

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté par

THLEDJANE NOOR EL HOUDA ET SALIK NESRINE

Pour l'obtention du diplôme de

**Master**

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

---

Thème

**Aspects théorique de l'optimisation multi-objectif**

---

Soutenu publiquement le 20 Juin 2016 devant le jury composé de

Z.RAMDANI	<i>Maitre assistant A</i>	Université de Bordj Bou Arréridj	Président
S.ADDOUNE	<i>Maitre de conférence</i>	Université de Bordj Bou Arréridj	Encadreur
B.BRAHMI	<i>Maitre assistant A</i>	Université de Bordj Bou Arréridj	Examineur

Promotion 2015/2016

# Remerciement



Avant tout, nous remercions Allah qui nous aide et donné la force pour réaliser ce pré

Nous tenons à ex  
encadreur S. Addoune.

Nous tenons aussi à remercier le  
ont fait l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Nous adre

et amis qui nous ont toujours encouragé au cours de la réalisa-  
tion de ce mémoire.

Merci a tous.







# Dédicace



Je dédie ce travail :

À no

À no

À tous le

mathématique

El Bachir El Ibrahimy,

À tous ceux qui nous ont aidé d'une façon ou d'une  
autre, à tout personne ayant participé de

prés

...

À toute

no

...

Noor el houda,



---

# TABLE DES FIGURES

1.1	Illustration de la meilleur solution . . . . .	7
1.2	le problème d'optimisation multi-objectifs (2 variables de décision et 3 fonctions d'objectifs) . . . . .	8
1.3	Illustration des deux cônes. . . . .	9
2.1	Illustration des définitions de solution efficace . . . . .	14
2.2	L'optimalité locale au sens de Pareto . . . . .	15
2.3	L'ensemble Réalisable . . . . .	15
2.4	Les points non dominée de $Y$ et $Y + \mathbb{R}_{\geq}^p$ sont les mêmes. . . . .	17
2.5	Illustration des différentes définitions . . . . .	18
2.6	$Y_0$ est une partie compacte de $Y$ . . . . .	20
2.7	L'ensemble de niveau et la courbe de niveau pour l'exemple 2.2 . . . . .	22
2.8	L'ensemble de niveau et l'efficacité . . . . .	23
2.9	Location du problème de l'exemple 2.3 . . . . .	25
2.10	Le cône tangente et l'enveloppe conique . . . . .	27
2.11	. . . . .	29
3.1	La méthode d'agrégation. . . . .	32
3.2	La méthode $\epsilon$ -contrainte. . . . .	33

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Optimisation multi-objectifs</b>	<b>5</b>
1.1	Conception de base et terminologie . . . . .	5
1.1.1	Problème multi-objectifs . . . . .	5
1.1.2	L'espace de décision et d'objectif . . . . .	7
1.2	La relation d'ordre et le cône . . . . .	8
1.2.1	Relation d'ordre . . . . .	8
1.3	Exemples . . . . .	10
1.4	Application et théorie de l'optimisation multi-objectifs . . . . .	11
1.5	Conclusion . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Dominance et optimalité de Pareto</b>	<b>13</b>
2.1	Les solutions efficaces et les points non dominés . . . . .	13
2.1.1	Notion de dominance et d'optimalité . . . . .	13
2.1.2	Optimalité de Pareto . . . . .	14
2.2	Les points particuliers . . . . .	17
2.3	Les conditions d'existence et d'optimalité . . . . .	19
2.4	L'ensemble de niveau et la courbe de niveau . . . . .	21
2.5	Les solutions efficaces propres . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Méthodes d'optimisation multi-objectifs</b>	<b>30</b>
3.1	Classification des méthodes de résolution . . . . .	30
3.2	Méthodes de transformation en problèmes mono-objectif . . . . .	31
3.2.1	Méthode d'agrégation . . . . .	31
3.2.2	Méthode $\epsilon$ -contrainte . . . . .	32

3.3	Les méthodes non agrégées et non Pareto . . . . .	33
3.3.1	Méthode lexicographique . . . . .	33
	<b>Rèferences</b>	<b>36</b>



---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

De nombreux secteurs de l'industriel (mécanique, chimie, télécommunications, environnement, transport, etc. ) sont concernés par des problèmes complexes de grande dimension et multi-critères (qualité de service, etc. ) mettant en jeu des coûts financiers très importants et pour lesquels les décisions doivent être prises de façon optimale. Les problèmes d'optimisation rencontrés en pratique sont rarement mono-objectif. Il y a généralement plusieurs critères contradictoires à satisfaire simultanément.

L'optimisation multi-critère s'intéresse à la résolution de ce type de problèmes. Elle possède ses racines au 19 ième siècle dans les travaux en économie de Edgeworth et Pareto. Elle a été utilisée initialement en économie et dans les sciences de management, et graduellement appliquée aux sciences pour l'ingénieur.

Contrairement à l'optimisation mono-objectif, la solution d'un problème multi-objectifs (PMO) n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions, connu comme l'ensemble des solutions Pareto Optimales.

Au cours des trente dernières années, la plupart des travaux réalisés dans ce domaine ont porté sur la programmation multi-objectifs linéaire en variables continues.

## **Organisation du mémoire**

Le mémoire est organisé en 3 chapitres :

Après une introduction rapide sur les problèmes d'optimisation, nous présentons un ensemble des définitions qui est relié à ce sujet. Après une brève d'une relation d'ordre et le cône. Nous terminons ce chapitre en présentant des applications et théorie de l'optimisation multi-objectifs.

Ensuite nous présentons les solutions efficaces et les points non dominés, ensuite les conditions d'existence et d'optimalités. Nous terminons par la présentation des ensembles de niveaux et les solutions efficaces propres.

Dans le chapitre 3, nous présentons une classification proposée.

L'objectif principal de telles méthodes est de générer une variété de solutions Pareto-optimales. Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## OPTIMISATION MULTI-OBJECTIFS

L'optimisation multi-objectifs cherche à optimiser plusieurs composants d'un vecteur de fonctions coût. Contrairement à l'optimisation mono-objectif, la solution d'un problème multi-objectifs (PMO) n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions, connu comme l'ensemble des solutions Pareto optimales.

Ce chapitre a pour objectif de présenter le contexte de l'optimisation multi-objectifs, et ses principales définitions.

### 1.1 Conception de base et terminologie

Dans cet section, nous présentons tout d'abord un ensemble de définitions liées aux problèmes d'optimisation multi-objectifs. Ensuite, nous exposons la relation d'ordre et le cône. Pour terminer, nous présentons des applications et théories de l'optimisation multi-objectifs, et quelque exemples.

#### 1.1.1 Problème multi-objectifs

Un **problème multi-objectifs** ou **multi-critère** peut être défini comme un problème dont on recherche l'action qui satisfait un ensemble de contraintes et optimise un vecteur de fonctions objectifs.

Le paragraphe suivant donne la définition mathématique d'un problème d'optimisation multi-objectifs. Nous conserverons les mêmes notations dans la suite du document.

**Définition 1.1.** *Un problème d'optimisation multi-objectifs (PMO) peut être défini comme suit :*

$$\begin{cases} \min f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)), \\ \text{S.C} \\ x \in X \end{cases}$$

où :

- $n$  est un nombre de fonctions objectives,  $p \geq 2$ .
- $x$  est un vecteur représentant les  $n$  variables de décision.
- $X$  est un ensemble des solutions réalisables.
- $f$  est un vecteur des critères à optimiser.

En optimisation mono-objectif, l'ensemble des solutions réalisables dans l'espace des critères  $Y = f(X)$  est totalement ordonné selon une fonction objectif  $f$ . Soient deux solutions réalisables  $a$  et  $b$  de  $X$  soit  $f(a) \leq f(b)$  ou  $f(a) > f(b)$ . Le but est de trouver la solution qui donne la valeur minimal de  $f$ . Cependant, lorsque plusieurs objectifs son concernés, la situation change. L'ensemble  $Y$  est en général non totalement ordonné, mais partiellement ordonné. Ceci est illustré dans la figure 1.1.

