RÉPUBLIQUE ALGÉRIÈNNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RE
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI
Faculté des Mathématiques & Informatique

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**
En : **Mathématiques**
Spécialité : **Analyse mathématique et applications**
Par : **BENRAOUDA Aya & BESSAI Chaima**

Sujet : Problème de transmission d'équations des ondes viscoélastiques

---

Soutenu publiquement, le ***.... / 07 / 2021****, devant le jury composé de :*

BENTERKI Djamila	Maître de Conférences classe -**A**-	Présidente
BERKANI Amirouche	Maître de Conférences classe -**A**-	Encadreur
GHERMOUL Bilal	Maître de Conférences classe -**B**-	Examinateur

Promotion 2020/2021

Dédicaces

À mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années de ma vie, et qui a veillé chaque jour à me soutenir, à m'encourager et à me garder toujours heureuse, je ne saurai trouver les propos adéquats pour t'expliquer mon amour et mes remerciements.

À celle qui m'a donné la vie, la source du mon bonheur, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour ma joie et ma réussite et qui a veillé à éclaircir mon chemin. À toi ma chère mère, je t'adore.

À mes chers frères, mes amis, ma source de persévérance, de courage et de générosité, ma vie ne sera pas aussi formidable sans vous. Vous êtes les meilleurs frères au monde.

À mes chères sœurs, vous aurez toujours une place de choix dans mon cœur. La vie m'a fait un très beau cadeau en faisant de vous mes sœurs, que dieu vous protège et vous garde pour moi.

À Chaima, merci pour les beaux moments que nous avons vécus ensemble pendant toutes ces moins, je souhaite que notre amitié dure tout au long de la vie.

À mes amis, en souvenir de nos éclats de rire et des bons moments, en souvenir de tout ce qu'on a vécu ensemble, j'espère de tout mon cœur que notre amitié durera éternellement.

BENRAOUDA Aya

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À ceux que je dois tout, mes parents pour ses sacrifices et qui m'a aidé et pousser à réaliser ce travail, et pour toute la confiance qu'ils m'accordent.

À mon frère et mes sœurs, pour leurs encouragements, leurs aides et leurs patiences.

À tous mes collègues de la promo analyse mathématique et application, sans oublier mon binom qui m'a accompagné pour réaliser ce projet et à mes amis pour leurs soutien inconditionnel et leurs conseils .

Et enfin à ma raison de vivre l'homme de ma vie pour tout l'amour qu'il m'entoure.

BESSAI Chaima

Remerciements

Avant tout, nous remercions « Allah » le tout puissant, de nous avoir éclairci le chemin tout au long de notre vie et de nous avoir donné le courage, la force et la volonté pour réussir. Dieu qui nous a permis de mener à terme ce travail et d'arriver à ce jour qui est pour nous le point de départ d'une merveilleuse aventure, celle de la recherche et du perfectionnement.

À notre enseignant et encadreur Dr. BERKANI Amirouche, nous vous remercions pour votre disponibilité, votre sens de compréhension et votre ardeur au travail, qui nous ont permis tout au long de ces mois, de travailler dans une atmosphère de confiance et de sécurité. Merci pour votre aide précieuse, pour vos judicieux conseils et pour le temps que vous nous avez consacré.

Aux membres de jury, nous vous remercions de l'honneur que vous nous avez fait en acceptant de siéger dans le jury de notre mémoire. Nous sommes très heureuses de pouvoir bénéficier de votre apport pour l'amélioration de la qualité de notre travail. Veuillez trouver dans ce travail le témoignage de notre très sincère reconnaissance, de notre respectueuse estime ainsi que notre grande considération.

Sans oublier de remercier l'ensemble des enseignants qui nous ont suivi durant notre cursus universitaire.

Et a la fin, nous adressons nos sincères gratitudes à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la décroissance exponentielle de l'énergie des solutions lorsque le temps tend vers l'infini d'un problème de transmission d'équations des ondes viscoélastiques.

Après une introduction général, nous présentons quelques notions fondamentales d'analyse fonctionnelle. Ensuite, en utilisant le principe de Hamilton généralisé, nous modélisons mathématiquement le problème posé. Puis, en basant sur les approximations de Faedo-Galerkin et quelques résultats de compacités, nous montrons que le problème considéré possède une solution unique.

Enfin, nous démontrons la stabilité exponentielle du système en utilisant la méthode des multiplicateurs. Les techniques utilisées sont basées sur la construction d'une fonction de Lyapunov $\mathscr{L}$, qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème.

Mots-clés : *problème de transmission ; équations des ondes viscoélastiques ; existence et unicité de la solutions ; méthode de Faedo-Galerkin ; stabilité exponentielle.*

Abstract

The main purpose of this memory is to study the existence and uniqueness of the solution as well as the the exponential decay of the energy when the time goes to the infinity for the transmission problem of viscoelastic waves equations.

After an introduction, we present some fundamentals notions of functional analysis, then using Hamilton principle we modelled mathematically our problem. Based on approximations of Faedo-Galerkin and some compactness results we show that the problem considered has only solution.

Finally, we prove the exponential stability of the system using the multiplier method. The techniques used are based on the construction of a Lyapunov function $\mathscr{L}$, which is equivalent to the energy functional of the problem.

Keywords : *transmission problem ; viscoelastic waves equations ; existence and uniqueness ; of the solution Faedo-Galerkin method ; exponential stability.*

Table des matières

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles (É. D. P) ont été largement utilisées dans le domaine de l'ingénierie dans ces dernières années. C'est en effet grâce à la modélisation des phénomènes à travers des équations aux dérivées partielles, qui nous permettent de comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. En particulier les équations des ondes modélisent plusieurs phénomènes naturels en : Physique, Chimie, Biologie, Économie, etc.

Un problème d'équations aux dérivées partielles consiste à se donner, en plus des équations proprement dites, soit des conditions initiales soit des conditions aux limites soit les deux à voir si une solution existe, si elle unique, si elle dépend régulièrement des données et à chercher des algorithme de calcul. La théorie du contrôle des É. D. P. intervient dans différents contextes et de plusieurs manières. Les problèmes de contrôlabilité, d'observabilité et de stabilisation des équations aux dérivées partielles ont fait l'objet, récemment, de nombreux travaux.

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action ; elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation.

Dans ce mémoire on étudie l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la décroissance exponentielle de l'énergie des solutions lorsque le temps tend vers l'infini d'un problème de transmission d'équations des ondes viscoélastiques. Notre travail consiste a détaillé le travail de J. E. M. Rivera et H. P. Oquendo [9]. Plus précisément, on s'intéresse à l'étude du problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt}(x,t) - \alpha_1 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in]0, L_0[, \quad t > 0, \\ \rho_2 v_{tt}(x,t) - \alpha_2 v_{xx}(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s) v_{xx}(x,s)\,ds = 0 & x \in]L_0, L[, \quad t > 0 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(0,t) = v(L,t) = 0, \quad u(L_0,t) = v(L_0,t), & t > 0, \\ \alpha_1 u_x(L_0,t) = \alpha_2 v_x(L_0,t) - \displaystyle\int_0^t g(t,s) v_x(L_0,s)\,ds, & t > 0 \end{cases}$$

et les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in]0, L_0[, \\ v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), & x \in]L_0, L[, \end{cases}$$

où ρ_1, ρ_2 α_1 et α_2 sont des constantes positives, et u, v et g sont des fonctions. Ce travail est décomposé en trois chapitres.

Chapitre 1 : Dans ce chapitre nous allons présenter des rappels sur d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans notre travail. En particulier, nous allons donner quelques résultats fondamentaux concernant les espaces fonctionnels et les théorèmes d'existence.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous allons modéliser mathématiquement le problème physique en utilisant le principe de Hamilton généralisé ainsi que nous allons prouver un résultat d'existence et l'unicité de la solutions en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

Chapitre 3 : Dans cette partie, nous allons démontrer la décroissance exponentielle de la solution. Les techniques utilisées sont basées sur la construction d'une fonction de Lyapunov $\mathscr{L}$, qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème. Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport à x_i. Définissons aussi le gradient et le Laplacien de u, respectivement comme suit :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T \quad \text{et} \quad \left|\nabla u\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2,$$

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}.$$

1.1 les espaces $C^k(\Omega)$

Soient m un entier positif et Ω un intervalle de $\mathbb{R}$. On notera par :
$C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$,
$\big(C(\Omega)\big)^m$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$,
$C_b(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$, on le munit de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Pour $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, on définit alors :
$C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω,
$C_c^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $C^k(\Omega)$ dont le support est compact et inclus dans Ω,
$C_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.

1.2 Espaces $L^p(\Omega) : 1 \leq p < \infty$

On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'espace vectoriel $L^1(\Omega)$ devient un espace complet muni de la norme :

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |u(x)|\, dx.$$

Si $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et } \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

On munit cet espace vectoriel de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

qui le rend complet.
Si $p = \infty$, on définit :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \exists C > 0,\ \text{telle que } u \text{ est mesurable et } |u(x)| < C \right\}.$$

Cet espace vectoriel est complet pour la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ M > 0,\ \ |u(x)| \leq M \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

Remarque 1.1. *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} uv dx,\ \ u, v \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert et l'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

1.3 Espaces de Sobolev

On définit tout d'abord le concept de la dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ cette notion généralise la dérivation usuelle (dérivation forte) et est un cas particulier de la dérivation au sens des distributions(voir[3]).

Définition 1.1. *Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$, on dit que v est dérivable au sens de distribution dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$ pour $i \in \{1, ..., N\}$ telle que pour tout fonction $\phi \in C_0^\infty$ on a :*

$$\int\limits_{\Omega} v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int\limits_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx.$$

chaque w_i est appelée la i-ème dérivée partielle de v et notée désormais $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$.

1.3.1 Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace vectoriel $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \text{ tel que : } \frac{du(x)}{dx} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{du(x)}{dx} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

est un espace de Banach. On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Définition 1.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \textit{tel que } \forall i \in \{1, ..., N\} \; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v au sens de la définition (1.1).

Proposition 1.1. *Muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \Big(u(x)v(x) + \nabla u(x) \nabla . v(x) \Big) dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H_1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \Big(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \Big) \right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. (Voir [2]) □

Définition 1.3. *Soit $C_c^\infty(\Omega)$l'espace des fonctions de classeC^∞ à support compact dans* (Ω)*. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

1.3.2 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Pour $m \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega), \text{tel que } \frac{d^k u}{dx^k} \in L^p(\Omega), \; k \leq m \right\}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $\frac{d^k u}{dx^k}$ est la dérivée faible d'ordre k de u au sens de la définition (1.1). C'est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{k \leq m} \left\| \frac{d^k u}{dx^k} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 1.2. *Les espaces $H^m(\Omega)$, sont des espaces de Hilbert muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{k \leq m} \left(\frac{d^k u}{dx^k}, \frac{d^k v}{dx^k} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad u, v \in H^m(\Omega).$$

1.3.3 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Définition 1.4. *Soient $1 \leq p < \infty$ et X un espace de Banach, si p est fini on définit $L^p(0,T;X)$ par :*

$$L^p\big(0,T;X\big) = \left\{ u : [0,T] \to X \text{ mesurable, telle que } \int\limits_0^T \|u\|_X^p \, dt \; < \infty \right\}$$

où $[0,T]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit cet espace de la norme :

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int\limits_0^T \|u\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si p est infini, alors on définit

$$L^\infty\big(0,T;X\big) = \left\{ u :]0,T[\to X \text{ mesurable, telle que } \sup_{t\in[0,T]} ess \, \|u\|_X < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in[0,T]} ess \, \|u(t)\|_X \, .$$

Théorème 1.1. *Les espaces $L^p\big(0,T;X\big)$ munis des normes précédentes sont des espaces de Banach pour $p \in [0,\infty]$.*

Démonstration. (Voir [4]). □

On peut, comme dans le cas d'une fonction réelle définir la dérivée au sens classique ou au sens généralisé d'une fonction à valeurs vectorielles.

Remarque 1.3. $C\big([0,T],X\big) = \Big\{ u : \; [0,T] \longrightarrow X$ *continue i.e.* $\|u(t) - u(t_0)\|$ *tend vers zéro quand t tend vers* $t_0 \Big\}$. *Si pour tout $t_0 \in [0,T]$, la limite suivante existe dans X*

$$u'(t_0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h}\Big[u(t_0+h) - u(t_0)\Big]$$

alors on dira que u est dérivable au sens classique et si de plus, la fonction $t \longmapsto u'(t)$ est continue on dira alors que u appartient à $C^1\big([0,T],X\big)$. De façon générale, pour $k \geq 1$ entier, on peut définir :

$$C^k\big([0,T],X\big) = \Big\{ u \in C^{k-1}\big([0,T],X\big) \text{ tel que } u^{(k)} \in C\big([0,T],X\big) \Big\}.$$

1.4 Inégalités

Lemme 1.1. *(Inégalité de Hölder). (Voir [1]) Soit $1 < p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p définie par*

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et

$$\int\limits_\Omega |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \, . \tag{1.1}$$

Corollaire 1.1. *Si $p = q = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} . \tag{1.2}$$

Lemme 1.2. *(Inégalité de Young). Soient $1 < p,\ q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a, b \geq 0$. Alors pour tout $\eta > 0$,*

$$ab \leq \eta a^p + C_\eta b^q$$

où

$$C_\eta = \frac{1}{q\,(\eta p)^{\frac{p}{q}}}.$$

Démonstration. (Voir [5]). □

Remarque 1.4. *pour $p = q = 2$, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme*

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}. \tag{1.3}$$

On introduit ensuite :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \text{adhèrence de } D(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega), \\ &= \text{sous-espce } deH^1(\Omega)\,, \text{des fonctions "nulle" sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Lemme 1.3. *(Inégalité de Poincaré). Pour toute fonction ϕ définie pour tout $x \in [0, L]$ et $t \in [0, \infty)$ et continument différentiable sur $[0, L]$, alors, on a :*

$$\int_0^L \phi^2(x,t)dx \leqslant 2L\phi^2(L,t) + 4L^2 \int_0^L \phi_x^2(x,t)dx.$$

Démonstration. Voir [6]. □

Lemme 1.4. *(Inégalité de Gronwall). Soient α une fonction non-négative de $L^1(0, \infty)$ et g une fonction de $L^\infty(0, \infty)$. Soit β une constante positive ou nulle. Si*

$$g(t) \leq \beta + \int_0^t \alpha(s)g(s)ds;$$

alors

$$g(t) \leq \beta \exp\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right).$$

1.5 Quelques formules utiles

Théorème 1.2. *(Formule de Green)(Voir [2]) Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1. Soit ω une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial\Omega} \omega(x)\eta_i ds, \tag{1.4}$$

où η_i est la i-ème composante de la normale extérieure unité de Ω.

