Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté par

DERBAL SANAA

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques appliquées
Spécialité : Analyse mathématique et applications

Thème :

Les structures Hom-algèbres

Soutenu publiquement Juillet 2021 devant le jury composé de

Dr. Khadra Dekkar :	Président
Dr. Hadjer Adimi :	Encadrant
Dr. Zoheir Chebel :	Examinateur

Promotion 2020/2021

Remerciements

Mes remerciements vont d'abord à Allah, le tout puissant, clément et miséricordieux pour m'avoir donné la volonté et le courage pour accomplir nos études.

Mes parents sont la source de ma réussite et de ma fierté. Qu'ils trouvent ici, l'expression de ma reconnaissance et de mon grand amour !

Mes remerciements vont particulièrement à mon encadreur Dr. Hadjer Adimi pour la confiance et l'intérêt qu'elle m'a témoignés tout au long de l'élaboration de ce travail, pour son aide si précieuse et ses conseils pertinents.

Je tiens à remercier également Sabrine Derbal, Bouaoud Moufida et Nadjete Begag pour leur aide.

Que les membres du jury qui ont bien voulu accepter de juger mon travail, trouvent ici, l'expression de notre reconnaissance et de mes remerciements anticipés.

Enfin, que mes frères et mes sœurs sachent qu'ils comptent beaucoup pour moi. MERCI de tout mon cœur !

Sanaâ Derbal

Table des matières

Introduction

L'algèbre désigne généralement la partie des mathématiques qui s'intéressent à l'étude de certains ensembles sur lesquels on a mis une certaine structure, dite structure algébrique. Ainsi, au collège, on peut dire que tout le calcul avec parenthèses, les identités remarquables..., sont de l'algèbre puisqu'ils s'intéressent à un ensemble (généralement, celui des entiers, ou des réels) muni des opérations d'addition, de multiplication habituelles, et que l'on regarde simplement les propriétés de ces opérations.

Plusieurs types d'algèbres existent et ont été étudiés de façon approfondie, notamment les algèbres associatives, les algèbres de Lie, de Leibniz, flexibles, admissibles...

L'étude des algèbres admissibles de Lie flexibles a été initiée par Albert [1], et étudiée par nombre d'auteurs : " Myung, Okubo, Laufer, Tomber et Santilli". Elles ont été introduites par A. A. Albert en 1948. Les physiciens ont tenté d'introduire cette structure à la place des algèbres de Lie.

Dans notre mémoire on concentre sur les structures Hom algèbres. L'étude des hom-algèbres trouve son origine dans [8, 9, 10, 11], qui a introduit une notion d'algèbre hom-Lie dans le contexte de la théorie de la déformation des algèbres de Witt et de Virasoro. Plus tard, cette notion a été généralisée et transférée à toutes les structures algebriques. Les structures hom-algèbres sont une généralisation des structures d'algèbres. Ces algèbres obtenues ne satisfont plus l'identité de Jacobi mais une version modifiée impliquant un homomorphisme. Ces algèbres ont été appelées algèbres de hom-Lie et étudiées par Hartwig, Larsson et Silvestrov dans [11]. Les algèbres hom-associatives considérée s'obtient en modifiant la condition d'associativité à l'aide d'un morphisme α. Les algèbres hom-associatives jouent le rôle d'algèbres associatives dans le cadre du Hom-Lie. Elles ont été introduites dans [15], où l'on montre que le crochet du commutateur défini par la multiplication dans une algèbre hom-associative peut être utilisé comme crochet de la multiplication. Hom-associative conduit naturellement à une algèbre de Hom-Lie.

L'algèbre de Hom-Lie menu du crochet $[,]$ appelé le crochet de Lie qui vérifie l'anti-symétrique et l'identité de hom-Jacobi. Une algèbre Hom-Leibniz est le triplet $(L, [,], \alpha)$ ou L est un espace vectoriel et le crochet $[,]$ verifier la condition $[[x, y], \alpha(z)] = [[x, z], \alpha(y)] + [[\alpha(x), [y, z]]$, et α un morphisme d'algèbre.

L'algèbre hom poisson est le quadruplet $(A, \{,\}, \mu, \alpha)$ c'est une algèbres hom associative commutative muni d une algèbre hom-Lie et satisfait la règle de hom-Leibniz.

Ce mémoire est reparti a trois chapitre :

Le premier chapitres est dévoué aux espaces vectoriels qu'on aura besoin plus tard dans notre mémoire, est fait de trois sections (l'espace vectoriel, les morphismes et les algèbres).

Dans le deuxième chapitre on rappelle quelques définitions et propriétés de quelques algèbres notament les algèbres associatives, de Lie, de Leibniz, flexible, admissible,et les algèbres de poisson ainsi que leurs classifications à isomorphisme pré en dimension inferieur ou égal à quatre.

Dans le troisième chapitre, on donne la version hom des algèbres étudier dans le deuxième chapitres ullistré par la classification à isomorphisme prés de ces algèbres en dimension inférieur au égal à quatre.

Chapitre 1

les espaces vectoriels

1.1 l'espace vectoriel

On désigne par un corps commutatif $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1.1. *On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si E est muni d'une loi interne (addition) et d'une multiplication externe vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Loi interne " + " (l'addition) :*

$$\begin{array}{rcl} + : E \times E & \to & E \\ (v,w) & \mapsto & v+w \end{array}$$

— *Associativité :*

$$\forall u,\ \ v,\ \ w \in E \ \ :\ \ u + (v+w) = (u+v) + w.$$

— *L'élément neutre :*

$$\exists 0_E \in E,\ \ \forall v \in E,\ \ v + 0_E = 0_E + v = v.$$

— *L'opposé :*

$$\forall v \in E,\ \ \exists v' \in E,\ \ v + v' = v' + v = 0_E.$$

— *La commutativité :*

$$\forall v,\ \ w \in E,\ \ v + w = w + v.$$

Ces propriétés font de $(E,\ +)$ un groupe commutatif.

1. *Loi externe " $\cdot$ " (la multiplication) :*

$$\begin{array}{rcl} \cdot\ :\ \mathbb{R} \times E & \to & E \\ (\lambda,\ v) & \mapsto & \lambda \cdot v \end{array}$$

— *L'associativité :*

$$\forall \lambda,\ \ \mu \in \mathbb{R},\ \ \forall v \in E \ \ :\ \ \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v.$$

— *L'élément neutre :*

$$\forall v \in E : 1_E \cdot v = v.$$

— *La distributivité (1) :*

$$\forall \lambda,\ \ \mu \in \mathbb{R},\ \ \forall v \in E \quad (\lambda+\mu)\cdot v = \lambda\cdot v + \mu\cdot v.$$

— *La distributivité (2) :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall v,\ \ w \in E \ \ :\ \ \lambda\cdot(v+w) = \lambda\cdot v + \lambda\cdot w.$$

Notation :

1. 0_E l'élément neutre pour l'addition.
2. 1_E l'élément neutre pour la multiplication.
3. v' l'opposé de v.

Exemple 1.1.1. *L'ensemble des polynômes d'une variable, à coefficients réels est aussi muni naturellement d'une addition et d'une multiplication externe* ($\mathbb{R}[x] = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $k \in \mathbb{N}$ *et* $a_k \in \mathbb{R}$).

Exemple 1.1.2. *Suites des réels :* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n),\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in \mathbb{R}\}$. *L'ensemble des suites des réels est muni de l'addition et de la multiplication par un réel, terme à terme.*

1.1.1 Sous espaces vectoriels

Définition 1.1.2. *Soit E un espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

1. $F \neq \emptyset \Leftrightarrow 0_E \in F$.
2. $\forall u,\ \ v \in F \Leftrightarrow u+v \in F$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in F \ \ : \lambda\cdot u \in F$.

Exemple 1.1.3.

1. *L'espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de E.*
2. *L'espace total E est le plus grand sous-espace vectoriel de E.*
   On les appelles les sous-espaces vectoriels triviaux de E.

Théorème 1.1.1. *Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous ensemble non vide de E. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

$$\forall v,\ \ w \in F,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ :\ \ \lambda\cdot v + \lambda\cdot w \in F.$$

Proposition 1.1.1. *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

Combinaison linéaire

Définition 1.1.3. *Soient $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ une famille des vecteurs dans $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit qu'un vecteur $u \in E$ est une combinaison linéaire de $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, s'il existes des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, telle que :*

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$$

Famille libre et liées

Définition 1.1.4. *Une famille $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ de E est une famille libre ou linéairement indépendante si toute combinaison linéaire égale au vecteur nul :*

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est à dire :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est à dire s'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, on dit que la famille est liée ou linéairement dépendante. Une telle combinaison linéaire s'appelle alors une relation de dépendance linéaire entre les v_k.

Famille génératrice

Définition 1.1.5. *On dit que la famille $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ des vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de E est une famille génératrice de E si tout vecteur u de E est une combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, v_2, v_3, \ldots v_n\}$, c'est à dire :*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R} \ : \ u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

1.1.2 La base et la dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.1.6. *On dit que la famille $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ des vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectorielle de E est une base de E si $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ est une famille libre et génératrice.*

Exemple 1.1.4. *La famille $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Elle est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

Définition 1.1.7. *Le nombre de vecteurs formant une base de E s'appelle la dimension de E et est notée **dim** E.*

Exemple 1.1.5. *La base canonique $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ comporte n vecteurs. Cet espace est donc de dimension n.*

Exemple 1.1.6. *L'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ admet une base formée de n^2 vecteurs. Il est donc de dimension n^2.*

Théorème 1.1.2. *Soient E sur $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie alors :*

1. *Tous sous espace vectoriel F de E est de dimension finie.*
2. *$\dim F \leq \dim E$.*
3. *soient F et G deux sous espace vectoriel de E et $G \subset F$ on a donc : $\dim F = \dim G \Leftrightarrow F = G$.*

1.2 Les morphismes

En algèbre générale, un morphisme est une application entre deux structures algébrique de même espace c'est à dire des ensembles muni de loi de composition interne ou externe qui respect certaines propriétés en passent d'une structure à l'autre.

1.2.1 Application linéaire

Définition 1.2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est une application linéaire si :*

$$\forall u,\ v \in E \ : f(u+v) = f(u) + f(v).$$

et

$$\forall v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ : \ f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v).$$

Ou de manière équivalente :

$$f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v).$$

Pour tous $u,\ v \in E$ et pour tous $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$.

— *On note par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

Exemple 1.2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels.*

1. *L'application nulle :*
$$\begin{array}{rccl} f & : & E & \to & F \\ & & u & \mapsto & 0_F \end{array}$$
est une application linéaire.
2. *L'application identique :*
$$\begin{array}{rccl} f & : & E & \to & F \\ & & u & \mapsto & u \end{array}$$
est linéaire.

Remarque 1. *:*

1. *Un morphisme de E dans luis même s'appelle* ***endomorphisme*** *. (exemple : l'application de dérivation de $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ qui à un polynôme P fait correspondre sont polynôme dérivé P' est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$).*
2. *Une application f est* ***un isomorphisme*** *si elle est linéaire et bijective.*
3. *Une application f est* ***un automorphisme*** *si elle est linéaire, bijective et $F = E$.*

1.2.2 Noyau et l'image d'une application linéaire

Définition 1.2.2. *Soient E, F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle :*

1. *Image de f et on note $Im(f)$ le sous-espace vectoriel de F :*

$$Im(f) = f(E) = \{f(v),\ \ v \in E\}.$$

2. *Noyau de f et on note $Ker(f)$ le sous-espace vectoriel de E :*

$$Ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{v \in E,\ \ f(v) = 0_F\}.$$

Exemple 1.2.2.

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, si f est l'application nulle, alors : $Ker f = E$ et $Im f = \{0_F\}$.*
2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, si $f = Id_E$ alors : $Ker f = \{0_E\}$ et $Im f = E$.*

Proposition 1.2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels f, une application linéaire de E dans F. L'application f est :*

1. *Surjective si et seulement si :*
$$Im(f) = F.$$
2. *Injective si et seulement si :*
$$Ker(f) = 0_E.$$

En dimension finie, la dimension de l'espace de départ est la somme de la dimension de l'image et de la dimension du noyau : c'est le théorème du rang.

Théorème 1.2.1. ***(théorème du rang)***
Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie, il en est de même pour $Im(f)$ et $Ker(f)$ et :

$$dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(E).$$

1.3 Algèbres

Définition 1.3.1. [17] *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle $\mathbb{K}$-algèbre tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une loi de composition interne $(u,v) \to u \times v$ appelée* ***multiplication*** *telle que l'application*

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (v,w) & \mapsto & v \times w \end{array}$$

soit $\mathbb{K}$-bilinéaire.

- *On dit que l'algèbre est associative si la multiplication est* ***associative*** *.*
- *On dit que l'algèbre est* ***commutative*** *si la multiplication est commutative.*

— *On dit que l'algèbre est* ***unitaire*** *si la multiplication possède un élément unité.*

— *Toute algèbre associative unitaire est un anneau.*

Exemple 1.3.1.

1. $\mathbb{K}$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre.*
2. *Soit* E *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$*. Alors l'espace* $\mathcal{L}(E)$ *des applications* $\mathbb{K}$*-linéaires de* E *dans lui même muni de la composition des applications est une* $\mathbb{K}$*-algèbre unitaire.*
3. *Soit* E *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$*. Alors l'espace* $\mathcal{L}(E)$ *des applications* $\mathbb{K}$*-linéaires de* E *dans lui même muni du produit appelé* ***crochet*** $[f,g] = f \circ g - g \circ f$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre. Cette algèbre n'est ni associative, ni commutative, ni unitaire si* $dim_{\mathbb{K}} E \geq 2$*.*

1.3.1 Sous algèbres

Définition 1.3.2. *Une sous algèbre d'une* $\mathbb{K}$*-algèbre* $(E,+,\times,\cdot)$ *c'est une partie* F *de* E *qui contient* 1_E *qui est stable pour chacune des trois lois, c'est à dire :*

1. *Est un* $\mathbb{K}$*espace vectoriel.*
2. $1_E \in F$.
3. $\forall u,\ v \in F\ :\ u+v \in F$ *et* $u \times v \in F$.
4. $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \cdot u \in F$.

