right]_0^r \\ &\leq \frac{k}{r} r^{1-v} = \frac{k}{r^v}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma - \gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^v} &= \int_r^{+\infty} \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^v} \\ &\leq \int_r^{+\infty} \frac{|dz|}{|z|^{1+v}} \\ &\leq k \left. |z|^{-v} \right]_r^{+\infty} = \frac{k}{r^v}. \end{aligned}$$

Donc, d'après les deux lemmes présidents [2.2.1,2.2.2] on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|r^{\theta}B(B-r)^{-1}Bx\right\|_X &\leq kr^{\theta}\int_{\gamma_\lambda}\frac{|z|}{|r+z|}.\frac{1}{|\lambda+z|}.\frac{1}{|z|^{\theta}}|dz|\,\|y\|_{D_B}(\theta,+\infty)\\ &\leq k.r^{\theta}.\frac{k}{r^{\theta}}\|y\|_{D_B}(\theta,+\infty)\\ &\leq k\|y\|_{D_B}(\theta,+\infty)\Rightarrow Bx\in D_B(\theta,+\infty).\end{aligned}$$

Alors, comme $x \in D_B \subset D_B(\theta,+\infty)$ et de l'équation $Ax = y+\lambda x - Bx$ et $y \in D_B(\theta,+\infty)$, on trouve que $Ax \in D_B(\theta,+\infty)$. ■

Proposition 2.6. *(Régularité croisée) Sous les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H2)$ *et* $y \in D_B(\theta,+\infty)$. *Alors* $B_x \in D_A(\theta,+\infty)$

Preuve.

$$x = S_\lambda y = \int_{\gamma_\lambda}\frac{-1}{2i\pi}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\,dz,$$

$$Bx = \int_{\gamma_\lambda}\frac{-1}{2i\pi}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y\,dz.$$

On doit montrer

$$Bx \in D_A(\theta,+\infty),$$

c'est à dire

$$\sup_{r>0}\left\|r^{\theta}A(A-r)^{-1}Bx\right\| \leq k,$$

ou bien

$$\sup_{r>0}\left\|r^{\theta}(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx\right\| \leq k.$$

$$\begin{aligned}(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx &= (A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}B(S_\lambda y)\\ &= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{1}\ y\,dz\\ &= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-r+r-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{1}\ y\,dz\\ &= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{1}\ y\,dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}r(A-\lambda-r)^{-1}(A-\lambda-z)\end{aligned}$$

D'après la 2^{eme} identité de la résolvante on a

$$(A-\lambda-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1} = \frac{1}{r-z}\left[(A-\lambda-r)^{-1}-(A-\lambda-z)^{-1}\right],$$

donc

$$\begin{aligned}(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx = Bx &- \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{r}{r-z}(A-\lambda-r)^{-1}B(B+z)^{-1}\ y\,dz\\ &+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{r-z+z}{r-z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}\ y\,dz.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx = Bx &+ \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}\ y\,dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r-z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}\ y\,dz,\end{aligned}$$

donc

$$(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r-z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}\ ydz.$$

D'où

$$\begin{aligned}\left\|(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx\right\| &= \left\|-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r-z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}\ ydz\right\| \\ &\leq k\int_{\gamma_\lambda}\frac{|z|}{|1-z|}.\frac{1}{|\lambda+z|\,|z|^{\theta}}\,|dz|\,\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)} \\ &\leq k\frac{\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)}}{r^{\theta}} = \frac{k}{r}\,\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)}\,.\end{aligned}$$

Donc

$$Bx \in D_B(\theta,+\infty).$$

■

Théorème 2.7. *(Régularité maximale) Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X vérifiant $(H1)$ et $(H2)$. Pour $y \in D_A(\theta,\infty)$, la solution stricte x de*

$$Ax + Bx - \lambda x = y,$$

vérifie

1. $(A-\lambda)x \in D_A(\theta,+\infty)$,
2. $B_x \in D_A(\theta,+\infty)$,
3. $(A-\lambda)x \in D_B(\theta,+\infty)$.

