

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIM-BBA  
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de  
**MASTER**  
SPECIALITE : Mathématiques Appliquées

Par :

-Sehili Boumediene  
-Teharbit Imad

Thème : Résolution des équations intégrales non linéaire

soutenu publiquement le 29/06/2013

Devant le jury composé de :

Président : R.Zeghdane

Examineurs: H.Touati

Rapporteur: A.Rahmoun

PROMOTION : 2012/2013

# Introduction

Depuis le travail du célèbre mathématicien Niels Abel dans les années 1820, les analystes ont eu un intérêt continu pour les équations intégrales. Plusieurs mathématiciens modernes, notamment Cauchy, Fredholm, Hilbert, Volterra, et d'autres, sont associées à ce sujet. Il ya essentiellement deux raisons à cet intérêt. Dans certains cas, comme dans l'oeuvre d'Abel sur les courbes tautochrones, les équations intégrales sont un modèle mathématique qui surgit naturellement dans la représentation de l'une des situations physiquement intéressantes. La seconde, et peut-être celle qui a plus d'avantages, c'est que les opérateurs intégraux, les transformations et les équations intégrales, sont des outils pratiques pour l'étude des équations différentielles. Par conséquent, les techniques d'équations intégrales sont bien connues par des analystes classiques, c'est ainsi que de nombreux résultats élégants et puissants ont été développés.

Jusqu'à la dernière décennie du siècle passé, dans le domaine des mathématiques appliquées, peu d'ingénieurs et de numériciens sont intéressés aux connaissances pratiques des équations intégrales, puisque dans la modélisation mathématique l'accent a été traditionnellement mis sur les équations différentielles. Cependant, vu la pluridisciplinarité des travaux publiés récemment sur les équations intégrales comme un outil mathématique réaliste et inévitable, cette situation a commencé à changer.

Notre objectif dans ce mémoire est de présenter quelques méthodes de résolution numérique des équations intégrales non linéaires de Fredholm ou de Volterra en utilisant des techniques d'approximation récentes, notamment les formules de quadratures et les approximations successives. Ainsi, ce mémoire est réparti essentiellement en trois chapitres suivis d'une annexe.

Le premier chapitre est une esquisse d'une théorie générale sur les équations intégrales, dont on trouve une classification avec quelques modèles typiques apparaissent d'une manière naturelle lors de la modélisation de certains problèmes non linéaires de la science et de la technologie ou bien par remaniement de certaines équations différentielles ordinaires ou partielles.

Le deuxième chapitre est essentiellement consacré à l'analyse fonctionnelle des équations intégrales, notamment la question d'existence et d'unicité. Dans cette partie du travail nous allons faire appel à la théorie du point fixe de Banach pour donner les conditions nécessaires et suffisantes.

Le troisième chapitre traite les différentes méthodes de la résolution approchée de ce type d'équations, ainsi nous allons présenter une méthode mixte à la résolution des équations intégrales non linéaires. Et pour tester l'efficacité de cette méthode, quelques résultats numériques seront donnés.

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

### 1.1 Espaces fonctionnels

#### 1.1.1 Définitions (Rappels)

Commençons par rappeler la définition d'un espace vectoriel normé.

**Définition 1.1.1 (Espace vectoriel normé)**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle norme sur l'espace  $E$   $\|\cdot\|$  toute application notée  $\|\cdot\|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , vérifiant pour tout  $x, y$  dans  $E$  et dans  $\mathbb{k}$  :

1.  $\|x\| = 0$  si seulement si  $x = 0$
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (homogénéité).
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

**Exemple 1.1.1**

Soit  $C([a, b], \mathbb{R})$ , l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs réelles. Pour tout  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ , on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Les applications  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $C([a, b], \mathbb{R})$ .

**Définition 1.1.2 (Espace métrique complet)**

On dit que  $E$  est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de  $E$  converge dans  $E$ .

**Définition 1.1.3 (Espace de Banach)**

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach, par exemple  $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach.

**Définition 1.1.4 (Produit scalaire)**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , un produit scalaire sur  $E$  est application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  possédant les propriétés suivantes : pour tout  $x, y, z$  dans  $E$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{R}$ .

1.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ .

2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ .
4.  $\langle x, x \rangle = 0$  implique  $x = 0$ .

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un espace préhilbertien.

**Remarque 1.1.1**

Un produit scalaire sur  $E$  définit une norme sur  $E$  par la formule suivante

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**Définition 1.1.5 (Espace de Hilbert)**

Un espace de Hilbert est espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

**Définition 1.1.6 (Espace  $C[a, b]$ )**

Des fonctions continues sur  $[a, b]$ , de norme

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

**Définition 1.1.7 (Espace  $C^k[a, b]$ )**

Des fonctions  $k$  fois continument dérivables sur  $[a, b]$ , de norme

$$\|x\| = \sum_{i=0}^k \max |x^i(t)|, \text{ telle que } x^0(t) = x(t).$$

**Définition 1.1.8 (Espace  $L^1(\Omega)$ )**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on désigne par  $L^1(\Omega)$  l'espace des fonctions intégrable sur  $\Omega$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , on pose

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

**Définition 1.1.9 (Espace  $L^p(\Omega)$ )**

Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ , on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $p = +\infty$ , on a  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable, vérifiant

$$\exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c, p.p. \text{ sur } \Omega.$$

La norme est notée par

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf \{c > 0, |f(x)| \leq c, p.p. \text{ sur } \Omega\}.$$

## 1.2 Théorème de point fixe

### Théorème 1

Soit  $I \subset \mathbb{R}$ , un ensemble fermé. soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ . On suppose que

- Soit  $f : I \rightarrow I$ .
- $f$  est fortement contractante, i.e.

$$\exists L \in ]0, 1[, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in I.$$

Alors

- Il existe un unique point fixe  $\xi$  de  $f$  dans  $I$ .
- La suite.

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donné dans } I. \\ \text{Pour } k = 0, 1, 2, \dots \\ \text{Poser } x^{(k+1)} = f(x^{(k)}). \end{cases}$$

**Preuve.** Tout d'abord, supposons qu'un point fixe  $\xi$  existe et établissons son unicité. Soient  $\xi_1$  et  $\xi_2$  deux points fixes de  $f : f(\xi_1) = \xi_1$  et  $f(\xi_2) = \xi_2$ . Nous avons alors

$$|\xi_1 - \xi_2| = |f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2|.$$

donc

$$(1 - L)|\xi_1 - \xi_2| \leq 0.$$

ce qui entraîne  $\xi_1 = \xi_2$  car  $1 - L > 0$ . L'existence de  $\xi$  s'établit de manière constructive, en montrant que  $(x^{(k)})_k$  est une suite de Cauchy. Soit  $p \geq q$  deux entiers. Nous pouvons écrire

$$|x^{(p)} - x^{(q)}| \leq |x^{(p)} - x^{(p-1)}| + \dots + |x^{(q+1)} - x^{(q)}|.$$

or

$$|x^{(p)} - x^{(p-1)}| = |f(x^{(p-1)}) - f(x^{(p-2)})| \leq L|x^{(p-1)} - x^{(p-2)}| \leq \dots \leq L^{p-q-1}|x^{(q+1)} - x^{(q)}|.$$

Ainsi

$$|x^{(p)} - x^{(q)}| \leq \sum_{k=0}^{p-q-1} L^k |x^{(q+1)} - x^{(q)}| \leq \frac{1}{1-L} |x^{(q+1)} - x^{(q)}| \leq \frac{1}{1-L} L^q |x^{(1)} - x^{(0)}|.$$

La suite  $(x^{(k)})_k$  est bien de Cauchy. Elle converge donc dans  $I$ , qui est fermé et donc complet dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\xi$  sa limite. Par continuité de  $f$ , nous avons forcément

$$\xi = f(\xi).$$

■

### Théorème 2

Soit  $I = [a, b]$  un intervalle fermé et borné et  $f$  une fonction telle que :

1.  $\forall x \in [a, b], f(x) \in [a, b]$ .
2.  $f \in C^1([a, b])$ .

3.  $\exists K \in ]0, 1[$ , telle que,  $|f'(x)| \leq K, \forall x \in [a, b]$

Alors  $f$  a un unique point fixe  $x^*$  dans  $[a, b]$  et la suite  $x^{(k)}$  converge vers  $x^*$  pour tout  $x^{(0)} \in [a, b]$ . De plus, nous avons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x^{(k+1)} - x^*}{x^{(k)} - x^*} = f'(x^*).$$

**Preuve.** L'hypothèse 3 implique que  $f$  est fortement contractante, c'est une conséquence du théorème des accroissements finis. En effet, pour tout  $x, y$  de  $I$ , il existe un  $\xi$  de  $I$  tel que

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

il en découle que

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|.$$

Les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites, nous sommes assurés de l'existence et de l'unicité du point fixe  $x$  de  $f$  ainsi que de la convergence de la suite  $x^{(k)}$ . Pour établir le résultat de vitesse de convergence, on écrit

$$x^{(k+1)} - x^* = f(x^{(k+1)}) - f(x^*) = f'(\xi^{(k)})(x^{(k)} - x^*)$$

Comme  $x^{(k)}$  converge vers  $x^*$  et que  $\xi^{(k)}$  est compris entre  $x^{(k)}$  et  $x^*$ , alors  $\xi^{(k)}$  converge vers  $x^*$ , et puisque  $f \in C^1([a, b])$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(\xi^{(k)}) = f'(x^*)$ , d'où le résultat. ■

## 1.3 Les opérateurs intégrals non linéaires

### Définition 1.3.1

Un opérateur intégral non linéaire  $T$  est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante

$$(T\varphi)x = \int_a^b K(x, t, \varphi(t))dt.$$

La fonction  $K$  étant appelée noyau de l'opérateur  $T$ .

### Remarque 1.3.1

Si  $K$  est une fonction continue de  $[a, b] \times [a, b]$ , l'opérateur  $T$  est appelé opérateur intégral à noyau continu  $K$ .

### 1.3.1 Opérateur contractant

#### Définition 1.3.2

Soient  $H$  est un espace de Hilbert et  $T$  un opérateur borné, l'opérateur  $T$  est dit opérateur contractant s'il existe une constante  $L$  telle que  $0 < L < 1$  et

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H, \|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

#### Théorème 3

Soit  $T$  un opérateur de contraction sur  $H$ . L'équation

$$T\varphi = \varphi. \tag{1.1}$$

a une solution unique, dans  $H$ . Une telle solution est dite un point fixe de  $T$ .

**Preuve.** Supposons qu'il existe deux points fixes  $\varphi$  et  $\psi$  de telle que

$$\begin{aligned} T\varphi &= \varphi. \\ T\psi &= \psi. \end{aligned}$$

alors

$$\|\varphi - \psi\| = \|T\varphi - T\psi\| \leq \alpha \|\varphi - \psi\|.$$

et

$$(1 - \alpha) \|\varphi - \psi\| \leq 0.$$

Puisque  $\|\varphi - \psi\|$  est nécessairement non négatif, nous voyons que

$$\|\varphi - \psi\| = 0.$$

alors  $\varphi = \psi$ . Il en résulte que si (1.1) a une solution, elle doit être unique. Pour montrer que (1.1) a une solution nous mettrons en place une procédure itérative. Choisis  $\varphi_0$ , puis construisons une suite  $\{\varphi_n\}$  définie par

$$\varphi_{n+1} = T\varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nous allons d'abord montrer que cette suite est une suite de Cauchy, et que sa limite est en effet une solution de (1.1). Qu'il a une limite suivra le fait qu'une suite de Cauchy doit avoir une limite unique dans un espace de Hilbert. La limite sera indépendante du choix initial  $\varphi_0$ , puisque ce sera une solution de (1.1), qui doit être unique.

Premièrement, notons que

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| = \|T\varphi_n - T\varphi_{n-1}\| \leq \alpha \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|.$$

Par application successive de ce qui précède, nous avons

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \leq \alpha \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \leq \alpha^2 \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\| \leq \dots \leq \alpha^n \|\varphi_1 - \varphi_0\|.$$

Plus généralement, nous avons, si  $n > m$ ,

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_m\| &= \|(\varphi_{n+1} - \varphi_n) + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + \dots + (\varphi_{m+1} - \varphi_m)\| \\ &\leq \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| + \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\| + \dots + \|\varphi_{m+1} - \varphi_m\| \\ &\leq (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \dots + \alpha^m) \|\varphi_1 - \varphi_0\| \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+2} + \dots) \|\varphi_1 - \varphi_0\| + \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \|\varphi_1 - \varphi_0\|. \end{aligned}$$

de sorte que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0.$$

Il s'ensuit que  $\{\varphi_n\}$  est une suite de Cauchy, et on note sa limite par  $\varphi$ . Nous devons montrer que la limite  $\varphi$  est une solution de (1.1). Du fait que  $T$  est un opérateur continu, nous avons

$$T\varphi = T(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T\varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1} = \varphi.$$

et

$$T\varphi = \varphi.$$

■

### ***Théorème 4 (principe de contraction de Banach)***

Soit  $T$  un opérateur contractant dans un espace de Hilbert  $H$ . Alors,  $T\varphi = \varphi$  admet une solution unique  $\varphi$  dans  $H$ , cette solution est le point fixe de cet opérateur. voir [11].