La solution représentée par le point  $B$  est meilleur que la solution représentée par le point  $C$ , elle fournit une meilleure performance à un côté plus faible. De même pour la solution  $C$  qui est meilleur que la solution  $D$  à côté égaux.

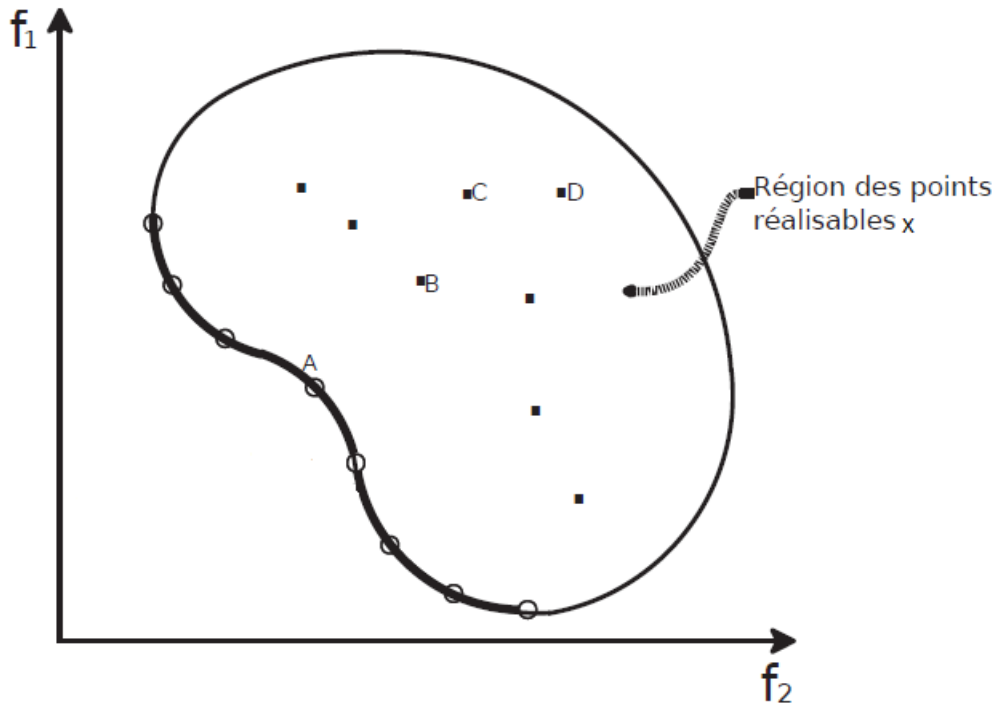


FIGURE 1.1 – Illustration de la meilleur solution

### 1.1.2 L'espace de décision et d'objectif

**Définition 1.2. (Variable de décision)** Sont des quantités numériques  $x_i$  tel que  $i \in N$  pour les quelles des valeurs sont à choisir. Elles sont regroupées dans le vecteur de décision  $x$ . C'est en faisant varier ce vecteur que l'on recherche un optimum de la fonction  $f$ , est représenté par :  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Les différent valeurs possibles prises par les variables de décisions  $x_i$  constituent l'ensemble de solutions envisageables.

**Définition 1.3. (Espace de décision)** L'ensemble des  $n$  valeurs décisions réelles ou entières composant le vecteur de décision est un espace de dimension  $n$ . L'ensemble des valeurs pouvant être prise par le vecteur de décision constitue l'espace de recherche (décisionnel) de dimension  $n$

**Définition 1.4. (Fonction objectif)** C'est le nom donné à la fonction  $f$  (on l'appelle encore fonction de coût ou critère d'optimisation). C'est cette fonction que l'algorithme d'optimisation va devoir optimiser (trouver un optimum), sera noté  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$ .

**Définition 1.5. (Espace objectif)** L'ensemble de définition de les fonctions objectives. Généralement, cet espace est défini dan  $\mathbb{R}$  en optimisation mono-objective, mais dans le cas avec  $p$  objectifs, il sera de dimension  $p$  en optimisation multi-objectifs.

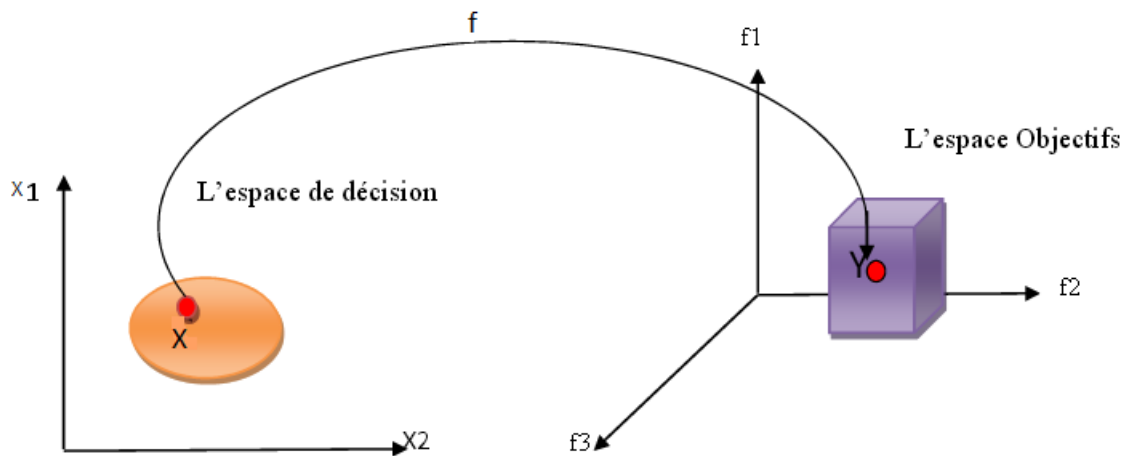


FIGURE 1.2 – le problème d’optimisation multi-objectifs (2 variables de décision et 3 fonctions d’objectifs)

## 1.2 La relation d’ordre et le cône

### 1.2.1 Relation d’ordre

**Définition 1.6. (relation binaire)** Soit  $X$  un ensemble. Une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $X$  est un sous-ensemble de  $X * X$ . On note  $x\mathcal{R}y$  pour signifier que  $(x, y) \in \mathcal{R}$  et  $x \not\mathcal{R}y$  pour signifier que  $(x, y) \notin \mathcal{R}$ .

**Définition 1.7. (classification)** Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur  $X$ . On dit que  $\mathcal{R}$  est

- réflexive quand  $\forall x \in X, x\mathcal{R}x$ ;
- irréflexive quand  $\forall x \in X, x \not\mathcal{R}x$ ;
- symétrique quand  $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$ ;
- antisymétrique quand  $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x \implies x = y$ ;
- transitive quand  $\forall x, y, z \in X, x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ .

**Définition 1.8. (ordre)** Une relation binaire est un ordre (ou une relation d’ordre) quand elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

**Définition 1.9. (ensemble ordonné)** Soit  $X$  un ensemble et  $\preceq$  une relation d’ordre sur  $X$ . On dit que  $(X, \preceq)$  est un ensemble ordonné.

**Définition 1.10. (ordre strict)** Une relation binaire est un ordre strict (ou une relation d’ordre strict) quand elle est irréflexive et transitive.

**Définition 1.11. (ensemble strictement ordonné)** Soit  $X$  un ensemble et  $\prec$  une relation d’ordre strict sur  $X$ . On dit que  $(X, \prec)$  est un ensemble strictement ordonné.