CHAPITRE 3

APPLICATION : RÉSOLUTION D'UNE E.D.P. PARABOLIQUE

De nombreux problèmes régis par des équations aux dérivées partielles peuvent se ramener par un choix judicieux de X, de A et B a l'équation abstraite (1), ce qui est une des principales motivations de l'étude de celle-ci. Dans ce chapitre on étudiera deux applications analytiques de ce qui a été développée dans le chapitre précédent. Il est consacre à la présentation de l'étude d'un problème parabolique, qui a été développe par Labbas R. [?] .

3.1 Exemple : l'équation de la chaleur

On s'intéresse à la résolution et à l'étude de la régularité des solutions de l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \lambda u(t,x) = f(t,x), \\ u(0,x) = 0, \quad x \in [0,1], \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.1}$$

posée dans le carre $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. Ici t représente le temps, λ est un nombre positif fixé et f est une fonction donnée dans un espace de Banach X.

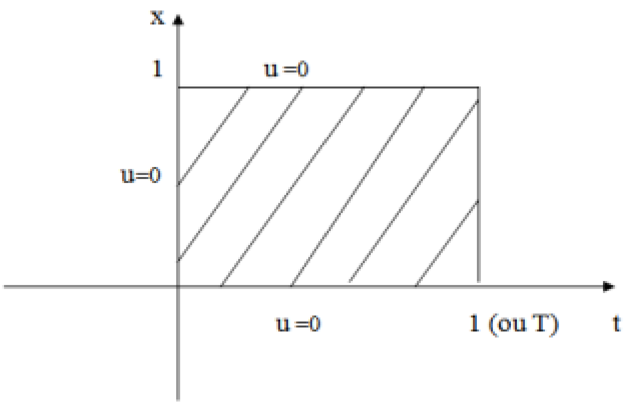

Figure 3.1: Problème parabolique sur Ω

• **Formulation abstraite du problème**
On pose $X = C([0,1];L^p(0,1)) = C([0,1];E)$ muni de la norme

$$\|u\|_X = \max_{t\in[0,1]} \|u(t)\|_E,$$

et définissons la fonction

$$u : [0,1] \longrightarrow L^p(0,1); t \longmapsto u(t); u(t)(x) = u(t,x).$$

$u(t)$ est une fonction de x, elle devient une fonction vectorielle à valeurs dans un espace de fonctions en x, en l'occurrence $L^p(0,1)$. Le problème (3.1) devient le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} -u'(t) + \Lambda u(t) - \lambda u(t) = f(t), \\ u(0) = 0, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

Où Λ est l'opérateur linéaire sur X

$$\begin{cases} D(\Lambda) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(]0,1[)/\varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\} \\ \Lambda\varphi = \varphi'' = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \end{cases}$$

On définit les opérateurs A et B sur X par :

$$\begin{cases} D_A = \left\{u \in C^1([0,1];X), u(0) = 0\right\} \\ Au = -u', u \in D_A. \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_B = \{u \in E/\forall t \in [0,1], u(t) \in D\Lambda\} \\ (Bu)(.) = \Lambda(u(.)), u(t) \in D_B. \end{cases}$$

Alors le problème (3.1) s'écrit dans X sous la forme :

$$Au + Bu - \lambda u = f \in X.$$

• **Application des sommes**
On utilise la technique des sommes d'opérateurs linéaires de Da Prato et Grisvard dans le cadre commutatif pour étudier l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème (3.1).
Vérification de l'hypothèse H_1 Considérons d'abord le problème suivant

$$\begin{cases} \varphi''(x) - z\varphi(x) = g(x), \quad x \in (0,1), \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

On résout d'abord l'équation homogène

$$\varphi''(x) - z\varphi(x) = 0, \quad x \in (0,1)$$

Son équation caractéristique associée : $r^2 - z = 0$ admet deux racines : $r_1 = \sqrt{z}, r_2 = -\sqrt{z}$, où $z > 0$.
La solution de (3.2) s'écrit alors sous la forme :

$$\varphi(x) = c_1 e^{\sqrt{zx}} + c_2 e^{-\sqrt{zx}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Déterminons les constantes c_1 et c_2 :

$$\begin{cases} \varphi(0) = c_1 + c_2 = 0, \\ \varphi(1) = c_1 e^{\sqrt{z}} + c_2 e^{-\sqrt{z}} = 0. \end{cases}$$