#### ***Corollaire 1.3.1***

Supposons que l'opérateur  $T$  admet un point fixe dans l'espace de Hilbert  $H$ , alors l'opérateur  $T^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  admet le même point fixe.

#### ***Corollaire 1.3.2***

Soit  $T$  un opérateur dans l'espace  $H$  tel que l'opérateur  $T^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  est un opérateur contractant, alors  $T$  admet un unique point fixe  $\varphi$  dans l'espace  $H$ .

## **1.4 Généralités sur les équations intégrales non lineaires**

### ***Définition 1.4.1***

On appelle équation intégrale non lineaire une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégrations  $\int$ . C'est en générale l'équation par rapport à l'inconnue  $\varphi$  de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (1.2)$$

ou

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t) F(\varphi(t)) dt. \quad (1.3)$$

avec  $\Omega$  est un espace mesuré,  $f$  une fonction mesurable donnée sur  $\Omega$ ,

$\lambda$  : un scalaire donné qui peut être réel ou complexe (un paramètre numérique).

$K$  : une fonction mesurable sur  $E^3$  appelée noyau de l'équation intégrale.

$F$  : une fonction non lineaire. Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction  $\varphi$  qui satisfait l'équation (1.2), où  $f$ ,  $F$  et  $k$  sont des fonctions connues et  $\varphi$  la fonction inconnue.

### ***Remarque 1.4.1***

Si on prend

$$K(x, t, \varphi(t)) = K(x, t)\varphi(t), \text{ ou } F(\varphi(t)) = \varphi(t).$$

les équations (1.2) et (1.3) devient linéaires.

### **1.4.1 Origine des équations intégrales.**

#### **Problème de Cauchy**

Soit à résoudre l'équation différentielle  $y' = f(x, y)$ , avec la condition initiale  $y(x_0) = y_0$ , ce problème mène à la résolution de l'équation intégrale suivante :

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx + y_0.$$



D'une façon tout à fait analogue, le problème de Cauchy consiste à intégrer l'équation différentielle de second ordre  $y'' = f(x, y)$  avec les conditions initiales  $y(x_0) = y_0$  et  $y'(x_0) = y'_0$  se ramène à la résolution de l'équation intégrale :

$$y(x) = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f [z, y(z)] dz + y_0 + y'_0(x - x_0).$$

Une transformation de l'intégrale double en intégrale simple permet d'écrire cette équation sous la forme suivante :

$$y(x) = \int_{x_0}^x (x - z) f [z, y(z)] dz + y_0 + y'_0(x - x_0).$$

La solution générale de l'équation  $y'' = f(x, y)$  se déduit de l'équation intégrale

$$y(x) = \int_{x_0}^x (x - z) f [z, y(z)] dz + c_1 + c_2(x - x_0). \quad (1.4)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes arbitraires.

### Problème aux limites

Posons le problème aux limites pour notre équation de second ordre  $y'' = f(x, y)$ , on cherche une solution  $y$  vérifiant  $y'' = f(x, y)$  avec les conditions aux limites  $y(0) = a$ ,  $y(l) = b$ . En faisant  $x_0 = 0$  puis  $x = l$  dans l'équation (1.4), on obtient deux équations d'où l'on tire les constantes arbitraires  $C_1$  et  $C_2$ , soit

$$c_1 = a, c_2 = \frac{b - a}{l} - \frac{1}{l} \int_0^l (l - z) f [z, y(z)] dz.$$

En substituant les valeurs trouvées dans la formule (1.4), on ramène le problème aux limites à l'équation intégrale :

$$y(x) = F(x) + \int_0^x (x - z) f [z, y(z)] dz - \frac{x}{l} \int_x^l (l - z) f [z, y(z)] dz. \quad (1.5)$$

où

$$F(x) = a + \frac{b - a}{l} x.$$

Nous pouvons mettre l'équation (1.5) sous la forme suivante :

$$y(x) = F(x) - \int_0^x \frac{z(l - x)}{l} f [z, y(z)] dz - \int_x^l \frac{x(l - z)}{l} f [z, y(z)] dz. \quad (1.6)$$

Introduisons la fonction de deux variables :

$$K(x, z) = \begin{cases} \frac{z(l-x)}{l} & \text{pour, } z \leq x, \\ \frac{x(l-z)}{l} & \text{pour, } x \leq z. \end{cases} \quad (1.7)$$

L'équation (1.6) s'écrit alors :

$$y(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z) f[z, y(z)] dz. \quad (1.8)$$

## 1.4.2 Classification des équations intégrales non lineaires

### *Définition 1.4.2 (Equation intégrale de Fredholm)*

1. On appelle équation intégrale non lineaire de Fredholm de première espèce une équation de la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = 0.$$

2. On appelle équation intégrale non lineaire de Fredholm de second espèce une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

### *Définition 1.4.3 (Equation intégrale de Volterra)*

1. On appelle équation intégrale non lineaire de Volterra de première espèce une équation de la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = 0.$$

2. On appelle équation intégrale non lineaire de Volterra de second espèce une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

### *Remarque 1.4.2*

1. Si  $f(x) = 0$ , donc les équations est dite homogènes.
2. Si  $f(x) \neq 0$ , donc les équations est dite non homogènes

### *Remarque 1.4.3*

Les équations intégrales de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm a condition que le noyau :

$$K(x, t, \varphi(t)) = 0, \text{ pour } t > x.$$

## 1.5 Existence et unicité de la solution des équations intégrales non linéaire

### 1.5.1 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra

Considérons d'abord l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{x_0}^x K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \in [x_0, x_0 + a]. \quad (1.9)$$

Notre but est de prouver l'existence des solutions pour (1.9), au moins sur un sous-intervalle de  $[x_0, x_0 + a]$ , disons  $[x_0, x_0 + \delta]$ , avec  $\delta \leq a$ .

Pour atteindre ce but, nous allons utiliser la méthode des approximations successives. Mais, premièrement, On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1)  $f$  est une fonction continue de  $[x_0, x_0 + a]$  dans  $\mathbb{R}^n$ .
- (2)  $K$  est une fonction continue de  $\Delta \times B_r$ , dans  $\mathbb{R}^n$  où

$$\Delta = \{(x, t); x_0 \leq t \leq x_0 + a\}, \quad (1.10)$$

et

$$B_r = \{\varphi, \varphi \in \mathbb{R}^n, |\varphi| \leq r\}. \quad (1.11)$$

- (3)  $K$  satisfait la condition de Lipschitz dans  $\Delta \times B_r$

$$|K(x, t, \varphi) - K(x, t, \psi)| \leq L |\varphi - \psi|, \quad L > 0. \quad (1.12)$$

- (4) Si  $b = \sup |f(x)|, x \in [x_0, x_0 + a]$ , alors

$$b < r. \quad (1.13)$$

la méthode des approximations successives consiste à construire une suite itérative des fonctions continues

$$\varphi_0(x) = f(x), \text{ et } \varphi_n(x) = f(x) + \int_{x_0}^x K(x, t, \varphi_{n-1}(t)) dt, \quad n \geq 1. \quad (1.14)$$

sur  $[x_0, x_0 + a]$ , s'il est possible, où au moins sur un certain sous-intervalle  $[x_0, x_0 + \delta]$ ,  $\delta < a$ ; sous les hypothèses précédentes, on obtient facilement (1.14), dès que  $\varphi_0(x)$  et  $\varphi_1(x)$  sont définies et continues sur  $[x_0, x_0 + a]$  et afin d'établir que  $\varphi_2(x)$  soit défini sur un certain intervalle, nous devons vérifier si les valeurs de  $\varphi_1(x)$  appartiennent au domaine de définition de  $K$ , en d'autres termes :

$$|\varphi_1(x)| \leq r. \quad (1.15)$$

si on pose

$$M = \sup |K(x, t, \varphi)| \quad \text{dans } \Delta \times B_r. \quad (1.16)$$

alors (1.14) donne

$$|\varphi_1(x)| \leq b + M(x - x_0), \quad x \in [x_0, x_0 + a]. \quad (1.17)$$

Mais la condition (1.15) doit être vérifiée, ainsi elle signifie que  $b + M(x - x_0) \leq r$ , où

$$x - x_0 \leq \frac{r - b}{M}, \quad (1.18)$$

avec

$$\delta = \min \left\{ a, \frac{r - b}{M} \right\}. \quad (1.19)$$

nous voyons que  $\varphi_2(x)$  est certainement défini sur  $[x_0, x_0 + \delta]$ . Par induction, nous déduisons que tous les termes de  $\{\varphi_n(x)\}$  sont définis par (1.14) et sont continus sur  $[x_0, x_0 + \delta]$ .

Nous montrons maintenant que la suite (1.14) est uniformément convergente sur l'intervalle  $[x_0, x_0 + \delta]$  vers une certaine fonction continue  $\varphi(x)$  c'est à dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x), \text{ uniformément sur } [x_0, x_0 + \delta]. \quad (1.20)$$

comme

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)].$$

nous allons montrer la convergence uniforme dans  $[x_0, x_0 + \delta]$  des séries

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)]. \quad (1.21)$$

d'une part, et d'autre part nous avons

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq M(x - x_0). \quad (1.22)$$

pour  $k > 1$  nous obtenons

$$|\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)| \leq L \int_{x_0}^x |\varphi_{k-1}(t) - \varphi_{k-2}(t)| dt. \quad (1.23)$$

si nous prenons en considération (1.12) et (1.14). De (1.22) et (1.23) une simple dérivée

$$|\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)| \leq \frac{M (L(x - x_0))^n}{L n!}. \quad (1.24)$$

ce qui garantit la convergence uniforme de la suite  $\{\varphi_n(t)\}$  sur  $[x_0, x_0 + \delta]$ . De la relation

$$|K(x, t, \varphi(t)) - K(x, t, \varphi_n(t))| \leq L |\varphi(t) - \varphi_n(t)|. \quad (1.25)$$

nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(x, t, \varphi_n(t)) = K(x, t, \varphi(t)). \quad (1.26)$$

uniformément dans  $\{(x, t), x_0 \leq t \leq x \leq \delta\}$ .

Maintenant laissons  $n \rightarrow \infty$  dans la deuxième équation dans (1.14), et prenons en considération (1.26), on obtient (1.20) c.q.f.d.

L'unicité de la solution construite ci-dessus, dans les conditions (1) – (4), peut être également obtenue par des arguments standard. on suppose que  $\psi(x)$  est une solution continue de (1.9) dans  $[x_0, x_0 + \delta]$ , et

pour  $n \geq 1$ , (1.14) mène à l'inégalité

$$|\psi(x) - \varphi_k(x)| \leq L \int_{x_0}^x |\psi(t) - \varphi_{k-1}(t)| dt. \quad (1.27)$$

puisque  $|\psi(x) - \varphi_0(x)| \leq M(x - x_0)$ , et comme  $\psi(x)$  vérifie (1.9), nous obtenons :

$$|\psi(x) - \varphi_k(x)| \leq \frac{M}{L} \frac{(L(x - x_0))^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (1.28)$$

nous voyons que  $\psi(x)$  est également la limite uniforme de  $\{\varphi_n(x)\}$  et puisque la limite est unique nous obtenons  $\psi(x) \equiv \varphi(x)$  dans  $[x_0, x_0 + \delta]$ .

La discussion ci-dessus mène au résultat suivant de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale (1.9) .