Corollaire 1.2. *(Formule d'intégration par parties) Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1. Soit u et v deux fonctions de $C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties*

$$\int_{\Omega} u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_{\Omega} v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\eta_i(x)ds. \tag{1.5}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $\omega = uv$ dans le Théorème(1.2). □

Lemme 1.5. *(Formule de Leibniz). Supposons que $f(x,y)$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ sont continues sur un rectangle $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, et supposons que $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions de $a \leq x \leq b$ dans $c \leq y \leq d$ telles que u' et v' sont continues sur $a \leq x \leq b$. Alors*

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy = f\big(x, v(x)\big)v'(x) - f\big(x, u(x)\big)u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

1.6 Méthode de Faedo-Galerkin

1.6.1 Introduction

La méthode de Galerkin est une méthode, ou plutôt une famille de méthodes très générale et très robuste. Son idée est la suivante, partant d'un problème variationnel posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché en dimension finie, ce qui est en générale plus facile de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'un autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également dans certains cas un procédé constructif d'approximation.

Définition 1.5. *Soit V un espace de Hilbert séparable et $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'espace vectoriels de dimension finie vérifiant les axiomes :*

1) *$V_n \subset V$, dim $V_n < \infty$;*

2) *$V_n \longrightarrow V$ quand $n \longrightarrow \infty$.*

Au sens suivant : il existe $\mathcal{V}_n$ sous-espace dense dans V, tel que pour tout $u \in \mathcal{V}_n$, on peut trouver une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant : pour tout $n, u_n \in V_n$ et $u_n \longrightarrow u$ dans V lorsque $n \longrightarrow \infty$. L'espace V_n s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre n.

1.6.2 Le schéma de la méthode de Faedo-Galerkin

Soit $(\mathcal{P})$ le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution dans un espace de fonction construit sur un espace de Hilbert séparable V. Soit u la solution unique du problème $(\mathcal{P})$. Aprés avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin V_n de V, il convient de définir un problème approché $(\mathcal{P}_n)$ dans l'espace de dimension finie (V_n) ayant une unique solution (u_n). Le déroulement de l'étude est alors le suivant :

Étape 1 : on définit la solution u_n du problème $(\mathcal{P}_n)$.

Étape 2 : on établit des estimations sur u_n (dites estimation a priori) pour montrer que u_n est uniformément bornée.

Étape 3 : par l'utilisation des résultats que u_n est uniformément bornée, il est possible d'extraire de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous suite $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui a une limite dans la topologie faible des espace qui interviennent dans les estimations de l'étape 2.
Soit alors u la limite obtenue.

Étape 4 : on montrer que u est solution du problème $(\mathcal{P})$.

Étape 5 : résultats de convergences fortes.

1.7 Résultats de compacité

Le résultat de compacité générale dans l'espace de fonction à valeurs vectorielles est donné par le célèbre théorème de Lions-Aubin.

Définition 1.6. *Soient $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces normés.*

(1) $X \hookrightarrow_{continue} Y$, signifie $X \subset Y$ avec l'injection continue c'est-à-dire :

$$\exists c > 0, \quad \|u\|_Y \leqslant c\|u\|_X, \quad \forall u \in X.$$

(2) $X \hookrightarrow_{compacte} Y$, si de toute suite bornée dans X, on peut extraire une sous suite converge dans Y.

Théorème 1.3. *Soient X_0, X et X_1 trois espaces de Banach avec $X_0 \subset X \subset X_1$. On suppose que l'injection $X_0 \hookrightarrow_{compacte} X \hookrightarrow_{compacte} X_1$.*
Soit $1 < p_0,\ p_1 < \infty$. On suppose X_0 et X_1 sont réflexifs et on définit :

$$W = \left\{ u \in L^{p_0}(I; X_0), u' \in L^{p_1}(I; X_1) \right\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(I;X_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(I;X_1)},$$

alors $W \hookrightarrow_{compacte} L^{p_0}(I; X)$.

Démonstration. Voir [10]. □

Chapitre 2

Étude de l'existence et l'unicité de la solution

2.1 Position du problème

L'objectif principal de ce travail est d'étudier la stabilité d'une corde fixée sur les deux extrémités, une partie de la corde est construite par des matériaux élastique tandis que l'autre partie est construite par des matériaux viscoélastique. C'est un problème de transmission d'équation des ondes viscoélastique comme le montre la figure suivante :

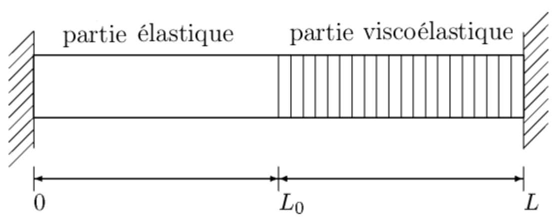

FIGURE 2.1 – Problème de transmission

où L_0 est la longueur de la corde de la partie élastique et L est la longueur de la corde de la partie viscoélastique.

2.2 Formulation mathématique du problème

En utilisant le principe de Hamilton généralisé

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Big[E_c(t) - E_p(t) + W(t)\Big] dt = 0 \tag{2.1}$$

où δ est un opérateur variationnel, t_0 est le temps initial, t_1 est le temps final et $t_0 < t < t_1$, $E_c(t)$, $E_p(t)$ et $\delta W(t)$ représentent l'énergie cinétique, l'énergie potentielle entre $x = 0$ et $x = L$ à l'instant t et le travail virtuel effectué par la force de dissipation interne (c-à-d la dissipation visqueuse), respectivement, avec :

$$E_c(t) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^{L_0} u_t^2(x,t)dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{L_0}^{L} v_t^2(x,t)dx, \tag{2.2}$$

$$E_p(t) = \frac{\alpha_1}{2} \int_0^{L_0} u_x^2(x,t)dx + \frac{\alpha_2}{2} \int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx \tag{2.3}$$

et

$$\delta W(t) = \int_0^{L} \delta v_x(x,t) \int_0^{t} g(t-s) v_x(x,s) ds dx \tag{2.4}$$

où les fonctions u et v désignent le déplacement transversal de la corde à la position x et l'instant t dans les parties élastique et viscoélastique respectivement, et g c'est une fonction de relaxation. Les constantes ρ_1 et ρ_2 sont les densités des matériels et α_1 et α_2 sont les coefficients élastiques.

En appliquant l'opérateur variationnel δ sur l'énergie cinétique $E_c(t)$, on obtient :

$$\delta E_c(t) = \rho_1 \int_0^{L_0} u_t(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \delta u(x,t) dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_t(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \delta v(x,t) dx \tag{2.5}$$

En intégrant l'équation (2.5) sur $[t_0, t_1]$, on trouve

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta E_c(t) dt = \underbrace{\rho_1 \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{L_0} u_t(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \delta u(x,t) dx dt}_{I_1(t)} + \underbrace{\rho_2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{L_0}^{L} v_t(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \delta v(x,t) dx dt}_{I_2(t)}. \tag{2.6}$$

Une intégration par partie par rapport à t dans $I_1(t)$ et $I_2(t)$, nous donne

$$I_1(t) = \rho_1 \int_0^{L_0} u_t(x,t_1) \delta u(x,t_1) dt - \rho_1 \int_0^{L_0} u_t(x,t_0) \delta u(x,t_0) dt - \rho_1 \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{L_0} u_{tt}(x,t) \delta u(x,t) dx dt \tag{2.7}$$

et

$$I_2(t) = \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_t(x,t_1) \delta v(x,t_1) dt - \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_t(x,t_0) \delta v(x,t_0) dt - \rho_2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{L_0}^{L} v_{tt}(x,t) \delta v(x,t) dx dt. \tag{2.8}$$

On remplaçant (2.7) et (2.8) dans (2.6), sachant que :

$$\begin{cases} \delta u(x,t_0) = \delta v(x,t_0) = 0, \\ u_t(x,t_1) = v_t(x,t_1) = 0, \\ \delta u(0,t) = 0, \\ \delta v(L,t) = 0, \\ \delta u(L_0,t) = \delta v(L_0,t), \\ \rho_1 u_t(L_0,t) = \rho_2 v_t(L_0,t) \end{cases} \tag{2.9}$$

on trouve

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta E_c(t)dt = -\rho_1 \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{L_0} u_{tt}(x,t)\delta u(x,t)dxdt - \rho_2 \int_{t_0}^{t_1}\int_{L_0}^{L} v_{tt}(x,t)\delta v(x,t)dxdt. \tag{2.10}$$

Aussi, on appliquant l'opérateur variationnel δ sur l'énergie potentiel $E_p(t)$, et en utilisant des intégrations par parties sur $[t_0, t_1]$, on trouve

$$\delta E_p(t) = \alpha_1 \int_0^{L_0} u_x(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\delta u(x,t)dx + \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\delta v(x,t)dx$$

donc

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta E_p(t)dt = \underbrace{\alpha_1 \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{L_0} u_x(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\delta u(x,t)dxdt}_{I_3(t)} + \underbrace{\alpha_2 \int_{t_0}^{t_1}\int_{L_0}^{L} v(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\delta v(x,t)dxdt}_{I_4(t)}. \tag{2.11}$$

Une intégration par partie, nous donne

$$I_3(t) = \alpha_1 \int_{t_0}^{t_1} u_x(L_0,t)\delta u(L_0,t)dt - \alpha_1 \int_{t_0}^{t_1} u_x(0,t)\delta u(0,t)dt - \alpha_1 \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{L_0} u_{xx}(x,t)\delta u(x,t)dxdt \tag{2.12}$$

et

$$I_4(t) = \alpha_2 \int_{t_0}^{t_1} v_x(L,t)\delta v(L,t)dt - \alpha_2 \int_{t_0}^{t_1} v_x(L_0,t)\delta v(L_0,t)dt - \alpha_2 \int_{t_0}^{t_1}\int_{L_0}^{L} v_{xx}(x,t)\delta v(x,t)dxdt \tag{2.13}$$

D'après (2.9), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \delta E_p(t)dt = & -\alpha_1 \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{L_0} u_{xx}(x,t)\delta u(x,t)dxdt - \alpha_2 \int_{t_0}^{t_1}\int_{L_0}^{L} v_{xx}(x,t)\delta v(x,t)dxdt \\ & + \alpha_1 \int_{t_0}^{t_1} u_x(L_0,t)\delta u(L_0,t)dt - \alpha_2 \int_{t_0}^{t_1} v_x(L,t)\delta v(L_0,t)dt.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Une intégration par partie par rapport à x dans (2.4), nous donne

$$\begin{aligned}\delta W(t) = & \int_{L_0}^{L} \delta v_x(x,t) \int_0^t g(t-s)v_x(x,s)dsdx \\ = & \int_0^t g(t-s) \int_{L_0}^{L} \delta v_x(x,t)v_x(x,s)dxds \\ = & \delta v(x,t) \int_0^t g(t-s)v_x(x,s)ds\Big|_{L_0}^{L} - \int_{L_0}^{L} \delta v(x,t) \int_0^t g(t-s)v_{xx}(x,s)dsdx,\end{aligned} \tag{2.15}$$

et d'après la condition (2.9) et une intégration entre t_0 et t_1 dans (2.15), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \delta W(t)dt = &-\int_{t_0}^{t_1}\int_{L_0}^{L} \delta v(x,t)\int_0^t g(t-s)v_{xx}(x,s)dsdxdt \\ &-\int_{t_0}^{t_1} \delta v(L_0,t)\int_0^t g(t-s)v_x(L_0,s)dsdt.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Finalement, la substitution de (2.12), (2.13) et (2.16) dans (2.1), nous donne

$$\begin{aligned}&-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{L_0}\Big[\rho_1 u_{tt}(x,t)-\alpha_1 u_{xx}(x,t)\Big]\delta u(x,t)dxdt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{L_0}^{L}\Bigg[\rho_2 v_{tt}(x,t)-\alpha_2 v_{xx}(x,t) \\ &+\int_0^t g(t-s)v_{xx}(x,s)ds\Bigg]\delta v(x,t)dxdt - \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\alpha_1 u_x(L_0,t)-\alpha_2 v_x(L_0,t) \\ &+\int_0^t g(t-s)v_x(L_0,s)ds\Bigg]\delta v(L_0,t)dt = 0,\end{aligned} \tag{2.17}$$

ce qui implique

$$\Big[\rho_1 u_{tt}(x,t)-\alpha_1 u_{xx}(x,t)\Big]\delta u(x,t) = 0,$$

$$\Bigg[\rho_2 v_{tt}(x,t)-\alpha_2 v_{xx}(x,t)+\int_0^t g(t-s)v_{xx}(x,s)ds\Bigg]\delta v(x,t) = 0$$

et

$$\Bigg[\alpha_1 u_x(L_0,t)-\alpha_2 v_x(L_0,t)+\int_0^t g(t-s)v_x(L_0,s)ds\Bigg]\delta v(L_0,t) = 0$$

Alors, comme $\delta u(x,t) \neq 0$, $\delta v(x,t) \neq 0$ et $\delta v(L_0,t) \neq 0$, le problème est modélisé par le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases}\rho_1 u_{tt}(x,t)-\alpha_1 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in]0,L_0[, \quad t>0, \\ \rho_2 v_{tt}(x,t)-\alpha_2 v_{xx}(x,t)+\displaystyle\int_0^t g(t-s)v_{xx}(x,s)ds = 0, & x \in]L_0,L[, \quad t>0.\end{cases} \tag{2.18}$$

satisfaisant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases}u(0,t)=v(L,t)=0, \quad u(L_0,t)=v(L_0,t), & t>0, \\ \alpha_1 u_x(L_0,t)=\alpha_2 v_x(L_0,t)-\displaystyle\int_0^t g(t,s)v_x(L_0,s)ds, & t>0\end{cases} \tag{2.19}$$

et les conditions initiales :

$$\begin{cases}u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), & x \in]0,L_0[, \\ v(x,0)=v_0(x), \quad v_t(x,0)=v_1(x), & x \in]L_0,L[.\end{cases} \tag{2.20}$$

La première équation de (2.18) c'est une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique et la deuxième équation c'est une équation aux dérivées partielles intégro-différentielle de type hyperbolique.

Le terme intégral dans la deuxième équation de (2.18) représente le terme de mémoire ou le terme de l'amortissement viscoélastique. Ce terme mémoire tient compte de toute la préhistoire du matériel à travers un noyau g appelé fonction de relaxation en théorie de viscoélasticité.