On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{z}} & e^{-\sqrt{z}} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{z}} - e^{\sqrt{z}} \neq 0.$$

Donc le problème homogène admet une unique solution qui est la solution triviale $\varphi \equiv 0$. Par conséquent, il existe une fonction de Green unique $K\sqrt{z}$ telle que la solution de problème(3.2) s'écrit d'une façon unique :

$$\varphi(x) = \int_0^1 K_{\sqrt{z}}(x,s) g(s)\, ds, \quad x \in [0,1],$$

et on détermine le noyau de Green de la manière suivante

$$K_{\sqrt{z}}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\Phi_1(x)\Phi_2(x)}{(\Phi_1, \Phi 2)(x)}, & \text{si } 0 \leq x \leq s, \\ \dfrac{\Phi_1(s)\Phi_2(s)}{(\Phi_1, \Phi 2)(s)}, & \text{si } s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} (\Phi_1, \Phi 2)(x) &= \begin{vmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \\ \Phi_1'(x) & \Phi_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \Phi_1(x)\Phi_2'(x) - \Phi_1'(x)\Phi_2(x), \end{aligned}$$

et Φ_1, Φ_2 sont deux fonctions vérifiant les deux problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} \Phi_1''(x) - z\Phi_1(x) = 0, \\ \Phi_1(0) = 0, \quad \Phi_1'(0) = -1. \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \Phi_2''(x) - z\Phi_2(x) = 0, \\ \Phi_2(0) = 0, \quad \Phi_2'(0) = -1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Résolution du problème de Cauchy (3.3). On a

$$\Phi_1(x) = c_1 e^{\sqrt{zx}} + c_2 e^{-\sqrt{zx}}.$$

Donc

$$\Phi_1(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0.$$

D'autre part, on a

$$\Phi_1'(x) = c_1\sqrt{z} e^{\sqrt{zx}} - c_2\sqrt{z} e^{-\sqrt{zx}},$$

Alors

$$\Phi_1'(0) = -1 \Rightarrow c_1\sqrt{z} - c_2\sqrt{z} = -1.$$

Pour déterminer c_1 et c_2, on va résoudre ce système de Cramer :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1\sqrt{z} - c_2\sqrt{z} = -1. \end{cases}$$

On a
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{z} & -\sqrt{z} \end{vmatrix} = -2\sqrt{z} \neq 0.$$
donc,
$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{z} \end{vmatrix}}{-2\sqrt{z}} = \frac{-1}{2\sqrt{z}}, \; c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{z} & -1 \end{vmatrix}}{-2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$
Par suite,
$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \frac{-1}{2\sqrt{z}} e^{\sqrt{z}x} + \frac{1}{2\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}x}, \\ &= \frac{-1}{\sqrt{z}} \frac{e^{\sqrt{z}x} - e^{-\sqrt{z}x}}{2}, \\ &= \frac{-1}{z} \sinh \sqrt{z}x. \end{aligned}$$
Résolution du problème de Cauchy (3.4). On a
$$\Phi_2(x) = c_1 e^{\sqrt{z}x} + c_2 e^{-\sqrt{z}x},$$
Donc
$$\Phi_2(1) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{z}} + c_2 e^{-\sqrt{z}} = 0.$$
D'autre part, on a
$$\Phi_2'(x) = c_1 \sqrt{z} e^{\sqrt{z}x} - c_2 \sqrt{z} e^{-\sqrt{z}x},$$
donc
$$\Phi_2'(1) = 1 \Rightarrow c_1 \sqrt{z} e^{\sqrt{z}} - c_2 \sqrt{z} e^{-\sqrt{z}} = 1.$$
Pour déterminer c_1 et c_2, on va résoudre ce système de Cramer :
$$\begin{cases} c_1 e^{\sqrt{z}} + c_2 e^{\sqrt{z}} = 0, \\ c_1 \sqrt{z} e^{\sqrt{z}} - c_2 \sqrt{z} e^{\sqrt{z}} = 1. \end{cases}$$
On a
$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{z}} & e^{-\sqrt{z}} \\ \sqrt{z} e^{\sqrt{z}} & -\sqrt{z} e^{-\sqrt{z}} \end{vmatrix} = -2\sqrt{z} \neq 0,$$
donc
$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-\sqrt{z}} \\ 1 & -\sqrt{z} e^{-\sqrt{z}} \end{vmatrix}}{-2\sqrt{z}} = \frac{e^{-\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}, \; c_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{\sqrt{z}} & 0 \\ \sqrt{z} e^{\sqrt{z}} & 1 \end{vmatrix}}{-2\sqrt{z}} = \frac{-e^{\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}.$$
Par suite,
$$\begin{aligned} \Phi_2(x) &= \frac{e^{-\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}} e^{\sqrt{z}x} - \frac{e^{\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}x}, \\ &= \frac{-1}{\sqrt{z}} \frac{e^{\sqrt{z}(1-x)} - e^{-\sqrt{z}(1-x)}}{2}, \\ &= \frac{-1}{\sqrt{z}} \sinh \sqrt{z}(1-x). \end{aligned}$$