### **Théorème 5**

*Si nous supposons que les conditions (1) – (4) soit vérifier, alors il existe une solution unique de l'équation (1.9), définie et continue sur l'intervalle  $[x_0, x_0 + \delta]$ , avec  $\delta$  donné par (1.19). D'ailleurs, cette solution est la limite uniforme de la suite des approximations successives (1.14).*

### **Théorème 6**

*Soit l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq b. \quad (1.29)$$

*Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

1.  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.
2.  $K : [0, a] \times [0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ , est une fonction continue satisfait la condition Lipschitz suivante :

$$|K(x, t, u) - K(x, t, v)| \leq L |u - v|. \text{ tel que } 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq x \text{ et } u, v \in \mathbb{R}.$$

*Alors, l'équation (1.29) admet une solution unique.  $\varphi \in C([0, a], \mathbb{R})$ .*

**Preuve.** On choisit la norme suivante

$$|g| = \sup_x \{|g(x)| \exp(-Lx)\}.$$

On définit l'opérateur  $T$  comme suit :

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

Afin de prouver que l'équation (1.29) admet une solution, il faut montrer que l'opérateur  $T$  admet un point fixe. D'abord, on montre que  $T$  est contractant.

$$\begin{aligned}
|T\varphi(x) - T\psi(x)| &\leq \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x |K(x, t, \varphi(t)) - K(x, t, \psi(t))| dt \right\} \\
&\leq L \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x |\varphi(t) - \psi(t)| dt \right\} \\
&\leq L \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x \exp(-Lt) \exp(Lt) |\varphi(t) - \psi(t)| dt \right\} \\
&\leq L |\varphi - \psi| \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x \exp(Lt) dt \right\} \\
&\leq L |\varphi - \psi| \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \frac{\exp(Lx) - 1}{L} \right\} \\
&\leq (1 - \exp(-Lx)) |\varphi - \psi|.
\end{aligned}$$

Puisque

$$(1 - \exp(-Lx)) \leq 1$$

alors,  $T$  est contractant, d'après le théorème de Banach, l'opérateur  $T$  admet un point fixe unique  $\varphi \in C([0, a])$ , qui est une solution unique de l'équation intégrale (1.29). ■

## 1.5.2 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

### *Théorème 7*

*supposons que*

$$\left\| \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt \right\| \leq M |\varphi(t)|$$

*et que*

$$|K(x, t, z_1) - K(x, t, z_2)| \leq N(x, t) |z_1 - z_2|.$$

*où*

$$\int_a^b \int_a^b |N(x, t)|^2 dx dt = P^2 < \infty.$$

*Si  $f(x) \in L_2[a, b]$ , alors*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt. \tag{1.30}$$

*a une unique solution dans  $L_2[a, b]$ , si  $|\lambda| P < 1$ .*

**Preuve.** On considère l'opérateur

$$T\varphi = f + \lambda K\varphi.$$

où  $K$  est défini dans (1.30)

$$\begin{aligned} \|T\varphi_1 - T\varphi_2\| &= |\lambda| \left\| \int_a^b [K(x, t, \varphi_1(t)) - K(x, t, \varphi_2(t))] dt \right\| \\ &\leq |\lambda| \left\{ \int_a^b \left[ \int_a^b K(x, t, \varphi_1(t)) - K(x, t, \varphi_2(t)) dt \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\lambda| \left\{ \int_a^b \left[ \int_a^b N(x, t) |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| dt \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\lambda| P \|\varphi_1 - \varphi_2\|. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour  $|\lambda| P < 1$ ,  $T$  est un opérateur contractant alors qu'il a un unique point fixe, et Que le point fixe est une solution de (1.30). ■

### **Théorème 8**

Considérons les conditions suivantes sur  $K(x, t, \varphi)$  :

1.  $\varphi \rightarrow K(x, t, \varphi)$  est lipschitzienne de constante  $k$  et

$$|K(x, t, \varphi)| \leq N(|\varphi|, x), \text{ où } \forall e \in \mathbb{R}, N(e, \bullet) \in L_1.$$

2.  $(x, \varphi) \rightarrow K(x, t, \varphi)$  est mesurable pour tout  $x$ .
3.  $t \rightarrow K(x, t, \varphi)$  est continue p.p. en  $x$ . Sous les hypothèses (1), (2) et (3), l'équation :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

possède une solution unique.

**Preuve.** On pose que

$$\begin{aligned} (T\varphi)(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt \\ &= f(x) + (T_0\varphi)(x). \end{aligned}$$

Les conditions (1), (2) et (3), et le théorème de **Lebesgue** entraînent que l'application  $T$  envoie  $C^0([a, b], E)$  dans lui-même. On a alors

$$\begin{aligned} |(T\varphi_1)(x) - (T\varphi_2)(x)| &= |\lambda| \cdot \left| \int_a^b K(x, t, \varphi_1(t)) - K(x, t, \varphi_2(t)) dt \right| \\ &\leq |\lambda| k \int_a^b N(x, t) |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| dt. \end{aligned}$$

où  $k$  est la constante de Lipschitz de  $K(x, t, \cdot)$ . On en déduit que

$$|(T^n \varphi_1)(x) - (T^n \varphi_2)(x)| \leq |\lambda|^n k^n \int_a^b \dots \int_a^b N(x, t_1) \dots N(t_{n-1}, t_n) |\varphi_1(t_n) - \varphi_2(t_n)| dt_1 \dots dt_n.$$

Comme on l'a vu dans le cas linéaire, voir [11]

$$\int_a^b \dots \int_a^b N(x, t_1) \dots N(t_{n-1}, t_n) dt_1 \dots dt_n = \frac{(b-a)^n}{n!}$$

et donc pour  $n$  assez grand,  $T^n$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{\lambda^n k^n (b-a)^n}{n!}$ . Elle est donc contractante pour  $n$  assez grand, et d'après le corollaire du théorème de Picard,  $T$  admet un point fixe unique. ■

### ***Théorème 1.5.1***

*Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *La fonction  $f(x)$  est bornée,  $|f(x)| < R$ , dans  $a \leq x \leq b$ ,*
2. *La fonction  $K(x, t, \varphi(t))$  est intégrable et bornée où*

$$|K(x, t, \varphi(t))| \leq L, \text{ dans } a \leq x, t \leq b.$$

3. *La fonction  $K(x, t, \varphi(t))$  satisfait la condition de Lipschitz*

$$|K(x, t, \varphi(t)) - K(x, t, \psi(t))| \leq M |\varphi(t) - \psi(t)|.$$

*Alors l'équation (1), admet une unique solution si*

$$\lambda < \frac{1}{H(b-a)}, H = \max\left\{L\left(1 + \frac{R}{|\lambda|L(b-a)}\right), M\right\}.$$

**Preuve.** voir [14]. ■



# Chapitre 2

## Résolution des équations intégrales non linéaires

Nous commençons notre étude sur les équations intégrales non linéaire deuxième espèce de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)F(\varphi(t))dt \quad \text{ou} \quad \varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)F(\varphi(t))dt. \quad (2.1)$$

D'abord, nous allons présenter une méthode très usuelle à la résolution de l'équation de Fredholm de second espèce est celle du noyau dégénéré (séparable). En suite, nous allons voir d'autres catégories de méthodes, ces méthodes sont la méthode des approximations successives, la méthode de développement en série et la méthode de décomposition d'Adomian (*ADM*).

### 2.1 Les points de bifurcation et singuliers

Quand l'équation intégrale non linéaire de Fredholm inclut un paramètre  $\lambda$ , il est alors évident que la solution l'est aussi. Il est possible que  $\lambda$  ait un point de bifurcation. Le point de bifurcation est une valeur du paramètre  $\lambda$ , disons  $\lambda_0$ , tels que si on change  $\lambda$  par  $\lambda_0$ , alors le nombre des solutions sera changé.

Pour illustrer ce phénomène, nous considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = 3 + \lambda \int_0^1 \varphi^2(t)dt. \quad (2.2)$$

La solution de cette équation est

$$\varphi(x) = \frac{(1 - 2\lambda) \mp \sqrt{1 - 12\lambda}}{2\lambda}. \quad (2.3)$$

Le point de bifurcation pour ce problème est  $\lambda_0 = \frac{1}{12}$ , Pour  $\lambda \leq \frac{1}{12}$ , l'équation non linéaire de Fredholm a deux solutions réelles, mais n'a aucune solution réelles pour  $\lambda > \frac{1}{12}$ .

Ce changement de  $\lambda$  par le point de **bifurcation**  $\lambda_0 = \frac{1}{12}$  a entraîné un changement en nombre et en structure des solutions. Cependant, pour  $\lambda = 0$ , nous obtenons  $\varphi(x) = 3$  en substituant

cette valeur de  $\lambda$  dans l'équation intégrale elle-même, tandis que  $\varphi(x)$  est éliminé en substituant le  $\lambda = 0$  dans (2.3). En conséquence, le point  $\lambda = 0$  s'appelle un point **singulier**.

Les conclusions suivantes peuvent être faites pour des équations intégrales non linéaires de Fredholm :

1. La solution de l'équation non linéaire ne peut pas être unique, là peut être plus d'une solution.
2. Pour ce qui concerne le point de bifurcation, il peut y avoir un ou plusieurs points de bifurcation.

## 2.2 La méthode à noyaux dégénéré

Dans ce qui suit, La méthode à noyaux dégénéré sera appliquée seulement pour résoudre les équations intégrales non linéaires de Fredholm.

Elle approche les équations intégrales non linéaires de Fredholm d'une façon directe et donne la solution sous une forme précise. Il est important de préciser que cette méthode sera appliquée pour des équations où les noyaux sont dégénérés ou séparables de la forme

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t). \quad (2.4)$$

Les exemples des noyaux séparables sont  $x - t$ ,  $xt^2$ ,  $xt^4 + x^4t$ ,...etc. La méthode de calcul directe peut être appliquée comme suit :

1. En substituant d'abord (2.4) dans l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)F(\varphi(t))dt. \quad (2.5)$$

2. Cette substitution donne

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & f(x) \\ & + \lambda g_1(x) \int_a^b h_1(t)F(\varphi(t))dt + \lambda g_2(x) \int_a^b h_2(t)F(\varphi(t))dt + \dots \\ & + \lambda g_n(x) \int_a^b h_n(t)F(\varphi(t))dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Chaque intégral du côté droit de (2.6) dépend seulement de la variable  $t$  avec des bornes de l'intégration fixes. Ceci signifie que chaque intégral est équivalent à une constante. pour cette raison, l'équation (2.6) devient

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda c_1 g_1(x) + \lambda c_2 g_2(x) + \dots + \lambda c_n g_n(x). \quad (2.7)$$

où

$$c_i = \int_a^b h_i(t)F(\varphi(t))dt, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.8)$$

4. En substituant (2.7) dans (2.8), on obtient un système à  $n$  équations algébriques qui peuvent être résolues pour déterminer les constantes  $c_i, 1 \leq i \leq n$ . En substituant les valeurs obtenues des  $c_i$  dans (2.7), la solution  $\varphi(x)$  de l'équation intégrale non linéaire de Fredholm (2.5) suit immédiatement.

Il est intéressant de remarquer que l'on peut obtenir plus d'une valeur pour un ou plusieurs des  $c_i, 1 \leq i \leq n$ . Ceci est normal car l'équation est non linéaire et la solution  $\varphi(x)$  n'est pas nécessairement unique pour les problèmes non linéaires. Les équations intégrales de Fredholm donne des solutions uniques dans les conditions d'existence et d'unicité.

### **Exemple 2.2.1**

Utilisons la méthode de calcul direct pour résoudre l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = a + \lambda \int_0^1 \varphi^2(t) dt, a > 0. \quad (2.9)$$

L'intégrale au côté droit de (2.9) est équivalente à une constante, parce qu'elle dépend seulement d'une fonction du variable  $t$  avec des bornes d'intégration constantes. En conséquence, nous récrivons (2.9) comme

$$\varphi(x) = a + \lambda c. \quad (2.10)$$

où

$$c = \int_0^1 \varphi^2(t) dt. \quad (2.11)$$

pour déterminer  $c$ , en substituant (2.10) dans (2.11) on obtient

$$c = \int_0^1 (a + \lambda c)^2 dt. \quad (2.12)$$

en intégrant le côté droit on trouve

$$\lambda^2 c^2 - (1 - 2\lambda a)c + a^2 = 0. \quad (2.13)$$

Résolvons l'équation (2.13) pour  $c$  nous donne

$$c = \frac{(1 - 2a\lambda) \pm (\sqrt{1 - 4a\lambda})}{2\lambda^2}. \quad (2.14)$$

En substituant (2.14) dans (2.10) mène aux solutions exactes :

$$\varphi(x) = \frac{1 \pm (\sqrt{1 - 4a\lambda})}{2\lambda}. \quad (2.15)$$

Les conclusions suivantes peuvent être faites :

1. En substituant  $\lambda = 0$  dans (2.9) donne la solution exacte  $\varphi(x) = a$ , mais dans (2.15) la solution est indéfinie. Alors  $\lambda = 0$  est dit le point **singulier** de l'équation (2.9).
2. Si  $\lambda = \frac{1}{4a}$ , l'équation (2.15) donne une seule solution  $\varphi(x) = 2a$ . Alors  $\lambda = \frac{1}{4a}$  est dit le point de **bifurcation** de l'équation (2.9). Cela montre que si  $\lambda < \frac{1}{4a}$  l'équation (2.9) donne deux solutions réelles, mais n'a pas de solutions réelles pour  $\lambda > \frac{1}{4a}$ .
3. Pour  $\lambda < \frac{1}{4a}$ , l'équation (2.15) donne deux solutions exactes réels.