2.3 Formulation variationnelle

Soit

$$\mathcal{V} = \Big\{(\varphi,\psi) \in H^1(0,L_0) \times H^1(L_0,L) : \varphi(0) = \psi(L) = 0,\ \varphi(L_0) = \psi(L_0)\Big\}$$

un espace de Hilbert. Multiplions la première équation de (2.18) par une fonction $\varphi \in \mathcal{V}$, la deuxième équation par une fonction $\psi \in \mathcal{V}$ et intégrons sur $]0, L_0[$ et $]L_0, L[$, respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}(x,t)\varphi(x)dx - \alpha_1 \int_0^{L_0} u_{xx}(x,t)\varphi(x)dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_{tt}(x,t)\psi(x)dx \\
&- \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_{xx}(x,t)\psi(x)dx + \int_{L_0}^{L} \psi(x) \int_0^t g(t-s)v_{xx}(x,s)dsdx = 0.
\end{aligned}$$

Utilisons une intégration par parties on trouve :

$$\begin{aligned}
&\rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}(x,t)\varphi(x)dx - \alpha_1[u_x(L_0,t)\varphi(L_0) - u_x(0,t)\varphi(0)] + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_x(x,t)\varphi_x(x)dx \\
&+ \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_{tt}(x,t)\psi(x)dx - \alpha_2[v_x(L,t)\psi(L) - v_x(L_0,t)\psi(L_0)] + \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_x(x,t)\psi_x(x)dx \\
&+ \psi(L) \int_0^t g(t-s)v_x(L,s)ds - \psi(L_0) \int_0^t g(t-s)v_x(L_0,s)ds \\
&- \int_{L_0}^{L} \psi_x(x) \int_0^t g(t-s)v_x(x,s)dsdx = 0.
\end{aligned}$$

Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$, on a

$$\begin{cases} \varphi(0) = \psi(L) = 0, \\ \varphi(L_0) = \psi(L_0). \end{cases}$$

Donc la formulation variationnelle s'écrit : on cherche u et v tels que

$$\begin{aligned}&\rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}(x,t)\varphi(x)dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_x(x,t)\varphi_x(x)dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_{tt}(x,t)\psi(x)dx \\ &+ \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_x(x,t)\psi_x(x)dx - \int_{L_0}^{L} \psi_x(x) \int_0^t g(t-s)v_x(x,s)dsdx = 0, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{V}\end{aligned} \tag{2.21}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), & u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in]0, L_0[, \\ v(x,0) = v_0(x), & v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in]L_0, L[. \end{cases} \tag{2.22}$$

2.4 Existence et unicité de la solution

Afin d'établir notre résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (2.18)–(2.20), nous supposons que la fonction $g :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}_1$) g est une fonction de classe C^1 satisfaisant :

$$g \in L^1(0,\infty), \quad g(0) > 0, \quad \beta(t) = \alpha_2 - \int_0^t g(s)ds \quad \text{et} \quad \beta_0 = \alpha_2 - \int_0^\infty g(s)ds > 0.$$

($\mathbf{H}_2$) Il existe trois constantes positives δ_1, δ_2 et δ_3 telle que :

$$\begin{aligned} -\delta_1 g(t) \le g'(t) \le -\delta_2 g(t), &\qquad t > 0, \\ 0 \le g''(t) \le \delta_3 g(t), &\qquad t > 0. \end{aligned}$$

Les hypothèses ci-dessus impliquent que :

$$\beta_0 \leqslant \beta(t) \leqslant \alpha_2.$$

Remarque 2.1. *Il existe des fonctions qui vérifiant les hypothèses* **($\mathbf{H}_1$)** et **($\mathbf{H}_2$)**, *par exemple : la fonction de la forme $g(t) = e^{-\beta t}$ avec $\beta > 0$.*

Commençons par donner la définition d'une solution faible du problème (2.18)–(2.20).

Définition 2.1. *Le couple (u, v) est un solution faible du problème (2.18)–(2.20) si*

$$(u,v) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \bigcap W^{1,\infty}(0,T;L^2(0,L_0) \times L^2(L_0,L)), \text{ pour tout } T > 0,$$

et vérifie :

$$\begin{aligned} &-\rho_1 \int_0^{L_0} u^1(x,t)\varphi(0)dx - \rho_2 \int_{L_0}^{L} v^1(x,t)\psi(0)dx - \rho_1 \int_0^T \int_0^{L_0} u_t(x,t)\varphi_t(x)dxdt \\ &-\rho_2 \int_0^T \int_{L_0}^{L} v_t(x,t)\psi_t(x)dxdt + \alpha_1 \int_0^T \int_0^{L_0} u_x(x,t)\varphi_x(x)dxdt + \alpha_2 \int_0^T \int_{L_0}^{L} v_x(x,t)\psi_x(x)dxdt \\ &- \int_0^T \int_{L_0}^{L} g(t-s)v_x(x,s)\psi_x(x)dxdt = 0, \end{aligned}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}) \bigcap W^{1,\infty}\big(0, T; L^2(0, L_0) \times L^2(L_0, L)\big)$ *tel que :* $\varphi(T) = 0, \psi(T) = 0.$

Notre résultat d'existence de la solution est le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Supposons que* $(u^0, v^0) \in [H^2(0, L_0) \times H^2(L_0, L)] \cap \mathcal{V}$ *et* $(u^1, v^1) \in \mathcal{V}$ *tel que la condition de compatibilité suivante :*

$$\alpha_1 u^0_x(L_0, t) = \alpha_2 v^0_x(L_0, t)$$

et satisfaite. Alors sous les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$*, le problème* (2.18)–(2.20) *admet une solutions unique vérifiant :*

$$(u, v) \in \bigcap_{k=0}^{2} W^{k,\infty}\big(0, T; H^{2-k}(0, L_0) \times H^{2-k}(L_0, L)\big).$$

Remarque 2.2. *La démonstration de ce théorème est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin, qui consiste à réaliser les trois étape suivantes :*

(1) *Recherche de solution ≪ approchées ≫.*
(2) *On établit sur ces solutions approchées des estimations a priori.*
(3) *On passe à la limite grâce à des résultats de compacité.*

Maintenant, on donne deux Lemmes qui seront un support à la démonstration de ce théorème.

Lemme 2.1. *Soit V un espace vectoriel normé séparable de dimension infinie. Il existe une famille libre dénombrable $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$; $v_i \in V$, telle que les combinaisons linéaires des v_i sont denses dans V. De plus, on peut les choisir de telle sorte à ce que la suite des sous-espaces vectoriels $V_m =$ vect $\{v_i, 0 \leq i \leq m\}$ soit croissante.*

Démonstration. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense de V. Il existe au moins un w_n non nul et on note $v_0 = w_{n_0}$ le premier d'entre eux. On procède ensuite par récurrence. Supposons qu'on extraite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre $(w_{n_i})_{0\leq i\leq m}$,et on pose $v_i = w_{n_i}$ telle que

$$\text{vect }\big\{w_k, 0 \leq k \leq n_m\big\} = \text{vect }\big\{v_i, 0 \leq i \leq m\big\} = V_m.$$

Comme dim $V_m = m + 1$, c'est un sous espace vectoriel strict de V et il est fermé. Comme la famille $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans V, l'ensemble des entiers $n > n_m$ tel que $w_n \notin V_m$ n'est pas vide. On prend pour n_{m+1} sont plus petit élément ($\mathbb{N}$ est bien ordonné) et l'on pose $v_{m+1} = w_{n_{m+1}}$. Par construction, on a bien *vect* $\{w_k, 0 \leq k \leq n_{m+1}\} = V_{m+1}$. La famille $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ répond donc à la question et la famille de sous-espaces vectoriels associée est bien croissante. □

Remarque 2.3. ***i)*** *Réciproquement, s'il existe une telle famille v_i, alors l'espace V est séparable. En effet, les combinaisons linéaires à coefficients rationnels des v_i forment un ensemble également dense dans V et dénombrable.*
ii) *Le lemme (2.1) s'exprime de façon équivalente en disant que le sous-espace vectoriel* $\bigcup_{m=0}^{\infty} V_m$ *est dense dans V. On dit aussi que la famille $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille totale dans V ou encore une base de Galerkin, bien que ce ne soit naturellement pas du tout une base de V.*

Lemme 2.2. *On a :*

$$\left[\int_0^t g(t-s)h(s)ds\right]h^{'}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)[h(t)-h(s)]^2 ds - \frac{1}{2}g(t)[h(t)]^2$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g(t-s)\big[h(t)-h(s)\big]^2 ds - \left(\int_0^t g(s)ds\right))\big[h(s)\big]^2\right\}.$$

pour toute $g, h \in C^1(\mathbb{R})$.

Démonstration. On a :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\big[h(t)-h(s)\big]^2 ds\right) = \int_0^t g'(t-s)\big[h(t)-h(s)\big]^2 ds$$
$$+2\left(\int_0^t g(t-s)\big[h(t)-h(s)\big]dsds\right)h^{'}(t).$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\big[h(t)-h(s)\big]^2 ds\right) = \int_0^t g'(t-s)\big[h(t)-h(s)\big]^2 ds - 2\left(\int_0^t g(t-s)h(s)ds\right)h^{'}(t)$$
$$+2\left(\int_0^t g(s)ds\right)\big[h(s)\big]h^{'}(t)$$
$$= \int_0^t g'(t-s)\big[h(t)-h(s)\big]^2 ds - 2\left(\int_0^t g(t-s)h(s)ds\right)h^{'}(t)$$
$$+\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g(s)ds\big[h(s)\big]^2\right\} - g(t)\big[h(t)\big]^2$$

pour toute $g, h \in C^1(\mathbb{R})$. □

Preuve du théorème 2.1. On applique le lemme (2.1) à l'espace $V = \mathcal{V}$ lequel est séparable. Pour construire l'approximation des problèmes en dimension finie.

Étape 1 : (Solutions approchées)

Soit $\Big\{(\varphi^0,\psi^0),(\varphi^1,\psi^1),...,(\varphi^m,\psi^m)\Big\}$ une base dans $\mathcal{V}$, pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, on note par : $\mathcal{V}_m = \text{vect}\Big\{(\varphi^0,\psi^0),(\varphi^1,\psi^1),\dots,(\varphi^m,\psi^m)\Big\}$ l'espace engendré par :

$$\Big\{(\varphi^0,\psi^0),(\varphi^1,\psi^1),...,(\varphi^m,\psi^m)\Big\}.$$

On cherche des solutions approchées sous la forme :

$$u^m(x,t) = \sum_{j=1}^m h_{j,m}(t)\varphi^j(x), \qquad x \in]0, L_0[, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

et

$$v^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h_{j,m}(t)\psi^j(x), \qquad x \in]L_0, L[, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

où $h_{j,m}$, $j = 1, 2, ..., m$ sont déterminées par les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{aligned}
&\rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}^m(x,t)\varphi^j(x)dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_x^m(x,t)\varphi_x^j(x)dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_{tt}^m(x,t)\psi^j(x)dx \\
&+ \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t)\psi_x^j(x)dx - \int_{L_0}^{L}\int_0^t g(t-s)v_x^m(x,s)\psi_x^j(x)dsdx = 0, \quad 1 \le j \le m
\end{aligned} \tag{2.23}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u^m(x,0) = u^0(x), & u_t^m(x,0) = u^1(x), \quad x \in]0, L_0[, \\ v^m(x,0) = v^0(x), & v_t^m(x,0) = v^1(x), \quad x \in]L_0, L[. \end{cases} \tag{2.24}$$

Le système (2.23)–(2.24) est un système d'équations différentielles ordinaires avec m fonctions $h_{j,m}$ inconnue ou $j = 1, ..., m$. D'après la théorie des E. D. O. le système (2.23)–(2.24) va admettre une solution sur $[0, t_n]$ où $t_n \le T$. Maintenant on peut montre que $t_n = T$. Les estimations a priori ci-dessous permettant de prolonger la solution à l'intervalle $[0, T]$, pour tout $T > 0$.

Étape 2 : (Estimations a priori)

La première estimation a priori : Multiplions (2.23) par $h'_{j,m}(t)$ et sommons sur j dans $[1, m]$, on aura :

$$\begin{aligned}
&\rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}^m(x,t) \sum_{j=1}^{m} \varphi^j(x)h'_{j,m}(t)dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_x^m(x,t) \sum_{j=1}^{m} \varphi_x^j(x)h'_{j,m}(t)dx \\
&+ \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_{tt}^m(x,t) \sum_{j=1}^{m} \psi^j(x)h'_{j,m}(t)dx + \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t) \sum_{j=1}^{m} \psi_x^j(x)h'_{j,m}(t)dx \\
&- \int_{L_0}^{L}\int_0^t g(t-s)v_x^m(x,s) \sum_{j=1}^{m} \psi_x^j(x)h'_{j,m}(t)dsdx = 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

On a :

$$u^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h_{j,m}(t)\varphi^j(x), \qquad \text{alors} \quad u_t^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h'_{j,m}(t)\varphi^j(x)$$

et

$$v^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h_{j,m}(t)\psi^j(x), \qquad \text{alors} \quad v_t^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h'_{j,m}(t)\psi^j(x).$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}^m(x,t)u_t^m(x,t)dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_x^m(x,t)u_{xt}^m(x,t)dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_{tt}^m(x,t)v_t^m(x,t)dx \\
&+ \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t)v_{xt}^m(x,t)dx - \int_{L_0}^{L}\int_0^t g(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx = 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} u_{tt}^m(x,t)u_t^m(x,t)dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0}\big[u_t^m(x,t)\big]^2dx,\\
\int_0^{L_0} u_x^m(x,t)u_{xt}^m(x,t)dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0}\big[u_x^m(x,t)\big]^2dx,\\
\int_{L_0}^{L} v_{tt}^m(x,t)v_t^m(x,t)dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L}\big[v_t^m(x,t)\big]^2dx
\end{aligned}\tag{2.27}$$

et

$$\int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t)v_{xt}^m(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L}\big[v_x^m(x,t)\big]^2dx.$$

En substituant (2.27) dans (2.26), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}\big[u_t^m(x,t)\big]^2dx+\alpha_1\int_0^{L_0}\big[u_x^m(x,t)\big]^2dx+\rho_2\int_{L_0}^{L}\big[v_t^m(x,t)\big]^2dx+\alpha_2\int_{L_0}^{L}\big[v_x^m(x,t)\big]^2dx\right\}\\
&=\int_{L_0}^{L}\int_0^t g(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx.
\end{aligned}\tag{2.28}$$