Proposition 1.3.1. *Une sous algèbre d'une* $\mathbb{K}$*-algèbre est une* $\mathbb{K}$*-algèbre.*

1.3.2 Morphisme de $\mathbb{K}-$algèbre

Définition 1.3.3. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-algèbre. Un morphisme de* $\mathbb{K}$*-algèbre de* E *dans* F *est une application :*

$$f\ :\ E \to F,$$

telle que :

1. $\forall u,\ v \in E$ *:*
$$f(u+v) = f(u) + f(v).$$
2. $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *:*
$$f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u).$$
3. $\forall u,\ v \in E$ *:*
$$f(u \times v) = f(u) \times f(v).$$

Pour tous $u,\ v \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

En d'autres termes, f *est un morphisme de* $\mathbb{K}$*-algèbres si et seulement si* f *est* $\mathbb{K}$*-linéaire et est un homomorphisme d'anneaux.*
Si E *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre, un morphisme d'algèbres* $f : E \to E$ *est parfois appelé un* ***endomorphisme*** *de* E*.*

Définition 1.3.4. *Un morphisme de* $\mathbb{K}$*-algèbres* $f : E \to F$ *est appelé un* ***isomorphisme*** *s'il existe un morphisme* $g : F \to E$ *tel que :* $f \circ g = 1_F$ *et* $g \circ f = 1_E$.
Les algèbres E *et* F *sont alors dites* ***isomorphes.***

Remarque 2. *Soit* $f : E \to F$ *un morphisme de* $\mathbb{K}$*-algèbres. Alors* f *est un isomorphisme si et seulement si elle est bijectif.*

Chapitre 2

Quelques structures algébriques

Dans ce chapitre, on rappelle des notions fondamentales et quelques propriétés de quelques algèbres, en particulier les algèbres associatives, algèbres de Lie, algèbres de Leibniz, algèbres flexibles et algèbres de Lie admissibles ainsi que les algèbres de poisson.

2.1 Algèbres associatives

Définition 2.1.1. *Une $\mathbb{K}$-algèbre associative sur A est la donnée d'une application bilinéaire,*

$$\mu : A \times A \to A,$$

appelée multiplication, vérifiant la condition suivante :

— *μ est associative, c'est à dire :*

$$\forall x,\ \ y,\ \ z \in A,\ \ \mu(\mu(x,y),z) - \mu(x,\mu(y,z)) = 0. \tag{2.1}$$

Remarque 3. *Si la multiplication μ possède un élément neutre, ce qui est équivalent à l'existence d'élément $1_A \in A$ tel que :*

$$\forall x \in A,\ \ \mu(x,1_A) = \mu(1_A,x) = x. \tag{2.2}$$

Dans ce cas on l'appelle ***algèbre associative unitaire*** *.*

Exemple 2.1.1. *Les matrices carrées de taille n par n à coefficients dans $\mathbb{K}$ forment une algèbre associative unitaire sur $\mathbb{K}$.*

Exemple 2.1.2. *Les nombres complexes $\mathbb{C}$ forment une algèbre associative unitaire de dimension 2 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.*

Exemple 2.1.3. *Les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ forment une algèbre associative unitaire de dimension infinie sur $\mathbb{K}$.*

2.1.1 Sous algèbres associatives, idéaux

Définition 2.1.2. *Soit (A,μ) une algèbre associative, une sous algèbre H de (A,μ) est un sous espace vectoriel qui vérifie :*

$$pour\ \ tous\ \ x,\ \ y \in H,\ \ \mu(x,y) \in H. \tag{2.3}$$

Ou de manière équivalente :

$$\mu(H,H) \subset H. \tag{2.4}$$

Définition 2.1.3. *Un sous-ensemble I de (A,μ) est un idéal de (A,μ) si I est un sous-espace vectoriel de (A,μ) et si pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in A$, on a :*

$$\mu(x,y) \in I. \tag{2.5}$$

Ou de manière équivalente :

$$\mu(I,A) \subset I. \tag{2.6}$$

Remarque 4. *Dans la définition (2.1.3) on a définie l'idéal à gauche, Un idéal à droite I est un sous ensemble de A qui vérifie $\mu(A,I) \subset I$.*
On appelle ***idéal bilatère*** *de A toute partie de A qui est simultanément un idéal à gauche et un idéal à droite.*

2.1.2 Morphismes et représentations d'algèbres associatives

Définition 2.1.4. *Soient (A_1,μ_1), (A_2,μ_2) deux algèbres associatives. Un morphisme d'algèbre associative est une application linéaire :*

$$\varphi : A_1 \to A_2,$$

qui vérifie :

$$\varphi(\mu_1(x,y)) = \mu_2(\varphi(x),\varphi(y)), \tag{2.7}$$

Pour tous x, $y \in A_1$.

Remarque 5. *Soient (A_1,μ_1) et (A_2,μ_2) deux algèbres associatives sur un corps $\mathbb{K}$, et soit $\varphi : A_1 \to A_2$ un morphisme d'algèbre associative.*

1. *Le noyau d'un morphisme d'algèbres associatives, $Ker(\varphi) = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\}$, est un* ***idéal*** *de A_1.*
2. *L'image d'un morphisme d'algèbres associatives, $Im(\varphi) = \{\varphi(x), x \in V\}$, est une* ***sous algèbre*** *de A_2.*

Définition 2.1.5. *Soient (A,μ) une algèbre associative sur un corps $\mathbb{K}$ et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle représentation de l'algèbre associative A sur V l'application linéaire :*

$$\rho : A \to End(V).$$

qui vérifie :

$$\rho(\mu(x,y)) = \mu(\rho(x),\rho(y)). \tag{2.8}$$

Pour tous x, $y \in A$, où $End(V)$= $\{\varphi : A \to V \ \ linaires\}$. On dit aussi que V est un A-module. Cette représentation de A est notée (ρ, A).

2.1.3 Dérivations

Définition 2.1.6. *Soit (A,μ) une algèbre associative. Une dérivation $D : A \rightarrow A$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire qui vérifie pour tous $x,\ \ y \in A$:*

$$D(\mu(x,y)) = \mu(Dx,y) + \mu(x,Dy). \tag{2.9}$$

L'ensemble des dérivations de A est notée $Der_{\mathbb{K}}A$.

2.1.4 Classification des algèbres associatives

La classification des algèbres associatives de dimension n est connue pour : $n \leq 5$. Nous rappelons les résultats dans les dimensions 2 et 3. Soit $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de l'espace vectoriel sous-jasent (Voir [7]).

Proposition 2.1.1.

1. *Toute algèbre associative de dimension 2 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

$$\begin{cases} \mu_1^2(e_1,e_1) = e_1,\ \ \mu_1^2(e_1,e_2) = e_2,\ \ \mu_1^2(e_2,e_1) = e_2,\ \ \mu_1^2(e_2,e_2) = 0. \\ \mu_2^2(e_1,e_1) = e_1,\ \ \mu_2^2(e_1,e_2) = e_2,\ \ \mu_2^2(e_2,e_1) = e_2,\ \ \mu_2^2(e_2,e_2) = e_2. \end{cases}$$

2. *Toute algèbre associative de dimension 3 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

$$\begin{cases} \mu_1^3(e_1,e_1) = e_1,\ \ \mu_1^3(e_1,e_2) = e_2,\ \ \mu_1^3(e_2,e_1) = e_2, \\ \mu_1^3(e_2,e_2) = e_2,\ \ \mu_1^3(e_1,e_3) = e_3,\ \ \mu_1^3(e_3,e_1) = e_3, \\ \mu_1^3(e_2,e_3) = e_3,\ \ \mu_1^3(e_3,e_2) = e_3,\ \ \mu_1^3(e_3,e_3) = e_3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_2^3(e_1,e_1) = e_1,\ \ \mu_2^3(e_1,e_2) = e_2,\ \ \mu_2^3(e_2,e_1) = e_2, \\ \mu_2^3(e_2,e_2) = e_2,\ \ \mu_2^3(e_1,e_3) = e_3,\ \ \mu_2^3(e_3,e_1) = e_3, \\ \mu_2^3(e_2,e_3) = e_3,\ \ \mu_2^3(e_3,e_2) = e_3,\ \ \mu_2^3(e_3,e_3) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_3^3(e_1,e_1) = e_1,\ \ \mu_3^3(e_1,e_2) = e_2,\ \ \mu_3^3(e_2,e_1) = e_2, \\ \mu_3^3(e_2,e_2) = e_2,\ \ \mu_3^3(e_1,e_3) = e_3,\ \ \mu_3^3(e_3,e_1) = e_3, \\ \mu_3^3(e_2,e_3) = 0,\ \ \mu_3^3(e_3,e_2) = 0,\ \ \mu_3^3(e_3,e_3) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_4^3(e_1,e_1) = e_1,\ \ \mu_4^3(e_1,e_2) = e_2,\ \ \mu_4^3(e_2,e_1) = e_2, \\ \mu_4^3(e_2,e_2) = 0,\ \ \mu_4^3(e_1,e_3) = e_3,\ \ \mu_4^3(e_3,e_1) = e_3, \\ \mu_4^3(e_2,e_3) = 0,\ \ \mu_4^3(e_3,e_2) = 0,\ \ \mu_4^3(e_3,e_3) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_5^3(e_1,e_1) = e_1,\ \ \mu_5^3(e_1,e_2) = e_2,\ \ \mu_5^3(e_2,e_1) = e_2, \\ \mu_5^3(e_2,e_2) = e_2,\ \ \mu_5^3(e_1,e_3) = e_3,\ \ \mu_5^3(e_3,e_1) = e_3, \\ \mu_5^3(e_2,e_3) = e_3,\ \ \mu_5^3(e_3,e_2) = 0,\ \ \mu_5^3(e_3,e_3) = 0. \end{cases}$$

2.2 Algèbres de Lie

Définition 2.2.1. *Une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{G}$ muni d'une application $\mathbb{K}$-bilinéaire :*

$$\begin{array}{rcl}[,]:\mathcal{G}\times\mathcal{G} & \to & \mathcal{G}\\ (x,y) & \mapsto & [x,y]\end{array}$$

appelée ***crochet de Lie*** *et satisfaisant les deux axiomes :*

— *L'antisymétrique :*

$$[x,y]=-[y,x] \tag{2.10}$$

— *L'identité de Jacobi :*

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \tag{2.11}$$

Pour tous $x,\ y,\ z\in\mathcal{G}$.

Remarque 6.

1. *L'identité de Jacobi peut s'écrire sous la forme $\circlearrowleft_{x,y,z}[x,[y,z]]=0$.*
2. *L'antisymétrique $[x,y]=-[y,x]$ est équivalent à $[x,x]=0$.*
3. *L'axiome (2.11) peut se réécrire sous la forme :*

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]].$$

Notation :

1. gl_n l'ensemble des matrices carré.
2. $sl_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $gl_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.
3. $t_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $gl_n(\mathbb{K})$.
4. $d_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $gl_n(\mathbb{K})$.

Exemple 2.2.1. *L'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n sur un corps $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$, muni du crochet :*

$$[,]:\mathcal{M}(n,\mathbb{K})\times\mathcal{M}(n,\mathbb{K})\to\mathcal{M}(n,\mathbb{K}).$$

telle que pour tous A, B de $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$:

$$[A,B]=AB-BA.$$

est une algèbre de Lie.

Démonstration : On va montré que $[A,B]=AB-BA$ est une algèbre de Lie , on a :

1. Pour tous $A,\ B\in\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$, $[A,B]=AB-BA=-(BA-AB)=-[B,A]$.
2. Pour tous $A,\ B,\ C\in\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$:

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] \;=\; [A,BC-CB]+[B,CA-AC]+[C,AB-BA]$$

$$\begin{aligned} &= [A,BC]-[A,CB]+[B,CA]-[B,AC]+[C,AB]-[C,BA] \\ &= ABC-BCA-ACB+CBA+BCA-CAB \\ &\quad -BAC+ACB+CAB-ABC-CBA+BAC \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 2.2.2. *Les éléments* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *engendrent l'algèbre de Lie* $sl(2,\mathbb{R})$ *et satisfont les relations de commutation :* $[A,B] = 2B$, $[A,C] = -2C$ *et* $[B,C] = A$.