## 2.3 La méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives est l'une des méthodes les plus usuelles à la résolution des problèmes de zéro. Étant donné l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)F(\varphi(t))dt. \quad (2.16)$$

où  $\varphi(x)$  est la fonction inconnue à déterminer et  $K(x,t)$  est le noyau. La méthode des approximations successives présente la relation de récurrence

$$\varphi(x)_{n+1} = f(x) + \int_a^b K(x,t)F(\varphi_n(t))dt, \quad n \geq 0. \quad (2.17)$$

où le choix de  $\varphi_0(x)$  peut être n'importe quelle fonction à valeurs réelles. généralement on prend  $\varphi_0(x)$  égale à 0, 1,  $x$ , ou  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} \varphi(x)_1 &= f(x) + \int_a^b K(x,t)F(\varphi_0(t))dt. \\ \varphi(x)_2 &= f(x) + \int_a^b K(x,t)F(\varphi_1(t))dt. \\ \varphi(x)_3 &= f(x) + \int_a^b K(x,t)F(\varphi_2(t))dt. \\ &\vdots \\ \varphi(x)_{n+1} &= f(x) + \int_a^b K(x,t)F(\varphi_n(t))dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution  $\varphi(x)$  est obtenue en passant à la limite

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x).$$

La question de la convergence de  $\varphi_{n+1}(x)$  est assurée par le théorème suivant

### **Théorème 9**

Si la fonction  $f(x)$  dans (2.17) est continue sur l'intervalle de  $a \leq x \leq b$ , et le noyau  $K(x,t)$  est continue dans le carré  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$ , la suite des approximations successives  $\varphi_{n+1}(x)$ ,  $n \geq 0$  converge vers la solution  $\varphi(x)$  de l'équation intégrale, voir [9].

### **Exemple 2.3.1**

Utilisons la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12} \int_0^\pi t\varphi^2(t)dt. \quad (2.18)$$

on choisit

$$\varphi_0(x) = 1. \quad (2.19)$$

En utilisant la formule itérative des approximations successives

$$\varphi_{n+1}(x) = \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12} \int_0^\pi t \varphi_n^2(t) dt, \quad n \geq 0. \quad (2.20)$$

En substituant (2.19) dans (2.20) on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12} \int_0^\pi t \varphi_0^2(t) dt = \cos(x) + 0.2056167584. \\ \varphi_2(x) &= \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12} \int_0^\pi t \varphi_1^2(t) dt = \cos(x) - 0.05115268549. \\ \varphi_3(x) &= \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12} \int_0^\pi t \varphi_2^2(t) dt = \cos(x) + 0.01812692764. \\ \varphi_4(x) &= \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12} \int_0^\pi t \varphi_3^2(t) dt = \cos(x) - 0.005907183842. \\ \varphi_5(x) &= \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12} \int_0^\pi t \varphi_4^2(t) dt = \cos(x) + 0.001983411200. \\ &\vdots \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Par conséquent, on obtient la solution  $\varphi(x)$  de (2.18) par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x) = \varphi(x) = \cos x.$$

Contrairement à la méthode de noyaux dégénéré où l'on peut obtenir plus d'une solution, la méthode de substitution successive donne qu'une seule solution pour le problème non linéaire de Fredholm. Cependant, selon la méthode de noyaux dégénéré donne les deux solutions

$$\varphi(x) = \cos x, \cos x + \frac{32}{\pi^2}.$$

### Exemple 2.3.2

On considère l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x x \varphi^3(t) dt. \quad (2.21)$$

Pour le choix de  $\varphi_0(x)$ , soit

$$\varphi_0(x) = 1. \quad (2.22)$$

En utilisant la formule itérative des approximations successives

$$\varphi_{n+1}(x) = e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x x\varphi_n^3(t)dt, \quad n \geq 0. \quad (2.23)$$

en substituant (2.22) dans (2.23) on obtient les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_{0(x)} &= 1. \\ \varphi_1(x) &= e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x x\varphi_0^3(t)dt. \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{35}{24}x^4 - \frac{67}{60}x^5 + \dots \\ \varphi_2(x) &= e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x x\varphi_1^3(t)dt. \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{67}{60}x^5 + \dots \\ \varphi_3(x) &= e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x x\varphi_2^3(t)dt. \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Par conséquent, la solution  $\varphi(x)$  de (2.21) est donnée par

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = e^x.$$

## 2.4 La méthode de développement en série

La méthode de développement en série sera appliquée d'une façon semblable pour résoudre les équations intégrales non linéaires de Fredholm.

Rappelons que la formule de Taylor à  $x = 0$  peut être écrite comme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2.24)$$

Nous supposons que la solution  $\varphi(x)$  de l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)F(\varphi(t))dt. \quad (2.25)$$

est analytique, et possède une écriture sous la forme d'une série de Taylor donnée par (2.24), où les coefficients  $a_n$  seront déterminés d'une façon récurrente. La substitution de (2.24) dans les deux côtés de (2.25) donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \int_a^b K(x, t) \left( F \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \right) dt. \quad (2.26)$$

et d'une manière plus simple, on écrit

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = T(f(x)) + \int_a^b K(x,t) (F(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)) dt. \quad (2.27)$$

Où  $T(f(x))$  est la série de Taylor de  $f(x)$ . L'équation intégrale (2.25) sera convertie en intégrale simple dans (2.26) ou (2.27) au lieu d'intégrer le terme non linéaire  $F(\varphi(x))$ , les termes de la forme  $t^n$ ,  $n \geq 0$  seront intégrés.

Notez que puisque nous cherchons la solution en série, donc si  $f(x)$  inclut des fonctions élémentaires comme les fonctions trigonométriques ou des fonctions exponentielles,... etc, il est obligé de développer  $f(x)$  en une série de Taylor à  $x = 0$ .

Nous intégrons d'abord le côté droit de l'intégrale de (2.26) ou (2.27), et mettre en facteur les coefficients de puissances similaires de  $x$ .

Nous égalisons après les coefficients de puissances similaires de  $x$  dans les deux côtés de l'équation, on obtient une relation de récurrence dans  $a_j, j \geq 0$ .

La solution de la relation de récurrence mènera à une détermination complète des coefficients  $a_j, j \geq 0$ .

Après avoir déterminé les coefficients  $a_j, j \geq 0$ , la solution en série suit immédiatement en substituant les coefficients dérivés dans (2.24).

La solution exacte peut être obtenue si une solution exacte existe. Si une solution exacte n'est pas accessible, alors la série obtenue peut être employée pour des buts numériques. Dans ce cas, plus que nous déterminons les termes, le niveau de grande précision nous réalisons.

#### **Exemple 2.4.1**

*On a l'équation intégrale non linéaire de Fredholm*

$$\varphi(x) = 1 + \frac{7159}{7560}x + \frac{2309}{2160}x^2 + \frac{1}{36} \int_0^1 (xt^2 - x^2t)\varphi^2(t)dt. \quad (2.28)$$

*En substituant la forme (2.24) dans les deux côtés de (2.28) on obtient :*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = 1 + \frac{7159}{7560}x + \frac{2309}{2160}x^2 + \frac{1}{36} \int_0^1 (xt^2 - x^2t)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^2 dt.$$

*On intègre l'intégrale du côté droit, et rassemblons les coefficients de puissances similaires de  $x$  nous obtenons*

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, 1. & a_1 &= 1, 3611.190273. \\ a_2 &= 1, -4848.332424 & a_n &= 0, \text{ pour } n \geq 3. \end{aligned}$$

*les solutions exactes sont données par*

$$\varphi(x) = 1 + x + x^2 \text{ ou } \varphi(x) = 1 + 3611.190273x - 4848.332424x^2.$$

#### **Exemple 2.4.2**

*soit à résoudre l'équation intégrale non linéaire de Volterra à l'aide de la méthode de développement en série*

$$\varphi(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (x-t)\varphi^2(t)dt. \quad (2.29)$$

En substituant la forme (2.24) dans les deux côtés de (2.29) on obtient :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 \\ + \int_0^x (x-t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots)^2 dt.$$

On intègre l'intégrale du côté droit, et rassemblons les coefficients de puissances similaires de  $x$  nous obtenons

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \\ = 1 + x + \frac{1}{2}(a_0^2 - 1)x^2 + \frac{1}{3}(a_0a_1 - 1)x^3 + \frac{1}{12}(a_1^2 + 2a_0a_2 - 1)x^4 + \dots$$

Par comparaison des puissances similaires de  $x$  deux à deux

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 0, \quad \text{pour } n \geq 2.$$

la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = 1 + x.$$

## 2.5 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition Adomian (ADM) a été introduite et développée par George Adomian. Un nombre considérable de travaux et de recherches ont été investis récemment dans l'application de cette méthode pour une large classe d'équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles et équations intégrales linéaires et non linéaires .

Le procédé de décomposition Adomian consiste à décomposer la fonction inconnue  $\varphi(x)$  selon une équation quelconque en une somme d'un nombre infini de composants définis par la série de décomposition

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x). \quad (2.30)$$

ou de façon équivalente

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots$$

où les composants  $\varphi_n(x)$ ,  $n \geq 0$  sont déterminées de manière récursive. La méthode de décomposition consiste à trouver les composants  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ . Comme on le verra dans la suite, la détermination de ces composants peut être réalisé de manière simple grâce à une relation de récurrence qui implique généralement des intégrales simples qui peuvent être facilement évalués. Pour établir la relation de récurrence, nous substituons (2.30) dans l'équation intégrale non linéaire.

Bien que le terme linéaire  $\varphi(x)$  est représentée par une somme infinie de composants, les termes non linéaires tels que  $\varphi^2(x), \varphi^3(x), \exp \varphi(x), \sin \varphi(x) \dots$  etc. qui apparaissent dans l'équation, doit être exprimé par une représentation spéciale, appelée les polynômes Adomians  $A_n$ ,  $n \geq 0$ . Adomian a introduit un algorithme formel pour établir une représentation fiable de toutes les formes de termes non linéaires.



D'autres techniques pour évaluer les polynômes Adomian ont été développés, mais la technique Adomian reste celle couramment utilisée. Dans ce texte, nous utiliserons l'algorithme Adomian pour évaluer des polynômes Adomians. La représentation des termes non linéaires par des polynômes Adomians est nécessaire pour résoudre les équations intégrées non linéaires d'une manière fiable.

Dans ce qui suit, l'algorithme Adomian calcule les polynômes Adomian pour représenter les termes non linéaires qui seront introduits en détails. L'algorithme sera expliqué par des exemples illustratifs qui couvrent une grande variété de formes non linéaires.

### 2.5.1 Calcul des polynômes Adomian

La méthode de décomposition Adomian suppose que la fonction linéaire inconnue  $\varphi(x)$  peut être représentée par la série infinie suivante de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x).$$

où les composantes  $\varphi_n(x)$ ,  $n \geq 0$  seront calculées de manière récursive. Cependant, le terme non linéaire  $F(\varphi(x))$ , tel que  $\varphi^2(x)$ ,  $\varphi^3(x)$ ,  $\exp \varphi(x)$ ,  $\sin \varphi(x)$ ... etc. peut être exprimée par une série infinie dite polynôme Adomian  $A_n$  donnée par :

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[ F \left( \sum_{i=0}^n \lambda^i \varphi_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

où les polynômes Adomians  $A_n$  peuvent être évalués pour toutes les fonctions non linéaires. La formule générale (2.31) peut être facilement utilisé comme suit : En supposant que la fonction  $F(\varphi(x))$  est non linéaire, donc en utilisant (2.31), les polynômes Adomians sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_0 &= F(\varphi_0). \\ A_1 &= \varphi_1 F'(\varphi_0). \\ A_2 &= \varphi_2 F'(\varphi_0) + \frac{1}{2!} \varphi_1^2 F''(\varphi_0). \\ A_3 &= \varphi_3 F'(\varphi_0) + \varphi_1 \varphi_2 F''(\varphi_0) + \frac{1}{3!} \varphi_1^3 F'''(\varphi_0). \\ A_4 &= \varphi_4 F'(\varphi_0) + \left( \frac{1}{2!} \varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_3 \right) F''(\varphi_0) + \frac{1}{2!} \varphi_1^2 \varphi_2 F'''(\varphi_0) + \frac{1}{4!} \varphi_1^4 F^{(4)}(\varphi_0). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Deux observations importantes peuvent être faites ici. Tout d'abord,  $A_0$  dépend que de  $\varphi_0$  et ,  $A_1$  ne dépend que de  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$ ,  $A_2$  ne dépend que de  $\varphi_0$   $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  et ainsi de suite. Deuxièmement, en substituant (2.32) dans (2.31) on obtient :

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots \\ &= F(\varphi_0) + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots) F'(\varphi_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (\varphi_1^2 + 2\varphi_1 \varphi_2 + 2\varphi_1 \varphi_3 + \varphi_2^2 + \dots) F''(\varphi_0) \\ &\quad + \frac{1}{3!} (\varphi_1^3 + 3\varphi_1^2 \varphi_2 + 3\varphi_1^2 \varphi_3 + 6\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 + \dots) F'''(\varphi_0) + \dots \\ &= F(\varphi_0) + (\varphi - \varphi_0) F'(\varphi_0) + \frac{1}{2!} (\varphi - \varphi_0)^2 F''(\varphi_0) + \dots \end{aligned}$$

Le dernier développement confirme un fait que les séries  $A_n$  sont des séries de Taylor d'une variable fonction  $\varphi_0$  et n'est pas au voisinage d'un point comme dans la série de Taylor standard. Les polynômes Adomians indiquées cidessus dans (2.32) montrent clairement que la somme des indices des composantes de  $\varphi(x)$  de chaque terme de  $A_n$  est égal à  $n$ . Dans ce qui suit, nous allons calculer des polynômes Adomian pour plusieurs termes non linéaires qui peuvent apparaître dans les équations intégrales non linéaires.