**Définition 1.12. (éléments incomparables)** Soit  $(X, \preceq)$  un ensemble ordonné. Deux éléments  $x$  et  $y$  de  $X$  sont dits incomparables quand on a ni  $x \preceq y$ , ni  $y \preceq x$ .

**Définition 1.13. (ordre total)** Un ordre  $\preceq$  sur  $X$  est dit total si deux éléments sont toujours comparables :  $\forall x, y \in X, x \preceq y$  ou  $y \preceq x$ .

Un ordre qui n’est pas total est dit partiel.

**Définition 1.14. (ordre strict total)** Un ordre strict  $\prec$  sur  $X$  est dit strict total si deux éléments différents sont toujours comparables :  $\forall x, y \in X, x \neq y \implies x \prec y$  ou  $y \prec x$ .

Nous employons plusieurs ordres sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^p$  ce que nous définissons maintenant. Ces notations ne sont pas uniques dans les multi-critères définitions de littérature et toujours de contrôle d'optimisation en consultant une autre source. soient  $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^p$  tel que  $y^2 \neq y^1$  et  $k^* = \min\{k : y_k^1 \neq y_k^2\}$  Nous emploierons les notations et les noms donnés dans le tableau 1.1 pour le plus commun ordres (partiels) (stricts) sur  $\mathbb{R}^p$  apparaissant en ce texte. Avec (faible, strict) les ordres de composante par composante, nous définissons des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^p$  comme suit :

- $\mathbb{R}_{\geq}^p := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq 0\}$ ,
- $\mathbb{R}_{\geq}^p := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq 0\} = \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus 0$ ,
- $\mathbb{R}_{>}^p := \{y \in \mathbb{R}^p : y > 0\} = \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$ .

Notation et Définition	Nom
$y^1 \leq y^2 \quad y_k^1 \leq y_k^2 \quad k = 1, \dots, p$	ordre faible de composante par composante
$y^1 \leq y^2 \quad y_k^1 \leq y_k^2 \quad k = 1, \dots, p; y^1 \neq y^2$	ordre de composante par composante
$y^1 < y^2 \quad y_k^1 < y_k^2 \quad k = 1, \dots, p$	ordre strict de composante par composante
$y^1 \leq_{\text{lex}} y^2 \quad y_{k^*}^1 < y_{k^*}^2 \vee y^1 = y^2$	ordre lexicographique
$y^1 \leq_{\text{MO}} y^2 \quad \max_{k=1, \dots, p} y_k^1 \leq \max_{k=1, \dots, p} y_k^2$	maximum-ordre

Tab1.1 Quelques ordres en  $\mathbb{R}^p$

Seront extrêmement utiles dans l'optimisation multi-critère. Mais d'abord, nous avons besoin de la définition d'un cône.

**Définition 1.15. (Cône)** Soit  $V \subset \mathbb{R}^n, V \neq \emptyset$  est un cône si  $\alpha.v \in V$  pour tout scalaire  $\alpha \geq 0$  et tout  $v \in V$ .

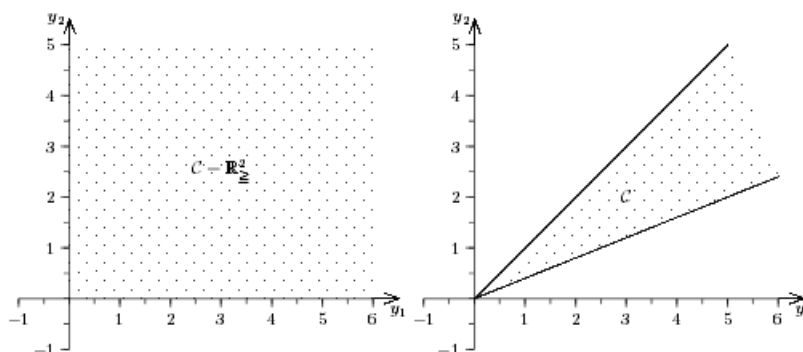


FIGURE 1.3 – Illustration des deux cônes.

**Définition 1.16.** Soit  $V$  un cône dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit que

- $V$  est convexe, si  $\alpha d^1 + (1 - \alpha)d^2 \in V$  pour tous  $d^1, d^2 \in V$  et pour tous  $0 < \alpha < 1$ ,
- $V$  est saillant, si  $V \cap (-V) \subset \{0\}$ ,

—  $V$  est pointé, si  $0 \in V$ .

Maintenant nous définie l'ensemble

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \{y^2 - y^1 : y^1 \mathcal{R} y^2\}, \quad (1.1)$$

et nous allons prouver certains relations entre les propriétés de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ .

**Proposition 1.1.** *Soit  $\mathcal{R}$  est compatible avec la multiplication scalaire, i.e, pour tous  $(y^1, y^2) \in \mathcal{R}$  et tout  $\alpha \in \mathbb{R}_{>}$  il estime que  $(\alpha y^1, \alpha y^2) \in \mathcal{R}$ . Alors  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  est un cône.*

**Théorème 1.1.** *Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur  $\mathbb{R}^n$  qui est compatible avec la multiplication scalaire et l'addition. Alors*

- $0 \in \mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  si et seulement si  $\mathcal{R}$  est réflexive.
- $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  est saillant si et seulement si  $\mathcal{R}$  est antisymétrique.
- $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  est convexe si et seulement si  $\mathcal{R}$  est transitive.

Nous pouvons également utiliser un cône pour définir une relation d'ordre. Soit  $\mathcal{V}$  un cône. On définit  $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$  par

$$y^1 \mathcal{R}_{\mathcal{V}} y^2 \iff y^2 - y^1 \in \mathcal{V}. \quad (1.2)$$

**Proposition 1.2.** *Soit  $\mathcal{V}$  un cône, alors la relation qui est définie dans 1.2 est compatible avec la multiplication scalaire et l'addition dans  $\mathbb{R}^n$ .*

**Théorème 1.2.** *Soit  $\mathcal{V}$  un cône alors*

- $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$  est réflexive si et seulement si  $0 \in \mathcal{V}$ .
- $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$  est antisymétrique si et seulement si  $\mathcal{V}$  est saillant.
- $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$  est transitive si et seulement si  $\mathcal{V}$  est convexe.

## 1.3 Exemples

**Exemple 1.1.** *Nous voulons acheter une nouvelle voiture et nous avons identifié quatre modèles : une VW Golf, une Opel Astra, une Ford Focus et une Toyota Corolla. la décision sera prise en fonction du prix, la consommation d'essence, et de la puissance. Nous préférons une voiture pas cher et puissant avec une faible consommation d'essence.*

*Dans ce cas, nous sommes confrontés à un problème de décision avec quatre alternatives et trois critères. les caractéristiques des quatre voitures sont présentés dans le tableau 1.2 les données sont inventés ).*

*Comment nous décidons, qui des quatre voitures est la «meilleure» alternative lorsque, la voiture la plus puissante est aussi celui de la consommation d'essence plus élevée, de sorte que nous ne pouvons pas acheter une voiture qui est pas cher, ainsi que puissant et économe en carburant.*

*Cependant, on observe que l'une des trois critères seul le choix est facile.*

		Aalternatives			
		VW	Opel	Ford	Toyota
	Prix (1,000 Euros)	16.2	14.9	14.0	15.2
Criteres	Consommation	7.2	7.0	7.5	8.2
	Puissancer (kW)	66.0	62.0	55.0	71.0

**Exemple 1.2.** *Pour la fabrication d'un barrage d'eau avec un fournisseur d'électricité intéressés à maximiser la capacité de stockage tout en minimisant en même temps la perte due à l'évaporation et le coût de la construction de l'eau. Une décision doit être prise sur les mois de l'homme utilisés pour la construction, ainsi que le rayon moyen du lac, et aussi il doit respecter certaines contraintes telles que la résistance minimale du barrage. Ici, l'ensemble des alternatives (dessins possibles de barrages) permet une infinité des choix différents. Les critères sont des fonctions des variables de décision pour être maximisée ou minimisée. Les critères sont en contradiction évidente : Un barrage avec grand capacité de stockage ne sera certainement pas impliquer un coût petit de la construction.*

## 1.4 Application et théorie de l'optimisation multi-objectifs

Dans cette section, nous intéressons aux avancées théoriques de la programmation multi-objectifs (nouveaux concepts, nouveaux algorithmes, évaluation de performances, etc.) ainsi qu'aux applications académiques et industrielles de la programmation multi-objectifs.