Démonstration : Pour tous $A,\ B,\ C \in sl(2,R)$:

1. L'anti-symétrique :
$$\begin{cases} [A,B] = 2B = -(-2B) = -[B,A], \\ [A,C] = -2C = -(2C) = -[C,A], \\ [B,C] = A = -(-A) = -[C,B]. \end{cases}$$

2. . L'identité de Jacobi :

$$\begin{aligned} [A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] &= [A,A]+[B,2C]+[C,2B] \\ &= 0+2B-2B = 0. \end{aligned}$$

Définition 2.2.2. *Tout espace vectoriel* $\mathcal{G}$ *sur* $\mathbb{K}$*, muni du crochet de Lie nul* $[x,y] = 0$*, est une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$*, dite abélienne(ou commutative).*

Exemple 2.2.3. *Toute algèbre de Lie de dimension 1 sur* $\mathbb{K}$ *est abélienne.*

Proposition 2.2.1. *(Algèbre de Lie sous-jacente à une algèbre associative). Si* A *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre associative, alors* $[x,y] = \mu(x,y) - \mu(y,x)$ *définit un crochet de Lie sur* A*.*

Démonstration : Le crochet est anti-symétrique et avec un calcule direct nous avons :

$$\begin{aligned} [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] &= \mu(x,\mu(y,z))-\mu(x,\mu(z,y))-\mu(\mu((y,z),x) \\ &+ \mu(\mu(z,y),x)+\mu(y,\mu(z,x))-\mu(y,\mu(x,z)) \\ &- \mu(\mu(z,x),y)+\mu(\mu(x,z),y)+\mu(z,\mu(x,y)) \\ &- \mu(z,\mu(y,x))-\mu(\mu(x,y),z)+\mu(\mu(y,x),z) = 0. \end{aligned}$$

2.2.1 Sous algebre de Lie et idéal

Définition 2.2.3. [16] *Un sous-ensemble* H *de* $\mathcal{G}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathcal{G}$ *si* H *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{G}$ *et si pour tous* $x,\ y \in H$*, on a :*

$$[x,y] \in H. \tag{2.12}$$

Ou de manière équivalente :

$$[H,H] \subset H. \tag{2.13}$$

Définition 2.2.4. *Un sous-ensemble I de $\mathcal{G}$ est un idéal de $\mathcal{G}$ si I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}$ et si pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in \mathcal{G}$, on a :*

$$[x, y] \in I. \tag{2.14}$$

Ou de manière équivalente :

$$[I, \mathcal{G}] \subset I. \tag{2.15}$$

Remarque 7. *On vérifie sans peine que si H, K sont des sous-algèbres (respectivement idéaux) de $\mathcal{G}$, alors $H \cap K$ et $H + K$ sont des sous-algèbres (respectivement idéaux) de $\mathcal{G}$.*

Exemple 2.2.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les sous-ensembles $sl_n(\mathbb{K})$, $t_n(\mathbb{K})$ et $d_n(\mathbb{K})$ de $gl_n(\mathbb{K})$, sont des sous-algèbres de $gl_n(\mathbb{K})$:*

Exemple 2.2.5. *Le sous-espace vectoriel $[H, H]$ engendrée par les crochets $[x, y]$, où x, $y \in \mathcal{G}$, est un idéal de $\mathcal{G}$, appelée commutant de $\mathcal{G}$ ou idéal dérivée de $\mathcal{G}$.*

2.2.2 Morphisme d'algèbre de Lie

Définition 2.2.5. *Un morphisme d'algèbres de Lie $\mathcal{G}$ est une application linéaire $\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ qui respecte le crochet de Lie, c'est-à-dire :*

$$\forall x, \ y \in \mathcal{G}_1, \ \ \varphi([x, y]_1) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2. \tag{2.16}$$

Définition 2.2.6. *L'application φ est un **isomorphisme** d'algèbres de Lie si de plus φ est bijective. Les algèbres de Lie $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont dites **isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$.*

2.2.3 Représentations et modules

Définition 2.2.7. [16] *Une représentation de $\mathcal{G}$, ou $\mathcal{G}$-module, est une paire (V, ρ), où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\rho : \mathcal{G} \to gl(V)$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Autrement dit, ρ est une application linéaire telle que :*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}, \ \ \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x) = \rho([x, y]) \tag{2.17}$$

Remarque 8. *En général, on définit plutôt un $\mathcal{G}$-module (à gauche) comme étant un espace vectoriel V muni d'une opération :*

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathcal{G} \times V & \to & V \\ (x, v) & \mapsto & x \cdot v \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. *$(x, v) \mapsto x \cdot v$ est linéaire en x et en v.*
2. *$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$ pour tous x, $y \in \mathcal{G}$ et $v \in V$.*

Exemple 2.2.6. *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} ad : \mathcal{G} & \to & gl(\mathcal{G}) \\ x & \mapsto & ad_x = [x, -] \end{array}$$

définit une représentation de $\mathcal{G}$, appelée ***la représentation adjointe*** .

2.2.4 Dérivations

Définition 2.2.8. *Une dérivation D d'algèbre de Lie $(\mathcal{G}, [,])$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire $D : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ qui vérifie, pour tous $x,\ y \in \mathcal{G}$:*

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)], \tag{2.18}$$

ou de manière équivalente :

$$D(xy) = D(x)y + xD(y). \tag{2.19}$$

On note par $Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{G})$ l'ensemble des dérivations de $\mathcal{G}$.

Exemple 2.2.7. *Soit $(\mathcal{G}, [,])$ une algèbre de Lie abélienne, tout endomorphisme de $\mathcal{G}$ est une dérivation de $\mathcal{G}$.*

Proposition 2.2.2.

1. *La dérivation des somme égal a somme des dérivation, c'est à dire :*

$$D(x + y, z) = D(x, z) + D(y, z),\ \ pour\ \ tous\ \ x,\ \ y, z \in \mathcal{G}. \tag{2.20}$$

2. *La dérivation de λxy est égal a λ dérivation xy, c'est à dire :*

$$D(\lambda xy) = \lambda D(xy),\ \ pour\ \ tous\ \ x,\ \ y \in \mathcal{G}. \tag{2.21}$$

Démonstration :

1. Par la définition de la dérivation d'algèbre de Lie, on a :

$$\begin{array}{rcl} D(x + y, z) & = & D(x + y)z + (x + y)D(z) \\ & = & D(x)z + D(y)z + xD(z) + yD(z) \\ & = & D(x)z + xD(z) + D(y)z + yD(z) \\ & = & D(x, z) + D(y, z). \end{array}$$

2. Pour la deuxième propriété, on a :

$$\begin{array}{rcl} D(\lambda xy) & = & D(\lambda x)y + \lambda xD(y) \\ & = & \lambda D(x)y + \lambda xD(y) \\ & = & \lambda(D(x)y + xD(y)) \\ & = & \lambda D(xy). \end{array}$$

2.2.5 Centre d'une algèbre de Lie

Définition 2.2.9. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Le centre $Z(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ est défini par :*

$$Z(\mathcal{G}) = \{x \in \mathcal{G} \mid [x,y] = 0, \forall y \in \mathcal{G}\}. \tag{2.22}$$

Exemple 2.2.8. *Si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie abélienne, alors $Z(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$.*

2.2.6 Classification des algèbres de Lie

Proposition 2.2.3. *(voir [2])*

1. *Toute algèbre de Lie de dimension 2 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*
   $\mathcal{G}_2 : [e_1,e_2] = e_2.$
2. *Toute algèbre de Lie de dimension 3 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*
   $\mathcal{G}_3^1 : [e_1,e_2] = e_3.$

   $\mathcal{G}_3^2 : [e_1,e_2] = e_2,\ [e_1,e_3] = \alpha e_3,\ \alpha \neq 0.$

   $\mathcal{G}_3^3 : [e_1,e_2] = e_2 + e_3,\ [e_1,e_3] = e_3.$
3. *Toute algèbre de Lie de dimension 4 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*
   $\mathcal{G}_4^1 : [e_1,e_2] = e_2,\ [e_1,e_3] = \alpha e_3,\ [e_1,e_4] = (1+\alpha)e_4,\ [e_2,e_3] = e_4.$

   $\mathcal{G}_4^2 : [e_1,e_2] = e_2 + e_3,\ [e_1,e_3] = e_3,\ [e_1,e_4] = 2e_4,\ [e_2,e_3] = e_4.$

   $\mathcal{G}_4^3 : [e_1,e_3] = e_3,\ [e_1,e_4] = e_4, [e_2,e_3] = e_4.$

   $\mathcal{G}_4^4 : [e_1,e_2] = e_2,\ [e_1,e_3] = \alpha e_3,\ [e_1,e_4] = \beta e_3.$

   $\mathcal{G}_4^5 : [e_1,e_2] = \alpha e_2,\ [e_1,e_3] = e_3 + e_4,\ [e_1,e_4] = e_4.$

   $\mathcal{G}_4^6 : [e_1,e_2] = e_2 + e_3,\ [e_1,e_3] = e_3 + e_4,\ [e_1,e_4] = e_4.$

   $\mathcal{G}_4^7 : [e_1,e_2] = e_3,\ [e_1,e_4] = e_4.$

   $\mathcal{G}_4^8 : [e_1,e_2] = e_3,\ [e_1,e_3] = e_4.$

2.3 Algèbre de Leibniz

Définition 2.3.1. [14] *Une algèbre de Leibniz droite sur $\mathbb{K}$ est la donnée d'un $\mathbb{K}$-module L muni d'une application bilinéaire (crochet) $[,] : L \times L \to L$, satisfaisant à la relation de Leibniz droite :*

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y] \tag{2.23}$$

pour tout $x,\ y,\ z \in L$.

— *Si l'on pense à l'opération $[-,z]$ comme à une dérivation $d()$, on obtient précisément :*

$$d(xy) = d(x)y + xd(y).$$

— *Pour une algèbre de Leibniz gauche la relation de Leibniz gauche est :*

$$[[x,y],z]=[x,[y,z]]-[y,[x,z]]. \tag{2.24}$$

Pour tout $x,\ y,\ z\in L$.

Remarque 9. *Lorsque le crochet est anticommutatif, c'est à dire* $[x,y]=-[y,x]$*, chacune de ces relations est équivalente à la relation de Jacobi :*

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0. \tag{2.25}$$

— *Puisque (2.23) (respectivement (2.24)) consiste à réécrire (2.25) en mettant x à la première place (respectivement z à la dernière place) dans chaque terme.*

— *On remarquera que si le crochet* $[,]$ *vérifie (2.23) alors le crochet* $[,]'$*, défini par* $[x,y]'=[y,x]$*, vérifie (2.24). Il y a donc équivalence entre algèbres de Leibniz gauches et algèbres de Leibniz droites.*

Exemple 2.3.1. [12] *Soit* $(L,[,])$ *une algèbre de Leibniz droite qui n'est pas une algèbre de Lie. Alors :*

1. *Si* $Dim(L)=2$ *(sur* $\mathbb{C}$ *) et* $\{e_1,e_2\}$ *est une base de* L *alors* L *est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*
   — $L_1:[e_1,e_1]=e_2.$
   — $L_2:[e_1,e_2]=e_2.$
2. *Si* $Dim(L)=3$ *(sur* $\mathbb{C}$*) et* $\{e_1,e_2,e_3\}$ *est une base de* L *alors* L *est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*
   — $L_1:[e_1,e_3]=-2e_1,\ \ [e_2,e_2]=e_1,\ \ [e_3,e_2]=e_2,\ \ [e_2,e_3]=-e_2.$
   — $L_2:[e_1,e_3]=ae_1,\ \ [e_3,e_2]=e_2,\ \ [e_2,e_3]=-e_2,\ \ a\in\mathbb{C}.$
   — $L_3:[e_3,e_3]=e_1,\ \ [e_3,e_2]=e_2,\ \ [e_2,e_3]=-e_2.$
   — $L_4:[e_2,e_2]=e_1,\ \ [e_3,e_3]=ae_1,\ \ [e_2,e_3]=e_1,\ \ a\in\mathbb{C}.$
   — $L_5:[e_2,e_2]=e_1,\ \ [e_3,e_3]=e_1.$
   — $L_6:[e_1,e_3]=e_2,\ \ [e_2,e_3]=e_1.$
   — $L_7:[e_1,e_3]=e_2,\ \ [e_2,e_3]=ae_1+e_2.$
   — $L_8:[e_3,e_3]=e_1,\ \ [e_1,e_3]=e_2.$
   — $L_9:[e_3,e_3]=e_1,\ \ [e_1,e_3]=e_1+e_2.$

Exemple 2.3.2. *Toute algèbre de Lie est de Leibniz, si le crochet est supposé antisymétrique, l'identité de Leibniz est équivalente à l'identité de Jacobi.*

2.3.1 Sous algèbre de Leibniz

Définition 2.3.2. *Soit* L *une algèbre de Leibniz. Une sous-algèbre* H *de* L *est un sous espace vectoriel de* L *stable par crochet c'est à dire vérifiant* $[H,H]\subset H$*. On dit de plus qu'elle est :*

1. *Un idéal à gauche si* $[L,H] \subset H$.
2. *Un idéal à droite si* $[H,L] \subset H$.
3. *Un idéal bilatère si elle est un idéal à gauche et à droite.*

Exemple 2.3.3. *Si L est une algèbre de Lie, tout idéal de L au sens de Lie est un idéal bilatère au sens de Leibniz.*

Exemple 2.3.4. $[L,L]$ *est toujours un idéal bilatère d'une algèbre de Leibniz L.*

2.3.2 Morphisme d'algèbre de Leibniz

Définition 2.3.3. *Soient* L_1 *et* L_2 *deux algèbres de Leibniz et* $\varphi : L_1 \to L_2$ *une application linéaire. On dit que* φ *est un morphisme (d'algèbres de Leibniz) si elle vérifie l'identité suivante :*

$$\varphi([x,y]_{L_1}) = [\varphi(x),\varphi(y)]_{L_2}. \tag{2.26}$$

Pour tous $x,\ y \in L_1$.
Si de plus l'application est bijective, on parle alors d'isomorphisme.

2.3.3 Dérivation et bidérivations

Définition 2.3.4. *Soit L une algèbre de Leibniz. Une dérivation* $d : L \to L$ *est une application* $\mathbb{K}$*-linéaire qui vérifie, pour tous* $x,\ y \in L$ *:*

$$d([x,y]) = [dx,y] + [x,dy]. \tag{2.27}$$

Une anti-dérivation $D : L \to L$ *est une application* $\mathbb{K}$*-linéaire qui vérifie, pour tous* $x,\ y \in L$ *:*

$$D([x,y]) = [Dx,y] - [Dy,x]. \tag{2.28}$$

Notons que si L est une algèbre de Lie il n'y a pas de différence entre dérivation et anti-dérivation.

Définition 2.3.5. *Une bidérivation de L est la donnée d'une dérivation* d *et d'une antidérivation* D *qui vérifient en outre :*

$$[x,dy] = [x,Dy] \tag{2.29}$$

Pour tout $x,y \in L$.

2.3.4 Représentation d'algèbre de Leibniz

Définition 2.3.6. [12] *Soient L une algèbre non associative, V un espace vectoriel et*

$$R,\ \ l : L \to End(V)$$

deux applications linéaires.