**1<sup>ier</sup> cas** : Les quatres premiers polynômes Adomians pour  $F(\varphi) = \varphi^2$  sont donnés par

$$\begin{aligned} A_0 &= F(\varphi_0) = \varphi_0^2. \\ A_1 &= \varphi_1 F'(\varphi_0) = 2\varphi_0\varphi_1. \\ A_2 &= \varphi_2 F'(\varphi_0) + \frac{1}{2!}\varphi_1^2 F''(\varphi_0) = \varphi_0\varphi_2 + \varphi_1^2. \\ A_3 &= \varphi_3 F'(\varphi_0) + \varphi_1\varphi_2 F''(\varphi_0) + \frac{1}{3!}\varphi_1^3 F'''(\varphi_0) = 2\varphi_0\varphi_3 + 2\varphi_1\varphi_2. \end{aligned}$$

**2<sup>ème</sup> cas** : Les quatres premiers polynômes Adomians pour  $F(\varphi) = \varphi^3$  sont donnés par

$$\begin{aligned} A_0 &= F(\varphi_0) = \varphi_0^3. \\ A_1 &= \varphi_1 F'(\varphi_0) = 3\varphi_0^2\varphi_1. \\ A_2 &= \varphi_2 F'(\varphi_0) + \frac{1}{2!}\varphi_1^2 F''(\varphi_0) = 3\varphi_0^2\varphi_2 + 3\varphi_0\varphi_1^2. \\ A_3 &= \varphi_3 F'(\varphi_0) + \varphi_1\varphi_2 F''(\varphi_0) + \frac{1}{3!}\varphi_1^3 F'''(\varphi_0) = 3\varphi_0^2\varphi_3 + 6\varphi_0\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^3. \end{aligned}$$

**3<sup>ème</sup> cas** : Les quatres premiers polynômes Adomians pour  $F(\varphi) = \varphi^4$  sont donnés par

$$\begin{aligned} A_0 &= F(\varphi_0) = \varphi_0^4. \\ A_1 &= \varphi_1 F'(\varphi_0) = 4\varphi_0^3\varphi_1. \\ A_2 &= \varphi_2 F'(\varphi_0) + \frac{1}{2!}\varphi_1^2 F''(\varphi_0) = 4\varphi_0^3\varphi_2 + 6\varphi_0^2\varphi_1^2. \\ A_3 &= \varphi_3 F'(\varphi_0) + \varphi_1\varphi_2 F''(\varphi_0) + \frac{1}{3!}\varphi_1^3 F'''(\varphi_0) = 4\varphi_1^3\varphi_0 + 4\varphi_1^3\varphi_0 + 12\varphi_0^2\varphi_1\varphi_2. \end{aligned}$$

**4<sup>ème</sup> cas** : Les quatres premiers polynômes Adomians pour  $F(\varphi) = \sin \varphi$  sont donnés par

$$\begin{aligned} A_0 &= F(\varphi_0) = \sin \varphi_0. \\ A_1 &= \varphi_1 F'(\varphi_0) = \varphi_1 \cos \varphi_0. \\ A_2 &= \varphi_2 F'(\varphi_0) + \frac{1}{2!}\varphi_1^2 F''(\varphi_0) = \varphi_2 \cos \varphi - \frac{1}{2!}\varphi_1^2 \sin \varphi_0. \\ A_3 &= \varphi_3 F'(\varphi_0) + \varphi_1\varphi_2 F''(\varphi_0) + \frac{1}{3!}\varphi_1^3 F'''(\varphi_0) = \varphi_3 \cos \varphi_0 - \varphi_1\varphi_2 \sin \varphi_0 - \frac{1}{3!}\varphi_1^3 \cos \varphi_0. \end{aligned}$$

**5<sup>ème</sup> cas** : Les quatres premiers polynômes Adomians pour  $F(\varphi) = \cos \varphi$  sont donnés par

$$\begin{aligned}
A_0 &= F(\varphi_0) = \cos \varphi_0. \\
A_1 &= \varphi_1 F'(\varphi_0) = -\varphi_1 \sin \varphi_0. \\
A_2 &= \varphi_2 F'(\varphi_0) + \frac{1}{2!} \varphi_1^2 F''(\varphi_0) = -\varphi_2 \sin \varphi_0 - \frac{1}{2!} \varphi_1^2 \cos \varphi_0. \\
A_3 &= \varphi_3 F'(\varphi_0) + \varphi_1 \varphi_2 F''(\varphi_0) + \frac{1}{3!} \varphi_1^3 F'''(\varphi_0) = -\varphi_3 \sin \varphi_0 - \varphi_1 \varphi_2 \cos \varphi_0 + \frac{1}{3!} \varphi_1^3 \sin \varphi_0.
\end{aligned}$$

**6<sup>ème</sup> cas** : Les quatres premiers polynômes Adomians pour  $F(\varphi) = \exp \varphi$  sont donnés par

$$\begin{aligned}
A_0 &= F(\varphi_0) = \exp \varphi_0. \\
A_1 &= \varphi_1 F'(\varphi_0) = \varphi_1 \exp \varphi_0. \\
A_2 &= \varphi_2 F'(\varphi_0) + \frac{1}{2!} \varphi_1^2 F''(\varphi_0) = (\varphi_2 + \frac{1}{2!} \varphi_1^2) \exp \varphi_0. \\
A_3 &= \varphi_3 F'(\varphi_0) + \varphi_1 \varphi_2 F''(\varphi_0) + \frac{1}{3!} \varphi_1^3 F'''(\varphi_0) = (\varphi_3 + \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{3!} \varphi_1^3) \exp \varphi_0.
\end{aligned}$$

## 2.5.2 L'application de la méthode de décomposition Adomian

Dans ce qui suit, nous allons décrire l'utilisation de la méthode de décomposition Adomian pour résoudre l'équation intégrale non linéaires de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (2.33)$$

où  $F(\varphi(t))$  est non linéaire en fonction de  $\varphi(t)$ . L'équation intégrale non linéaire de Fredholm (2.33) contient le terme linéaire  $\varphi(x)$  et la fonction non linéaire  $F(\varphi(t))$ . Le terme linéaire  $\varphi(x)$  de (2.33) peut être représenté normalement par la série de décomposition

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

où les composantes de  $\varphi_n(x)$ ,  $n \geq 0$  peuvent être facilement calculées de manière récursive comme décrit ce-dessus. Cependant, la fonction non linéaire  $F(\varphi(t))$  de (2.33) doit être représentée par des polynômes Adomians  $A_n$  en utilisant l'algorithme

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[ F \left( \sum_{i=0}^n \lambda^i \varphi_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

### Exemple 2.5.1

Utilisons la méthode de décomposition Adomian pour résoudre l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = a + \lambda \int_0^1 \varphi^2(t) dt, \quad a > 0. \quad (2.34)$$

Les polynômes Adomian pour le terme non linéaire  $\varphi^2(x)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \varphi_0^2(x). \\ A_1(x) &= 2\varphi_0(x)\varphi_1(x). \\ A_2(x) &= 2\varphi_0(x)\varphi_2(x) + \varphi_1^2(x). \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.35}$$

En substituant la série  $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$  et les polynômes d'Adomian (2.35) dans le côté gauche et le côté droit de (2.34) on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = a + \lambda \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) dt.$$

En utilisant la méthode de décomposition Adomian nous aurons

$$\varphi_0(x) = a, \quad \varphi_{k+1}(x) = \lambda \int_0^1 A_k(t) dt, \quad k \geq 0.$$

Ceci donne consécutivement

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= a. \\ \varphi_1(x) &= \lambda \int_0^1 \varphi_0^2(t) dt = \lambda a^2. \\ \varphi_2(x) &= \lambda \int_0^1 (2\varphi_0(t)\varphi_1(t)) dt = 2\lambda^2 a^3. \\ \varphi_3(x) &= \lambda \int_0^1 (2\varphi_0(t)\varphi_2(t) + \varphi_1^2(t)) dt = 5\lambda^2 a^3. \\ \varphi_4(x) &= \lambda \int_0^1 (2\varphi_0(t)\varphi_3(t) + 2\varphi_1(t)\varphi_2(t)) dt = 14\lambda^4 a^5. \\ &\vdots \end{aligned}$$

La solution est donnée sous une forme série

$$\varphi(x) = a + \lambda a^2 + 2\lambda^2 a^3 + 5\lambda^2 a^3 + 14\lambda^4 a^5 + \dots$$

qui converge vers la solution exacte

$$\varphi(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a\lambda}}{2\lambda}, \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{4a}.$$

Il est clair qu'une seule solution a été obtenue en utilisant la méthode de décomposition Adomian. Cependant, en utilisant la méthode de noyaux dégénéré, nous avons obtenu deux solutions à ce problème.

### Exemple 2.5.2

On considère l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = x + \int_0^x \varphi^2(t) dt. \quad (2.36)$$

En substituant la série  $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$  et les polynômes Adomians

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[ F \left( \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sur le côté gauche et le côté droit de (2.36) respectivement donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = x + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) dt.$$

où  $A_n$  sont les polynômes Adomians pour  $\varphi^2(x)$ , comme indiqué ci-dessus. En utilisant la méthode de décomposition Adomienne on obtient

$$\varphi_0(x) = x, \quad \varphi_{k+1}(x) = \int_0^x A_k(t) dt. \quad k \geq 0.$$

Ceci donne consécutivement

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= x. \\ \varphi_1(x) &= \int_0^x \varphi_0^2(t) dt = \frac{1}{3} x^3. \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x (2\varphi_0(t)\varphi_1(t)) dt = \frac{2}{15} x^5. \\ \varphi_3(x) &= \int_0^x (2\varphi_0(t)\varphi_2(t) + \varphi_1^2(t)) dt = \frac{17}{315} x^7. \end{aligned}$$

et ainsi de suite. La solution est donnée sous une forme de série

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \dots$$

qui converge vers la solution exacte

$$\varphi(x) = \tan x.$$

## 2.6 Conversion en une équation de Volterra de la seconde espèce

La forme standard de l'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce est donnée par

$$f(x) = \int_0^x K(x, t)F(\varphi(t))dt. \quad (2.37)$$

où le noyau  $k(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions à valeurs réelles donnés, et  $F(\varphi(x))$  est une fonction non linéaire. Rappelons que la fonction inconnue  $\varphi(x)$  n'apparaît que sous le signe d'intégral.

Pour déterminer une solution de (2.37), nous allons d'abord convertir cette équation en une équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce de la forme :

$$f(x) = \int_0^x K(x, t)\psi(t)dt. \quad (2.38)$$

à l'aide de la transformation

$$\psi(x) = F(\varphi(x)). \quad (2.39)$$

Cela signifie que

$$\varphi(x) = F^{-1}(\psi(x)).$$

Il est également important de noter que l'équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce peut être convertie à une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

La technique de conversion est efficace si seulement si  $K(x, x) \neq 0$ . à l'aide de la dérivation par rapport à la variable  $x$ , et en utilisant la règle de Leibnitz, on obtient

$$f'(x) = k(x, x)\psi(x) + \int_0^x K_x(x, t)\psi(t)dt. \quad (2.40)$$

La résolution de  $\psi(x)$ , à condition que  $K(x, x) \neq 0$ , on obtient l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce donnée par :

$$\psi(x) = \frac{f'(x)}{k(x, x)} - \int_0^x \frac{1}{K(x, x)}K_x(x, t)\psi(t)dt. \quad (2.41)$$

### Exemple 2.6.1

On va convertir l'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce au équation intégrale linéaire de seconde espèce

$$\frac{1}{3}(e^x - e^{-2x}) = \int_0^x e^{x-t}\varphi^2(t)dt. \quad (2.42)$$

Nous avons d'abord mis

$$\psi(x) = \varphi^2(x), \text{ alors } \varphi(x) = \pm\sqrt{\psi(x)}. \quad (2.43)$$

pour mener (2.42) en

$$\frac{1}{3}(e^x - e^{-2x}) = \int_0^x e^{x-t}\psi(t)dt. \quad (2.44)$$

En dérivant les deux côtés de (2.44) par rapport à  $x$  et en utilisant la règle de Leibniz, nous obtenons

$$\psi(x) = \frac{1}{3}(e^x + 2e^{-2x}) - \int_0^x e^{x-t}\psi(t)dt. \quad (2.45)$$

# Chapitre 3

## Résolution numériques des équations intégrales non linéaire

Dans ce chapitre ,nous allons introduire quelques méthodes numériques de résolution des équations intégrales non linéaires, en utilisant les formules de quadratures (*Newton-Cotes*) et la méthode des approximations successives.