D'après le lemme (2.2) on a :

$$\begin{aligned}
\int_{L_0}^{L} v_{xt}^m(x,t)\int_0^t g(t-s)v_x^m(x,s)dsdx &= \frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)\big[v_x^m(x,t)-v_x^m(x,s)\big]^2dsdx\\
&-\frac{1}{2}g(t)\int_{L_0}^{L}\big[v_x^m(x,t)\big]^2dx-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{L_0}^{L}\int_0^t g(t-s)\big[v_x^m(x,t)-v_x^m(x,s)\big]^2dsdx\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_{L_0}^{L}\big[v_x^m(x,t)\big]^2dx\right\}.
\end{aligned}\tag{2.29}$$

En remplaçant (2.29) dans (2.28), on aura :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}\big[u_t^m(x,t)\big]^2dx+\alpha_1\int_0^{L_0}\big[u_x^m(x,t)\big]^2dx+\rho_2\int_{L_0}^{L}\big[v_t^m(x,t)\big]^2dx+\alpha_2\int_{L_0}^{L}\big[v_x^m(x,t)\big]^2dx\right\}\\
&=\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)\big[v_x^m(x,t)-v_x^m(x,s)\big]^2dsdx-\frac{1}{2}g(t)\int_{L_0}^{L}\big[v_x^m(x,t)\big]^2dx\\
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{L_0}^{L}\int_0^t g(t-s)\big[v_x^m(x,t)-v_x^m(x,s)\big]^2dsdx-\left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_{L_0}^{L}\big[v_x^m(x,t)\big]^2dx\right\}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}\left[u_t^m(x,t)\right]^2dx+\alpha_1\int_0^{L_0}\left[u_x^m(x,t)\right]^2dx+\rho_2\int_{L_0}^{L}\left[v_t^m(x,t)\right]^2dx+\beta(t)\int_{L_0}^{L}\left[v_x^m(x,t)\right]^2dx\right.$$
$$\left.+\int_{L_0}^{L}\int_0^t g(t-s)\left[v_x^m(x,t)-v_x^m(x,s)\right]^2dsdx\right\}=\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)\left[v_x^m(x,t)-v_x^m(x,s)\right]^2dsdx$$
$$-\frac{1}{2}g(t)\int_{L_0}^{L}\left[v_x^m(x,t)\right]^2dx.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}E(t,u^m,v^m)=\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)[v_x^m(x,t)-v_x^m(x,s)]^2dsdx-\frac{1}{2}g(t)\int_{L_0}^{L}[v_x^m(x,t)]^2dx. \tag{2.30}$$

où

$$\begin{aligned}2E(t,u^m,v^m)=&\rho_1\int_0^{L_0}\left[u_t^m(x,t)\right]^2dx+\alpha_1\int_0^{L_0}\left[u_x^m(x,t)\right]^2dx+\rho_2\int_{L_0}^{L}\left[v_t^m(x,t)\right]^2dx\\&+\beta(t)\int_{L_0}^{L}\left[v_x^m(x,t)\right]^2dx+\int_{L_0}^{L}\int_0^t g(t-s)\left[v_x^m(x,t)-v_x^m(x,s)\right]^2dsdx\end{aligned}$$

En intégrant l'équation (2.30) sur $[0,T]$, on obtient :

$$E(T,u^m,v^m)-\frac{1}{2}\int_0^T\left[\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)[v_x^m(x,t)-v_x^m(x,s)]^2dsdx\right]dt+\frac{1}{2}g(t)\int_0^T\left[\int_{L_0}^{L}[v_x^m(x,t)]^2dx\right]dt$$
$$\leqslant E(0,u^m,v^m). \tag{2.31}$$

La deuxième estimation a priori : Premièrement, on estime les termes $u_{tt}(0)$ et $v_{tt}(0)$. En multipliant l'équation (2.23) par $h''_{j,m}(t)$, et on prend la somme par rapport à j, $j=1,2,...,m$ on obtient :

$$\begin{aligned}&\rho_1\int_0^{L_0}u_{tt}^m(x,t)\sum_{j=1}^m h''_{j,m}(t)\varphi^j(x)dx+\alpha_1\int_0^{L_0}u_x^m(x,t)\sum_{j=1}^m h''_{j,m}(t)\varphi_x^j(x)dx\\&+\rho_2\int_{L_0}^{L}v_{tt}^m(x,t)\sum_{j=1}^m h''_{j,m}(t)\psi^j(x)dx+\alpha_2\int_{L_0}^{L}v_x^m(x,t)\sum_{j=1}^m h''_{j,m}(t)\psi_x^j(x)dx\\&-\int_{L_0}^{L}\int_0^t g(t-s)v_x^m(x,s)\sum_{j=1}^m h''_{j,m}(t)\psi_x^j(x)dsdx=0.\end{aligned} \tag{2.32}$$

On a :

$$u_t^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h'_{j,m}(t)\varphi^j(x) \quad \Rightarrow \quad u_{tt}^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h''_{j,m}(t)\varphi^j(x)$$

et

$$v_t^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h'_{j,m}(t)\psi^j(x) \quad \Rightarrow \quad v_{tt}^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h''_{j,m}(t)\psi^j(x).$$

Alors

$$\begin{aligned}&\rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}^m(x,t)u_{tt}^m(x,t)dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_x^m(x,t)u_{xtt}^m(x,t)dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_{tt}^m(x,t)v_{tt}^m(x,t)dx \\ &+ \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t)v_{xtt}^m(x,t)dx - \int_{L_0}^{L}\int_0^t g(t-s)v_x^m(x,s)v_{xtt}^m(x,t)dsdx = 0.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Remarquons que

$$\int_0^{L_0} u_x^m(x,t)u_{xtt}^m(x,t)dx = u_x^m(L_0,t)u_{tt}^m(L_0,t) - u_x^m(0,t)u_{tt}^m(0,t) - \int_0^{L_0} u_{xx}^m(x,t)u_{tt}^m(x,t)dx$$

et

$$\int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t)v_{xtt}^m(x,t)dx = v_x^m(L,t)v_{tt}^m(L,t) - v_x^m(L_0,t)v_{tt}^m(L_0,t) - \int_{L_0}^{L} v_{xx}^m(x,t)v_{tt}^m(x,t)dx$$

donc

$$\begin{aligned}&\rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}^m(x,t)u_{tt}^m(x,t)dx + \alpha_1 \Big[u_x^m(L_0,t)u_{tt}^m(L_0,t) - u_x^m(0,t)u_{tt}^m(0,t)\Big] - \alpha_1 \int_0^{L_0} u_{xx}^m(x,t)u_{tt}^m(x,t)dx \\ &+ \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_{tt}^m(x,t)v_{tt}^m(x,t)dx + \alpha_2 \Big[v_x^m(L,t)v_{tt}^m(L,t) - v_x^m(L_0,t)v_{tt}^m(L_0,t)\Big] \\ &- \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_{xx}^m(x,t)v_{tt}^m(x,t)dx - \int_{L_0}^{L}\int_0^t g(t-s)v_x^m(x,s)v_{xtt}^m(x,t)dsdx = 0.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Posons $t=0$ dans (2.34) on trouve :

$$\begin{aligned}\rho_1 \int_0^{L_0} \big[u_{tt}^m(x,0)\big]^2 dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} \big[v_{tt}^m(x,0)\big]^2 dx &= \alpha_1 \int_0^{L_0} u_{xx}^m(x,0)\big[u_{tt}^m(x,0)\big]dx \\ &- \alpha_1 \Big[u_x^m(L_0,t)u_{tt}^m(L_0,t) - u_x^m(0,t)u_{tt}^m(0,t)\Big] \\ &+\alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_{xx}^m(x,0)\big[v_{tt}^m(x,0)\big]dx - \alpha_2 \Big[v_x^m(L,t)v_{tt}^m(L,t) - v_x^m(L_0,t)v_{tt}^m(L_0,t)\Big].\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young, on peut écrire

$$\int_0^{L_0}\left[u_{tt}^m(x,0)\right]^2dx+\int_{L_0}^{L}\left[v_{tt}^m(x,0)\right]^2dx\leqslant M_1\left\{\int_0^{L_0}\left[u_{xx}^m(x,0)\right]^2dx+\int_{L_0}^{L}\left[v_{xx}^m(x,0)\right]^2dx\right\}$$

où M_1 est une constante.

Deuxièmement, en dérivant l'équation (2.23) par rapport à t, on obtient :

$$\begin{aligned}&\rho_1\int_0^{L_0}u_{ttt}^m(x,t)\varphi^j(x)dx+\alpha_1\int_0^{L_0}u_{xt}^m(x,t)\varphi_x^j(x)dx+\rho_2\int_{L_0}^{L}v_{ttt}^m(x,t)\psi^j(x)dx+\alpha_2\int_{L_0}^{L}v_{xt}^m(x,t)\psi_x^j(x)dx\\&-\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)v_x^m(x,s)\psi_x^j(x)dsdx-g(0)\int_{L_0}^{L}v_x^m(x,t)\psi_x^j(x)dx=0.\end{aligned} \tag{2.35}$$

En multipliant l'équation (2.35) par $h''_{j,m}(t)$, et on prend la somme par rapport à $j=1,2,...,m$, on déduit :

$$\begin{aligned}&\rho_1\int_0^{L_0}u_{ttt}^m(x,t)u_{tt}^m(x,t)dx+\alpha_1\int_0^{L_0}u_{xt}^m(x,t)u_{xtt}^m(x,t)dx+\rho_2\int_{L_0}^{L}v_{ttt}^m(x,t)v_{tt}^m(x,t)dx\\&+\alpha_2\int_{L_0}^{L}v_{xt}^m(x,t)v_{xtt}^m(x,t)dx-\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)v_x^m(x,s)v_{xtt}^m(x,t)dsdx\\&-g(0)\int_{L_0}^{L}v_x^m(x,t)v_{xtt}^m(x,t)dx=0.\end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{L_0}u_{ttt}^m(x,t)u_{tt}^m(x,t)dx&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0}\left[u_{tt}^m(x,t)\right]^2dx,\\\int_0^{L_0}u_{xt}^m(x,t)u_{xtt}^m(x,t)dx&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0}\left[u_{xt}^m(x,t)\right]^2dx,\\\int_0^{L_0}v_{ttt}^m(x,t)v_{tt}^m(x,t)dx&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0}\left[v_{tt}^m(x,t)\right]^2dx,\end{aligned}$$

et

$$\int_{L_0}^{L}v_{xt}^m(x,t)v_{xtt}^m(x,t)dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L}\left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2dx.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}\left[u_{tt}^m(x,t)\right]^2dx+\alpha_1\int_0^{L_0}\left[u_{xt}^m(x,t)\right]^2dx+\rho_2\int_{L_0}^{L}\left[v_{tt}^m(x,t)\right]^2dx+\alpha_2\int_{L_0}^{L}\left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2dx\right\}$$
$$=\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)v_x^m(x,s)v_{xtt}^m(x,t)dsdx+g(0)\int_{L_0}^{L}v_x^m(x,t)v_{xtt}^m(x,t)dx.$$

D'autre part, on a :

$$\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx$$
$$=g'(0)\int_{L_0}^{L}v_x^m(x,t)v_{xt}^m(x,t)dx+\int_0^t\frac{d}{dt}\left[\int_{L_0}^{L}g'(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dx\right]ds$$
$$=g'(0)\int_{L_0}^{L}v_x^m(x,t)v_{xt}^m(x,t)dx+\int_{L_0}^{L}\int_0^t g''(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx$$
$$+\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)v_x^m(x,s)v_{xtt}^m(x,t)dsdx.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)v_x^m(x,s)v_{xtt}^m(x,t)dsdx&=-g'(0)\int_{L_0}^{L}v_x^m(x,t)v_{xt}^m(x,t)dx\\&+\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx-\int_{L_0}^{L}\int_0^t g''(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Donc, en tenant compte de (2.36) dans l'estimation présidente, on aura :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}\left[u_{tt}^m(x,t)\right]^2dx+\alpha_1\int_0^{L_0}\left[u_{xt}^m(x,t)\right]^2dx+\rho_2\int_{L_0}^{L}\left[v_{tt}^m(x,t)\right]^2dx+\alpha_2\int_{L_0}^{L}\left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2dx\right\}$$
$$=-g'(0)\int_{L_0}^{L}v_x^m(x,t)v_{xt}^m(x,t)dx+\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx$$
$$-\int_{L_0}^{L}\int_0^t g''(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx+g(0)\int_{L_0}^{L}v_x^m(x,t)v_{xtt}^m(x,t)dx$$

Par ailleurs, on a :

$$\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t)v_{xt}^m(x,t)dx = \int_{L_0}^{L} v_{xt}^m(x,t)v_{xt}^m(x,t)dx + \int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t)v_{xtt}^m(x,t)dx.$$

Donc

$$g(0)\int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t)v_{xtt}^m(x,t)dx = g(0)\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t)v_{xt}^m(x,t)dx - g(0)\int_{L_0}^{L}\left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2dx.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}\left[u_{tt}^m(x,t)\right]^2dx + \alpha_1\int_0^{L_0}\left[u_{xt}^m(x,t)\right]^2dx + \rho_2\int_{L_0}^{L}\left[v_{tt}^m(x,t)\right]^2dx + \alpha_2\int_{L_0}^{L}\left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2dx\right\}\\
&= \frac{d}{dt}\left[\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx\right] - \int_{L_0}^{L}\int_0^t g''(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx \qquad (2.37)\\
&- g'(0)\int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t)v_{xt}^m(x,t)dx + g(0)\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L} v_x^m(x,t)v_{xt}^m(x,t)dx - g(0)\int_{L_0}^{L}\left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité de Young et la condition **(H2)**, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{L_0}^{L}\int_0^t g''(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx\right| \leqslant{}& \frac{\delta_3^2}{2}\int_{L_0}^{L}\left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2dx\\
&+\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g(t-s)\left[\int_{L_0}^{L}\left[v_x^m(x,s)\right]^2dx\right]ds.
\end{aligned}\qquad (2.38)$$