1. *Si L est une algèbre de Leibniz gauche, alors on dit que* (R,l) *est une représentation gauche de L dans V si pour tous* $x,\ y \in L$ *:*

$$l([x,y]) = [l(x),l(y)] \tag{2.30}$$

$$R([x,y]) = R(y)R(x) + l(x)R(y) \tag{2.31}$$

$$R([x,y]) = l(x)R(y) - R(y)l(x) \tag{2.32}$$

2. *Si L est une algèbre de Leibniz droite, alors on dit que* (R,l) *est une représentation droite de L dans V si pour tous* $x,\ y \in L$ *:*

$$l([x,y]) = [R(y),l(x)] \tag{2.33}$$

$$l([x,y]) = l(x)l(y) + R(y)l(x) \tag{2.34}$$

$$R([x,y]) = R(y)R(x) - R(x)R(y) \tag{2.35}$$

Remarque 10. *Soit L une algèbre de Leibniz gauche (respectivement droite). Alors, on défini les applications :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} : L & \to & End(L). \\ x & \mapsto & \mathcal{L}_x, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{R} : L & \to & End(L). \\ x & \mapsto & \mathcal{R}_x. \end{array}$$

Où pour tout $x \in L$, $\mathcal{L}_x$, $\mathcal{R}_x$ *sont les multiplications de L. Alors,* $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ *est une représentation gauche(respectivement représentation droite) de L dans L appelée* ***la représentation adjointe de L*** *.*

2.4 Algèbres Flexibles

Définition 2.4.1. *Une* $\mathbb{K}$*-algèbre flexible est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel F muni d'une application bilinéaire,* $\mu : F \times F \to F$ *qui vérifie la condition suivante :*

$$pour\ \ tous\ \ x,\ \ y \in F,\ \ \mu(x,\mu(y,x)) = \mu(\mu(x,y),x) \tag{2.36}$$

Proposition 2.4.1. *Soit* $\mathcal{A} = (F,\mu,)$ *une algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $(F,\mu,)$ *est flexible.*
2. *Pour tous* $x,\ y \in F$, $\mu(x,\mu(y,x)) = \mu(\mu(x,y),x)$.
3. *Pour tous* $x,\ y,\ z \in F$, $\mu(x,\mu(y,z)) - \mu(\mu(x,y),z) = \mu(\mu(z,y),x) - \mu(z,\mu(y,x))$.

Démonstration :

1. L'équivalence des deux premiers points provient de la définition.
2. $(2) \Leftrightarrow (3)$, pour tous $x,\ y,\ z \in F$, on a :

$$\mu(x,\mu(y,x)) = \mu(\mu(x,y),x)$$

est équivalent à :

$$\mu(x-z,\mu(y,x-z)) = \mu(\mu(x-z,y),x-z) \tag{2.37}$$

par linéarité de μ :

$$\begin{array}{rcl}\mu(x,\mu(y,x))-\mu(x,\mu(y,z))-\mu(z,\mu(y,x))+\mu(z,\mu(y,z)) & = & \mu(\mu(x,y),x)-\mu(\mu(z,y),x)\\ & - & \mu(\mu(x,y),z)+\mu(\mu(z,y),z)\end{array}$$

on obtient :

$$\mu(x,\mu(y,z))-\mu(\mu(x,y),z)=\mu(\mu(z,y),x)-\mu(z,\mu(y,x)).$$

Corollaire 2.4.1. *Toute algèbre associative est une algèbre flexible.*

2.5 Algèbres de Lie admissibles

Définition 2.5.1. *Soient A un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et une application bilinéaire,*

$$\mu : A\times A\rightarrow A,$$

le couple (A,μ) est appelée algèbre de Lie admissible si le crochet défini par :

$$pour\ \ tous\ \ x,\ \ y\in A,\ \ [x,y]=\mu(x,y)-\mu(y,x), \tag{2.38}$$

Remarque 11. *Puisque le crochet $[,]$ est antisymétrique, une algèbre (A,μ) est Lie-admissible si et seulement si le crochet $[,]$ vérifie l'identité de Jacobi.*

Remarque 12. *Toute algèbre associative est une algèbre de Lie admissible.*

2.6 Algèbres de Poisson

Définition 2.6.1. [3] *Une algèbre de Poisson est un triplet $(P,\{,\},\mu)$ constitué d'un espace vectoriel P et de deux applications bilinéaires $\{,\},\ \ \mu : P\times P\rightarrow P$ satisfaisant :*

1. *$(P,\{,\})$ est une algèbre de Lie.*
2. *(P,μ) est une algèbre associative commutative.*
3. *Pour tous $x,\ \ y,\ \ z\in P$:*

$$\{\mu(x,y),z\}=\mu(\{x,z\},y)+\mu(x,\{y,z\})\ \ (l'identite'\ \ de\ \ compatibilite'). \tag{2.39}$$

Si μ est non commutative alors $(P,\{,\},\mu)$ est une algèbre de Poisson non commutative.

2.6.1 Sous algèbre de poisson et idéaux

Définition 2.6.2. *Une partie H de P est appelée une sous-algèbre de P si c'est une sous-algèbre associative de P telle que :*

$$\{x,y\}\in H,\ \ pour\ \ tous\ \ x,\ \ y\in H \tag{2.40}$$

Ou de manière équivalente :

$$\{H,H\} \subset H \tag{2.41}$$

Définition 2.6.3. *Une partie I de P est appelée un idéal de P si c'est un idéal de l'algèbre associative P et si :*

$$\{x,y\} \in I, \ \ pour \ \ tout \ \ x \in P \ \ et \ \ y \in I. \tag{2.42}$$

Ou de manière équivalente :

$$\{I,P\} \subset I. \tag{2.43}$$

2.6.2 Morphisme d'algèbre de poisson

Définition 2.6.4. *Soient $(P_1, \{,\}_1, \mu_1)$ et $(P_2, \{,\}_2, \mu_2)$ deux algèbres de poisson, une application*

$$\varphi : P_1 \to P_2$$

est un morphisme d'algèbre de poisson si et seulement si pour tous $x, \ \ y \in P_1$:

$$\varphi(\{x,y\}_1) = \{\varphi(x), \varphi(y)\}_2, \tag{2.44}$$

$$\varphi(\mu_1(x,y)) = \mu_2(\varphi(x), \varphi(y)). \tag{2.45}$$

2.6.3 Dérivations

Définition 2.6.5. *Une dérivation D de P est une dérivation de l'algèbre associative, telle que :*

$$D(\{x,y\}) = \{D(x), y\} + \{x, D(y)\}, \tag{2.46}$$

pour tous $x, \ \ y \in P$.

Chapitre 3

Structures des Hom-algèbres

Dans ce chapitre on rappelle quelques définitions et propriétés de quelques algèbres Hom-associatives, algèbres Hom-Lie, algèbres Hom-Leibniz, algèbres Hom-flexibles, algèbres Hom-admissibles et algèbres Hom-poisson. Le triple (V,μ,α) est appelé hom-algèbre où V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, μ application bilinéaire et α application linéaire. Le principale caractéristique des structures Hom-algèbre est que les identités classiques sont twisté par l'application linéaire.

3.1 Algèbre Hom-associative

Définition 3.1.1. [15] *Une algèbre Hom-associative est un triplet (A,μ,α) constitué d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A, une application bilinéaire $\mu : A\times A \to A$ et une application linéaire $\alpha : A \to A$, vérifiant pour tous $x,\ y,\ z \in A$:*

$$\mu(\alpha(x),\mu(y,z)) = \mu(\mu(x,y),\alpha(z)). \tag{3.1}$$

Elle est dite multiplicative si α est un morphisme d'algèbre :

$$\alpha(\mu(x,y)) = \mu(\alpha(x),\alpha(y)). \tag{3.2}$$

Pour tous $x,\ y \in A$.

Exemple 3.1.1. *$(sl(2,\mathbb{C}),[,],\alpha)$ est une Hom-algèbre associative, où $sl(2,\mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 et de trace nulle qui est engendrée par :*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

le $[,]$ est une application bilinéaire,

$$[,] : sl(2,\mathbb{C})\times sl(2,\mathbb{C}) \to sl(2,\mathbb{C}),$$

tel que : pour tous $A,\ B \in sl(2,\mathbb{C}), [A,B] = AB - BA$ et

$$\alpha : V \to V,$$

l'application linéaire dont la matrice associée dans la base (H, E, F) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 13. *Si $\alpha = Id$, alors nous avons l'algèbre associative classique.*

3.1.1 Sous algèbre Hom-associative, et idéal

Définition 3.1.2. *Soit $\mathcal{A} = (A, \mu, \alpha)$ une algèbre Hom-associative, un sous-espace H de $\mathcal{A}$ est appelé sous-algèbre hom associative si :*

$$\mu(H, H) \subset H \ \ et \ \ \alpha(H) \subseteq H. \tag{3.3}$$

Définition 3.1.3. *Un sous-ensemble I de (A, μ, α) est un idéal de (A, μ, α) si I est un sous-espace vectoriel de (A, μ, α) et si pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in A$, on a :*

$$\mu(x, y) \in I \ \ et \ \ \alpha(I) \subseteq I. \tag{3.4}$$

3.1.2 Morphisme d'algèbre Hom-associative

Définition 3.1.4. *soient (A_1, μ_1, α_1) et (A_2, μ_2, α_2) deux algèbre de Hom-associative. une application linéaire $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ est un morphisme d'algèbre Hom-associative si pour tous $x, \ \ y \in A_1$:*

$$\varphi(\mu_1(x, y)) = \mu_2(\varphi(x), \varphi(y)) \tag{3.5}$$

et

$$\varphi(x) \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi(x). \tag{3.6}$$

En particulier, les algèbres hom-associatives (A_1, μ_1, α_1) et (A_2, μ_2, α_2) sont isomorphes si φ est également bijective.

3.1.3 Dérivations d'algèbre Hom- associative

Définition 3.1.5. *Soit (A, μ, α) une algèbre Hom-associative multiplicative. une application linéaire $D : A \rightarrow A$, est une α-dérivation de l'algèbre Hom-associative multiplicative (A, μ, α), si :*

$$\mu(D, \alpha) = 0 \ \ i.e \ \ D \circ \alpha = \alpha \circ D. \tag{3.7}$$

et

$$D \circ \mu(x, y) = \mu(D(x), \alpha(y)) + \mu(\alpha(x), D(y)), \forall x, \ \ y \in A. \tag{3.8}$$

Nous désignons par $Der_\alpha(A)$ l'ensemble des α-dérivations de l'algèbre Hom-associative multiplicative (A, μ, α) .

3.1.4 La classification des algèbres Hom-associatives

Dans cette partie, on rappelle quelques classification des algèbre Hom-associative en dimension 2 et 3. Ahmed Zahari a donne toutes les classifications des algèbres Hom-associatives en dimensions 2 et 3 voir [18].

Proposition 3.1.1. *Nous devons considérer deux classes de morphismes qui sont données par les matrice suivantes :* $\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
Toute algèbre Hom-associative de dimension 2 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

1. *Premier cas :* $\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \mu_1^2(e_1,e_1) = -a_1e_1, \ \mu_1^2(e_1,e_2) = a_1e_2, \ \alpha(e_1) = e_1, \\ \mu_1^2(e_2,e_1) = a_1e_2, \ \mu_1^2(e_2,e_2) = b_1e_1, \ \alpha(e_2) = -e_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_2^2(e_1,e_1) = a_2e_1, \ \mu_2^2(e_1,e_2) = 0, \ \alpha(e_1) = e_1, \\ \mu_2^2(e_2,e_1) = 0, \ \mu_2^2(e_2,e_2) = b_2e_2, \ \alpha(e_2) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_3^2(e_1,e_1) = 0, \ \mu_3^2(e_1,e_2) = ka_3e_1, \ \alpha(e_1) = ke_1, \\ \mu_3^2(e_2,e_1) = ka_3e_1, \ \mu_3^2(e_2,e_2) = a_3e_2, \ \alpha(e_2) = e_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_4^2(e_1,e_1) = 0, \ \mu_4^2(e_1,e_2) = a_4e_1, \ \alpha(e_1) = \dfrac{a_4}{b_4}e_1, \\ \mu_4^2(e_2,e_1) = a_4e_1, \ \mu_4^2(e_2,e_2) = b_4e_2, \ \alpha(e_2) = e_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_5^2(e_1,e_1) = a_5e_1, \ \mu_5^2(e_1,e_2) = b_5e_2, \ \alpha(e_1) = e_1, \\ \mu_5^2(e_2,e_1) = b_5e_2, \ \mu_5^2(e_2,e_2) = 0, \ \alpha e_2 = \frac{b_5}{a_5}(e_2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_6^2(e_1,e_1) = a_6e_1, \ \mu_6^2(e_1,e_2) = 0, \ \alpha(e_1) = 0, \\ \mu_6^2(e_2,e_1) = 0, \ \mu_6^2(e_2,e_2) = 0, \ \alpha(e_2) = ke_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_7^2(e_1,e_1) = a_7e_2, \ \mu_7^2(e_1,e_2) = 0, \ \alpha(e_1) = ke_1, \\ \mu_7^2(e_2,e_1) = 0, \ \mu_7^2(e_2,e_2) = 0, \ \alpha(e_2) = k^2e_2. \end{cases}$$