Ensuite, nous allons présenter la méthode d'interpolation de Lagrange.

### 3.1 La méthode mixte

Cette méthode combine entre les formules quadrature et la méthode des approximations successives, elle donne des bonnes résultats dans les cas linéaires et non linéaires pour les équations intégrales de Fredholm et Volterra.

#### 3.1.1 En utilisant la formule de Simpson

##### Principe de la méthode

Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (3.1)$$

Après la vérification de l'existence et l'unicités de solution on utilise la méthode des approximations successives on obtient :

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi_n(t)) dt. \\ \varphi_0(x) = f(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

La solution en générale si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ .

En utilisant la formule de Simpson on obtient

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m w_i K(x, t_i, \varphi(t_i)). \quad (3.3)$$



En substituant(3.3) dans (3.2) on obtient

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m w_i K(x, t_i, \varphi_n(t_i)). \\ \varphi_0(x) = f(x). \end{cases} \quad (3.4)$$

Tel que  $h = \frac{(b-a)}{(m-1)}$ ,  $t_i = a + h(i - 1)$ , et  $w_i = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } i = 1, m \\ \frac{2}{3} & \text{si } i \text{ pair} \\ \frac{1}{3} & \text{sinon} \end{cases}$

Pour chaque  $x_j \in [a, b]$ ,  $j = 1, \dots, m$ . on obtient la solution sous forme d'un vecteur de dimension  $m$

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x_j) = f(x_j) + \sum_{i=1}^m w_i K(x_j, t_i, \varphi_n(t_i)). \\ \varphi_0(x_j) = f(x_j). \end{cases} \quad (3.5)$$

On pose  $K(x_j, t_i, \varphi_n(t_i)) = K_{j,i,n}$ ,  $\varphi_n(x_j) = \varphi_{n,j}$  et  $f(x_j) = f_j$  on aura :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1,1} \\ \varphi_{n+1,2} \\ \vdots \\ \varphi_{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{1,1,n} & K_{1,2,n} & \cdots & K_{1,m,n} \\ K_{2,1,n} & K_{2,2,n} & \cdots & K_{2,m,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m,1,n} & K_{m,2,n} & \cdots & K_{m,m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

### Remarque 3.1.1

Pour les équations intégrales de Volterra :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1,1} \\ \varphi_{n+1,2} \\ \vdots \\ \varphi_{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{1,1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ K_{2,1,n} & K_{2,2,n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m,1,n} & K_{m,2,n} & \cdots & K_{m,m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

### Exemple 3.1.1

Soit l'équation intégrale :

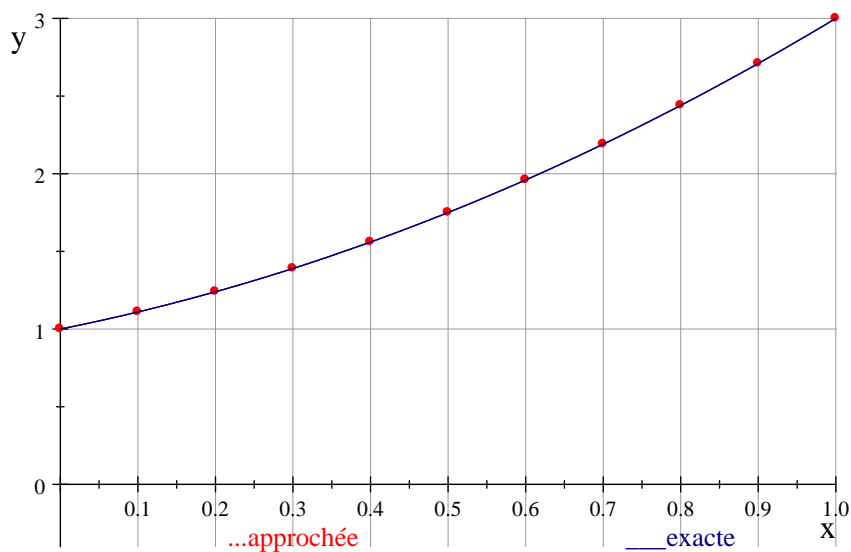
$$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^1 \frac{x^2}{(t^2 + t + 1)^2} \varphi^2(t) dt$$

avec la solution exacte est donnée par :

$$\varphi(x) = x^2 + x + 1.$$

$x$	<i>Exacte</i>	<i>Approchée</i>	<i>Erreur</i>
<b>0.0</b>	1.0	1.0	0.0e0
<b>0.1</b>	1.11	1.11	0.0e0
<b>0.2</b>	1.24	1.24	0.0e0
<b>0.3</b>	1.39	1.39	2.2204e-16
<b>0.4</b>	1.56	1.56	2.2204e-16
<b>0.5</b>	1.75	1.75	0.0e0
<b>0.6</b>	1.96	1.96	2.2204e-16
<b>0.7</b>	2.19	2.19	0.0e0
<b>0.8</b>	2.44	2.44	0.0e0
<b>0.9</b>	2.71	2.71	0.0e0
<b>1.0</b>	3.0	3.0	0.0e0

**Tab 3.1** : *Exemple 3.1.1.*



**Fig.3.1** : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte.

**Exemple 3.1.2**

Soit l'équation intégrale :

$$\varphi(x) = -x \cos(x) + \sqrt{x+1} + \int_0^x \frac{\cos(x)}{(t+1)} \varphi^2(t) dt.$$

avec la solution exacte est donnée par :

$$\varphi(x) = \sqrt{x+1}.$$

$x$	<i>Exacte</i>	<i>Approchée</i>	<i>Erreur</i>
<b>0.0</b>	1.0	1.0	0.0e0
<b>0.1</b>	1.0488088	1.0488088	0.0e0
<b>0.2</b>	1.0954451	1.0954451	0.0e0
<b>0.3</b>	1.1401754	1.1401754	0.0e0
<b>0.4</b>	1.1832159	1.1832159	0.0e0
<b>0.5</b>	1.2247448	1.2247448	0.0e0
<b>0.6</b>	1.2649110	1.2649110	0.0e0
<b>0.7</b>	1.3038404	1.3038404	4.4408e-16
<b>0.8</b>	1.3416407	1.3416407	1.1102e-15
<b>0.9</b>	1.3784048	1.3784048	2.6645e-15
<b>1.0</b>	1.4142135	1.4142135	4.88498e-15

Tab 3.2 : Exemple 3.1.2.

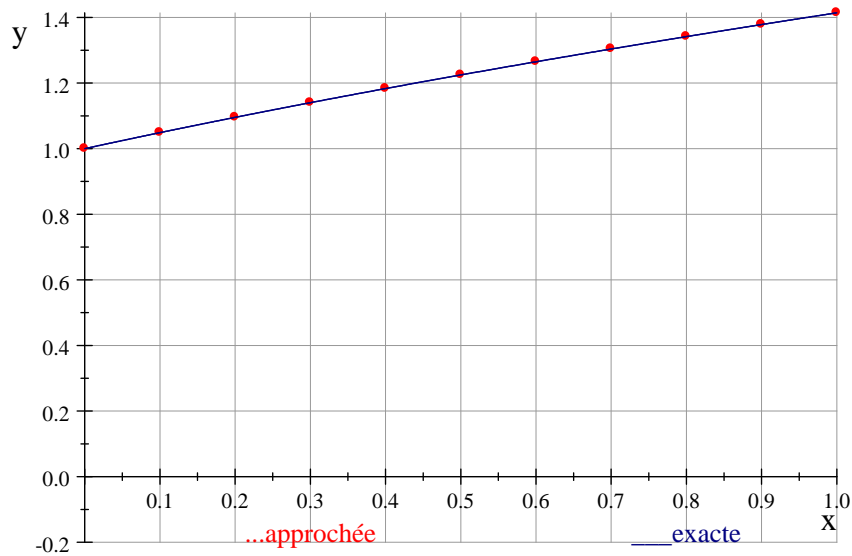


Fig.3.2 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte.

### 3.1.2 En utilisant la formule de trapèze

#### Principe de la méthode

Dans cette méthode, on va résoudre les équations non linéaires numériquement, c'est-à-dire trouver une solution approchée à la solution exacte de cette équation.

Pour le faire, on a toujours besoin de discrétiser l'intervalle  $[a, b]$  en sous intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, m - 1$  équidistants, i.e :

$$x_j = a + (j - 1)h, \quad j = 1, \dots, m \text{ et } h = \frac{(b - a)}{(m - 1)}.$$

Rappelons que l'équation non linéaire de Fredholm s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

Maintenant, on applique la méthode des approximations successives sur cette équation :

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi_n(t)) dt. \text{ tel que } n = 0, \dots, N.$$

Notons qu'on va calculer la solution approchée en tous les nœuds  $x_j, j = 1, \dots, m$ , donc on écrit l'équation comme suit :

$$\varphi_{n+1}(x_j) = f(x_j) + \int_a^b K(x_j, t, \varphi_n(t)) dt. \text{ tel que } n = 0, \dots, N.$$

Approchons numériquement l'intégrale en utilisant la méthode du trapèze

$$\varphi_{n+1}(x_j) = f(x_j) + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} K(x_j, t, \varphi_n(t)) dt. \text{ tel que } n = 0, \dots, N.$$

$$\varphi_{n+1}(x_j) = f(x_j) + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{m-1} K(x_j, t_{i+1}, \varphi_n(t_{i+1})) + K(x_j, t_i, \varphi_n(t_i)).$$

On simplifie la formule, on obtient :

$$\varphi_{n+1,j} = f_j + \frac{h}{2} K_{j,1,n} + \frac{h}{2} K_{j,m,n} + h \sum_{i=2}^{m-1} K_{j,i,n}.$$

Notons que  $\varphi_{n,j} = \varphi_n(x_j)$ ,  $f_j = f(x_j)$  et  $K_{j,i,n} = K(x_j, t_i, \varphi_n(t_i))$ .

Il est clair qu'on peut calculer la solution à partir de cet algorithme, mais à condition qu'on donne une valeur initiale, on prend

$$\varphi_0(x_j) = f(x_j).$$

### **Remarque 3.1.2**

*On peut utiliser cette méthode pour résoudre les équations intégrales de Volterra*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

on obtient :

$$\varphi_{n+1,j} = f_j + \frac{h}{2} K_{j,1,n} + \frac{h}{2} K_{j,j,n} + h \sum_{i=2}^{j-1} K_{j,i,n}.$$

### **Exemple 3.1.3**

Soit l'équation intégrale :

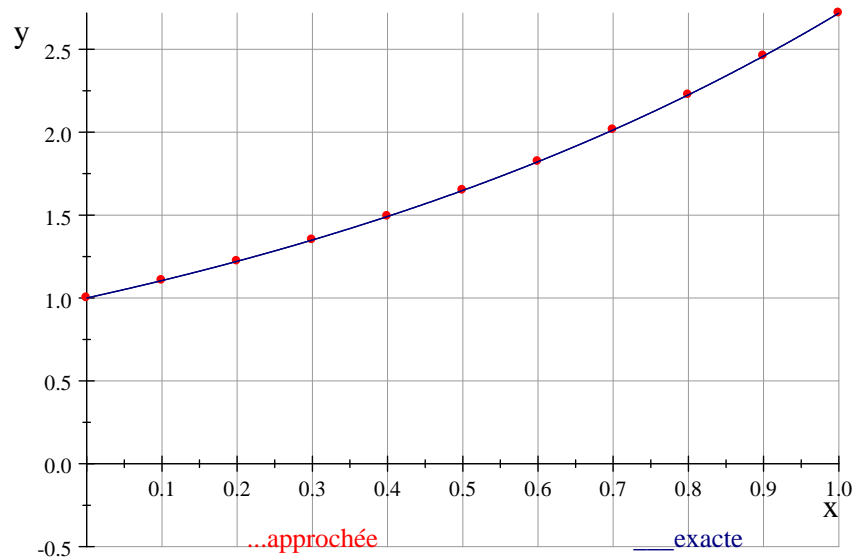
$$\varphi(x) = \exp(x) - \frac{x}{192} (\exp(2) + 1) + \frac{1}{48} \int_0^1 xt\varphi^2(t) dt.$$

avec la solution exacte est donnée par :

$$\varphi(x) = \exp(x).$$

$x$	<i>Exacte</i>	<i>Approchée</i>	<i>Erreur</i>
<b>0.0</b>	1.0	1.0	0.0e0
<b>0.1</b>	1.1051709	1.1051710	1.602e-7
<b>0.2</b>	1.2214027	1.2214030	3.214e-7
<b>0.3</b>	1.3498588	1.3498592	4.828e-7
<b>0.4</b>	1.4918246	1.4918253	6.437e-7
<b>0.5</b>	1.6487212	1.6487220	8.047e-7
<b>0.6</b>	1.8221188	1.8221197	9.656e-7
<b>0.7</b>	2.0137527	2.0137538	1.126e-6
<b>0.8</b>	2.2255409	2.2255422	1.287e-6
<b>0.9</b>	2.4596031	2.4596045	1.448e-6
<b>1.0</b>	2.7182818	2.7182834	1.609e-6

**Tab 3.3** : Exemple 3.1.3.



**Fig.3.3** : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte.

**Exemple 3.1.4**

Soit l'équation intégrale :

$$\varphi(x) = x^2 - \frac{x^6}{6} \exp(-x) + \int_0^x t \exp(-x) \varphi^2(t) dt.$$

avec la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = x^2.$$

$x$	<i>Exacte</i>	<i>Approchée</i>	<i>Erreur</i>
<b>0.0</b>	0.0	0.0	0.0e0
<b>0.1</b>	0.01	0.0100003	3.016e-7
<b>0.2</b>	0.04	0.0400051	5.188e-6
<b>0.3</b>	0.09	0.0900245	2.450e-5
<b>0.4</b>	0.16	0.1600710	7.100e-5
<b>0.5</b>	0.25	0.2501585	1.585e-4
<b>0.6</b>	0.36	0.3603010	3.010e-4
<b>0.7</b>	0.49	0.4905124	5.124e-4
<b>0.8</b>	0.64	0.6408067	8.069e-4
<b>0.9</b>	0.81	0.8111998	1.199e-3
<b>1.0</b>	1.0	1.0017069	1.706e-3

Tab 3.4 : Exemple 3.1.4.