Finalement, on aura

$$K_{\sqrt{z}}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{z}(1-x)\sinh\sqrt{z}s}{\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}}, & \text{si } 0 \leq s \leq x, \\ \dfrac{\sinh\sqrt{z}x\sinh\sqrt{z}(1-s)}{\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}}, & \text{si } x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

La majoration de la résolvante $\left\|(\Lambda - z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))}$ découlera du lemme de Schur suivant

Lemme 3.1.1. *(de Schur ou l'interpolation de Riesz-Thorin) Soit $K : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que*

- $\exists \alpha > 0 / \forall x_2 \in \Omega_2 : \displaystyle\int_{\Omega_1} |K(x_1,x_2)| \ dx_1 \leq \alpha,$
- $\exists b > 0 / \forall x_1 \in \Omega_1 \ : \displaystyle\int_{\Omega_2} |K(x_1,x_2)| \ dx_2 \leq b$ *Alors l'opérateur F défini par*

$$T(f)(x_2) = \int_{\Omega_1} K(x_1,x_2) f(x_1) \ dx_1,$$

vérifie

$$T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_1), L^p(\Omega_2)).$$

Comme $K_{\sqrt{z}}(.,.)$ est symétrique, on a

$$\left\|(\Lambda - z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leq \frac{1}{|z|\cos\frac{\theta}{2}}.$$

où $\theta = argz$ et ceci pour tout $z \notin]\infty, 0]$.
En posant

$$\begin{cases} D_B = \left\{u \in C([0,1]; L^p(0,1)) / \forall t \in [0,1], u(t) \in D_\Lambda\right\}, \\ (Bu)(t) = \Lambda u(t). \end{cases}$$

alors B est linéaire fermé (car Λ l'est), et pour la résolvante de B, on procéde comme suit :

$$\begin{cases} Bu - zu = f, \\ u \in D_B. \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \Lambda u(t) - zu(t) = f(t) \text{ avec } f(t) \in L^p(0,1), \\ \Lambda(t) \in D_\Lambda. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} ((B-z)^{-1}f)(t) = (\Lambda - z)^{-1} f(t) = u(t) \text{ avec } f(t) \in L^p(0,1), \\ \forall t \in [0,1]. \end{cases}$$

Et on a

$$\phi_B \supset \left\{z \in C / |arg(z)\| < \pi\right\},$$

ainsi

$$\theta_B = 0.$$

Revenons maintenant à l'opérateur A défini par :

$$\begin{cases} D_A = \left\{u \in C^1([0,1]; L_p(0,1)) / u(0) = 0\right\}, \\ (Au)(t) = -u^{'}(t). \end{cases}$$

A est linéaire fermé, sa résolvante découle de la résolution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} Au - zu = f, \\ u \in D_A. \end{cases}$$

qui est équivalente à

$$-u^{'}(t) - zu(t) = f(t), u(0) = 0. \tag{3.5}$$

cette équation est une équation différentielle de premier ordre, et son équation homogène est :

$$-u^{'}(t) - zu(t) = 0. \tag{3.6}$$

Il est clair que le problème homogène admet la solution triviale $u \equiv 0$.
D'autre part,
on a si $u \neq 0$ Variation de la constante k : On remplace dans (3.5), et on obtient

$$-k^{'}(t)e^{-zt} + zk(t)e^{-zt} - zk(t)e^{-zt} = f(t)$$

Donc

$$k(t) = -\int_0^t e^{zs} f(s)\ ds.$$

D'où :

$$u(t) = -\left(\int_0^t e^{zs} f(s)\ ds\right) e^{-zt}.$$

Donc, la solution générale du problème (3.5) s'écrit sous la forme :

$$u(t) = -\int_0^t e^{-z(t-s)} f(s)\ ds.$$

Cette représentation a un sens pour tout $z \in \mathbf{C}$, ceci implique que $\rho_(A) = C$.
Mais