2. *Deuxième cas :* $\alpha = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \mu_8^2(e_1,e_1) = 0, \ \mu_8^2(e_1,e_2) = a_8e_2, \ \alpha(e_1) = 0, \\ \mu_8^2(e_2,e_1) = b_8e_2, \ \mu_8^2(e_2,e_2) = c_8e_1, \ \alpha(e_2) = e_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_9^2(e_1,e_1) = 0, \ \mu_9^2(e_1,e_2) = a_9e_1, \ \alpha(e_1) = e_1, \\ \mu_9^2(e_2,e_1) = 0, \ \mu_9^2(e_2,e_2) = a_9e_1 + a_9e_2, \ \alpha(e_2) = e_1 + e_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{10}^2(e_1,e_1) = 0, \ \mu_{10}^2(e_1,e_2) = 0, \ \alpha(e_1) = e_1, \\ \mu_{10}^2(e_2,e_1) = a_{10}e_1, \ \mu_{10}^2(e_2,e_2) = a_{10}e_1 + a_{10}e_2, \ \alpha(e_2) = e_1 + e_2. \end{cases}$$

Proposition 3.1.2. *Toute algèbre Hom-associative de dimension 3 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

1. *Première cas :* $\alpha = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \mu_1^3(e_1,e_1) = 0, \ \ \mu_1^3(e_2,e_3) = 0, \\ \mu_1^3(e_1,e_2) = p_{21}e_1 + p_{23}e_3, \ \ \mu_1^3(e_3,e_1) = 0, \ \ \alpha(e_1) = 0, \\ \mu_1^3(e_1,e_3) = p_{31}e_1 + p_{33}e_3, \ \ \mu_1^3(e_3,e_2) = p_{81}e_1 + p_{83}e_3, \ \ \alpha(e_2) = e_1, \\ \mu_1^3(e_2,e_1) = 0, \ \ \mu_1^3(e_3,e_3) = p_{91}e_1 + p_{93}e_3, \ \ \alpha(e_3) = 0, \\ \mu_1^3(e_2,e_2) = p_{51}e_1 + p_{53}e_3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_2^3(e_1,e_1) = 0, \ \ \mu_2^3(e_2,e_3) = p_{81}e_1, \\ \mu_2^3(e_1,e_2) = p_{21}e_1, \ \ \mu_2^3(e_3,e_1) = p_{71}e_1, \ \ \alpha(e_1) = 0, \\ \mu_2^3(e_1,e_3) = p_{31}e_1, \ \ \mu_2^3(e_3,e_2) = p_{81}e_1, \ \ \alpha(e_2) = e_1, \\ \mu_2^3(e_2,e_1) = 0, \ \ \mu_2^3(e_3,e_3) = p_{91}e_1, \ \ \alpha(e_3) = 0, \\ \mu_2^3(e_2,e_2) = p_{51}e_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_3^3(e_1,e_1) = 0, \ \ \mu_2^3(e_2,e_3) = p_{61}e_1, \\ \mu_3^3(e_1,e_2) = p_{21}e_1, \ \ \mu_2^3(e_3,e_1) = 0, \ \ \alpha(e_1) = 0, \\ \mu_3^3(e_1,e_3) = 0, \ \ \mu_2^3(e_3,e_2) = p_{81}e_1, \ \ \alpha(e_2) = e_1, \\ \mu_3^3(e_2,e_1) = 0, \ \ \mu_2^3(e_3,e_3) = 0, \ \ \alpha(e_3) = ce_3, \\ \mu_3^3(e_2,e_2) = p_{51}e_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_4^3(e_1,e_1) = 0, \ \ \mu_4^3(e_2,e_3) = p_{61}e_1, \\ \mu_4^3(e_1,e_2) = 0, \ \ \mu_4^3(e_3,e_1) = 0 \ \ \alpha(e_1) = e_1, \\ \mu_4^3(e_1,e_3) = 0, \ \ \mu_4^3(e_3,e_2) = p_{81}e_1, \ \ \alpha(e_2) = e_1 + e_2, \\ \mu_4^3(e_2,e_1) = 0, \ \ \mu_4^3(e_3,e_3) = p_{91}e_1, \ \ \alpha(e_3) = e_3, \\ \mu_4^3(e_2,e_2) = p_{51}e_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_5^3(e_1,e_1) = 0, \ \ \mu_5^3(e_2,e_3) = 0, \\ \mu_5^3(e_1,e_2) = -p_{43}e_3, \ \ \mu_5^3(e_3,e_1) = 0, \ \ \alpha(e_1) = ae_1, \\ \mu_5^3(e_1,e_3) = 0, \ \ \mu_5^3(e_3,e_2) = 0, \ \ \alpha(e_2) = e_1 + ae_2, \\ \mu_5^3(e_2,e_1) = p_{43}e_3, \ \ \mu_5^3(e_3,e_3) = 0, \ \ \alpha(e_3) = a^2e_3, \\ \mu_5^3(e_2,e_2) = p_{52}e_3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_6^3(e_1,e_1) = 0, \ \ \mu_6^3(e_2,e_3) = p_{61}e_1, \\ \mu_6^3(e_1,e_2) = 0, \ \ \mu_6^3(e_3,e_1) = 0, \ \ \alpha(e_1) = ae_1, \\ \mu_6^3(e_1,e_3) = 0, \ \ \mu_6^3(e_3,e_2) = p_{81}e_1, \ \ \alpha(e_2) = e_1 + ae_2, \\ \mu_6^3(e_2,e_1) = 0, \ \ \mu_6^3(e_3,e_3) = 0, \ \ \alpha(e_3) = e_3, \\ \mu_6^3(e_2,e_2) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_7^3(e_1,e_1)=0, \ \ \mu_7^3(e_2,e_3)=0, \\ \mu_7^3(e_1,e_2)=0, \ \ \mu_7^3(e_3,e_1)=0, \ \ \alpha(e_1)=e_1, \\ \mu_7^3(e_1,e_3)=0, \ \ \mu_7^3(e_3,e_2)=0, \ \ \alpha(e_2)=e_1+e_2, \\ \mu_7^3(e_2,e_1)=0, \ \ \mu_7^3(e_3,e_3)=p_{11}e_1, \ \ \alpha(e_3)=-e_3, \\ \mu_7^3(e_2,e_2)=p_{51}e_1. \end{cases}$$

2. *2éme cas :* $\alpha = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \mu_1^3(e_1,e_1)=0, \ \ \mu_1^3(e_2,e_3)=p_{61}e_1, \\ \mu_1^3(e_1,e_2)=0, \ \ \mu_1^3(e_3,e_1)=0, \ \ \alpha(e_1)=0, \\ \mu_1^3(e_1,e_3)=p_{31}e_1, \ \ \mu_1^3(e_3,e_2)=p_{81}e_1, \ \ \alpha(e_2)=e_1, \\ \mu_1^3(e_2,e_1)=0, \ \ \mu_1^3(e_3,e_3)=p_{91}e_1, \ \ \alpha(e_3)=e_2, \\ \mu_1^3(e_2,e_2)=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_2^3(e_1,e_1)=0, \ \ \mu_2^3(e_2,e_3)=-p_{81}e_1, \\ \mu_2^3(e_1,e_2)=0, \ \ \mu_2^3(e_3,e_1)=0, \ \ \alpha(e_1)=e_1, \\ \mu_2^3(e_1,e_3)=0, \ \ \mu_2^3(e_3,e_2)=p_{81}e_1, \ \ \alpha(e_2)=e_1+e_2, \\ \mu_2^3(e_2,e_1)=0, \ \ \mu_2^3(e_3,e_3)=p_{91}e_1, \ \ \alpha(e_3)=e_2+e_3, \\ \mu_2^3(e_2,e_2)=0. \end{cases}$$

3.2 Algèbre Hom-Lie

Définition 3.2.1. *On appelle algèbre Hom-Lie un triplet $(\mathcal{G},[,],\alpha)$ où $\mathcal{G}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $[,]:\mathcal{G}\times\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}$ est une application bilinéaire et $\alpha:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}$ une application linéaire tels que :*

$$[x,y]=-[y,x] \qquad (l'antisymtrique). \tag{3.9}$$

$$[\alpha(x),[y,z]]+[\alpha(z),[x,y]]+[\alpha(y),[z,x]]=0 \qquad (l'identite'\ de\ Hom-Jacobi) \tag{3.10}$$

Pour tous $x, \ y, \ z\in\mathcal{G}$.

— *Une algèbre de Hom-Lie $(\mathcal{G},[,],\alpha)$ est dite multiplicative si α est un morphisme d'algèbre, c'est à dire :*

$$\alpha([x,y])=[\alpha(x),\alpha(y)],\forall x,y\in\mathcal{G}.$$

Il est dit régulier si α est un automorphisme algébrique.

Remarque 14. *Nous récupérons l'algèbre de Lie classique lorsque $\alpha = Id_{\mathcal{G}}$.*

Exemple 3.2.1. *Soit $\{x_1,x_2,x_3\}$ une base de l'espace vectoriel de dimension 3 $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{K}$. Le crochet suivant et l'application linéaire α sur $\mathcal{G}=\mathbb{K}^3$ définissent une algèbre Hom-Lie sur $\mathbb{K}$:*

$$\begin{cases}[x_1,x_2]=ax_1+bx_3, & \alpha(x_1)=x_1\\ [x_1,x_3]==cx_2, & \alpha(x_2)=2x_2\\ [x_2,x_3]=dx_1+2x_3, & \alpha(x_3)=2x_3\end{cases}$$

avec $[x_2,x_1],[x_3,x_1]$ et $[x_3,x_2]$ définis par l'anti-symétrique. Ce n'est pas une algèbre de Lie si et seulement si $a\neq 0$ et $c\neq 0$, puisque $[x_1,[x_2,x_3]]+[x_3,[x_1,x_2]]+[x_2,[x_3,x_1]]=acx_2$.

Exemple 3.2.2. *$(sl(2,\mathbb{K}),[,],\alpha)$ est une algèbre Hom-Lie, où $sl(2,\mathbb{K})$ est d'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 et de trace nulle,*

$$[,]:sl(2,\mathbb{K})\times sl(2,\mathbb{K})\to sl(2,\mathbb{K}),$$

tel que : pour tous $A,\ B\in sl(2,\mathbb{K}),[A,B]=AB-BA$ et

$$\alpha:sl(2,\mathbb{K})\to sl(2,\mathbb{K}),$$

dont la matrice associée dans la base (H,E,F) est :

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Proposition 3.2.1. *Chaque application bilinéaire anti-symétrique sur un espace linéaire à dimensions 2 définit une algèbre Hom-Lie.*

Démonstration : L'identité Hom-Jacobi est satisfaite pour tout triplet (x,x,y).

Proposition 3.2.2. *On peut associer a chaque algèbre Hom-associative (A,μ,α), une algèbre Hom-Lie dont le crochet est défini pour tous $x,y\in A$ par :*

$$[x,y]=\mu(x,y)-\mu(y,x).$$

Démonstration : Le crochet est anti-symétrique et avec un calcule direct nous avons :

$$\begin{aligned}[\alpha(x),[y,z]]+[\alpha(y),[z,x]]+[\alpha(z),[x,y]] &= \mu(\alpha(x),\mu(y,z))-\mu(\alpha(x),\mu(z,y))-\mu(\mu((y,z),\alpha(x))\\ &+ \mu(\mu(z,y),\alpha(x))+\mu((\alpha(y),\mu(z,x))-\mu(\alpha(y),\mu(x,z))\\ &- \mu(\mu(z,x),\alpha(y))+\mu(\mu(x,z),\alpha(y))+\mu((\alpha(z),\mu(x,y))\\ &- \mu(\alpha(z),\mu(y,x))-\mu(\mu(x,y),\alpha(z))+\mu(\mu(y,x),\alpha(z))\\ &= 0.\end{aligned}$$

3.2.1 Sous algèbre Hom-Lie et Idéal

Définition 3.2.2. [4] *Soit $(\mathcal{G},[,],\alpha)$ une algèbre de Hom-Lie. Un sous-espace H de $\mathcal{G}$ est appelé sous-algèbre Hom-Lie si :*

$$[H,H]\subseteq H \text{ et } \alpha(H)\subseteq H. \tag{3.11}$$

En particulier, on dit qu'une sous-algèbre Hom-Lie I est un idéal de $\mathcal{G}$ si :

$$[I,\mathcal{G}] \subseteq H. \tag{3.12}$$

Remarque 15. *L'algèbre de Hom-Lie $\mathcal{G}$ est appelée abélienne si $[x,y]=0$, $\forall x,y \in \mathcal{G}$.*

3.2.2 Morphisme d'algèbre Hom-Lie

Définition 3.2.3. *Soient $(\mathcal{G}_1,[,]_1,\alpha_1)$ et $(\mathcal{G}_2,[,]_2,\alpha_2)$ deux algèbres de Hom-Lie. Une application linéaire $\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ est un morphisme d'algèbre Hom-Lie si pour tous $x,\ \ y \in \mathcal{G}_1$:*

$$\varphi([x,y]_1) = [\varphi(x),\varphi(y)]_2 \tag{3.13}$$

et

$$\varphi \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi. \tag{3.14}$$

Remarque 16. *En particulier, ils sont isomorphes si φ est une application linéaire bijective.*

3.2.3 Dérivations

Définition 3.2.4. *Soit $(\mathcal{G},[,],\alpha)$ une algèbre de Hom-Lie. Une application linéaire $D : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est appelée une α-dérivation de l'algèbre de Hom-Lie, si :*

$$[D,\alpha]=0 \ \ i.e \ \ D\circ\alpha = \alpha\circ D, \tag{3.15}$$

et

$$D([x,y]) = [D(x),\alpha(y)] + [\alpha(x),D(y)], \tag{3.16}$$

pour tous $x,\ \ y \in \mathcal{G}$.