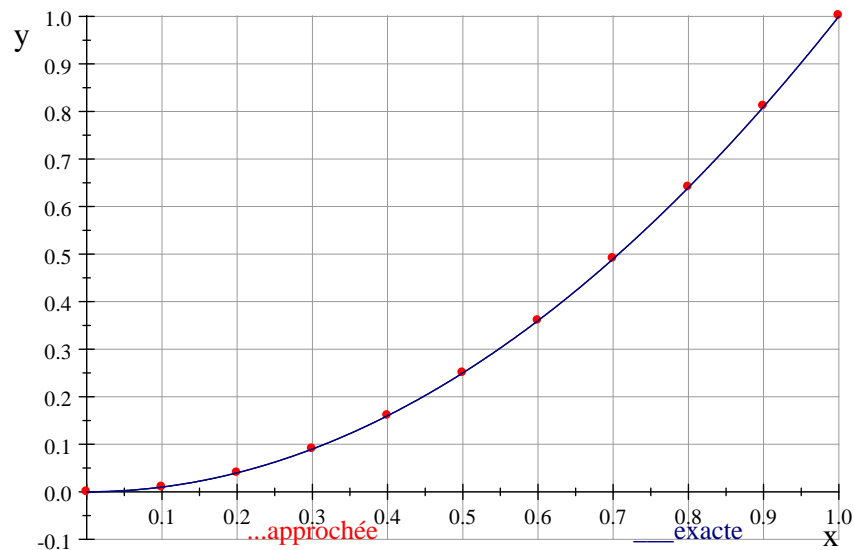


Fig.3.4 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte.

## 3.2 Méthode d'interpolation de Lagrange

Dans cette méthode, on rapproche le noyau  $K(x, t, \varphi(t))$  de trois variable  $x, t$ , et  $\varphi(t)$  à un polynôme  $P_s(x, t)$  à deux variables  $x, t$  en utilisant l'interpolation de Lagrange par rapport à la variable  $t$  tel que  $s$  est le degré du polynôme.

### Principe de la méthode

Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (3.8)$$

Utilisant la méthodes d'approximation successives on obtient

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi_n(t)) dt, n = 0, \dots, N. \\ \varphi_0(x) = f(x). \end{cases} \quad (3.9)$$

On interpole  $K(x, t, \varphi(t))$  sur l'intervalle  $[a, b]$  on aura

$$P_{s-1}(x, t) = \sum_{i=1}^s L_i(t) K(x, t_i, \varphi(t_i)). \quad (3.10)$$

Tel que  $t_i = a + h(i - 1)$ ,  $h = \frac{(b-a)}{(s-1)}$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

On remplace (3.10) dans (3.9) on obtient

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^b \sum_{i=1}^s L_i(t) K(x, t_i, \varphi_n(t_i)) dt, n = 0, \dots, N. \\ \varphi_0(x) = f(x). \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^b P_{s-1,n}(x, t) dt, n = 0, \dots, N. \\ \varphi_0(x) = f(x). \end{cases} \quad (3.12)$$

Tel que :

$$P_{s-1,n}(x, t) = \sum_{i=1}^s L_i(t) K(x, t_i, \varphi_n(t_i)), n = 0, \dots, N. \quad (3.13)$$

Pour chaque  $x_j \in [a, b]$ ,  $j = 1, \dots, m$ . on obtient la solution sous forme d'un vecteur de dimension  $m$  tel que  $x_j = a + h(j - 1)$ ,  $j = 1, \dots, m$  et  $h = \frac{(b-a)}{(m-1)}$ .

Et on aura le système suivant

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x_j) = f(x_j) + \int_a^b P_{s-1,n}(x_j, t) dt, n = 0, \dots, N. \\ \varphi_0(x_j) = f(x_j). \end{cases} \quad (3.14)$$

Et pour chaque itération on obtient un vecteur de dimension  $m$ , la solution est le vecteur itération  $k$ .

### **Remarque 3.2.1**

*On peut utiliser cette méthode pour résoudre les équations intégrales de Volterra*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (3.15)$$

on obtient :

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x_j) = f(x_j) + \int_a^{x_j} P_{s-1,n}(x_j, t) dt, n = 0, \dots, N. \\ \varphi_0(x_j) = f(x_j). \end{cases} \quad (3.16)$$

**Exemple 3.2.1**

Soit l'équation intégrale :

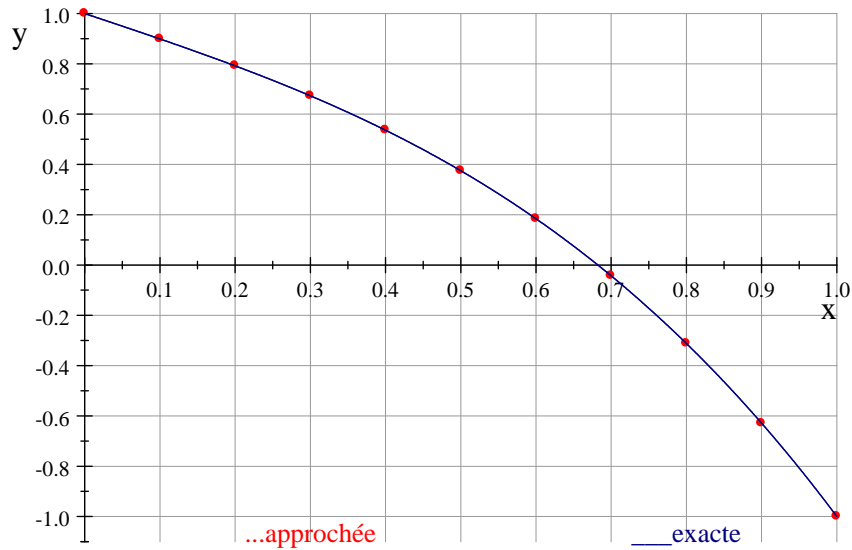
$$\varphi(x) = \frac{131}{210} - \frac{691}{630}x - \frac{17}{120}x^2 - x^3 + \int_0^1 (1 + x^2t + xt^2) \varphi^2(t) dt.$$

avec la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = 1 - x - x^3.$$

<i>x</i>	<i>Exact</i>	<i>Approchée</i>	<i>Erreur</i>
<b>0.0</b>	1.0	1.0000000	8.552e-9
<b>0.1</b>	0.899	0.8990000	7.277e-9
<b>0.2</b>	0.792	0.7920000	1.305e-8
<b>0.3</b>	0.673	0.6730000	1.179e-8
<b>0.4</b>	0.536	0.5360000	1.043e-8
<b>0.5</b>	0.375	0.3750000	1.094e-8
<b>0.6</b>	0.184	0.1840000	0.0e0
<b>0.7</b>	-0.043	-0.0429999	1.155e-8
<b>0.8</b>	-0.312	-0.3119999	1.960e-8
<b>0.9</b>	-0.629	-0.6289999	1.169e-8
<b>1.0</b>	-1.0	-1.0	0.0e0

**Tab 3.5** : Exemple 3.2.1.



**Fig.3.5** : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte.

**Exemple 3.2.2**

Soit l'équation intégrale :

$$\varphi(x) = \sqrt{x} + (x + 1) \exp(-2x) - \exp(-x) + \int_0^x \exp(-x - t) \varphi^2(t) dt$$



avec la solution exacte est donnée par :

$$\varphi(x) = \sqrt{x}.$$

$x$	<i>Exact</i>	<i>Approchée</i>	<i>Erreur</i>
<b>0.0</b>	0.0	0.0	0.0e0
<b>0.1</b>	0.3162277	0.3162277	9.781e-10
<b>0.2</b>	0.4472135	0.4472135	7.408e-10
<b>0.3</b>	0.5477225	0.5477225	1.592e-10
<b>0.4</b>	0.6324555	0.6324555	4.353e-10
<b>0.5</b>	0.7071067	0.7071067	1.043e-9
<b>0.6</b>	0.7745966	0.7745967	3.918e-10
<b>0.7</b>	0.8366600	0.8366600	1.495e-10
<b>0.8</b>	0.8944271	0.8944271	6.775e-10
<b>0.9</b>	0.94868329	0.9486832	6.190e-10
<b>1.0</b>	1.0	1.0000000	1.318e-9

Tab 3.6 : Exemple 3.2.2.

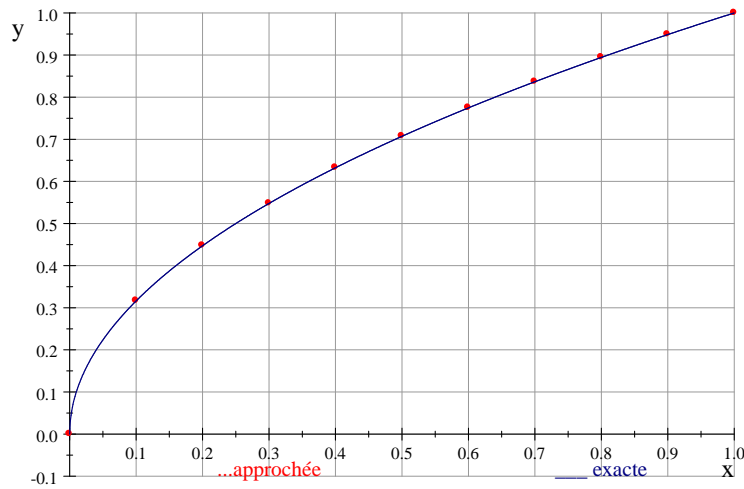


Fig.3.6 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte.

## Conclusion

Ce travail nous a permis l'étude d'un modèle mathématique typique qui surgit naturellement dans la modélisation de plusieurs problèmes de la science et de la technologie ou fréquemment par remaniement de certaines équations différentielles, ce qui donne d'avantage une alternative dans la représentation intégrale des solutions de ces problèmes différentiel.

D'abord, nous avons pu voir dans les premiers chapitres l'aspect théorique de ces équations dans un cadre fonctionnel, notamment la question d'existence et d'unicité en utilisant la théorie du point fixe de Banach.

D'autre part, d'un point de vue numérique, concernant l'approximation des solutions pour ce type d'équations, nous avons vu que plusieurs approches peuvent être utilisées avec des manières différentes et efficaces, comme par exemple, l'interpolation du noyau, l'approximation de l'intégrale à l'aide des formules de quadratures, l'approximation par des séries (méthodes de projections)... etc. Et après discrétisation, le problème est toujours ramené systématiquement à la résolution d'un système d'équations.

En particulier, notons aussi, que la méthode itérative présentée dans ce mémoire (appelée méthode mixte) peut être appliquée et adaptée facilement à la résolution d'équations intégrales singulières ou faiblement singulières, tout dépend de la structure non linéaire de l'intégrant. Et pour améliorer nos résultats, il convient d'utiliser des formules de quadratures d'ordre élevé, notamment les formules Gaussiennes.