### **Technique d'optimisation multi-objectifs à base de métaheuristiques pour résoudre le problème de routage dans les réseaux sur puces (NoCs).**

Le réseau sur puce (ou NoC : Network on chip) est un nouveau concept développé pour améliorer la communication dans un SoC (System on Chip). Un NoC est composé de nœuds appelés IP (Intellectual Property), de routeurs associés aux IPs et d'un ensemble de connexions permettant d'obéir à une topologie donnée (Mesh2D, Mesh3D, Torus, etc.). Dans un NoC, la transmission de données ne passe plus par un bus partagé mais s'effectue à travers la fonction de routage. Or, la taille miniature de ces réseaux impose des contraintes de routage particulières comparées aux réseaux classiques. En effet, l'énergie dissipée ne doit pas être élevée pour éviter la surchauffe de la puce, la surface occupée par l'algorithme de routage ne doit pas être grande pour éviter l'ajout de mémoires supplémentaires et la latence doit être raisonnable. De plus, sur un NoC il est important d'assurer un bon taux de fiabilité, c'est pourquoi il est nécessaire d'éviter les deadlock, les livelock, les zones de congestion et les pannes lors de l'envoi de données. Pour répondre à tous ces objectifs, les politiques de routage existantes proposent diverses solutions sans pour autant arriver à tous les satisfaire. Ainsi, vu le nombre important de contraintes posées, nous avons transformé le problème en un problème d'optimisation multi-objectifs où nous proposons une approche de routage déterministe à base de techniques d'optimisation multi-objectifs en utilisant les métaheuristiques afin de trouver un compromis qui garantit à la fois une bonne fiabilité et de bonnes performances sur le réseau.



## 1.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif d'introduire dans un premier temps, les concepts fondamentaux de l'optimisation multi-objectifs tels que la modélisation d'un problème multi-objectifs, l'intervention du décideur dans le processus de décision, Puis une classification de l'application et théorie de l'optimisation multi-objectifs.

---

---

## CHAPITRE 2

---

# DOMINANCE ET OPTIMALITÉ DE PARETO

Ce chapitre couvre les concepts fondamentaux de l'efficacité et le non-dominance. D'abord nous présentons quelques propriétés fondamentales sur les points non dominés et les solutions efficaces, dans la même section nous donnons la notion de dominance et d'optimalité. Dans la deuxième section nous définissons plusieurs résultats d'existence de ses points non dominés. Ensuite nous introduisons les points idéaux et nadir comme des limites sur l'ensemble de solutions non dominés. La section suivante comprend également des définitions sur les ensembles de niveaux et les courbes de niveaux et la relation avec les points efficaces. Enfin, dans la dernière section, nous introduisons plusieurs définitions des solutions efficaces propres.

## 2.1 Les solutions efficaces et les points non dominés

### 2.1.1 Notion de dominance et d'optimalité

**Définition 2.1. (Dominance)** *Considérons un problème de minimisation. Soit deux vecteurs  $x$  et  $y$  :*

- $x$  égale  $y$ , ssi  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : x_i = y_i$ ,
- $x$  domine  $y$ , ssi  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : x_i \leq y_i$  et  $\exists j \in \{1, 2, \dots, n\} : x_j < y_j$
- $x$  est dominé par  $y$ , ssi  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : x_i \geq y_i$  et  $\exists j \in \{1, 2, \dots, n\} : x_j > y_j$ ,
- $x$  est incomparable (non dominé) avec  $y$ , et  $y$  est incomparable (non dominé) avec  $x$  dans les autres cas.
- $x$  est indifférent pour  $y$  ( $x \sim y$ ) ssi  $f(x) \not\leq f(y) \vee f(y) \not\leq f(x)$ .

## 2.1.2 Optimalité de Pareto

**Définition 2.2.** Une solution réalisable  $\hat{x} \in X$  est dite solution efficace ou **Pareto optimale** si et seulement si il n'existe pas de solution  $x \in X$  tel que  $f(x) \preceq f(\hat{x})$ .

Si  $\hat{x}$  est efficace,  $f(\hat{x})$  est appelée point non dominée.

Si  $x_1, x_2 \in X$  et  $f(x_1) \preceq f(x_2)$  nous disons que  $x_1$  domine  $x_2$  et  $f(x_1)$  domine  $f(x_2)$ .

L'ensemble des solutions efficaces  $\hat{x} \in X$  est appelée l'ensemble efficace et notée par  $X_E$ .

L'ensemble de tous les points non dominée  $\hat{y} = f(\hat{x}) \in Y$ , où  $\hat{x} \in X_E$ , est appelée l'ensemble non dominée et notée par  $Y_N$ .

$\hat{x}$  est efficace si

1. Il n'existe pas de  $x \in X$  tel que  $f_k(x) \leq f_k(\hat{x})$  pour  $k = 1, \dots, p$  et  $f_i(x) < f_i(\hat{x})$  pour certain  $i \in \{1, \dots, k\}$ ;
2. Il n'y a pas de  $x \in X$  tel que  $f(x) - f(\hat{x}) \in -\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ ;
3.  $f(x) - f(\hat{x}) \in \mathbb{R}^p \setminus -\{\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}\}$  pour tous  $x \in X$ ;
4.  $f(X) \cap (f(x) - \mathbb{R}_{\geq}^p) = \{f(\hat{x})\}$ ;
5. Il n'y a pas de  $f(x) \in f(X) \setminus \{f(\hat{x})\}$  avec  $f(x) \in f(\hat{x}) - \mathbb{R}_{\geq}^p$ ;
6.  $f(x) \leq f(\hat{x})$  pour certain  $x \in X$  implique  $f(x) = f(\hat{x})$ .

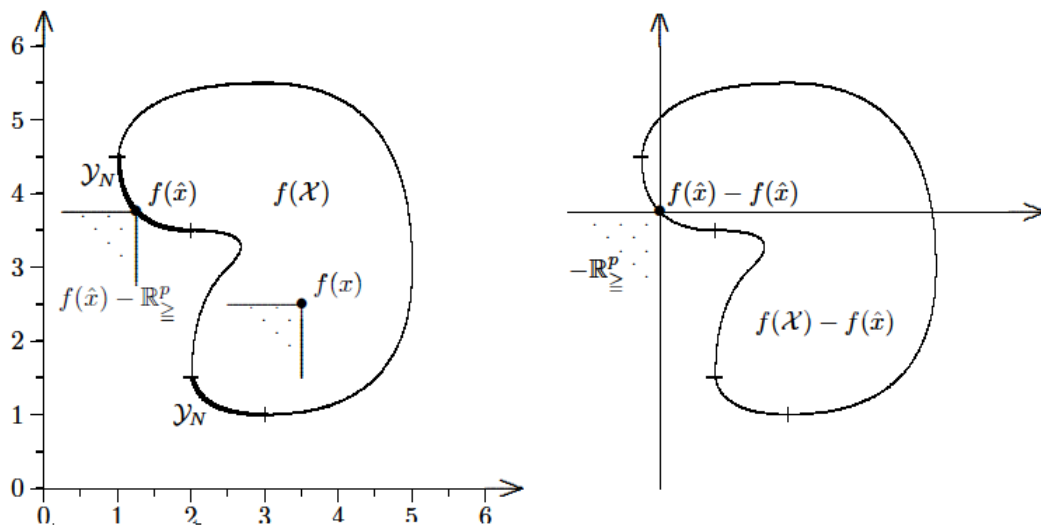


FIGURE 2.1 – Illustration des définitions de solution efficace

**Définition 2.3. (Solution faiblement efficace)** Une solution  $\hat{x}$  est dite solution faiblement efficace si et seulement si : il n'existe pas une solution  $x$  tel que  $f_i(x) < f_i(\hat{x})$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Définition 2.4. (Optimalité local au sens de Pareto)** Attachée à la notion de voisinage, la notion de Pareto localement optimale qualifie une solution qui n'est dominée par aucune solution de son voisinage.