3.2.4 Représentation d'algèbre Hom-Lie

Définition 3.2.5. [13] *Une représentation d'une algèbre Hom-Lie $(\mathcal{G},[,],\alpha)$ sur l'espace vectoriel V par rapport à $\beta \in gl(V)$ est une application linéaire $\rho : \mathcal{G} \to gl(V)$, telle que pour tout $x,\ \ y \in \mathcal{G}$, ce qui suit les égalités sont satisfaites :*

$$\rho(\alpha(x))\circ\beta = \beta\circ\rho(x). \tag{3.17}$$

$$\rho([x,y])\circ\beta = \rho(\alpha(x))\rho(y) - \rho(\alpha(y))\rho(x). \tag{3.18}$$

On note une représentation par (V,ρ,β). Pour tout $x \in \mathcal{G}$, on définit $ad_x : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ par :

$$ad_x(y) = [x,y] \tag{3.19}$$

Alors $ad_x : \mathcal{G} \to gl(\mathcal{G})$ est une représentation de l'algèbre de Hom-Lie $(\mathcal{G},[,],\alpha)$ sur g par rapport à $\mathcal{G}$, que l'on appelle ***la représentation adjointe*** *.*

Proposition 3.2.3. *Soit* $(\mathcal{G}, [,], \alpha)$ *une algèbre de Hom-Lie,* $(V_1, \beta_{V_1}, \rho_{V_1})$ *et* $(V_2, \beta_{V_2}, \rho_{V_2})$ *ses représentations. Alors* $(V_1 \times V_2, \beta_{V_1} \times \beta_{V_2}, \rho_{V_1} \times \beta_{V_2} + \beta_{V_1} \times \rho_{V_2})$ *est une représentation de* $(\mathcal{G}, [,], \alpha)$.

3.2.5 La classification des algèbres Hom-Lie

Dans cette partie, on établit la classification des algèbre Hom-lie en dimension 3. Ce travail a été publier dans "Journal of Generalized Lie Theory and Applications" en 2008 Voir [15] .

Proposition 3.2.4. *Toutes les algèbres de Hom-Lie associées à l'homomorphisme donnée par rapport à la base* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *du dimension 3 par la matrice suivante :*

$\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, *dans la liste,* C_{ij}^k *pour* $i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3$ *sont des paramètres dans* $\mathbb{K}$.

$$\begin{cases} [e_1, e_2]_1 = C_{12}^1 e_1 + C_{12}^3 e_3 \\ [e_1, e_3]_1 = C_{13}^2 e_2 \\ [e_2, e_3]_1 = C_{23}^1 e_1 + \frac{b}{a} C_{12}^1 e_3 \end{cases} \quad \begin{cases} [e_1, e_2]_2 = \frac{a}{b} C_{23}^3 e_1 - C_{13}^3 e_2 + C_{12}^3 e_3 \\ [e_1, e_3]_2 = -\frac{a}{b} C_{23}^2 e_1 + C_{13}^2 e_2 + C_{13}^3 e_3 \\ [e_2, e_3]_2 = C_{23}^1 e_1 + C_{23}^2 e_2 + C_{23}^3 e_3 \end{cases} \quad \begin{cases} [e_1, e_2]_3 = 0 \\ [e_1, e_3]_3 = C_{13}^1 e_1 + C_{13}^2 e_2 \\ [e_2, e_3]_3 = C_{23}^1 e_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [e_1, e_2]_4 = C_{12}^3 e_3 \\ [e_1, e_3]_4 = C_{13}^2 e_2 + C_{13}^3 e_3 \\ [e_2, e_3]_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} [e_1, e_2]_5 = C_{12}^3 e_3 \\ [e_1, e_3]_5 = C_{13}^2 e_2 \\ [e_2, e_3]_5 = C_{23}^1 e_1 \end{cases} \quad \begin{cases} [e_1, e_2]_6 = C_{12}^1 e_1 + C_{12}^3 e_3 \\ [e_1, e_3]_6 = 0 \\ [e_2, e_3]_6 = C_{23}^1 e_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [e_1, e_2]_7 = C_{12}^1 e_1 + C_{12}^2 e_2 + C_{12}^3 e_3 \\ [e_1, e_3]_7 = 0 \\ [e_2, e_3]_7 = C_{23}^1 e_1 + C_{23}^3 e_3 \end{cases} \quad \begin{cases} [e_1, e_2]_8 = -C_{13}^3 e_2 + C_{12}^3 e_3 \\ [e_1, e_3]_8 = C_{13}^2 e_2 + C_{13}^3 e_3 \\ [e_2, e_3]_8 = C_{23}^1 e_1 \end{cases} \quad \begin{cases} [e_1, e_2]_9 = -C_{13}^3 e_2 + C_{12}^3 e_3 \\ [e_1, e_3]_9 = -\frac{a}{b} C_{23}^2 e_1 + C_{13}^2 e_2 + C_{13}^3 e_3 \\ [e_2, e_3]_9 = C_{23}^1 e_1 + C_{23}^2 e_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [e_1, e_2]_{10} = 0 \\ [e_1, e_3]_{10} = C_{13}^1 e_1 + C_{13}^2 e_2 + C_{13}^3 e_3 \\ [e_2, e_3]_{10} = C_{23}^1 e_1 + C_{23}^2 e_2 \end{cases} \quad \begin{cases} [e_1, e_2]_{11} = C_{12}^2 e_2 + C_{12}^3 e_3 \\ [e_1, e_3]_{11} = C_{13}^2 e_2 + C_{13}^3 e_3 \\ [e_2, e_3]_{11} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [e_1, e_2]_{12} = -\frac{C_{13}^1 C_{23}^3}{C_{23}^2} e_1 + C_{12}^2 e_2 - \frac{C_{13}^3 C_{23}^3}{C_{23}^2} e_3 \\ [e_1, e_3]_{12} = C_{13}^1 e_1 - \frac{C_{12}^2 C_{23}^2}{C_{23}^3} e_2 + C_{13}^3 e_3 \\ [e_2, e_3]_{12} = C_{23}^1 e_1 + C_{23}^2 e_2 + C_{23}^3 e_3 \end{cases} \quad \begin{cases} [e_1, e_2]_{13} = C_{12}^3 e_3 \\ [e_1, e_3]_{13} = -\frac{a}{b} C_{23}^2 e_1 + C_{13}^2 e_2 \\ [e_2, e_3]_{13} = C_{23}^1 e_1 + C_{23}^2 e_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [e_1, e_2]_{14} = C_{12}^1 e_1 - C_{13}^3 e_2 + \frac{C_{12}^1 C_{13}^3}{C_{13}^1} e_3 \\ [e_1, e_3]_{14} = C_{13}^1 e_1 - \frac{C_{13}^1 C_{13}^3}{C_{12}^1} e_2 + C_{13}^3 e_3 \\ [e_2, e_3]_{14} = C_{23}^1 e_1 \end{cases} \quad \begin{cases} [e_1, e_2]_{15} = \frac{a}{b} C_{23}^3 e_1 + C_{12}^2 e_2 + \frac{C_{12}^2 C_{23}^3}{C_{23}^2} e_3 \\ [e_1, e_3]_{15} = -\frac{((a-b)C_{12}^2 - bC_{13}^3)C_{23}^2}{bC_{12}^2} e_1 + C_{13}^2 e_2 + C_{13}^3 e_3 \\ [e_2, e_3]_{15} = \frac{aC_{23}^2 C_{23}^3}{bC_{12}^2} e_1 + C_{23}^2 e_2 + C_{23}^3 e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases}[e_1,e_2]_{16}=\dfrac{a}{b}C_{23}^3e_1+\dfrac{C_{13}^3C_{23}^3}{C_{13}^1}e_3\\ [e_1,e_3]_{16}=C_{13}^1e_1+C_{13}^2e_2+C_{13}^3e_3\\ [e_2,e_3]_{16}=\dfrac{aC_{13}^2C_{23}^3}{bC_{13}^3}e_1+C_{23}^3e_3\end{cases}\qquad\begin{cases}[e_1,e_2]_{17}=-\dfrac{C_{13}^1C_{23}^3}{C_{23}^2}e_1-C_{13}^3e_2-\dfrac{C_{13}^3C_{23}^3}{C_{23}^2}e_3\\ [e_1,e_3]_{17}=C_{13}^3e_1+\dfrac{C_{13}^3C_{23}^2}{C_{23}^3}e_2+C_{13}^3e_3\\ [e_2,e_3]_{17}=C_{23}^1e_1+C_{23}^2e_2+C_{23}^3e_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}[e_1,e_2]_{18}=C_{12}^1e_1+C_{12}^2e_2+C_{12}^3e_3\\ [e_1,e_3]_{18}=-\dfrac{a}{b}C_{23}^2e_1-\dfrac{C_{12}^2C_{23}^2}{C_{12}^1}e_2\\ [e_2,e_3]_{18}=\dfrac{aC_{12}^1C_{23}^2}{bC_{12}^2}e_1+C_{23}^2e_2\end{cases}\qquad\begin{cases}[e_1,e_2]_{19}=-\dfrac{(bC_{12}^2+(b-a)C_{13}^3)C_{23}^3}{bC_{13}^3}e_1+C_{12}^2e_2+C_{12}^3e_3\\ [e_1,e_3]_{19}=-\dfrac{a}{b}C_{23}^2e_1+\dfrac{C_{13}^3C_{23}^2}{C_{23}^3}e_2+C_{13}^3e_3\\ [e_2,e_3]_{19}=\dfrac{aC_{23}^2C_{23}^3}{bC_{13}^3}e_1+C_{23}^2e_2+C_{23}^3e_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}[e_1,e_2]_{20}=C_{12}^2e_1+C_{12}^2e_2+\dfrac{-aC_{13}^3C_{23}^3+(b(C_{12}^1C_{13}^1+C_{12}^2+C_{13}^3)C_{23}^3}{bC_{13}^1+aC_{23}^2}e_3\\ [e_1,e_3]_{20}=C_{13}^1e_1+\dfrac{bC_{12}^2C_{13}^1+aC_{12}^2C_{23}^2+bC_{12}^2C_{23}^2-bC_{13}^3C_{23}^2}{bC_{12}^1+aC_{23}^3}e_2+C_{13}^3e_3\\ [e_2,e_3]_{20}=\dfrac{a(C_{12}^1C_{23}^2+C_{13}^1C_{23}^3)}{b(C_{12}^2+C_{13}^3)}e_1+C_{23}^2e_2+C_{23}^3e_3\end{cases}$$

3.3 Algèbre Hom-Leibniz

Définition 3.3.1. [15] *Une algèbre Hom-Leibniz est le triplet $(L,[,],\alpha)$ formé par un espace vectoriel L, une application bilinéaire $[,]:L\times L\longrightarrow L$ et une application linéaire $\alpha:L\longrightarrow L$ satisfaisant :*

$$[[x,y],\alpha(z)]=[[x,z],\alpha(y)]+[[\alpha(x),[y,z]]. \tag{3.20}$$

Pour tous $x,\ \ y,\ \ z\in L$.
En termes d'homomorphismes adjoints (à droite) $ad_Y:L\longrightarrow L$ définis par $ad_Y(X)=[X,Y]$, l'identité (3.20) peut s'écrire :

$$ad_{\alpha(z)}([x,y])=[ad_z(x),\alpha(y)]+[\alpha(x),ad_z(y)]. \tag{3.21}$$

Ou sous forme d'opérateur par :

$$ad_{\alpha(z)}\circ ad_y=ad_{\alpha(y)}\circ ad_z+ad_{adz(y)}\circ\alpha \tag{3.22}$$

Définition 3.3.2. *L'algèbre de Hom-Leibniz $(L,[,],\alpha)$ est dite multiplicative si l'application $\mathbb{K}$-linéaire α conserve le crochet, c'est-à-dire si :*

$$\alpha[x,y]=[\alpha(x),\alpha(y)]. \tag{3.23}$$

Pour tous $x,\ \ y\in L$.

Exemple 3.3.1. *Soit L un $\mathbb{C}$-espace vectoriel bidimensionnel de base $\{e_1,e_2\}$. Nous définissons une opération de parenthèse comme $[e_2,e_2]=e_1$ et zéro ailleurs et l'endomorphisme est donné par la* *matrice :*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est un travail de routine de vérifier que $(L, [,], \alpha)$ est une algèbre de Hom-Leibniz qui n'est pas Hom-Lie.

Exemple 3.3.2.

1. *Il existe des algèbres de Hom-Leibniz complexes de dimension 3 (à droite) $L_{a,b,\lambda} = (L, [,]_{a,b,\lambda}, \alpha_{a,b,\lambda})$ avec une base $\{e_1, e_2, e_3\}$, où : $\alpha_{a,b,\lambda}(e_1) = (a\lambda+1)e_1$, $\alpha_{a,b,\lambda}(e_2) = be_2$, $\alpha_{a,b,\lambda}(e_3) = ae_1+e_2+e_3$ et les produits non nuls sont :*
$$\begin{cases} [e_1, e_3]_{a,b,\lambda} = \lambda(a\lambda+1)e_1 \\ [e_2, e_3]_{a,b,\lambda} = -[e_3, e_2]_{a,b,\lambda} = -be_2 \\ [e_3, e_3]_{a,b,\lambda} = (a\lambda+1)e_1, \quad a, \quad b, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{cases}$$
2. *Il existe une algèbre de Hom-Leibniz complexe à dimensions 4 (à droite) $(L, [,], \alpha)$ avec une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ où : $\alpha(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $\alpha(e_2) = e_2 + e_3 + e_4$, $\alpha(e_3) = e_3 + e_4$, $\alpha(e_4) = e_4$ et les produits non nuls sont :*
$$\begin{cases} [e_1, e_1] = e_4 \\ [e_1, e_2] = -e_3 - e_4 = -[e_2, e_1] \\ [e_1, e_3] = -e_4 = -[e_3, e_1] \end{cases}$$

Remarque 17. *En prenant $\alpha = id$ dans la définition (3.3.1), nous obtenons la définition de l'algèbre de Leibniz. Par conséquent, les algèbres de Hom-Leibniz incluent les algèbres de Leibniz comme un sous-catégorie, motivant ainsi le nom « algèbres de Hom-Leibniz » comme une déformation d'algèbres de Leibniz twisté par un homomorphisme. De plus c'est une algèbre multiplicative de Hom-Leibniz.*

3.3.1 Sous algèbre Hom-Leibniz

Définition 3.3.3. [6] *Soit $(L, [,], \alpha)$ une algèbre de Hom-Leibniz. Une sous-algèbre Hom-Leibniz H est un sous-espace linéaire de L, qui est fermé pour le crochet et invariant par α, c'est-à-dire :*

$$[x, y] \in H, \quad pour \quad tous \quad x, \quad y \in H. \tag{3.24}$$

$$\alpha(x) \in H, \quad pour \quad tout \quad x \in H. \tag{3.25}$$

On dit qu'une sous-algèbre Hom-Leibniz H de L est un Hom-idéal bilatéral si $[x, y]$, $[y, x] \in H$, pour tout $x \in H$ et $y \in L$.