En remplaçant (2.38) dans (2.37), ensuite on intègre entre 0 et t, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}\left[u_{tt}^m(x,t)\right]^2dx + \alpha_1\int_0^{L_0}\left[u_{xt}^m(x,t)\right]^2dx + \rho_2\int_{L_0}^{L}\left[v_{tt}^m(x,t)\right]^2dx + \alpha_2\int_{L_0}^{L}\left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2dx\right\}\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}\left[u_{tt}^m(x,0)\right]^2dx + \alpha_1\int_0^{L_0}\left[u_{xt}^m(x,0)\right]^2dx + \rho_2\int_{L_0}^{L}\left[v_{tt}^m(x,0)\right]^2dx + \alpha_2\int_{L_0}^{L}\left[v_{xt}^m(x,0)\right]^2dx\right\}\\
&+\int_{L_0}^{L}\int_0^t g'(t-s)v_x^m(x,s)v_{xt}^m(x,t)dsdx - \frac{\delta_3^2}{2}\int_0^t\int_{L_0}^{L}\left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2dxds
\end{aligned}\qquad (2.39)$$

$$- \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^1(0,\infty)} \int_0^t \int_{L_0}^L \left[v_x^m(x,s)\right]^2 dx\big] ds - g'(0) \int_0^t \int_{L_0}^L v_x^m(x,t) v_{xt}^m(x,t) dx ds$$

$$+ g(0) \int_{L_0}^L v_x^m(x,s) v_{xt}^m(x,t) dx - g(0) \int_0^t \int_{L_0}^L \left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2 dx ds.$$

Remarquons, d'après l'inégalité de Young, pour tout $\eta > 0$ on a :

$$\left| g(0) \int_{L_0}^L v_x^m(x,t) v_{xt}^m(x,t) dx \right| \leqslant \frac{\big(g(0)\big)^2}{4\eta} \int_{L_0}^L \Big[v_x^m(x,t)\Big]^2 dx + \eta \int_{L_0}^L \Big[v_{xt}^m(x,t)\Big]^2 dx,$$

$$\left| g'(0) \int_0^t \int_{L_0}^L v_x^m(x,t) v_{xt}^m(x,t) dx ds \right| \leqslant \frac{\big(g'(0)\big)^2}{4\eta} \int_0^t \int_{L_0}^L \Big[v_x^m(x,s)\Big]^2 dx ds + \eta \int_0^t \int_{L_0}^L \Big[v_{xt}^m(x,t)\Big]^2 dx ds,$$

et

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L \int_0^t g'(t-s)\left[v_x^m(x,s) v_{xt}^m(x,t)\right] ds dx \leqslant{} & \frac{\delta_2^2}{4\eta} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t \int_{L_0}^L \left[v_x^m(x,s)\right]^2 dx ds \\ & + \eta \int_{L_0}^L \left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2 dx. \end{aligned} \tag{2.40}$$

En tenant compte de ces estimations, on en déduit que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left\{ \rho_1 \int_0^{L_0} \Big[u_{tt}^m(x,t)\Big]^2 dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} \left[u_{xt}^m(x,t)\right]^2 dx + \rho_2 \int_{L_0}^L \left[v_{tt}^m(x,t)\right]^2 dx + \alpha_2 \int_{L_0}^L \left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2 dx \right\} \\ & \leqslant M_2 + \frac{\Big(g(0)\Big)^2}{4\eta} \int_{L_0}^L \left[v_x^m(x,t)\right]^2 dx + 2\eta \int_{L_0}^L \left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2 dx + \frac{\Big(g'(0)\Big)^2}{4\eta} \int_0^t \int_{L_0}^L \left[v_x^m(x,s)\right]^2 dx ds \\ & + \eta \int_0^t \int_{L_0}^L \left[v_{xt}^m(x,s)\right]^2 dx ds + \frac{\delta_2^2}{4\eta} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t \int_{L_0}^L \left[v_x^m(x,s)\right]^2 dx ds. \end{aligned} \tag{2.41}$$

où M_2 est une constante dépendante de u_0, u_1, v_0 et v_1.
A ce point, on choisit η assez petit, et en utilisant le lemme de Gronwall, on obtient l'estimation suivante :

$$\int_0^{L_0} \Big[u_{tt}^m(x,t)\Big]^2 dx + \int_0^{L_0} \left[u_{xt}^m(x,t)\right]^2 dx + \int_{L_0}^L \left[v_{tt}^m(x,t)\right]^2 dx + \int_{L_0}^L \left[v_{xt}^m(x,t)\right]^2 dx \leqslant M_3 \tag{2.42}$$

où M_3 est une constante positive.

Étape 3 : (Passage à la limite)
D'après les estimations (2.31) et (2.42) on déduit que :

$$\begin{cases} (u^m, v^m) & \text{sont uniformément bornée dans} \quad L^\infty\big(0,T;\mathcal{V}\big), \\ (u_t^m, v_t^m) & \text{sont uniformément bornée dans} \quad L^\infty\big(0,T;\mathcal{V}\big), \\ (u_{tt}^m, v_{tt}^m) & \text{sont uniformément bornée dans} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,L_0)\times L^2(L_0,L)\big). \end{cases} \tag{2.43}$$

Donc, il existe deux sous-suites (u^n, v^n) de (u^m, v^m) vérifiant :

$$\begin{cases} (u^n, v^n) \rightharpoonup (u,v) & \text{faible étoile dans} \quad L^\infty\big(0,T;\mathcal{V}\big), \\ (u_t^n, v_t^n) \rightharpoonup (u_t,v_t) & \text{faible étoile dans} \quad L^\infty\big(0,T;\mathcal{V}\big), \\ (u_{tt}^n, v_{tt}^n) \rightharpoonup (u_{tt},v_{tt}) & \text{faible étoile dans} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,L_0)\times L^2(L_0,L)\big). \end{cases} \tag{2.44}$$

Et on sait que l'injection $\mathcal{V} \hookrightarrow L^2(0,L_0)\times L^2(L_0,L)$ est compacte. Donc, on peut donc appliquer le théorème de compacité de Aubin-Lions avec : $X_0 = \mathcal{V}$, $X = X_1 = L^2(0,L_0)\times L^2(L_0,L)$ et $p_0 = p_1 = 2$, c'est-à-dire qu'on peut extraire deux suites telle que :

$$\begin{cases} (u^n, v^n) \longrightarrow (u,v) & \text{forte dans} \quad L^2\big(0,T;\mathcal{V})\big), \\ (u_t^n, v_t^n) \longrightarrow (u_t,v_t) & \text{forte dans} \quad L^2\big(0,T;L^2(0,L_0)\times L^2(L_0,L)\big). \end{cases} \tag{2.45}$$

Les convergences (2.44) et (2.45) sont suffisent pour passer à la limite dans (2.23), pour obtenir :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt}(x,t) - \alpha_1 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in]0,L_0[, \quad t>0 \\ \rho_2 v_{tt}(x,t) - \alpha_2 v_{xx}(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s) v_{xx}(x,s)ds = 0, & x \in]L_0,L[, \quad t>0 \end{cases} \tag{2.46}$$

D'oú l'existence de la solution du problème (2.18)–(2.20).

Unicité de la solution

Soient $(u^{(1)}, v^{(1)})$ et $(u^{(2)}, v^{(2)})$ deux solutions du problème (2.18) telles que :

$$(u^{(i)}, v^{(i)}) \in L^\infty\big([0,T];\mathcal{V}\big)$$
$$(u_t^{(i)}, v_t^{(i)}) \in L^\infty\big([0,T];\mathcal{V}\big)$$
$$(u_{tt}^{(i)}, v_{tt}^{(i)}) \in L^\infty\big([0,T], L^2(0,L_0)\times L^2(L_0,L)\big)$$

avec $i = 1,2$.
Alors

$$(z^{(1)}, z^{(2)}) = (u^{(1)} - u^{(2)}, v^{(1)} - v^{(2)})$$

vérifiant :

$$\begin{aligned} &\rho_1 \int_0^{L_0} z_{tt}^{(1)}(x,t)\varphi(x)dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} z_x^{(1)}(x,t)\varphi_x(x)dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} z_{tt}^{(2)}(x,t)\psi(x)dx \\ &+ \alpha_2 \int_{L_0}^{L} z_x^{(2)}(x,t)\psi_x(x)dx - \int_{L_0}^{L} \psi_x(x) \int_0^t g(t-s) z_x^{(2)}(x,s)dsdx = 0, \quad \forall \varphi,\psi \in \mathcal{V} \end{aligned} \tag{2.47}$$

avec

$$z^{(1)}(x,0) = 0, \quad z_t^{(1)}(x,0) = 0, \quad z^{(2)}(x,0) = 0, \quad z_t^{(2)}(x,0) = 0. \tag{2.48}$$

En raisonnant de la même manière que pour le cas de la première estimation a priori on obtient directement $u^{(1)} = u^{(2)}$ et $v^{(1)} = v^{(2)}$. Ceci achève la démonstration du théorème 2.1. $\blacksquare$

Chapitre 3

Comportement asymptotique de la solution

3.1 Introduction

Dans ce travail nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique de la solution d'un problème de transmission d'équations des ondes viscoélastiques suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt}(x,t) - \alpha_1 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in]0, L_0[, \quad t > 0, \\ \rho_2 v_{tt}(x,t) - \alpha_2 v_{xx}(x,t) + \int\limits_0^t g(t-s) v_{xx}(x,s) ds = 0, & x \in]L_0, L[, \quad t > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

satisfaisant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(0,t) = v(L,t) = 0, \quad u(L_0,t) = v(L_0,t), & t > 0, \\ \alpha_1 u_x(L_0,t) = \alpha_2 v_x(L_0,t) - \int\limits_0^t g(t,s) v_x(L_0,s) ds, & t > 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

et les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in]0, L_0[, \\ v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), & x \in]L_0, L[, \end{cases} \tag{3.3}$$

où ρ_1, ρ_2, α_1 et α_2 sont des constantes positives.

Dans ce chapitre, nous aimerions étudier le cas où le noyau $g :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses suivantes :

(H$_1$) g est une fonction de classe C^3 satisfaisant :

$$g \in L^1(0,\infty), \quad g(0) > 0, \quad \beta(t) = \alpha_2 - \int\limits_0^t g(s) ds \quad \text{et} \quad \beta_0 = \alpha_2 - \int\limits_0^\infty g(s) ds > 0.$$

(**H2**) Il existe k_0, k_1, k_2, k_3 et k_4 sont des constantes positives telle que :

$$\begin{aligned} -\, k_0 g(t) &\leqslant g'(t) \leqslant -k_1 g(t), \\ k_2 g(t) &\leqslant g''(t) \leqslant k_3 g(t), \\ |g'''(t)| &\leqslant k_4 g(t). \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, nous montrerons que l'énergie modifiée associée au problème (3.1)–(3.3) décroit exponentiellement vers zéro, quand le temps tend vers l'infini.

3.2 Énergie modifiée

On définit l'énergie classique associée au système (3.1)–(3.3) par :

$$2E(t,u,v) = \rho_1 \int_0^{L_0} u_t^2(x,t)dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_x^2(x,t)dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_t^2(x,t)dx + \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx \tag{3.4}$$

Lemme 3.1. *Soit (u,v) la solutions du problème (3.1)-(3.3), alors l'énergie classique $E(t,u,v)$, satisfait*

$$\frac{d}{dt}E(t,u,v) = \int_{L_0}^{L} v_{xt}(x,t) \int_0^t g(t-s)v_x(x,s)dsdx \tag{3.5}$$

pour toute $t \geq 0$.

Démonstration. Multiplions la première équation de (3.1) par u_t et la deuxième équation par v_t, puis intégrons sur $]0, L_0[$ et $]L_0, L[$, respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned} &\rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx - \alpha_1 \int_0^{L_0} u_{xx}(x,t)u_t(x,t)dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx \\ &- \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dx + \int_{L_0}^{L} v_t(x,t) \int_0^t g(t-s)v_{xx}(x,s)dsdx = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En utilisant des intégrations par parties, les termes en (3.6) sont estimés comme suit :

Le premier terme :

$$\rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx = \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0} u_t^2(x,t)dx. \tag{3.7}$$

Le deuxiéme terme :

$$- \alpha_1 \int_0^{L_0} u_{xx}(x,t)u_t(x,t)dx = -\alpha_1 \Big[u_x(L_0,t)u_t(L_0,t) - u_x(0,t)u_t(0,t)\Big] + \frac{\alpha_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0} u_x^2(x,t)dx. \tag{3.8}$$

Le troixième terme :

$$\rho_2 \int_{L_0}^{L} v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx = \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L} v_t^2(x,t)dx. \tag{3.9}$$

Le quatrième terme :

$$- \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dx = -\alpha_2 \Big[v_x(L,t)v_t(L,t) - v_x(L_0,t)v_t(L_0,t)\Big] + \frac{\alpha_2}{2}\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx. \tag{3.10}$$

Le cinquième terme :

$$
\begin{aligned}
\int_{L_0}^{L} v_t(x,t) \int_0^t g(t-s) v_{xx}(x,s)dsdx = v_t(L,t) \int_0^t g(t-s) v_x(L,s)ds \\
- v_t(L_0,t) \int_0^t g(t-s) v_x(L_0,s)ds \\
- \int_{L_0}^{L} v_{xt}(x,t) \int_0^t g(t-s) v_x(x,s)dsdx.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

En substituant (3.7)–(3.11) dans (3.6), on aura

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1 \int_0^{L_0} u_t^2(x,t)dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_t^2(x,t)dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_x^2(x,t)dx + \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx\right\} \\
&= \alpha_1 \Big[u_x(L_0,t)u_t(L_0,t) - u_x(0,t)u_t(0,t)\Big] + \alpha_2 \Big[v_x(L,t)v_t(L,t) - v_x(L_0,t)v_t(L_0,t)\Big] \\
&+ \int_{L_0}^{L} v_{xt}(x,t) \int_0^t g(t-s) v_x(x,s)dsdx - v_t(L,t) \int_0^t g(t-s) v_x(L,s)ds \\
&+ v_t(L_0,t) \int_0^t g(t-s) v_x(L_0,s)ds.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Finalement, l'utilisation des conditions aux limites (3.2), nous donne

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1 \int_0^{L_0} u_t^2(x,t)dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_t^2(x,t)dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_x^2(x,t)dx + \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx\right\} \\
&= \int_{L_0}^{L} v_{xt}(x,t) \int_0^t g(t-s) v_x(x,s)dsdx.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Mais on a :

$$
2E(t,u,v) = \rho_1 \int_0^{L_0} u_t^2(x,t)dx + \rho_2 \int_{L_0}^{L} v_t^2(x,t)dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_x^2(x,t)dx + \alpha_2 \int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx.
$$

Donc

$$
\frac{d}{dt}E(t,u,v) = \int_{L_0}^{L} v_{xt}(x,t) \int_0^t g(t-s) v_x(x,s)dsdx.
$$

pour tout $t \geq 0$. $\square$

Remarque 3.1. *D'après le Lemme (2.2), on peut facilement voir que*

$$\begin{aligned}\int_{L_0}^{L} v_{xt}(x,t)\int_0^t g(t-s)v_x(x,s)dsdx = \frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}(g'\square v_x)(t)dx - \frac{1}{2}g(t)\int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx \\ - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{L_0}^{L}(g\square v_x)(t)dx - \left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx\right\}\end{aligned} \tag{3.14}$$

où $\square$ est un opérateur défini par

$$(f\square z)(t) = \int_0^t f(t-s)\big(z(x,t)-z(x,s)\big)^2 dsdx, \quad t \geq 0.$$