D'une manière équivalente un vecteur  $x$  est optimal localement au sens de Pareto s'il est optimal au sens de Pareto sur une restriction de l'ensemble  $X$ . Cette définition est illustrée par la figure 2.2.

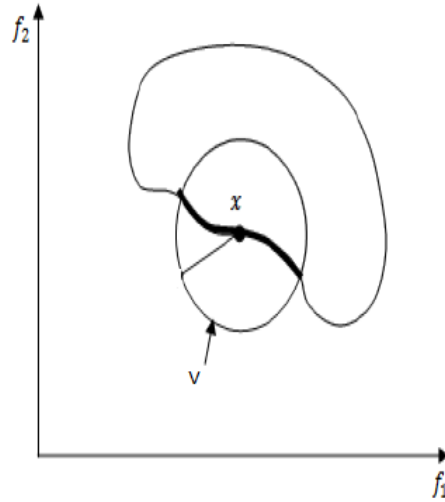


FIGURE 2.2 – L'optimalité locale au sens de Pareto

**Définition 2.5. (Optimalité global au sens de Pareto)** Un vecteur  $x$  est optimal globalement au sens de Pareto (ou optimal au sens de Pareto) s'il n'existe pas de vecteur  $x'$  tel que  $x'$  domine le vecteur  $x$ .

**Exemple 2.1. (Gopfert et Nehse (1990))**

Considérons un problème d'optimisation bi-objectif avec l'ensemble réalisable

$$X = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} -1 \leq x_1 \leq 1, \\ -\sqrt{-x_1^2 + 1} < x_2 \leq 0 \text{ si } -1 \leq x_1 \leq 0, \\ -\sqrt{-x_1^2 + 1} \leq x_2 \leq 0 \text{ si } 0 \leq x_1 \leq 1 \end{array} \right. \right\} \quad (2.1)$$

La fonction objectif est

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2).$$

D'après la figure 2.3 il n'existe aucune point non dominée donc le problème bi-critère n'admette aucune solution efficace  $Y_N = X_E = \emptyset$ . Même si  $X$  et  $Y$  sont convexes et  $f$  est continue.

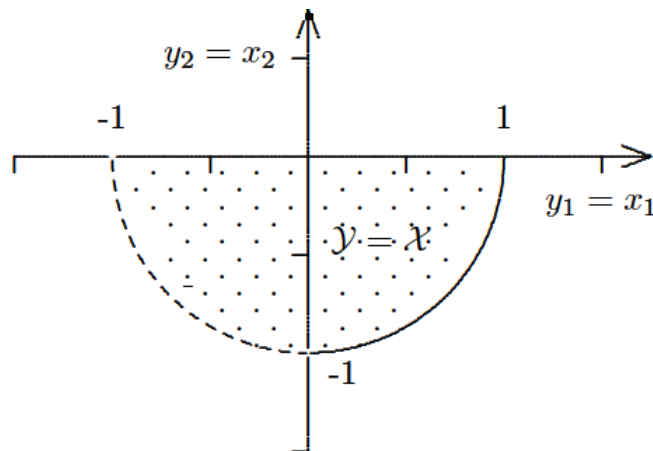
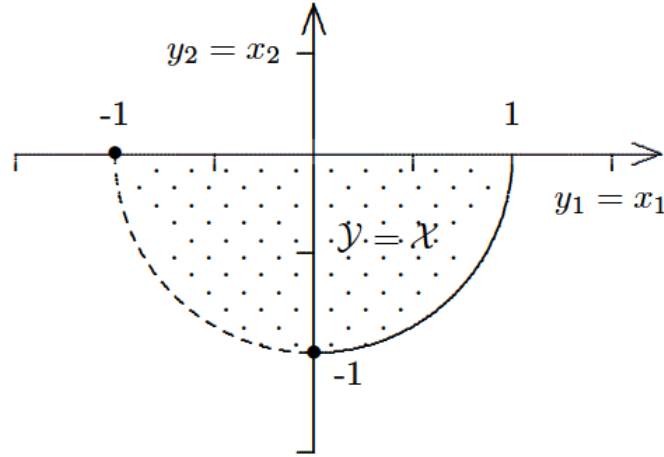


FIGURE 2.3 – L'ensemble Réalisable

*Si nous modifions le problème*

$$X = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} -1 \leq x_1 \leq 1, \\ x_2 = 0 \text{ si } x_1 = -1 \\ -\sqrt{-x_1^2 + 1} < x_2 \leq 0 \text{ si } -1 \leq x_1 \leq 0, \\ -\sqrt{-x_1^2 + 1} \leq x_2 \leq 0 \text{ si } 0 \leq x_1 \leq 1 \end{array} \right. \right\} \quad (2.2)$$

$$Y_N = \{(-1, 0), (0, -1)\}$$



*Exemple 2.1* montre que les conditions d'existence de solutions efficaces et des points non dominés doivent être notre première préoccupation dans l'étude d'optimisation multi-critère.

Ensuite nous procéderons à prouver certaines propriétés de base des ensembles non dominés, avant que nous présentons plusieurs théorèmes d'existence pour les solutions efficaces. Les propriétés suivantes des ensembles non dominés sont principalement pour les preuves des théorèmes. Cependant, ils pourraient bien améliorer une compréhension intuitive de la notion de non-dominance.

Tout d'abord, nous montrons que les points non dominés sont situés dans la partie inférieure gauche de  $Y$ .

$Y \subset \mathbb{R}^p$ . Soit  $Y_N = \{y \in Y : \text{il n'y a pas } y^* \in Y \text{ tel que } y^* \preceq y\}$ .

En particulier  $Y_N \subset Y$ .

**Proposition 2.1.**  $Y_N = (Y + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$ .

**Démonstration.** Le résultat est trivial si  $Y = \emptyset$ , parce que  $Y + \mathbb{R}_{\geq}^p = \emptyset$ .

Si  $Y \neq \emptyset$ . On suppose  $y \in (Y + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$ , mais  $y \notin Y_N$ .

**Il y'a deux possibilité :**

Si  $y \notin Y$ , il y'a  $y^* \in Y$  et  $0 \neq d \in \mathbb{R}_{\geq}^p$  tel que  $y = y^* + d$ . Car  $y^* = y^* + 0 \in Y + \mathbb{R}_{\geq}^p$  nous obtenons  $y \in (Y + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$ , contradiction.

Si  $y \in Y$ , il y'a  $y^* \in Y$  tel que  $y^* \leq y$ .

Soit  $d = y - y^*$  dans  $\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ . Alors  $y = y^* + d$  et  $y \in (Y + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$  contradiction. Deuxièmement, supposons  $y \in Y_N$  mais  $y \in (Y + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$ . Il y'a un certain  $y' \in Y + \mathbb{R}_{\geq}^p$  soit  $y - y' = d' \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ . C'est à dire.  $y' = y'' + d''$  avec  $y'' \in Y, d'' \in \mathbb{R}_{\geq}^p$  donc

$y = y' + d' = y'' + (d' + d'') = y'' + d$  avec  $d = d' + d'' \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ . Ce implique  $y \notin Y_N$ , contredisant l'hypothèse. Par conséquent,  $y \in (Y + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$ . ■

La proposition est illustrée dans la figure 2.4.