3.3.2 Morphisme d'algèbre Hom-Leibniz

Définition 3.3.4. [6] *Un homomorphisme de l'algèbre de Hom-Leibniz : $(L_1, [,]_1, \alpha_1) \to (L_2, [,]_2, \alpha_2)$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\varphi : L_1 \to L_2$ telle que :*

$$\varphi([x, y]_1) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2. \tag{3.26}$$

$$\varphi \circ \alpha_1(x) = \alpha_2 \circ \varphi(x). \tag{3.27}$$

Pour tous $x, \ y \in L_1$.

Définition 3.3.5. *Soient H et K des Hom-idéaux à deux côtés d'une algèbre de Hom-Leibniz $(L, [,], \alpha)$. Le commutateur de H et K, noté $[H, K]$, est la sous-algèbre de Hom Leibniz de L définie par le crochet $[h, k], \ h \in H, \ k \in K$.*

3.3.3 Dérivations

Définition 3.3.6. *$(L, [,], \alpha)$ une algèbre de Hom-Leibniz. Une application linéaire $D : L \to L$ est appelée une α-dérivation de l'algèbre de Hom-Leibniz, si :*

$$[D, \alpha] = 0 \ \ i.e \ \ D \circ \alpha = \alpha \circ D, \tag{3.28}$$

et

$$D([x, y]) = [D(x), \alpha(y)] + [\alpha(x), D(y)], \tag{3.29}$$

pour tous $x, \ y \in L$.

3.3.4 Centre d'algèbre Hom-Leibniz

Définition 3.3.7. *Soit $(L, [,], \alpha)$ une algèbre de Hom-Leibniz. Le sous-espace :*

$$Z(L) = \{x \in L \mid \ [x, y] = 0 = [y, x], \ \ pour \ \ tout \ \ y \in L\}, \tag{3.30}$$

est dit centre de $(L, [,], \alpha)$.
Lorsque $\alpha : L \to L$ est un homomorphisme surjectif, alors $Z(L)$ est un Hom-idéal de L.

3.3.5 Représentation des algèbres de Hom-Leibniz

Définition 3.3.8. [5] *Une représentation de l'algèbre de Hom-Leibniz $(L, [,], \alpha)$ est une Hom-module (V, β) équipé de deux L-actions (gauche et droite) :*

$$[,]_r : V \times L \to V \ \ et \ \ [,]_l : L \times V \to V, \tag{3.31}$$

satisfaisant les cinq axiomes suivants :

$$\beta([v, x]_r) = [\beta(v), \alpha(x)]_r \tag{3.32}$$

$$\beta([x, v]_l) = [\alpha(x), \beta(v)]_l \tag{3.33}$$

$$[\beta(v), [x, y]]_r = [[v, x]_r, \alpha(y)]_r - [[v, y]_r, \alpha(x)]_r, \tag{3.34}$$

$$[\alpha(x), [v, y]_r]_l = [[x, v]_l, \alpha(y)]_r - [[x, y], \beta(v)]_l, \tag{3.35}$$

$$[\alpha(x),[y,v]_l]_l = [[x,y],\beta(v)]_l - [[x,v]_l,\alpha(y)]_r. \tag{3.36}$$

Pour tous $v \in V$, et x, $y \in L$. Cette représentation sera notée $(V,\beta,[,]_l,[,]_r)$. Des deux dernières relations il résulte : $[\alpha(x),[v,y]_r]_l + [\alpha(x),[y,v]_l]_l = 0$.

3.4 Algèbres Hom-Flexibles

Définition 3.4.1. [15] *Une Hom-algèbre $\mathcal{A} = (F,\mu,\alpha)$ est dite flexible si pour tous x, $y \in F$:*

$$\mu(\mu(x,y),\alpha(x)) = \mu(\alpha(x),\mu(y,x)). \tag{3.37}$$

Remarque 18. *En utilisant le Hom-associateur $as_{\mu,\alpha}(x,y,z) = \mu(\mu(x,y),\alpha(z)) - \mu(\alpha(x),\mu(y,z))$, la condition (3.37) peut s'écrire comme :*

$$as_{\mu,\alpha}(x,y,x) = 0. \tag{3.38}$$

Le α-association $as_{\mu,\alpha}$ est un outil utile dans l'étude des algèbres admissibles de Hom-Lie et Hom-Lie.

Lemme 3.4.1. *Soit $\mathcal{A} = (F,\mu,\alpha)$ une Hom-algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{A}$ est flexible.*
2. *Pour tout x, $y \in F$, $as_{\mu,\alpha}(x,y,x) = 0$.*
3. *Pour tout x, y, $z \in F$, $as_{\mu,\alpha}(x,y,z) = -as_{\mu,\alpha}(z,y,x)$.*

DÉMONSTRATION :

— $((1) \Leftrightarrow (2))$: par définition on a

$$\begin{aligned} & \mu(\mu(x,y),\alpha(x)) = \mu(\alpha(x),\mu(y,x)) \\ \Leftrightarrow\ & \mu(\mu(x,y),\alpha(x)) - \mu(\alpha(x),\mu(y,x)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & as_{\mu,\alpha}(x,y,x) = 0 \end{aligned}$$

— $((2) \Leftrightarrow (3))$, par définition on a, pour tous x, $y \in F$: $as_{\mu,\alpha}(x,y,x) = 0$,
est équivalent à :

$$\begin{aligned} & as_{\mu,\alpha}(x-z,y,x-z) = 0,\ pour\ tous\ x,\ y \in F, \\ & \mu(\mu(x-z,y),\alpha(x-z)) - \mu(\alpha(x-z),\mu(y,x-z)) = 0 \end{aligned}$$

et par linéarité de μ et α :

$$\begin{aligned} & \mu(\mu(x,y),\alpha(x)) - \mu(\mu(x,y),\alpha(z)) + \mu(\mu(z,y),\alpha(z)) - \mu(\mu(z,y),\alpha(x)) \\ & -\mu(\alpha(x),\mu(y,x)) + \mu(\alpha(z),\mu(y,x)) + \mu(\alpha(x),\mu(y,z)) - \mu(\alpha(z),\mu(y,z)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & as_{\mu,\alpha}(x,y,x) + as_{\mu,\alpha}(z,y,z) + as_{\mu,\alpha}(z,y,x) + as_{\mu,\alpha}(x,y,z) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & as_{\mu,\alpha}(x,y,z) = -as_{\mu,\alpha}(z,y,x). \end{aligned}$$

Corollaire 3.4.1. *Toute algèbre hom-associative est Hom-flexible.*

Soit (F, μ, α) une Hom-algèbre, où μ est la multiplication et α un homomorphisme. On note F^+ l'algèbre Hom sur V avec une multiplication $x \bullet y = \frac{1}{2}(\mu(x,y) + \mu(y,x))$. Nous notons aussi F^- la Hom-algèbre sur V où la multiplication est donnée par le commutateur $[x,y] = \mu(x,y) - \mu(y,x)$.

Proposition 3.4.1. *Une Hom-algèbre (F, μ, α) est flexible si et seulement si :*

$$[\alpha(x), y \bullet z] = [x,y] \bullet \alpha(z) + \alpha(y) \bullet [x,z] \tag{3.39}$$

DÉMONSTRATION :

1. On suppose que (F, μ, α) est flexible, pour tous $x,\ y,\ z \in F$ on a :

$$\begin{aligned}
[\alpha(x), y \bullet z] - [x,y] \bullet \alpha(z) - \alpha(y) \bullet [x,z] &= \frac{1}{2}(\mu(\alpha(x), \mu(y,z)) + \mu(\alpha(x), \mu(z,y)) - \mu(\mu(y,z), \alpha(x)) \\
&\quad -\mu(\mu(z,y), \alpha(x)) - \mu(\mu(x,y), \alpha(z)) + \mu(\mu(y,x), \alpha(z)) \\
&\quad -\mu(\alpha(z), \mu(x,y)) + \mu(\alpha(z), \mu(y,x)) - \mu(\alpha(y), \mu(x,z)) \\
&\quad +\mu(\alpha(y), \mu(z,x)) - \mu(\mu(x,z), \alpha(y)) + \mu(\mu(z,x), \alpha(y))) \\
&= -\frac{1}{2}(as_{\mu,\alpha}(x,y,z) + as_{\mu,\alpha}(x,z,y) + as_{\mu,\alpha}(y,z,x) \\
&\quad +as_{\mu,\alpha}(z,y,x) - as_{\mu,\alpha}(y,x,z) - as_{\mu,\alpha}(z,x,y))
\end{aligned}$$

   et comme (F, μ, α) est flexible, alors $as_{\mu,\alpha}(x,y,z) + as_{\mu,\alpha}(z,y,x) = 0$, donc :

$$[\alpha(x), y \bullet z] = [x,y] \bullet \alpha(z) + \alpha(y) \bullet [x,z].$$

2. Inversement, pour tous $x,\ y,\ z \in F$, on a : $[\alpha(x), y \bullet z] = [x,y] \bullet \alpha(z) + \alpha(y) \bullet [x,z]$,
   pour $z = x$: $[\alpha(x), y \bullet x] = [x,y] \bullet \alpha(x) + \alpha(x) \bullet [x,x]$
   qui est équivalent à : $as_{\mu,\alpha}(x,y,x) + as_{\mu,\alpha}(x,x,y) + as_{\mu,\alpha}(y,x,x) + as_{\mu,\alpha}(x,y,x) - as_{\mu,\alpha}(y,x,x) - as_{\mu,\alpha}(x,x,y) = 0$,
   qui est équivalent à : $as_{\mu,\alpha}(x,y,x) = 0$, alors (F, μ, α) est flexible.

3.5 Algèbres Hom-Lie admissibles

Définition 3.5.1. [15] *Soit $\mathcal{A}$ une structure Hom-algèbre sur V définie par la multiplication μ et un homomorphisme α. Alors $\mathcal{A}$ est dit algèbre Hom-Lie admissible sur V si le crochet défini pour tous $x, y \in V$ par :*

$$[x,y] = \mu(x,y) - \mu(y,x). \tag{3.40}$$

satisfait l'identité de Hom-Jacobi :

$$\circlearrowleft_{x,y,z} [\alpha(x), [y,z]] = 0. \tag{3.41}$$

Pour tout $x,\ y,\ z \in V$.

Remarque 19. *Puisque le crochet du commutateur (3.40) est toujours antisymétrique, elle transforme toute algèbre Hom-Lie admissible en une algèbre Hom-Lie.*

Remarque 20. *D'après la proposition (3.2.2), toute algèbre hom-associative est Hom-Lie admissible*

Proposition 3.5.1. *Toute algèbre de Hom-Lie $(\mathcal{G}, [,], \alpha)$ est Hom-Lie admissible avec la même application α.*

DÉMONSTRATION : Pour le produit commutateur $\langle x, y\rangle = [x, y] - [y, x]$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= [x, y] - [y, x] = -([y, x] - [x, y]) = -\langle y, x\rangle \\
\circlearrowleft_{x,y,z} \langle \alpha(x), \langle y, z\rangle\rangle &= \circlearrowleft_{x,y,z} ([\alpha(x), [y, z]] - [\alpha(x), [z, y]] - [[y, z], \alpha(x)] + [[z, y], \alpha(x)] \\
&= \circlearrowleft_{x,y,z} ([\alpha(x), [y, z]] + [\alpha(x), [y, z]] + [\alpha(x), [y, z]] + [\alpha(x), [y, z]]) \\
&= 4 \circlearrowleft_{x,y,z} ([\alpha(x), [y, z]] = 0
\end{aligned}$$

Définition 3.5.2. *Le α-associateur, associé à un produit μ et à une application linéaire α, est une application trilinéaire, $a_{\mu,\alpha} : V \times V \times V \to V$*

$$a_{\mu,\alpha}(x, y, z) = \mu(\mu(x, y), \alpha(z)) - \mu(\alpha(x, \mu(y, z)) \tag{3.42}$$

Dans ce qui suit, nous donnons une nouvelle caractérisation des algèbres admissibles de Hom-Lie.
Soit $\mathcal{A} = (V, \mu, \alpha)$ une Hom-algèbre et soit $[x, y] = \mu(x, y) - \mu(y, x)$ son commutateur. On introduit l'application ternaire définie par $S(x, y, z) = a_{\mu,\alpha}(x, y, z) + a_{\mu,\alpha}(y, z, x) + a_{\mu,\alpha}(z, x, y)$. On a alors les propriétés suivantes :

Lemme 3.5.1. *Pour tous $x, \; y, \; z \in V$, l'égalité suivante est vérifiée :*

$$S(x, y, z) = [\mu(x, y), \alpha(z)] + [\mu(y, z), \alpha(x)] + [\mu(z, x), \alpha(y)].$$

DÉMONSTRATION : L'assertion suit en développant les commutateurs du côté droit :

$$\begin{aligned}
[\mu(x, y), \alpha(z)] + [\mu(y, z), \alpha(x)] + [\mu(z, x), \alpha(y)] &= \mu(\mu(x, y), \alpha(z)) - \mu(\alpha(z), \mu(x, y)) + \mu(\mu(y, z), \alpha(x)) \\
&- \mu(\alpha(x), \mu(y, z)) + \mu(\mu(z, x), \alpha(y)) - \mu(\alpha(y), \mu(z, x)) \\
&= a_{\mu,\alpha}(x, y, z) + a_{\mu,\alpha}(y, z, x) + a_{\mu,\alpha}(z, x, y) \\
&= S(x, y, z)
\end{aligned}$$

Proposition 3.5.2. *Une Hom-algèbre $\mathcal{A}$ est Hom-Lie admissible si et seulement si $S(x, y, z) = S(x, z, y)$, pour tout $x, \; y, \; z \in V$.*

DÉMONSTRATION : L'assertion découle de :

$$\begin{aligned}
S(x, y, z) - S(x, z, y) &= [\mu(x, y), \alpha(z)] - [\mu(y, z), \alpha(x)] - [\mu(z, x), \alpha(y)] \\
&- [\mu(x, z), \alpha(y)] + [\mu(z, y), \alpha(x)] + [\mu(y, x), \alpha(z)] \\
&= 0 = \circlearrowleft_{x,y,z} ([\alpha(x), [y, z]]
\end{aligned}$$

3.6 Algèbres Hom-poisson

Définition 3.6.1. *Une algèbre de Hom-Poisson est le quadruplet* $(P, \{,\}, \mu, \alpha)$ *constitué de :*

1. *et* $(P, \{,\}, \alpha)$ *une algèbre de Hom-Lie.*
2. (P, μ, α) *Une Hom-algèbre associative commutative.*
   telle que l'identité Hom-Leibniz (condition de compatibilité entre μ *et* $\{,\}$*) :*

$$\{\alpha(x), \mu(y,z)\} = \mu(\alpha(y), \{x,z\}) + \mu(\alpha(z), \{x,y\}), \tag{3.43}$$

Pour tout $x,\ y,\ z \in P$.