Maintenant, nous définissons l'énergie "modifiée" pour le système (3.1)–(3.3) par :

$$2\mathscr{E}(t,u,v) = E_1(t,u) + E_2(t,v) \tag{3.15}$$

où

$$E_1(t,u) = \frac{1}{2}\left\{\rho_1\int_0^{L_0} u_t^2(x,t)dx + \alpha_1\int_0^{L_0} u_x^2(x,t)dx\right\} \tag{3.16}$$

et

$$E_2(t,v) = \frac{1}{2}\left\{\rho_2\int_{L_0}^{L} v_t^2(x,t)dx + \beta(t)\int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx + \int_{L_0}^{L}(g\square v_x)(t)dx.\right\}. \tag{3.17}$$

Pour préserver l'hyperbolicité du système (3.1)–(3.3), on pose

$$\beta_0 = \alpha_2 - \int_0^\infty g(s)ds.$$

D'après le Lemme 3.1 et la Remarque 3.1, on obtient,

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t,u,v) = \frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}(g'\square v_x)(t)dx - \frac{1}{2}g(t)\int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx. \tag{3.18}$$

En intégrant sur $[0,T]$ l'égalité (3.18), on peut écrire :

$$\mathscr{E}(T,u,v) - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{L_0}^{L}(g'\square v_x)(t)dxdt + \frac{1}{2}g(t)\int_0^T\int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dxdt \leqslant \mathscr{E}(0,u,v). \tag{3.19}$$

3.3 Stabilité de l'énergie

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, c'est-à-dire

$$\mathscr{E}(t,u,v) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow \infty,$$

c'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, c'est-à-dire

$$\mathscr{E}(t,u,v) \leqslant C\exp(-\beta t), \forall t > 0,$$

où C et β sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :

$$\mathscr{E}(t,u,v) \leqslant \frac{C}{t^{\alpha}}, \forall t > 0,$$

où C et α sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

3.4 Quelques lemmes utiles

Dnas cette section, nous donnons quelques lemmes qui seront un support à la démonstration de notre résultat sur la décroissance exponentielle de l'énergie modifiée quand t tend vers l'infini.

Lemme 3.2. *Pour toute solutions (u,v) du problème (3.1)–(3.3), il existe $K_1 > 0$ telle que :*

$$\int_0^T E_1(t,u)dt \leqslant K_1\left\{\int_0^T \left\{u_t^2(L_0,t) + u_x^2(L_0,t)\right\}dt + E_1(T,u)\right\}$$

pour tout $T > 0$

Démonstration. En multipliant la première équation de (3.1) par $\sigma(x)u_x$, puis en intègre sur $]0,L_0[$, on obtient :

$$\rho_1\int_0^{L_0} u_{tt}(x,t)\sigma(x)u_x(x,t)dx - \alpha_1\int_0^{L_0} u_{xx}(x,t)\sigma(x)u_x(x,t)dx = 0. \tag{3.20}$$

Or, on a :

$$\int_0^{L_0} u_{tt}(x,t)\sigma(x)u_x(x,t)dx = \frac{d}{dt}\left\{\int_0^{L_0}\sigma(x)u_t(x,t)u_x(x,t)dx\right\} - \int_0^{L_0}\sigma(x)u_t(x,t)u_{xt}(x,t)dx. \tag{3.21}$$

En substituant (3.21) dans (3.20), on aura :

$$\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}\sigma(x)u_t(x,t)u_x(x,t)dx\right\} = \rho_1\int_0^{L_0}\sigma(x)u_t(x,t)u_{xt}(x,t)dx + \alpha_1\int_0^{L_0}\sigma(x)u_{xx}(x,t)u_x(x,t)dx.$$

D'après une intégration par partie, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}\sigma(x)u_t(x,t)u_x(x,t)dx\right\} &= -\frac{1}{2}\int_0^{L_0}\sigma'(x)\Big\{\rho_1 u_t^2(x,t)+\alpha_1 u_x^2(x,t)\Big\}dx \\ &\quad+\frac{1}{2}\Big[\sigma(x)\Big\{\rho_1 u_t^2(x,t)+\alpha_1 u_x^2(x,t)\Big\}\Big]_{x=0}^{x=L_0},\end{aligned} \tag{3.22}$$

et pour $\sigma(x)=x$ dans (3.22), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}xu_t(x,t)u_x(x,t)dx\right\} &= -\frac{1}{2}\int_0^{L_0}\Big\{\rho_1 u_t^2(x,t)+\alpha_1 u_x^2(x,t)\Big\}dx \\ &\quad+\frac{1}{2}\Big[L_0\Big\{\rho_1 u_t^2(L_0,t)+\alpha_1 u_x^2(L_0,t)\Big\}\Big].\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{L_0}\Big\{\rho_1 u_t^2(x,t)+\alpha_1 u_t^2(x,t)\Big\}dx &= -\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^{L_0}xu_t(x,t)u_x(x,t)dx\right\} \\ &\quad+\frac{1}{2}\Big[L_0\{\rho_1 u_t^2(L_0,t)+\alpha_1 u_x^2(L_0,t)\}\Big].\end{aligned} \tag{3.23}$$

Une intégration sur $[0,T]$ de (3.23), donne :

$$\int_0^T E_1(t,u)dt = \frac{1}{2}\int_0^T\Big[L_0\Big\{\rho_1 u_t^2(L_0,t)+\alpha_1 u_x^2(L_0,t)\Big\}\Big]dt - \rho_1\Big[\int_0^{L_0}xu_t(x,t)u_x(x,t)dx\Big]_{t=0}^{t=T}$$

et par l'utilisation de l'inégalité de Young, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^T E_1(t,u)dt &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^T\Big[L_0\Big\{\rho_1 u_t^2(L_0,t)+\alpha_1 u_x^2(L_0,t)\Big\}\Big]dt + \frac{\rho_1 L_0}{2}\left\{\int_0^{L_0}\Big[u_t^2(x,T)+u_x^2(x,T)\Big]dx\right\} \\ &\quad+\frac{\rho_1 L_0}{2}\left\{\int_0^{L_0}\Big[u_t^2(x,0)+u_x^2(x,0)\Big]dx\right\}.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^T E_1(t,u)dt \leqslant \frac{L_0}{2}\int_0^T\Big\{\rho_1 u_t^2(L_0,t)+\alpha_1 u_x^2(L_0,t)\Big\}dt + L_0\rho_1\Big\{E_1(T,u)+E_1(0,u)\Big\}. \tag{3.24}$$

D'autre part, en multipliant la première équation de (3.1) par u_t, on obtient :

$$\rho_1\int_0^{L_0}u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx - \alpha_1\int_0^{L_0}u_{xx}(x,t)u_t(x,t)dx = 0$$

et puisque

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{L_0} u_t^2(x,t)dx\right\} - \alpha_1\Big[u_x(x,t)u_t(x,t)\Big]_{x=0}^{x=L_0} + \alpha_1\int_0^{L_0} u_x(x,t)u_{xt}(x,t)dx = 0$$

on déduit aisément que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{L_0}\Big(\rho_1 u_t^2(x,t) + \alpha_1 u_x^2(x,t)\Big)dx\right\} = \alpha_1 u_x(L_0,t)u_t(L_0,t) - \alpha_1 u_x(0,t)u_t(0,t).$$

D'où

$$\frac{d}{dt}E_1(t,u) = \alpha_1 u_x(L_0,t)u_t(L_0,t).$$

Ensuite, en intégrant sur $[0,T]$, on trouve :

$$E_1(T,u) - E_1(0,u) = \int_0^T \alpha_1 u_x(L_0,t)u_t(L_0,t)dt$$

et en utilisant l'inégalité de Young une autre fois, on obtient :

$$E_1(0,u) \leqslant E_1(T,u) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\rho_1}}\int_0^T\Big\{\rho_1 u_t^2(L_0,t) + \alpha_1 u_x^2(L_0,t)\Big\}dt. \tag{3.25}$$

En remplaçant (3.25) dans (3.24), on trouve :

$$\int_0^T E_1(t,u)dt \leqslant K_1\left\{\int_0^T\{u_t^2(L_0,t) + u_x^2(L_0,t)\}dt + E_1(T,u)\right\}$$

pour tout $T > 0$. □

Remarque 3.2. *Dans la suite de ce mémoire, on note par $*$ et $\diamond$ les deux l'opérateurs définis par :*

$$(g * h)(t) = \int_0^t g(t-s)h(s)ds \tag{3.26}$$

et

$$(g \diamond h)(t) = \int_0^t g(t-s)\big\{h(t) - h(s)\big\}ds. \tag{3.27}$$

Aussi, il est claire que

$$(g * h)(t) = \left(\int_0^t g(s)ds\right)h(t) - (g \diamond h)(t) \tag{3.28}$$

et

$$\Big[(g \diamond h)(t)\Big]^2 \leqslant \left(\int_0^t g(s)ds\right)(g\Box h)(t). \tag{3.29}$$

Lemme 3.3. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$, *si* (u, v) *sont solutions du problème* (3.1)–(3.3), *alors, il existe* K_2, K_3 *et* K_4 *des constantes positives telles que :*

$$(i) \qquad \int_0^T E_2(t,v)dt \leqslant K_2 \left\{ \int_0^T \Big\{ u_t^2(L_0,t) + u_x^2(L_0,t) \Big\} dt + E_2(T,v) \right\} + K_3 \left\{ - \int_0^T \int_{L_0}^L \big[g' \,\square\, v_x \big] dx dt + \int_0^T \int_{L_0}^L g(t) v_x^2(x,t) dx dt \right\}$$

et

$$(ii) \qquad \int_0^T \Big\{ u_t^2(L_0,t) + u_x^2(L_0,t) \Big\} dt \leqslant K_4 \left\{ \int_0^T E_2(t,v)dt + E_2(T,v) + E_2(0,v) \right\}$$

pour tout $T > 0$.

Démonstration. En multipliant la deuxième équation de (3.1) par $\sigma(x)(\alpha_2 v_x - g * v_x)$, on trouve :

$$\rho_2 \int_{L_0}^L v_{tt}(x,t)\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t) - g * v_x\big)dx - \alpha_2 \int_{L_0}^L v_{xx}(x,t)\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t) - g * v_x\big)dx + \int_{L_0}^L \big[g * v_{xx}\big]\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t) - g * v_x\big)dx = 0.$$

On a :

$$\frac{d}{dt}\left\{ \rho_2 \int_{L_0}^L v_t(x,t)\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t) - g * v_x\big)dx \right\} = \rho_2 \int_{L_0}^L v_{tt}(x,t)\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t) - g * v_x\big)dx + \rho_2 \int_{L_0}^L v_t(x,t)\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t) - g * v_x\big)_t dx.$$

D'où

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{ \rho_2 \int_{L_0}^L v_t(x,t)\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t) - g * v_x\big)dx \right\} \\ &= \rho_2 \int_{L_0}^L v_t(x,t)\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t) - g * v_x\big)_t dx \\ &+ \int_{L_0}^L \big(\alpha_2 v_x(x,t) - g * v_x\big)_x \sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t) - g * v_x\big)dx \\ &= \underbrace{\rho_2\alpha_2 \int_{L_0}^L v_t(x,t)\sigma(x)v_{xt}(x,t)dx}_{I_1(t)} - \rho_2 \int_{L_0}^L v_t(x,t)\sigma(x)\big[g * v_x\big]_t dx \end{aligned}$$

$$+\underbrace{\int_{L_0}^{L}\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t)-g*v_x\big)_x\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t)-g*v_x\big)dx}_{I_2(t)}.$$

En utilisant une intégration par partie par rapport à x dans $I_1(t)$ et $I_2(t)$, on obtient

$$I_1(t)=\frac{\rho_2\alpha_2}{2}\Big[\sigma(x)v_t^2(x,t)\Big]_{x=L_0}^{x=L}-\frac{\rho_2\alpha_2}{2}\int_{L_0}^{L}\sigma'(x)v_t^2(x,t)dx.$$

$$I_2(t)=\frac{1}{2}\Big[\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t)-g*v_x\big)^2\Big]_{x=L_0}^{x=L}-\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\sigma'(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t)-g*v_x\big)^2dx.$$

Alors

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\rho_2\int_{L_0}^{L}v_t(x,t)\sigma(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t)-g*v_x\big)dx\right\}\\&=\frac{\sigma(x)}{2}\Big[\rho_2\alpha_2 v_t^2(x,t)+\big(\alpha_2 v_x(x,t)-g*v_x\big)^2\Big]_{x=L_0}^{x=L}\\&-\frac{\rho_2\alpha_2}{2}\int_{L_0}^{L}\sigma'(x)v_t^2(x,t)dx-\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\sigma'(x)\big(\alpha_2 v_x(x,t)-g*v_x\big)^2dx\\&-\rho_2\int_{L_0}^{L}v_t(x,t)\sigma(x)\big[g*v_x\big]_t dx.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\rho_2\int_{L_0}^{L}v_t(x,t)\sigma(x)\big[g*v_x\big]_t dx&=\rho_2\int_{L_0}^{L}v_t(x,t)\sigma(x)\left[\int_0^t g(t-s)v_x(x,s)ds\right]_t dx\\&=\rho_2\int_{L_0}^{L}v_t(x,t)\sigma(x)\left[g(0)v_x(x,t)+\int_0^t g'(t-s)v_x(x,s)ds\right]dx\\&=\rho_2\int_{L_0}^{L}v_t(x,t)\sigma(x)\big[g(0)v_x(x,t)+g'*v_x\big]dx.\end{aligned}$$

D'après la formule (3.28), on peut écrire :

$$\int_{L_0}^{L}v_t(x,t)\sigma(x)\big[g*v_x\big]_t dx=\int_{L_0}^{L}v_t(x,t)\sigma(x)\left[g(0)v_x(x,t)+\left(\int_0^t g'(s)ds\right)v_x(x,t)-\big(g'\diamond v_x\big)\right]dx.$$

Enfin, on trouve :