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_E &= \int_0^t e^{-Re(z)(t-s)} \|f(s)\|_E\ ds, \\ &= \frac{1 - e^{-Re(z)t}}{Re(z)} \text{ si } Re(z) > 0, \\ &= \frac{1}{Re(z)}. \end{aligned}$$

Donc $\rho_{(A)}$ contient tout secteur de la forme : $\sum_{\rho_{(A)}} = \left\{ z \in \mathbf{C} / |arg(z)| \leq \pi - \rho_{(A)} \right\}$ avec $\frac{\pi}{2} <$ $\rho_{(A)} < \pi$
et sur ce secteur on a l'hypothèse (H1).

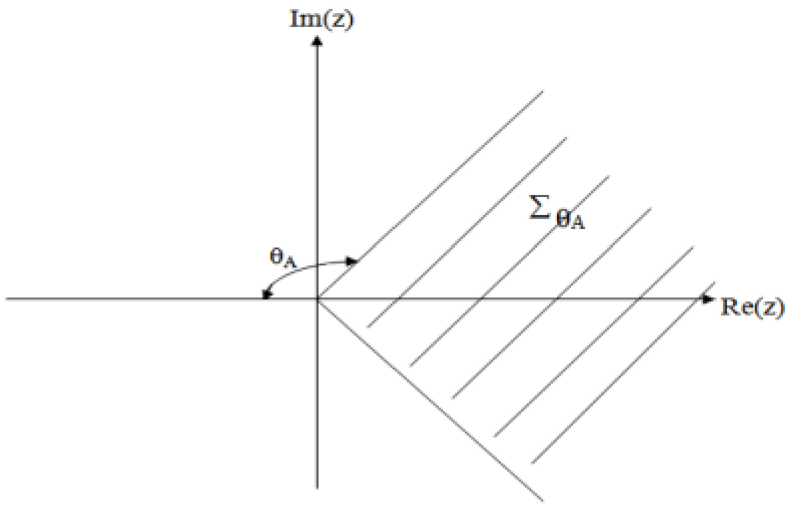

FIGURE 3.2: domain de $\sum\limits_{\rho(A)}$

Donc pour tout $z \in \sum\limits_{\rho(A)}, arg(z) = \theta$ et on a :

$$\left\|(A-z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{Re(z)} = \frac{1}{|z|\cos\theta}.$$

Et

$$\rho_{(A)} + \rho_{(B)} = \rho_{(A)} + \theta < \pi.$$

•**Commutativité des résolvantes** Soient $z \in \rho_{(A)}$ et $z^{'} \in \rho_{(B)}$. On a

$$(A-z)^{-1}(B-z^{'})^{-1}f = (A-z)^{-1}((B-z^{-1})^{-1}f).$$

$$\begin{aligned}\Big\{(A-z)^{-1}(B-z^{'})^{-1}f\Big\}(t) &= -\int_0^t e^{-z(t-s)}\Big\{(B-z^{'})^{-1}f\Big\}(s)\ ds,\\ &= -\int_0^t e^{-z(t-s)}\Big\{(\Lambda-z^{'})^{-1}f(s)\Big\}\ ds.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Big\{(A-z)^{-1}((B-z^{'})^{-1}f)(t)\Big\}(x) &= -\int_0^t e^{-z(t-s)}\Big\{(\Lambda-z^{'})^{-1}f(s)\Big\}(x)\ ds,\\ &= \int_0^t K_{\sqrt{z'}}(x,\tau)\left(-\int_0^t e^{-z(t-s)}[f(s)](\tau)\ ds\right)\ d\tau,\\ &= \int_0^t K_{\sqrt{z'}}(x,\tau)\left(-\int_0^t e^{-z(t-s)}f(s)\ ds\right)\ d\tau,\\ &= \int_0^t K_{\sqrt{z'}}(x,\tau)\left(\Big\{(A-z)^{-1}f\Big\}(t)\right)(\tau)d\ \tau,\\ &= \Big\{(B-z^{'})^{-1}\left(\Big\{(A-z)^{-1}f\Big\}(t)\right)\Big\}(x).\end{aligned}$$