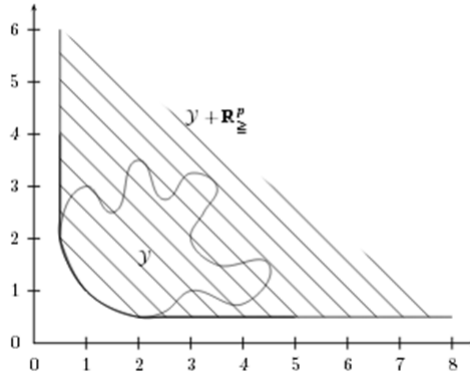


FIGURE 2.4 – Les points non dominée de  $Y$  et  $Y + \mathbb{R}_{\geq}^p$  sont les mêmes.

Un second résultat, qui est intuitivement évident, que les points efficaces doivent appartenir à la frontière de  $Y$ .

**Proposition 2.2.**  $Y_N \subset bd(Y)$ .

**Démonstration.** Soit  $y \in Y_N$ , et on suppose que  $y \notin bd(Y)$  donc  $y \in int(Y)$  et il existe un  $B(y, \varepsilon) = y + B(0, \varepsilon) \subset Y$ .

Soit  $d \neq 0$ ,  $d \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ , on choisit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < \alpha < \varepsilon$  et  $\alpha d \in B(0, \varepsilon)$ . Maintenant,  $y - \alpha d \in Y$  avec  $\alpha d \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ , qui implique  $y \notin Y_N$ . ■

**Corollaire 2.1.** Si  $Y$  est ouvert ou si  $Y + \mathbb{R}_{\geq}^p$  est ouvert alors  $Y_N = \emptyset$ .

**Proposition 2.3.**  $(Y_1 + Y_2)_N \subset (Y_1)_N + (Y_2)_N$ .

**Démonstration.** Soit  $y \in (Y_1 + Y_2)_N$ , alors  $y = y^1 + y^2$  pour certain  $y^1 \in Y_1, y^2 \in Y_2$ . On suppose  $y^1 \notin (Y_1)_N$  il résulte qu'il doit avoir un certain  $y^* \in Y_1$  et  $d \in \mathbb{R}_{\geq}^p$  tel que  $y^1 = y^* + d$ . Donc  $y = y^* + y^2 + d$  avec  $(y^* + y^2) \in (Y_1 + Y_2)$  d'où  $y \notin (Y_1 + Y_2)_N$ .

**Contradiction**, logiquement  $y^2 \in (Y_2)_N$ . ■

**Proposition 2.4.**  $(\alpha Y)_N = \alpha(Y_N)$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ .

## 2.2 Les points particuliers

En vue d'avoir certain points de références permettant de discuter de l'intérêt des solutions trouvées, des points peuvent représenter des solution réalisables au non.

**Définition 2.6.**

1. **Point idéale :** Tout d'abord, le point idéale  $x^I$  est le point qui a comme valeur optimale de l'objectif considéré :  $x^I$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$   $f_i(x^I) = \text{opt}_{x \in X} f_i(x)$ .
2. **Point nadir :** Enfin le point nadir qui est défini en bi-objectif par :  $x^N$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $f_i(x^N) = \text{opt}_{x \in X / f_j(x^I) = f_j(x^I)} f_i(x)$  avec  $j \neq i$ .  
Cela revient donc à affecter pour chaque objectif du point nadir la meilleure valeur possible parmi les solution optimisation objectif.

Une visualisation de l'ensemble de ces définitions est donnée sur la figure 2.5

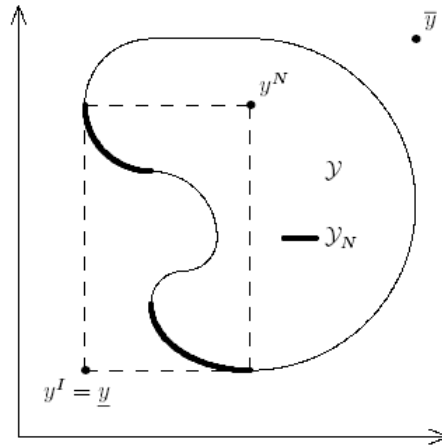


FIGURE 2.5 – Illustration des différentes définitions

## 2.3 Les conditions d'existence et d'optimalité

Dans cette section, nous citons les conditions d'existence de solutions et les conditions nécessaire et suffisante d'optimalité au sens de Pareto formulées pour le problème multi-objectifs, nous devons introduire une autre déclaration fondamentale, Le lemme de Zorn Avant d'énoncer le lemme de Zorn, nous avons besoin de donner ou rappeler quelques points de vocabulaire.

- Définition 2.7.**
1. Soit  $(X, \preceq)$  un ensemble ordonné,  $A \subset X$ . On dit que  $x$  est un minorant de  $A$  lorsque, pour tout  $a \in A$ , on a  $x \preceq a$ .
  2. Soit  $(X, \preceq)$  un ensemble ordonné. On appelle chaîne de  $X$  un sous-ensemble totalement ordonné de  $(X, \preceq)$ .
  3. Un ensemble ordonné  $(X, \preceq)$  est dit inductif lorsque chacune de ses chaînes admet au moins un minorant.
  4. Un élément  $m \in X$  est dit minimal lorsque, pour tout  $x \in X$ ,  $m \preceq x$ .

**Théorème 2.1. (Lemme de Zorn)** Soit  $(X, \preceq)$  un ensemble ordonné dont toute chaîne possède un minorant, alors  $(X, \preceq)$  possède un élément minimal.

**Théorème 2.2. (Borwein(1983))** Soit  $Y$  un ensemble non vide, on suppose il y a un certain  $y_0 \in Y$  tel que  $Y_0 = \{y \in Y : y \preceq y_0\} = (y_0 - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap Y$  est compact. alors  $Y_N$  est un ensemble non vide.

**Démonstration.** L'idée de la démonstration est la suivante. Nous utilisons la compacité de  $Y_0$ , on montre que toutes les chaînes de  $Y_0$  admet un minimal.

Ainsi  $Y_0$  est inductif, et par le lemme de Zorn  $Y_0$  est contient un minimal  $\hat{y}$ . Nous montrons que  $\hat{y}$  est une point non dominée de  $Y$ .

$Y_0$  est compact et soit  $Y^I = \{y^i, i \in I\}$ , tel que  $I$  est un ensemble d'indice de la chaîne dans  $Y_0$ .

Nous montrons que  $\{y^i, i \in I\}$ , admet un élément minimal. Soit  $J = \{j \subset I : |J| < \infty\}$  est un ensemble de tous les ensembles finis d'indice  $i$  dans  $J$ . Pour tout  $i \in J$  et  $Y^I$  une chaîne de  $Y_0$  implique que  $Y^J = \inf\{y^i, i \in I\}$ , est existe et  $Y^J \in Y_0$ .

Nous considérons tous les ensembles  $Y_i = (y_i - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap Y$ , ou  $i \in I$ . Il est évident que  $Y_i \subset Y_0$  et  $Y_i$  est un sous ensemble fermé compact. En autre, si  $j \in J$ ,  $J$  est finie,  $\bigcap_{i \in j} Y_i \neq \emptyset$  car il contient  $y^j$ . Enfin, par la compacité de  $Y_0$  il en résulte que  $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$  ce qui signifie il'ya un certain  $y' \in \bigcup_{i \in I} (y_i - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap Y_0$

En terme de l'ordre  $y' \preceq y^i$  pour tout  $i \in I$ , ou en d'autre terme  $y' \in Y_0$  est un élément minimal de  $\{y^i, i \in I\}$  qui est un ensemble inductif.