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\rho_2\int_{L_0}^{L}\sigma(x)v_t(x,t)\big(\alpha_2 v_x(x,t)-g*v_x\big)dx\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left[\sigma(x)\left\{\rho_2\alpha_2 v_t^2(x,t)+\big[\alpha_2 v_x(x,t)-g*v_x\big]^2\right\}\right]_{x=L_0}^{x=L}\\
&-\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\sigma'(x)\left\{\rho_2\alpha_2 v_t^2(x,t)+\big[\beta(t)v_x(x,t)+g\diamond v_x\big]^2dx\right\}\\
&+\rho_2\int_{L_0}^{L}\sigma(x)v_t(x,t)\left\{-g(t)v_x+\big[g\diamond v_x\big]_t\right\}dx.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Si $\sigma(x)=x-L$ dans (3.30), il est facile de voir que :

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\rho_2\int_{L_0}^{L}(x-L)v_t(x,t)\big(\alpha_2 v_x(x,t)-g*v_x\big)dx\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left[(x-L)\left\{\rho_2\alpha_2 v_t^2(x,t)+\big[\alpha_2 v_x(x,t)-g*v_x\big]^2\right\}\right]_{x=L_0}^{x=L}\\
&-\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\left\{\rho_2\alpha_2 v_t^2(x,t)+\big[\beta(t)v_x(x,t)+g\diamond v_x\big]^2\right\}dx\\
&+\rho_2\int_{L_0}^{L}(x-L)v_t(x,t)\left\{-g(t)v_x+\big[g\diamond v_x\big]_t dx\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\left\{\rho_2\alpha_2 v_t^2(x,t)+\big[\beta(t)v_x(x,t)+g\diamond v_x\big]^2\right\}dx &= \frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\rho_2\alpha_2 v_t^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\beta(t)^2v_x^2(x,t)dx\\
&+\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\big[g\diamond v_x\big]^2dx+\int_{L_0}^{L}\beta(t)\big[g\diamond v_x\big]dx
\end{aligned}
$$

donc d'après l'inégalité (3.29), on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
&\int_{L_0}^{L}\rho_2\alpha_2 v_t^2(x,t)dx+\int_{L_0}^{L}\beta(t)^2v_x^2(x,t)dx\\
&\leqslant (L-L_0)\left\{\rho_2\alpha_2 v_t^2(L_0,t)+\big[\alpha_2 v_x(L_0,t)-g*v_x(L_0,t)\big]^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$-2\frac{d}{dt}\left\{\rho_2\int_{L_0}^{L}(x-L)v_t(x,t)\left\{\beta(t)v_x(x,t)+g\diamond v_x\right\}dx\right\}$$
$$+2\rho_2\int_{L_0}^{L}(x-L)v_t(x,t)\{-g(t)v_x(x,t)+g_t\diamond v_x\}dx-2\beta(t)\int_{L_0}^{L}v_x(x,t)g\diamond v_x dx.$$

Une intégration sur $[0,T]$ de la dernière estimation après l'utilisation de l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}\gamma_0\int_0^T E_2(t,v)dt \leqslant &(L-L_0)\int_0^T\left\{\rho_2\alpha_2 v_t^2(L_0,t)+\left[\alpha_2 v_x(L_0,t)-g*v_x(L_0,t)\right]^2\right\}dt\\ &+c_1\left\{\int_0^T\int_{L_0}^{L}g'\,\square\, v_x dxdt+\int_0^T\int_{L_0}^{L}g(t)v_x^2(x,t)dxdt+E_2(T,v)+E_2(0,v)\right\},\end{aligned}\tag{3.32}$$

où $\gamma_0=\min\,\{\alpha_2,\beta_0\}$ et c_1 est une constante positive.

Ensuite, en multipliant la deuxième équation de (3.1) par v_t, puis en intégrant sur $]L_0,L[$, on aura :

$$\rho_2\int_{L_0}^{L}v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx-\alpha_2\int_{L_0}^{L}v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dx+\int_{L_0}^{L}v_t(x,t)\int_0^t g(t-s)v_{xx}(x,s)dsdx=0\tag{3.33}$$

et comme

$$\alpha_2\int_{L_0}^{L}v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dx=\alpha_2\Big[v_x(L,t)v_t(L,t)-v_x(L_0,t)v_t(L_0,t)\Big]-\frac{\alpha_2}{2}\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L}v_x^2(x,t)dx\tag{3.34}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_{L_0}^{L}v_t(x,t)\int_0^t g(t-s)v_{xx}(x,s)dsdx\\ =&v_t(L,t)\int_0^t g(t-s)v_x(L,s)ds-v_t(L_0,t)\int_0^t g(t-s)v_x(L_0,s)ds-\int_{L_0}^{L}v_{xt}(x,t)\int_0^t g(t-s)v_x(x,s)dsdx.\end{aligned}\tag{3.35}$$

En substituant les estimations (3.34) et (3.35) dans (3.33), nous trouvons :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_2\int_{L_0}^{L}v_t^2(x,t)dx+\alpha_2\int_{L_0}^{L}v_x^2(x,t)dx\right\}\\ =&\alpha_2\Big[v_x(L,t)v_t(L,t)-v_x(L_0,t)v_t(L_0,t)\Big]+\int_{L_0}^{L}v_{xt}(x,t)\int_0^t g(t-s)v_x(x,s)dsdx\\ &-v_t(L,t)\int_0^t g(t-s)v_x(L,s)ds+v_t(L_0,t)\int_0^t g(t-s)v_x(L_0,s)ds\end{aligned}$$

et par une intégration sur $[0,T]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} E_2(0,v) =& E_2(T,v) + \int_0^T v_t(L_0,t)\Big\{\alpha_2 v_x(L_0,t) - g * v_x(L_0,t)\Big\}dt \\ & - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{L_0}^L g'\,\Box\, v_x dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{L_0}^L g(t)v_x^2(x,t)dxdt, \end{aligned}$$

et par (3.32), il est clair que

$$\begin{aligned} \gamma_0\int_0^T E_2(t,v)dt \leqslant & c_2\Bigg\{\int_0^T\big\{\rho_2\alpha_2 v_t^2(L_0,t)\big[\alpha_2 v_x(L_0,t) - g * v_x(L_0,t)\big]^2\big\}dt + E_2(T,v)\Bigg\} \\ & - c_3\Bigg\{\int_0^T\int_{L_0}^L g'\,\Box\, v_x dxdt + \int_0^T\int_{L_0}^L g(t)v_x^2(x,t)dxdt\Bigg\} \end{aligned}$$

où $c_2 > 0$ et $c_3 > 0$ sont des constantes.

Pour monter (ii), il suffit prendre $\sigma(x) = x - L$ dans (3.30) après l'intégration sur $[0,T]$ pour avoir :

$$\begin{aligned} & \frac{L-L_0}{2}\int_0^T\Big\{\rho_2\alpha_2 v_t^2(L_0,t)\big[\alpha_2 v_x(L_0,t) - g * v_x(L_0,t)\big]^2\Big\}dt \\ \leqslant & c_4\Bigg\{\int_0^T E_2(t,v)dt + E_2(T,v) + E_2(0,v)\Bigg\} \end{aligned}$$

où $c_4 > 0$ est une constante. □

Lemme 3.4. *Soit (u,v) solution du problème (3.1)–(3.3), alors, sous les hypothèses* $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$, *il existe deux constantes $K_5 > 0$ et $K_6 > 0$, telles que :*

$$\int_0^T E(t,u,v)dt \leqslant K_5\int_0^T E_2(t,v)dt + K_6\Bigg\{-\int_0^T\int_{L_0}^L \big[g'\,\Box\, v_x\big]dxdt + \int_0^T\int_{L_0}^L g(t)v_x^2(x,t)dxdt\Bigg\},$$

pour tout $T > 0$.

Démonstration. D'après le Lemme 3.2 et en exploitant l'égalité (3.30), nous trouvons

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t,u,v)dt \leqslant & (K_1+K_2)\Bigg\{\int_0^T\big\{u_t^2(L_0,t) + u_x^2(L_0,t)\big\}dt + E(T,u,v)\Bigg\} \\ & + K_3\Bigg\{-\int_0^T\int_{L_0}^L g'\,\Box\, v_x dxdt + \int_0^T\int_{L_0}^L g(t)v_x^2(x,t)dxdt\Bigg\}. \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième l'inégalité de Lemme 3.3 (c'est-à-dire (ii)), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t,u,v)dt \leqslant c_1\left\{\int_0^T E_2(t,v)dt + E(T,u,v) + E(0,u,v)\right\}\\ + K_3\left\{-\int_0^T\int_{L_0}^L g'\,\Box\, v_x dxdt + \int_0^T\int_{L_0}^L g(t)v_x^2(x,t)dxdt\right\}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

En multipliant la première équation de (3.1) par u_t, la deuxième équation par v_t, en intégrant sur $[L_0, L]\times[0,T]$, en utilisant le Lemme 3.2 et en tenant compte que la fonctionnelle $E(t,u,v)$ est fonction décroissante, on obtient :

$$E(0,u,v) \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T E(t,u,v)dt - \frac{1}{2} - \int_0^T\int_{L_0}^L g'\,\Box\, v_x dxdt + \int_0^T\int_{L_0}^L g(t)v_x^2(x,t)dxdt. \tag{3.37}$$

En substituant l'estimation (3.37) dans (3.36), on aura :

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t,u,v)dt \leqslant c_1\int_0^T E_2(t,v)dt + \frac{2c_1}{T}\int_0^T E(t,u,v)dt\\ + c_3\left\{-\int_0^T\int_{L_0}^L g'\,\Box\, v_x dxdt + \int_0^T\int_{L_0}^L g(t)v_x^2(x,t)dxdt\right\}\end{aligned}$$

pour tout $T>0$. $\square$

Lemme 3.5. *Soit (u_k) une suite de fonction telle que :*

$$u^k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad dans \quad L^\infty\Big(0,T;H^\beta\big(]0,L[\big)\Big)$$

et

$$u_t^k \rightharpoonup u_t \quad dans \quad L^2\Big(0,T;H^\alpha\big(]0,L[\big)\Big),$$

lorsque $k\to\infty$ pour $\alpha<\beta$.

Alors, on a :

$$u^k \to u \quad dans \quad C\Big(0,T;H^r\big(]0,L[\big)\Big),$$

pour tout $r<\beta$.

Démonstration. Voir[7]. $\square$

Lemme 3.6. *Pour tout $\eta>0$, il existe $C_\eta>0$ indépendante des conditions initiales, alors*

$$\int_0^T \big[v(L_0,t)\big]^2 dt \leqslant \eta\int_0^T E_2(t,v)dt + C_\eta\left\{\int_0^T\int_{L_0}^L \big[g'\,\Box\, v_x\big]dxdt + \int_0^T\int_{L_0}^L g(t)\big[v_x(x,t)\big]^2 dxdt\right\},$$

pour toute solution (u,v) du problème(3.1)–(3.3) et à condition que T soit assez grand.

Démonstration. On démontre ce résultat par contradiction. On suppose qu'il existe $(y^{k,0}, z^{k,0}) \in [H^2(0,L_0) \times H^2(L_0,L)] \cap \mathcal{V}$, $(y^{k,1}, z^{k,1}) \in \mathcal{V}$ et un constant positif η_0 telle que la solution (y^k, z^k) du système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 y^k_{tt}(x,t) - \alpha_1 y^k_{xx}(x,t) = 0, & x \in]0, L_0[, \quad t > 0, \\ \rho_2 z^k_{tt}(x,t) - \alpha_2 z^k_{xx}(x,t) + \int\limits_0^t g(t-s) z^k_{xx}(x,s)ds = 0, & x \in]L_0, L[, \quad t > 0, \end{cases} \tag{3.38}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} y^k(0,t) = z^k(0,t) = 0, \quad y^k(L_0,t) = z^k(L_0,t), & t > 0, \\ \alpha_1 y^k_x(L_0,t) = \alpha_2 z^k_x(L_0,t) - \int\limits_0^t g(t,s) z^k_x(L_0,s)ds, & t > 0, \end{cases} \tag{3.39}$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} y^k(x,0) = y^k_0(x), \quad y^k_t(x,0) = y^k_1(x), & x \in]0, L_0[, \\ z^k(x,0) = z^k_0(x), \quad z^k_t(x,0) = z^k_1(x), & x \in]L_0, L[, \end{cases} \tag{3.40}$$

vérifient

$$\int\limits_0^T \left[z^k(L_0,t)\right]^2 dt = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{3.41}$$

et l'inégalité suivante :

$$1 > \eta_0 \int\limits_0^T E_2(t, z^k)dt + k\left\{ - \int\limits_0^T \int\limits_{L_0}^L \left[g' \square z^k_x\right] dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_{L_0}^L g(t)\left[z^k_x(x,t)\right]^2 dxdt \right\}.$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'où il vient que

$$\int\limits_0^T E_2(t, z^k)dt \quad \text{est borné,} \tag{3.42}$$

et de plus, on a :

$$\int\limits_0^T \int\limits_{L_0}^L \left[g' \square z^k_x\right] dxdt \longrightarrow 0 \;\text{ et }\; \int\limits_0^T \int\limits_{L_0}^L g(t)\left[z^k_x(x,t)\right]^2 dxdt \longrightarrow 0 \;\text{ quand }\; k \longrightarrow +\infty. \tag{3.43}$$

En multipliant la première équation de (3.38) par y^k_t, la deuxième équation par z^k_t, puis en utilisant une intégration par partie, Lemme 2.2 et tenant compte que $t \longmapsto E(t, y^k, z^k)$ est une fonction décroissante, on obtient :

$$E(t, y^k, z^k) \leqslant \frac{1}{T} \int\limits_0^T E(t, y^k, z^k)dt - \frac{1}{2} \int\limits_0^T \int\limits_{L_0}^L \left[g' \square z^k_x\right] dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_0^T \int\limits_{L_0}^L g(t)\left[z^k_x(x,t)\right]^2 dxdt.$$

D'après le Lemme 3.4, la relation (3.42) et la convergence (3.43), on conclue que $E(t, y^k, z^k)$ est borné. Par conséquent il existe une sous-suite de $(y^k, z^k)_{k\in\mathbb{N}}$, telle que :

$$\begin{cases} (y^k, z^k) \overset{*}{\rightharpoonup} (y, z) \quad \text{dans} \quad L^\infty\big(0, T; \mathcal{V}\big), \\ (y_t^k, z_t^k) \overset{*}{\rightharpoonup} (y_t, z_t) \quad \text{dans} \quad L^\infty\big(0, T; L^2(L_0, L) \times L^2(0, L_0)\big). \end{cases} \tag{3.44}$$

Par conséquent, d'après le Lemme 3.5, on a :

$$z^k \to z \quad \text{dans} \quad C\big(0, T; H^r\big(]L_0, L[\big)\big),$$

pour $r < 1$. Aussi d'après (3.41), on aura :

$$\int_0^T \big[z(L_0, t)\big]^2 dt = 1. \tag{3.45}$$

Le convergence (3.42), montre que $z_k = 0$ p.p. dans $]L_0, L[\times]0, T[$ de telle sorte que

$$\int_0^T \big[z(L_0, t)\big]^2 dt \leqslant C_p^2 \int_0^T \int_{L_0}^L \big[z_k(x, t)\big]^2 dx dt = 0 \tag{3.46}$$

où C_p est la constante de Poincaré, et d'après (3.45) c'une contradiction. □

3.5 Comportement asymptotique

Notre objectif dans cette partie est de montrer que l'énergie modifiée associée au système décroît de manière exponentielle vers zéro quant $t \to +\infty$. Nous sommes maintenant en mesure d'établir et de démontrer notre résultat principal de stabilisation.