# Chapitre 4

## Annexe

### 4.1 Interpolation de Lagrange

L'interpolation de Lagrange est une façon systématique de construire un polynôme de collocation. Etant donné  $(n + 1)$  points  $(x_i, f(x_i))$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , on suppose un instant que l'on sait construire  $(n + 1)$  polynôme  $L_i(x)$  de degré  $n$  et satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}L_i(x_i) &= 1 \quad \forall i = j \\L_i(x_j) &= 0 \quad \forall i \neq j\end{aligned}\tag{4.1}$$

Cela signifie que le polynôme  $L_i(x)$  de degré  $n$  prend la valeur 1 en  $x_i$  et s'annule à tous les autres points de collocation. Nous verrons comment construire les  $L_i(x)$  un peu plus loin. Dans ces conditions, la fonction  $L(x)$  définie par :

$$L(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x).$$

Est un polynôme de degré  $n$ , car chacun des  $L_i(x)$  est de degré  $n$ . De plus ce polynôme passe par les  $(n + 1)$  points de collocation et est donc le polynôme recherché. En effet, il est facile de montrer que selon les conditions 1

$$\begin{aligned}L(x_j) &= f(x_j)L_j(x_j) + \sum_{i=0, i \neq j}^n f(x_i)L_i(x_j). \\&= f(x_j) + 0 = f(x_j) \quad \forall j.\end{aligned}$$

Le polynôme  $L(x)$  passe donc par tous les points de collocation. Puisque ce polynôme est unique,  $L(x)$  est bien le polynôme recherché. Il reste à construire les fonctions  $L_i(x)$ .

#### 4.1.1 Polynôme de degré $n$

La fonction  $L_0(x)$  doit s'annuler en  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ . Il faut donc introduire la fonction

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n).$$

Qui vaut :

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\dots(x_0 - x_n).$$

En  $x = x_0$ . On a alors, après la division :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\dots(x_0 - x_n)}.$$

On remarque qu'il y a  $n$  facteur de la forme  $(x - x_i)$  dans cette expression et qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré  $n$ . Pour la fonction  $L_1(x)$ , on pose :

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_n)}.$$

On note l'absence du terme  $(x - x_1)$ . L'expression générale pour la fonction  $L_i(x)$  est donc :

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}. \quad (4.2)$$

Où cette fois seul le facteur  $(x - x_i)$  est absent.  $L_i(x)$  est donc un polynôme de degré  $n$  qui vaut 1 en  $x = x_i$  et qui s'annule à tous les autres points de collocation. On peut maintenant résumer la situation.

### **Théorème 10**

Etant donné  $(n + 1)$  points d'interpolation  $((x_i, f(x_i))$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), l'unique polynôme d'interpolation de degré  $n$  passant par tous ces points peut s'écrire :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x). \quad (4.3)$$

Où les  $(n + 1)$  fonctions  $L_i(x)$  sont définies par la relation 4.2. c'est la formule de Lagrange.

## **4.2 Formules de quadratures élémentaires**

### **Problème 4.2.1**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ . Nous voulons calculer l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$ . C'est un des calculs parmi les plus communs dans les applications des mathématiques. Le théorème fondamental du calcul intégral nous dit que  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  où  $F$  est une primitive de  $f$ .

Pour appliquer ce résultat, nous disposons de divers outils théoriques dont les plus fondamentaux sont le théorème de changement de variable et le théorème d'intégration par partie. Cependant, il n'est possible de déterminer explicitement une primitive  $F$  que pour une classe relativement restreinte de fonctions  $f$  et, lorsque cette détermination est à notre disposition, l'expression de  $F$  est souvent si compliquée que l'évaluation de  $F(b) - F(a)$  nécessite l'emploi d'un processus d'approximation.

Dans ce cas, il est tout aussi naturel et généralement moins coûteux de chercher directement une approximation de l'intégrale.

### 4.2.1 Présentation générale

L'idée consiste à utiliser une approximation  $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx$  où  $g$  est une fonction qui, d'une part, est proche de  $f$  et, d'autre part, possède des primitives aisément calculables. Le choix le plus naturel est celui du polynôme d'interpolation de Lagrange

$$g = L[x_0, \dots, x_d, f].$$

Où  $A = \{x_0, \dots, x_d\} \subset [a, b]$  car les polynômes d'interpolation sont proches de la fonction qu'ils interpolent et, étant des polynômes, il est raisonnable d'espérer que leurs primitives seront facilement calculables.

Nous appelons **formule de quadrature** (élémentaire) d'**ordre**  $d$ , toute expression

$$Q(f) = \int_a^b L[x_0, \dots, x_d; f](x)dx = \sum_{i=0}^d f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx. \quad (4.4)$$

où  $l_i$  est le polynôme fondamental de Lagrange correspondant au point  $a_i$ , voir. L'application  $Q$  ainsi définie est une forme linéaire sur  $\mathcal{L}[a, b]$ , autrement dit, elle vérifie

$$Q(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 Q(f_1) + \lambda_2 Q(f_2) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad f_1, f_2 \in C[a, b].$$

Pour savoir si  $Q(f)$  est effectivement proche de  $\int_a^b f(x)dx$ , nous devons étudier l'erreur

$$E^Q(f) = \left| \int_a^b f(x)dx - Q(f) \right|. \quad (4.5)$$

Remarquons que si  $Q$  est une formule de quadrature d'ordre  $d$  alors pour tout  $p \in P_d$  on a  $\int_a^b p(x)dx = Q(p)$ . En effet,

$$\begin{aligned} p \in P_d &\Rightarrow p = L[x_0, \dots, x_d; p] \\ \Rightarrow Q(p) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b L[x_0, \dots, x_d; p](x)dx = \int_a^b p(x)dx. \end{aligned}$$

Nous verrons que dans certains cas l'égalité ci-dessus peut continuer à être vérifiée pour des polynômes de degré plus grand que  $d$ .

Une réciproque est vraie.

#### **Théorème 11**

Si  $R(f)$  est une expression de la forme  $R(f) = \sum_{i=0}^d \lambda_i f(\alpha_i)$  telle que  $R(p) = \int_a^b p(x)dx$  pour tout

$p \in P_d$  alors  $\lambda_i = \int_a^b l_i(x)dx$  où  $l_i$  est le polynôme fondamental de Lagrange correspondant à  $x_i \in \{x_0, \dots, x_d\}$ .

**Preuve.** Il suffit d'utiliser la relation  $\sum_{i=0}^d \lambda_i p(\alpha_i) = \int_a^b p(x) dx$  avec  $p \in P_d$ . En effet, puisque  $l_j(\alpha_i) = 0$  sauf lorsque  $i = j$  pour lequel nous avons  $l_j(\alpha_i) = 1$ , on a  $\sum_{i=0}^d \lambda_i l_j(\alpha_i) = \lambda_j$ . ■

Remarquons que puisque  $R$  est une forme linéaire, pour s'assurer que

$$R(p) = \int_a^b p(x) dx, \quad \text{pour tout } p \in P_d$$

il suffit de vérifier l'identité lorsque  $p$  parcourt une base de  $P_d$ . En particulier, si  $M_i(x) = x^i$  il suffit de vérifier que  $R(M_i) = \int_a^b x^i dx$  pour  $i = 0; 1, \dots, d$ .

On cherche une approximation de  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  par une formule du type

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(t_1) + f(t_2)$$

de telle sorte que la formule soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe une et une seule paire  $\{t_1, t_2\}$  satisfaisant la propriété demandée et la déterminer.

Dans la pratique, grâce au procédé de composition, des résultats très précis sont souvent obtenus en employant seulement des méthodes d'ordre  $d \leq 2$ . Nous étudierons en détail trois de ces méthodes : la **méthode du point milieu** ( $d = 0$ ), la **méthode des trapèzes** ( $d = 1$ ) et la **méthode de Simpson** ( $d = 2$ ).

## 4.2.2 La formule du point milieu

Nous utilisons un polynôme d'interpolation de degré  $d = 0$  avec le point  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ . Dans ce cas,  $L[x_0; f(x)] = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  et l'approximation

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L[x_0; f(x)] dx \quad \text{devient} \quad \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (4.6)$$

L'expression  $Q(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  s'appelle la **formule du point milieu**. Lorsque  $f(c) > 0$ ,  $Q(f)$  est l'aire du rectangle de sommets les points de coordonnées  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ ,  $(a, f(c))$  et  $(b, f(c))$ .

## 4.2.3 La formule du trapèze

Soit  $f \in C([a; b])$ . Nous prenons  $d = 1$  et  $A = \{a, b\}$ . L'approximation

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L[a, b; f(x)] dx \quad \text{devient} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b))$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 L[a, b; f(x)]dx &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \\
 \int_a^b L[a, b; f(x)]dx &= \int_a^b f(a) + \left\{ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right\} dx \\
 &= f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \int_a^b (x - a) dx \\
 &= f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} [(x - a)^2]_a^b \\
 &= f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{(b - a)^2}{2} \\
 &= \frac{(b - a)}{2} [f(a) + f(b)]
 \end{aligned}$$

L'expression  $Q(f) = (b - a)(f(a) + f(b))$  s'appelle **la formule du trapèze**. Lorsque  $f(a)$  et  $f(b)$  sont positifs, elle n'est autre que l'aire du trapèze de sommets les points de coordonnées  $(a; 0)$ ,  $(b; 0)$ ,  $(a; f(a))$  et  $(b; f(b))$ .

#### 4.2.4 La formule composite de Simpson

La formule de Simpson peut être obtenue en remplaçant  $f$  sur  $[a, b]$  par son polynôme d'interpolation de degré 2 aux noeuds  $x_0 = a$ ,  $x_1 = (a + b)/2$  et  $x_2 = b$ . Les poids sont donnés par  $\alpha_0 = \alpha_2 = (b - a)/6$  et  $\alpha_1 = 4(b - a)/6$ , et la formule s'écrit

$$I_2(f) = \frac{(b - a)}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (4.7)$$

On peut montrer que, si  $f \in C^4([a, b])$ , l'erreur de quadrature es

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta), \quad h = \frac{b - a}{2}. \quad (4.8)$$

où  $\zeta$  est dans  $]a, b[$ . On en déduit que la formule (1) a un degré d'exactitude égal à 3.

En remplaçant  $f$  par son polynôme composite de degré 2 sur  $[a, b]$ , on obtient la **formule composite** correspondant à (4.7). On introduit les noeuds

de quadrature  $x_k = a + k\frac{H}{2}$ , pour  $k = 0, \dots, 2m$  et on pose  $H = \frac{(b-a)}{m}$ , avec  $m \geq 1$ . On a alors

$$I_{2,m} = \frac{H}{6} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{r=1}^{m-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{m-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2m}) \right] \quad (4.9)$$

où  $x_0 = a$  et  $x_{2m} = b$ . Si  $f \in C^4([a, b])$ , l'erreur de quadrature associée à (4.9) est

$$E_{2,m}(f) = -\frac{b - a}{180} (H/2)^4 f^{(4)}(\zeta)$$

où  $\zeta \in ]a, b[$ , le degré d'exactitude de la formule est 3.

# Bibliographie

- [1] **Khirani A.** Résolution des équations intégrales non linéaire type Volterra, Mémoire de magister université de M'sila 2011.
- [2] **Krasnov M, Kissélev A, Makarenko G.** Equations intégrales, problèmes et exercices, Editions Mir, Moscou, 1977
- [3] **M. Nadir.** Cours sur les équations intégrales, université de M'sila, 2008.
- [4] **M Guesba.** Thème Sur quelques équations intégrales non linéaires, université de M'sila, 2012.
- [5] **V. SMIRNOV.** COURS DE MATHEMATIQUES SUPERIEURES tome IV première partie EDITIONS MIR • MOSCOU.
- [6] **E. Montseny.** Introduction à l'Analyse Harmonique.
- [7] **Jean-Paul Chehab.** Résolution numérique d'une équation non linéaire (notes de cours) Université de Picardie Jules Vernes LAMFA CNRS 6140 version 2009.
- [8] **C. CORDUNEANU.** Integral equations and applications The University of Texas at Arlington.
- [9] **Abdul-Majid Wazwaz.** Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications, 2011.
- [10] **Gabriel Peyré.** Résolution numérique d'équations intégrales Exemple de la radiosité 2001.
- [11] **HAEY HOCHSTADT.** INTEGRAL EQUATIONS Department of Mathematics, Polyttechnic Institute of Brooklyn, New york 1973.
- [12] **Kada Allab.** ELEMENTS D'ANALYSE. Fonction d'une vadiable réelle. Ecoles scientifiques, 1984.
- [13] **Jean-Marc Braemer.** Analyse réele . Université Claude Bernad. Lyon 1, 1977.
- [14] **H.T. Davis,** Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover Publications, New York. 1962.
- [15] **Andre Fortin** Analyse numérique pour ingénieurs. édition de l'école de polytechnique de Montréal 1994.
- [16] **A. Quarteroni.** Méthodes numériques, Algorithmes, Analyses et applications. 2007.