Maintenant, nous appliquons le lemme de Zorn pour conclure que  $Y_0$  contient un élément minimal  $y^*$ . Il reste de montrer que  $\hat{y} \in Y_N$ . Ensuite il aurait un  $y'' \in Y$  tel que  $y'' \preceq \hat{y}$  pour  $y''$  nous obtenons

$$y'' \in (\hat{y} - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap Y \subset ((y_0 - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap Y - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap Y \subset (y_0 - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap Y - \mathbb{R}_{\geq}^p = Y_0 - \mathbb{R}_{\geq}^p.$$

■



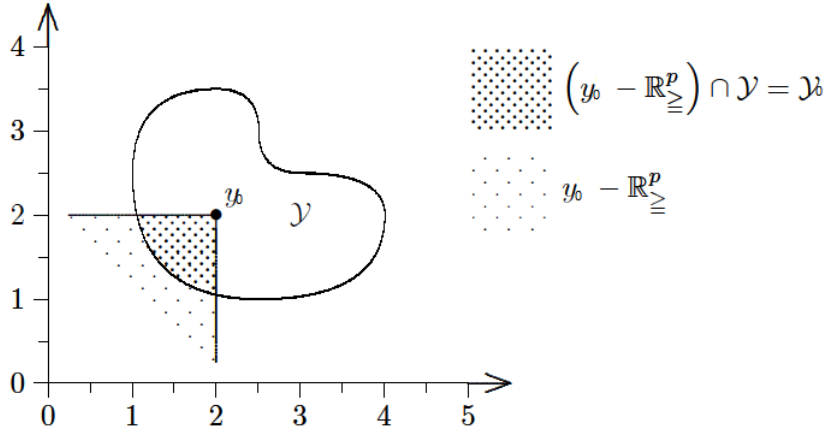


FIGURE 2.6 –  $Y_0$  est une partie compacte de  $Y$

**Définition 2.8.** Un ensemble  $Y \subset \mathbb{R}^p$  est appelé  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -semi compact si chaque recouvrement ouvert de  $Y$  de la forme  $\{(y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p)^c : y^i \in Y, i \in I\}$  on peut extraire un sous-recouvrement fini. Ça signifie à chaque fois que  $Y \subset \cup_{i \in I} (y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p)^c$  il existe  $m \in \mathbb{N}$  et  $\{i_1, \dots, i_m\} \subset I$  tel que

$$Y \subset \bigcup_{k=1}^m (y^{i_k} - \mathbb{R}_{\geq}^p)^c.$$

**Théorème 2.3. (Coreley(1980))** Si  $Y \neq \emptyset$  est  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -semi compact, alors  $Y_N$  est un ensemble non vide.

**Démonstration.** Le principe étape de la preuve est le même que pour le Théorème 2.2. nous montrons que  $Y$  est inductif et appliquer le lemme de Zorn. Tout d'abord, nous construisons un recouvrement ouvert de  $Y$  et on trouve une contradiction lorsque nous supposons que  $Y$  ne soit pas inductif.

Nous supposons que  $Y$  n'est pas inductif. Alors il existe une chaîne de  $Y$ ,  $Y' = \{y^i : i \in I\}$  qui n'admet pas un élément minimal. Donc

$$\bigcap_{i \in I} \left( (y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap Y \right) = \emptyset. \quad (2.3)$$

Ensuite, pour chaque  $y \in Y$  il y a une certaine  $y^i \in Y'$  tels que  $y \notin y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p$ .

$y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p$  est fermé,  $\{(y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p)^c : i \in I\}$  définit un recouvrement ouvert de  $Y$ . De plus,  $y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p \subset y^{i'} - \mathbb{R}_{\geq}^p$  si et seulement si  $y^i \leq y^{i'}$ . En outre,  $Y$  est  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -Semi compact et il y a une sous recouvrement finie de  $\{(y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p)^c : i \in I\}$ . Nous concluons qu'il existe un minimum fixé dans la sous recouvrement finie alors il existe un seul  $y^* \in Y'$  tel que  $Y \subset (y^* - \mathbb{R}_{\geq}^p)^c$ .

Cela implique  $y^* \leq y^i$  pour tout  $i \in I$  et  $y^* \notin Y$ , qui est impossible. Par conséquent,  $Y$  est inductif, nous concluons que  $Y_N \neq \emptyset$ . ■

**Définition 2.9.** Un ensemble  $Y \subset \mathbb{R}^p$  est appelé  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -compact si pour tout  $y \in Y$ ,  $(y - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap Y$  est compact.

**Proposition 2.5.** Si  $Y$  est  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -compact alors il est  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -semi compact.

**Démonstration.** Soit  $\{(y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p)^c : y^i \in Y, i \in I\}$  un recouvrement ouvert de  $Y$ . Pour  $y^{i'} \in Y$  on prend

$$\left\{ (y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p)^c : y^i \in Y, i \in I, i \neq i' \right\}. \quad (2.4)$$

L'équation 2.4 définit un recouvrement ouvert de  $(y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap Y$ , est compact, puisque  $Y$  est  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -compact. Mais la compacité implique que la recouvrement en 2.4 contient un sous recouvrement finie de  $(y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap Y$ . Cette sous-recouvrement finie avec  $(y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p)^c$  donne un recouvrement fini de  $Y$ .

■

**Corollaire 2.2. (Hartley(1978))** Si  $Y \subset \mathbb{R}^p$  non vide et  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -compact, alors  $Y_N \neq \emptyset$ .

**Démonstration.** Le résultat suit immédiatement du théorème 2.3 et la proposition 2.5

■

**Définition 2.10.** Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -semi-continu si

$$f^{-1}(y - \mathbb{R}_{\geq}^p) = \{x \in \mathbb{R}^n : y - f(x) \in \mathbb{R}_{\geq}^p\} \quad (2.5)$$

est fermé pour tout  $y \in \mathbb{R}^p$ .

Lemme 2.1 ci-dessous établit  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -semi-continu comme une généralisation appropriée de semi continu inférieure des fonctions scalaires ;

**Lemme 2.1.** Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -semi continu si et seulement si les fonctions des composants  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont semi-continue inférieurement pour tout  $k = 1, 2, \dots, p$ .

**Proposition 2.6.** Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble compact non vide,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est un  $\mathbb{R}^p$ -semi-continu alors,  $Y = f(X)$  est  $\mathbb{R}^p$ -semi compact.

**Démonstration.** Soit  $\{(y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p)^c : y^i \in Y, i \in I\}$  est un recouvrement ouvert de  $Y$ . Par la  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ - semi continuité de  $f$ ,  $\{f^{-1}((y^i - \mathbb{R}_{\geq}^p)^c) : y^i \in Y, i \in I\}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ .

■

**Théorème 2.4.** Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$ , un ensemble compact non vide et soit  $f$  est  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ - semi continue, alors  $X_E \neq \emptyset$ .

**Démonstration.** Le résultat est directement du théorème 2.3 et la proposition 2.6.

■

**Définition 2.11.** L'ensemble  $Y_N$  est appelé externe stable si pour chaque  $y \in Y \setminus Y_N$  il y'a  $y^* \in Y_N$  tel que  $y \in y^* + \mathbb{R}_{\geq}^p$ .

**Théorème 2.5.** Soit  $Y \subset \mathbb{R}_{\geq}^p$  un ensemble non vide et  $\mathbb{R}_{\geq}^p$  compact. Alors  $Y_N$  est externe stable.

$$y \subset Y_N + \mathbb{R}_{\geq}^p.$$

## 2.4 L'ensemble de niveau et la courbe de niveau

Nous introduisons l'ensemble de niveau et Les courbes de niveaux des fonctions.