Donc l'hypothèse (H2) est vérifiée.
•**Régularité maximale** Alors grâce au résultat de Da Prato et Grisvard on a le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Pour* $f \in C^{\theta}([0,1];L^{p}(0,1)) \supset C([0,1];L^{p}(0,1)), \theta \in]0,1[$ *et* $1 < p < +\infty$, *avec* $f(0) = 0$, *le problème (3.1) admet une unique solution* u *définie par* $u = S_{\lambda} f$ *vérifiant*

$$u \in C^{1}([0,1];L^{p}(0,1)) \cap C([0,1];W^{2,p}(0,1)).$$

et de plus

$$Au, Bu \in C^{\theta}([0,1];L^{p}(0,1)).$$

où l'espace de Hölder

$$C^{\theta}([0,1];L^{p}(0,1)) = \Big\{\phi : [0,1] \longrightarrow L^{p}(0,1) / \sup_{x,x' \in [0,1], x \neq x'} \frac{\left\|\phi(x) - \phi(x')\right\|}{\left\|x - x'\right\|^{\theta}} < +\infty\Big\}.$$

est muni de la norme

$$\|\phi\|\, C^{\theta}([0,1];L^{p}(0,1)) = L^{p}(0,1) / \sup_{x,x' \in [0,1], x \neq x'} \frac{\left\|\phi(x) - \phi(x')\right\|}{\left\|x - x'\right\|^{\theta}}\Big\} + \|\phi\|_{C([0,1];E)}.$$

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce modeste travail, on a donné une introduction à la méthode des sommes d'opérateurs linéaires fermés dans les espaces de Banach dans la cadre commutatif.
D'abord, on a rappelé les outils mathématiques et les notions de base liées à cette théorie, ensuite on a énoncé les différentes hypothèses utilisées par cette méthode.
Enfin, on a mis en évidence cette méthode en donnant un exemple d'application illustratif, cet application concerne la résolution d'une E.D.P. parabolique.
En perspectives, il sera intéressant de :
- Voir d'autres approches pour cette méthode.
- Identifier le fonctionnement de cette méthode dans d'autres cadres fonctionnels.
- Résoudre les différents problèmes rencontrés en utilisant cette méthode.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Li. *Cours d'analyse fonctionnelle. éditions-ellipses, 2013, France.*

[2] G. Da Prato and P. Grisvard. *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles. J. Math. Pures et Appl. Ser., 54 :305–387, 1975.*

[3] G. Da Prato. *On an abstract theorem and its applications to boundary value problems for non classical equations. Confernez del seminario di mat della Universita di Bari, 119, 1969.*

[4] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle théorie et applications. Masson, Pris, New Yourk, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo, 1983.*

[5] H.Tliebel. *Interpolation Theory, Fonction Spaces, Differential Operators. Amasterdam, New York, Oxford, North Holland, 1978.*

[6] M. Abdallah. *Etude de certaines extensions de la théorie des sommes d'opérateurs, Da Prato-Grisvard, cadre commutatif. Thèse magister, 2012.*

[7] M. R. Spiegel. *Variables Complexe, Cours et problèmes, New York, 1973*

[8] M. Paul Ahues Blanchait. *Spectres et Analyse fonctionnelle, 1 ère édition 2015*

[9] P. Grisvard. *Equations opérationnelles abstraites dans les espaces de banach et problèmes aux limites dans les ouverts cylindriques. Ann. S.N.S. Pisa, 21 :1–307, 1967.*

[10] R. Labbas. *Introduction à la théorie des sommes d'opérateurs linéaires (cadre commutatif). E.N.S. kouba, 2005.*

[11] S. Maingot et R. Labbas. *Sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires de Da Prato-Grisvard(Cadre commutatif). May 4, 2006.*

[12] Z. Dennis G. *A first course in complex analysis with applications, Jones and Bartlett Publishers. Canada, 2003*