Remarque 21. *Dans une algèbre de Hom-Poisson* $(P, \{,\}, \mu, \alpha)$*, l'opération* $\{,\}$ *est appelée crochet de Hom-Poisson.*

Remarque 22. *La condition de compatibilité est équivalente à la condition :*

$$pour\ \ tous\ \ x,\ \ y,\ \ z \in V,\ \ \{\mu(x,y), \alpha(z)\} = \mu(\{x,z\}, \alpha(y)) + \mu(\alpha(x), \{y,z\}).$$

Exemple 3.6.1. *Soit* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *une base d'un espace vectoriel* A *de dimension 3 sur* $\mathbb{K}$*. La multiplication* μ*, le crochet antisymétrique* $\{,\}$ *et l'application linéaire* α *suivantes définissent sur* P *une structure d'algèbre Hom-Poisson :*

$$\begin{cases} \mu(e_1,e_1) = e_1, \qquad \{e_1,e_2\} = ae_2 + be_3, \\ \mu(e_1,e_2) = \mu(e_2,e_1) = e_3, \qquad \{e_1,e_3\} = ce_2 + de_3, \\ \alpha(e_1) = \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3,\ \ \alpha(e_2) = \lambda_3 e_2 + \lambda_4 e_3,\ \ \alpha(e_3) = \lambda_5 e_2 + \lambda_6 e_3. \end{cases}$$

où $a,\ b,\ c,\ d,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5,\ \lambda_6$*, sont des paramètres dans* $\mathbb{K}$.

3.7 Principe de twist

Le théorème suivant donne un moyen aisé permettant de déformer des structures usuelles en Hom-structures.

Théorème 3.7.1.

1. *Soit* $\mathcal{A} = (A, \mu)$ *une algèbre associative et* $\alpha : A \longrightarrow A$ *une application linéaire qui est multiplicative par rapport à* μ*, c'est à dire :* $\alpha \circ \mu = \mu \circ \alpha^{\otimes 2}$*. Alors* $\mathcal{A}_\alpha = (A, \mu_\alpha = \alpha \circ \mu, \alpha)$ *est une algèbre Hom-associative.*
2. *Soit* $\mathcal{A} = (A, [,])$ *une algèbre de Lie et* $\alpha : A \longrightarrow A$ *une application linéaire qui est multiplicative par rapport à* $[,]$*, c'est à dire :* $\alpha \circ [,] = [,] \circ \alpha^{\otimes 2}$*. Alors* $\mathcal{A}_\alpha = (A, [,]_\alpha = \alpha \circ [,], \alpha)$ *est une algèbre Hom-Lie.*
3. *Soit* $\mathcal{A} = (A, [,])$ *une algèbre de Leibniz et* $\alpha : A \longrightarrow A$ *une application linéaire qui est multiplicative par rapport à* $[,]$*, c'est à dire :* $\alpha \circ [,] = [,] \circ \alpha^{\otimes 2}$*. Alors* $\mathcal{A}_\alpha = (A, [,]_\alpha = \alpha \circ [,], \alpha)$ *est une algèbre Hom-Leibniz.*

4. *Soit $A = (A, \mu, \{,\})$ une algèbre de Poisson, et $\alpha : A \to A$ une application linéaire qui est multiplicative pour μ et pour $\{,\}$. Alors $A_\alpha = (A, \mu_\alpha = \alpha \circ \mu, \{,\}_\alpha = \alpha \circ \{,\}, \alpha)$ est une algèbre Hom-Poisson.*

Démonstration :

1. On a :

$$\begin{aligned} as_{\mu_\alpha,\alpha} &= \mu_\alpha(\alpha(x), \mu_\alpha(y,z)) - \mu_\alpha(\mu_\alpha(x,y), \alpha(z)) \\ &= \alpha \circ \mu(\alpha(x), \alpha \circ \mu(y,z)) - \alpha \circ \mu(\alpha \circ \mu(x,y), \alpha(z)) \\ &= \mu(\alpha^2(x), \mu(\alpha^2(y), \alpha^2(z)) - \mu(\mu(\alpha^2(x), \alpha^2(y)), \alpha^2(z)) \\ &= \alpha^2(\mu(x, \mu(y,z)) - (\mu(\mu(x,y), z))) = 0. \end{aligned}$$

Comme (A, μ) est associative, ainsi A_α est une algèbre Hom-associative.

2. On a : $\forall x,\ \ y \in A,\ \ [y,x] = -[x,y] \Leftrightarrow [x,x] = 0$ c'est à dire :

$$\begin{aligned} & [x,x]_\alpha &= \ & \alpha \circ [x,x] = 0 \\ \textit{et} \quad & J_{[,]_\alpha,\alpha} &= \ & [\alpha(x), [y,z]_\alpha]_\alpha + [\alpha(z), [x,y]_\alpha]_\alpha + [\alpha(y), [z,x]_\alpha]_\alpha \\ & &= \ & \alpha \circ [\alpha(x), \alpha \circ [y,z]] + \alpha \circ [\alpha(z), \alpha \circ [x,y]] + \alpha \circ [\alpha(y), \alpha \circ [z,x]] \\ & &= \ & [\alpha^2(x), [\alpha^2(y), \alpha^2(z)]] + [\alpha^2(z), [\alpha^2(x), \alpha^2(y)]] + [\alpha^2(y), [\alpha^2(z), \alpha^2(x)]] \\ & &= \ & \alpha^2[[x,[y,z] + [z,[x,y] + [y,[z,x]] = 0. \end{aligned}$$

Comme $[,]$ est un crochet de Lie, ainsi A_α est une algèbre Hom-Lie.

3. On a :

$$\begin{aligned} L_{[,]_\alpha,\alpha} &= [[x,y]_\alpha, \alpha(z)]_\alpha - [[x,z]_\alpha, y]_\alpha - [\alpha(x), [y,z]_\alpha]_\alpha \\ &= \alpha \circ [\alpha \circ [x,y], \alpha(z)] - \alpha \circ [\alpha \circ [x,z], \alpha(x)] - \alpha \circ [\alpha(x), \alpha \circ [y,z]] \\ &= [[\alpha^2(x), \alpha^2(y)], \alpha^2(z)] - [[\alpha^2(x), \alpha^2(z)], \alpha^2(y)]] - [\alpha^2(x), [\alpha^2(y), \alpha^2(z)]] \\ &= \alpha^2([[x,y],z] - [[x,z],y] - [x,[y,z]]) = 0 \end{aligned}$$

Comme $[,]$ est un crochet de Leibniz, ainsi A_α est une algèbre Hom-Leibniz.

4. on sait déjà que (A, μ_α, α) est une algèbre commutative Hom-associative et que $(A, [,]_\alpha, \alpha)$ est une algèbre Hom-Lie Il reste à vérifier l'identité Hom-Leibniz :

$$\begin{aligned} L_{\{,\}_\alpha,\mu_\alpha,\alpha} &= \{\mu_\alpha(x,y), \alpha(z)\}_\alpha - \mu_\alpha(\{x,z\}_\alpha, \alpha(y)) - \mu_\alpha(\alpha(x), \{y,z\}_\alpha) \\ &= \alpha \circ \{\alpha \circ \mu(x,y), \alpha(z)\} - \alpha \circ \mu(\alpha \circ \{x,z\}, \alpha(y)) - \alpha \circ \mu(\alpha(x), \alpha \circ \{y,z\} \\ &= \{\mu(\alpha^2(x), \alpha^2(y)), \alpha^2(z)\} - \mu(\{\alpha^2(x), \alpha^2(z)\}, \alpha^2(y)) - \mu(\alpha^2(x), \{\alpha^2(y), \alpha^2(z)\} \\ &= \alpha^2(\{\mu(x,y), z)\} - \mu(\{x,z\}, y) - \mu(x, \{y,z\}) = 0. \end{aligned}$$

En particulier, si $\alpha : A \to A$ est un morphisme de l'algèbre (associative ou de Lie ou de Leibniz ou de poisson) (A, μ), alors c'est également un morphisme de la Hom-algèbre A_α.

Conclusion

Dans notre mémoire on a vue quelques définitions et propriété de quelques structures algébriques avec leurs versions hom, ainsi que leurs classification à isomorphisme pré en dimension inférieur ou égale à quatre.

Bibliographie

[1] A.A.Albert , *" Power associative rings "* , Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 552-597.

[2] H.Adimi , *" Indices des algèbres de Lie et algèbres associatives"* , thèse de magistère Université de Ferhat Abbas-setif 1, 2005.

[3] H.Adimi, H.Amri, S.Mabrouk, A.Makhlouf, *"(Non-BiHom-Commutative) BiHom-poisson algebras "* , arXiv preprint arXiv : 2008.04597, 2020.

[4] B.Agrebaoui, K.Benali, A. Makhlouf, *"Representations of simple Hom-Lie algebras"* , arXiv preprint arXiv : 1903.08874, 2019.

[5] S.Attan, H.Hounnon, B.Kpamegan, *"Representations and formal deformations of Hom-Leibniz algebras"* , Asian-European Journal of Mathematics, 2020.

[6] J.Casas, and M.Insua and N.Pacheco Rego, *" On universal central extensions of Hom-Leibniz algebras "* , Journal of Algebra and Its Applications, v 13, 08, pages 1450053, 2014.

[7] Z.Chebel, *"Sur les bialgèbres faibles et les algèbres de Hopf faibles"*, Thèse de doctorat universite des fréres mentouri constantine 1, 2018.

[8] A.Dzhumadi l'Daev, , *"comologies and deformations of right symmetic algebras,"*,arxiv : math/9807065v1[math.DG].13.Jun 1998.

[9] D.B.Fuks, *"cohomology of infinite-dimensional Lie algebras,"*,Plenum, New York, 1986.

[10] M.Gerstenhaber, *"On the deformation of rings and algebras, "* Ann of Math.(2)57(1953).

[11] J.T.Hartwig, D. Larsson and S. D. Silvestrov, *"Deformations of Lie algebras using σ-derivations"*, J. Algebra, 295 (2006), 314-361.

[12] S.Hidri, *" Formes bilinéaires invariantes sur les algèbres de Leibniz et les systèmes triples de Lie (resp. Jordan) "*, Thèse de doctorat Université de Lorraine, 2016.

[13] S.Liu, A.Makhlouf, L.Song, *" on hom-pre-lie bialgebras "* , arXiv :1912.1341, 2019.

[14] J.Loday, *" Une version non commutative des algebres de Lie : les algebres de Leibniz"* , Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25, 44, 1993, 127-151.

[15] A.Makhlouf and D.Sergei , *" Hom-algebra structures "* , J. Gen. Lie Theory Appl, No.2, 2008, 51-64.

[16] A.Moreau , *"Algèbres de Lie semi-simples : représentations et éléments nilpotents"* , cours, 2018-2019, 81 page.

[17] J.Pierre DAX , *Algèbre*, cours, 2007, 81 page.

[18] A.Zahari , *"Etude et Classification des algèbres Hom-associatives"*, thèse de doctorat Université de Haute Alsace - Mulhouse, Université des Comores, 2017.

الملخص

الهدف من الأطروحة هو إعطاء بعض التراكيب الجبرية في الحالة الكلاسيكية وفي حالة هوم . هوم الجبر أو الجبر الملتوي بواسطة تشابه الشكل α هي تعميم للجبر. كانت البداية بإعطاء تعريف الفضاء المتجه من أجل تعريف الجبر، يتم توضيح ذلك من خلال تصنيف ما قبل التماثل.

Résumé

Le but de notre mémoire est de donner quelques structures algébriques dans le cas classique et dans le cas Hom. Les Hom-algèbres ou algèbres twistées par un homomorphisme α sont une généralisation d'algèbres. On a commencé par donner la définition d'un espace vectoriel pour définir une algèbre, notre mémoire est illustré par une classification à isomorphisme pré.

Abstract

The objective of our brief is to give some algebraic structures in the classical case and in the case Hom. Hom-algebras or algebras twisted by a homomorphism α are a generalization of algebras. We started by giving the definition of a vector space to define an algebra, our memory is illustrated by a pre-isomorphic classification.