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses* (**H1**) et (**H2**), *l'énergie* $\mathscr{E}(t, u, v)$ *associée au problème* (3.1)–(3.3) *décroit exponentiellement vers zéro, c'est-à-dire, qu'il existe deux constantes positives* C_0 *et* ν *telles que :*

$$\mathscr{E}(t, u, v) \leqslant C_0 \mathscr{E}(0, u, v) e^{-\mu t}$$

pour $t \geq 0$.

Remarque 3.3. *La preuve de ce théorème repose sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapounov* $\mathscr{L}$ *en effectuant une modification appropriée de l'énergie, et qui doit vérifier une inégalité de la forme*

$$\mathscr{L}'(t, u, v) \leqslant -C_0 \mathscr{L}(t, u, v), \quad t \geq 0$$

où C_0 *est une constante positive. Pour cela, on définit la fonctionnelle* $\mathscr{L}(t, u, v)$ *par*

$$\mathscr{L}(t, u, v) = N\mathscr{E}(t, u, v) + \frac{g(0)}{2} \mathscr{R}_1(t, v) + \mathscr{R}_2(t, v), \quad t \geq 0 \tag{3.47}$$

où

$$\mathscr{R}_1(t, v) = \rho_2 \int_{L_0}^L v(x, t) v_t(x, t) dx \tag{3.48}$$

et

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_2(t,v) &= -\rho_2\int_{L_0}^{L} v_t(x,t)(g*v)_t(t)dx - \frac{\rho_2}{2}\int_{L_0}^{L}(g''\,\square\, v)_t(t)dx \\ &+ \frac{\rho_2 g'(t)}{2}\int_{L_0}^{L} v^2(x,t) + \frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\big[(g*v_x)(t)\big]^2dx\end{aligned} \tag{3.49}$$

avec N est une constante positive qui sera déterminée par la suite.

Remarque 3.4. *En utilisant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, on peut démontre une équivalence entre $\mathscr{E}(t,u,v)$ et $\mathscr{L}(t,u,v)$, c'est-à-dire, qu'il existe une constante positive N telle que :*

$$\frac{N}{2}\mathscr{E}(t,u,v) \leq \mathscr{L}(t,u,v) \leqslant 2N\mathscr{E}(t,u,v) \tag{3.50}$$

pour tout $t \geq 0$.

Démonstration. En dérivant la fonctionnelle $\mathscr{L}(t,u,v)$ définie par l'équation (3.47) par rapport au temps t, on obtient pour tout $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t,u,v) = N\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t,u,v) + \frac{g(0)}{2}\frac{d}{dt}\mathscr{R}_1(t,v) + \frac{d}{dt}\mathscr{R}_2(t,v), \quad t \geq 0. \tag{3.51}$$

Or, la multiplication de la deuxième équation de (3.1) par v et une intégration sur $]L_0,L[$, nous donne :

$$\rho_2\int_{L_0}^{L} v_{tt}(x,t)v(x,t)dx - \alpha_2\int_{L_0}^{L} v_{xx}(x,t)v(x,t)dx + \int_{L_0}^{L} v(x,t)\int_0^t g(t-s)v_{xx}(x,s)dsdx = 0$$

et par les conditions aux limites et la formule (3.28), on trouve :

$$\frac{d}{dt}\mathscr{R}_1(t,v) = \rho_2\int_{L_0}^{L} v_t^2(x,t)dx - \int_{L_0}^{L}\big\{\beta(t)v_x(x,t) + g\diamond v_x\big\}v_xdx - \alpha_1u_x(L_0,t)v(L_0,t). \tag{3.52}$$

Ensuite, en multipliant la deuxième équation de (3.1) par $g*v$, puis en intégrant sur $]L_0,L[$, on aura :

$$\rho_2\int_{L_0}^{L} v_{tt}(x,t)\big(g*v\big)dx - \alpha_2\int_{L_0}^{L} v_{xx}(x,t)\big(g*v\big)dx + \int_{L_0}^{L}\big(g*v\big)\int_0^t g(t-s)v_{xx}(x,s)dsdx = 0$$

et de même, d'après (3.2) et (3.28), on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{R}_2(t,v) &= -g(0)\rho_2\int_{L_0}^{L} v_t^2(x,t)dx - \frac{\rho_2}{2}\int_{L_0}^{L} g''\,\square\, vdx + \frac{g''(t)\rho_2}{2}\int_{L_0}^{L} v^2(x,t)dx \\ &+ \alpha_1(L_0,t)\big(g*v\big)_t(L_0,t) + \alpha_2\int_{L_0}^{L} g(t)v_x^2(x,t)dx - \alpha_2\int_{L_0}^{L} v_x(x,t)\big[g'\diamond v_x\big]dx.\end{aligned} \tag{3.53}$$

En substituant (3.18) (3.52) et (3.53) dans (3.51), on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t,u,v) =& \frac{N}{2}\int_{L_0}^{L} g'\Box v_x dx - \frac{N}{2}g(t)\int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx - \frac{g(0)\rho_2}{2}\int_{L_0}^{L} v_t^2(x,t)dx \\ &- \frac{g(0)\beta(t)}{2}\int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx + \frac{g(0)}{2}\int_{L_0}^{L} g\diamond v_x v_x(x,t)dx \\ &- \frac{g(0)}{2}\alpha_1 u_x(L_0,t)v(L_0,t) - \frac{\rho_2}{2}\int_{L_0}^{L} g'''\Box v dx + \frac{g''(t)\rho_2}{2}\int_{L_0}^{L} v^2(x,t)dx \\ &+ \alpha_1 u_x(L_0,t)\big\{g(t)v(L_0,t) - g'\diamond v(L_0,t)\big\} + \alpha_2\int_{L_0}^{L} g(t)v_x^2(x,t)dx \\ &- \alpha_2\int_{L_0}^{L} v_x(x,t)\big[g'\diamond v_x\big]dx.\end{aligned}$$

En tenant compte de l'inégalité (3.29), et en utilisant les inégalités de Young et de Poincaré ainsi que l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$, nous aboutissons à l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t,u,v) \leqslant& \frac{N}{4}\left\{\int_{L_0}^{L} g'\Box v_x dx - g(t)\int_{L_0}^{L} v_x^2(x,t)dx\right\} - \frac{g(0)}{2}E_2(t,v) \\ &+ \delta_0 u_x^2(L_0,t) + c_1 v^2(x,t)\end{aligned} \tag{3.54}$$

pour N suffisamment large, $c_1 > 0$ et δ_0 est une constante qui sera déterminée dans la suite.

D'après le Lemme 3.3 et en intégrant sur $[0,T]$ l'inégalité (3.54), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(T,u,v) - \mathscr{L}(0,u,v) \leqslant& \frac{N}{8}\left\{\int_0^T\int_{L_0}^{L} g'\Box v_x dxdt - \int_0^T\int_{L_0}^{L} g(t)v_x^2(x,t)dxdt\right\} \\ &- \frac{g(0)}{2}\int_0^T E_2(t,v)dt + c_1\int_0^T v^2(L_0,t)dt \\ &+ K_4\delta_0\left\{\int_0^T E(t,u,v)dt + E(T,u,v) + E(0,u,v)\right\}.\end{aligned}$$

Puis, en multipliant les équations de (2.18) par u_t et v_t, respectivement, après l'utilisation des intégrations par parties, le Lemme 3.2, les condition (2.20) et en tenant compte que la fonctionnelle $\mathscr{E}(t,u,v)$ est une fonction décroissante, nous obtenons :

$$\mathscr{E}(0,u,v) \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{E}(t,u,v)dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{L_0}^{L} g'\Box v_x dxdt + \int_0^T\int_{L_0}^{L} g(t)v_x^2(x,t)dxdt.$$

Ensuite, on sélectionne N suffisamment large, de manière que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(T,u,v)-\mathscr{L}(0,u,v)\leqslant&\frac{N}{16}\left\{\int_0^T\int_{L_0}^L g'\,\square\, v_x dxdt+\int_0^T\int_{L_0}^L g(t)v_x^2(x,t)dxdt\right\}\\&-\frac{g(0)}{2}\int_0^T E_2(t,v)dt+K_4\delta_0\left(1+\frac{2}{T}\right)\int_0^T\mathscr{E}(t,u,v)dt\\&+c_1\int_0^T v^2(L_0,t)dt.\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 3.4, il est facile de voir que :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(T,u,v)-\mathscr{L}(0,u,v)\leqslant&\frac{N}{32}\left\{\int_0^T\int_{L_0}^L g'\,\square\, v_x dxdt-\int_0^T\int_{L_0}^L g(t)v_x^2(x,t)dxdt\right\}\\&-\frac{g(0)}{2K_5}\int_0^T\mathscr{E}(t,u,v)dt+K_4\delta_0\left(1+\frac{2}{T}\right)\int_0^T\mathscr{E}(t,u,v)dt\\&+c_1\int_0^T v^2(L_0,t)dt,\end{aligned}\tag{3.55}$$

à condition que N soit assez grand.

L'utilisation de Lemme 3.6 pour $n=\delta_0$, nous donne :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(T,u,v)-\mathscr{L}(0,u,v)\leqslant&\frac{N}{64}\left\{\int_0^T\int_{L_0}^L g'\,\square\, v_x dxdt-\int_0^T\int_{L_0}^L g(t)v_x^2(x,t)dxdt\right\}\\&-\left(\frac{g(0)}{2K_5}-\delta_0\left\{c_1+K_4+\frac{2K_4}{T}\right\}\right)\int_0^T\mathscr{E}(t,u,v)dt.\end{aligned}$$

Maintenant, on prend δ_0 de telle sorte que :

$$\frac{g(0)}{2K_5}-\delta_0\left\{c_1+K_4+\frac{2K_4}{T}\right\}=\frac{g(0)}{4K_5}$$

par conséquent on obtient :

$$\mathscr{L}(T,u,v)-\mathscr{L}(0,u,v)\leqslant-\frac{g(0)}{4K_5}\int_0^T\mathscr{E}(t,u,v)dt\leqslant-\frac{g(0)T}{4K_5}\mathscr{E}(T,u,v).\tag{3.56}$$

D'après (3.50) et (3.56), on trouve :

$$\mathscr{L}(T,u,v)-\mathscr{L}(0,u,v)\leqslant-\frac{g(0)T}{8K_5N}\mathscr{L}(T,u,v)\tag{3.57}$$

ce qui implique que :

$$\mathscr{L}(T,u,v) \leqslant \alpha \mathscr{L}(0,u,v) \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(1 + \frac{g(0)T}{8K_5 N}\right)^{-1}.$$

D'une manière analogue, on peut démontrer que

$$\mathscr{L}(\hat{t}+T,u,v) \leqslant \alpha \mathscr{L}(\hat{t},u,v), \qquad \forall \hat{t} \geqslant 0. \tag{3.58}$$

D'autre part, pour $t > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et un nombre réal r satisfaisant $0 \leqslant r < T$, tel que :

$$t = nT + r \Longleftrightarrow n = \frac{t}{T} - \frac{r}{T}.$$

En utilisant les inégalités (3.58) et (3.50) n fois, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(T,u,v) &\leqslant \alpha^n \mathscr{L}(r,u,v)\\ &\leqslant 2N\alpha^n \mathscr{E}(r,u,v)\end{aligned}$$

et comme l'énergie $\mathscr{E}(t,u,v)$ est décroissante, donc :

$$\mathscr{L}(t,u,v) \leqslant 2N\alpha^{-1}\mathscr{E}(0,u,v)e^{-\mu t}.$$

avec $\mu = -\ln(\alpha^{1/T})$. Finalement, En vertu de la relation (3.47), nous obtenons :

$$\mathscr{E}(t,u,v) \leqslant 4\alpha^{-1}\mathscr{E}(0,u,v)e^{-\mu t}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 3.1. □

Corollaire 3.1. *Sous les hypothèses de théorème 3.1. Il existe deux constantes positives C_0 et μ telles que :*

$$\mathscr{E}(t,u,v) \leqslant C_0 \mathscr{E}(0,u,v)e^{-\mu t}.$$

pour toute solution faible (u,v) du problème (3.1)–(3.3).

Conclusion

Dans ce travail, nous avons considéré un problème de transmission d'équations des ondes viscoélastiques.

Après la modélisé mathématiquement du problème physique en utilisant le principe de Hamilton généralisé, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème modélisé par une équation aux dérivées partielles en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et la théorie d'analyse fonctionnelle.

Enfin, nous avons établi un résultat de stabilité du problème sous certaines hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$ pour la fonction de relaxation g.

La stabilisation de l'équation des ondes avec une dissipation viscoélastique est un problème qui peut se résoudre en définissant une bonne fonction de Lyapunov.

Bibliographie

[1] R. A. Adams and J. F. Fourier, *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2003.

[2] G. Allaire, *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles.*École Polytechnique, année : 2015–2016.

[3] J. M. Bony, *Cours d'analyse : Théorie des distributions et analyse de Fourier.* Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau 2001.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, 1987.

[5] L.C. Evans, *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[6] W. He and S. S. Ge, *Cooperative control of a nonuniform gantry crane with constrained tension.* Automatica 66 :146–154, 2016.

[7] J.U. Kim, *A boundary thin obstacle problem for a wave equation*, Comm. Partial Differential Equations. 14 :8–9, 1989.

[8] M.M. Cavalcanti, *Existence and uniform decay for the Euler-Bernoulli viscoelastic equation with nonlocal boundary dissipation.* Discrete Contin. Dyn. Syst. 8(3) :675–695, 2002.

[9] J. E. M. Rivera and H. P. Oquendo, *The transmission problem of viscoelastic waves.* Acta Applicandae Mathematicae 62 :1–21, 2000.

[10] R. Temam, *Navier-Stokes Equations.* North-holland, Amsterdam, New york 1984.