**Définition 2.12.** Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $\hat{x} \in X$ .

$$\mathcal{L}_{\leq}(f(\hat{x})) = \{x \in X : f(x) \leq f(\hat{x})\}.$$

est appelé l'ensemble de niveau de  $f$  en  $\hat{x}$ .

$$\mathcal{L}_{=}(f(\hat{x})) = \{x \in X : f(x) = f(\hat{x})\}.$$

est appelé la courbe de niveau de  $f$  en  $\hat{x}$ .

$$\mathcal{L}_{<}(f(\hat{x})) = \mathcal{L}_{\leq}(f(\hat{x})) \setminus \mathcal{L}_{=}(f(\hat{x})) = \{x \in X : f(x) < f(\hat{x})\}.$$

est appelée l'ensemble de niveau strict de  $f$  en  $\hat{x}$ .

**Exemple 2.2.** Nous utilisons un exemple avec  $X = \mathbb{R}^2$ .

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . Soit  $\hat{x} = (3, 4)$  Par conséquent

$$\mathcal{L}_{\leq}(f(\hat{x})) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) \leq 25\}.$$

$$\mathcal{L}_{=}(f(\hat{x})) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = 25\}.$$

L'ensemble de niveau et la courbe de niveau sont illustrée dans la figure 2.7, c'est un disque et une cercle (respectivement) dans le plan  $x_1 - x_2$ .

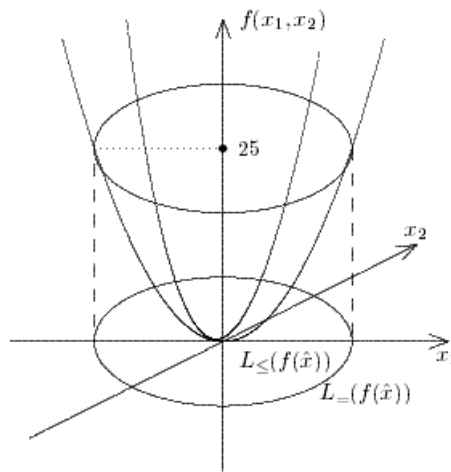


FIGURE 2.7 – L'ensemble de niveau et la courbe de niveau pour l'exemple 2.2

Pour le problème d'optimisation multi-critère nous considérons les ensembles de niveaux et Les courbes de niveaux de tous les objectifs  $f_1, f_2, \dots, f_p$  à  $\hat{x}$ .

Considérons un problème de bi-critère, et supposons que nous avons déterminé  $\mathcal{L}_{\leq}(f(\hat{x}))$  et  $\mathcal{L}_{<}(f(\hat{x}))$  on suppose que les courbes de niveau sont les frontières des ensembles de niveaux et les ensembles de niveaux stricts sont les intérieurs des ensembles de niveaux.

Maintenant nous pouvons formuler la caractérisation d'efficacité ( stricte, faible) en utilisant les ensembles de niveaux, et les courbes de niveaux

**Théorème 2.6. (Ehrgott et al. 1997)** Soit  $\hat{x} \in X$  une solution réalisable, on définit  $y_k^* = f_k(\hat{x})$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Alors

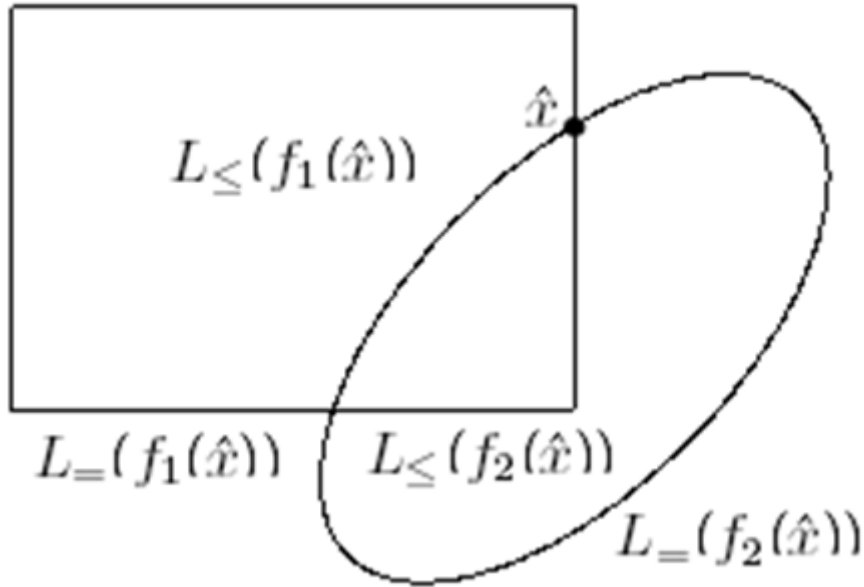


FIGURE 2.8 – L'ensemble de niveau et l'efficacité

1.  $\hat{x}$  est strictement efficace si et seulement si

$$\bigcap_{K=1}^p \mathcal{L}_{\preceq}(y_k^*) = \{\hat{x}\}$$

2.  $\hat{x}$  est efficace si et seulement si

$$\bigcap_{K=1}^p \mathcal{L}_{\preceq}(y_k^*) = \bigcap_{K=1}^p \mathcal{L}_{=}(y_k^*)$$

3.  $\hat{x}$  est faiblement efficace si et seulement si

$$\bigcap_{K=1}^p \mathcal{L}_{\prec}(y_k^*) = \emptyset.$$

### Démonstration.

1.  $\hat{x}$  est strictement efficace

$\iff$  Il n'y a pas de  $x \in X$ ,  $x \neq \hat{x}$  tel que  $f(x) \leq f(\hat{x})$ .

$\iff$  Il n'y a pas de  $x \in X$ ,  $x \neq \hat{x}$  tel que  $f_k(x) \leq f_k(\hat{x})$ , pour tout  $k = 1, \dots, p$ .

$\iff$  Il n'y a pas de  $x \in X$ ,  $x \neq \hat{x}$  tel que  $x \in \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_{\preceq}(y_k^*)$

$\iff \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_{\preceq}(y_k^*) = \{\hat{x}\}$ .

2.  $\hat{x}$  est efficace

$\iff$  Il n'y a pas de  $x \in X$ , tel que  $f_k(x) \leq f_k(\hat{x})$ , pour tout  $k = 1, \dots, p$ .

et  $f_j(x) < f_j(\hat{x})$  pour certain  $j$

$\iff$  Il n'y a pas  $x \in X$ , tel que  $x \in \bigcap_{K=1}^p \mathcal{L}_{\preceq}(y_k^*)$  et  $x \in \bigcap_{K=1}^p \mathcal{L}_{\prec}(y_k^*)$  pour certain  $j$ .

$\iff \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_{\preceq}(y_k^*) = \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_{=}(y_k^*)$ .

3.  $\hat{x}$  est faiblement efficace

$\iff$  Il n'y a pas  $x \in X$ , tel que  $f_k(x) < f_k(\hat{x})$ , pour tout  $k = 1, \dots, p$ .

$\iff$  Il n'y a pas  $x \in X$ , tel que  $x \in \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_{\prec}(y_k^*)$

$\iff \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_{\prec}(y_k^*) = \emptyset$ .

■

**Exemple 2.3.** On considère trois points dans le plan euclidienne,  $x^1 = (1,1)$ ,  $x^2 = (1,4)$  et  $x^3 = (4,4)$ . La location du problème est déterminer  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que la distance entre  $x$  et les trois points soit minimale.

On considère deux poids  $\omega^1 = (1,1,1)$  et  $\omega^2 = (2,1,4)$

Les deux fonctions objectifs sont mesurée par

$$f_k = \sum_{i=1}^3 w_i^k ((x_1^i - x_1)^2 + (x_2^i - x_2)^2)$$

Alors

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2(1 - x_1)^2 + (4 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 + 2(4 - x_2)^2 \\ &= (x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2) + 51 \\ f_2(x) &= 3(1 - x_1)^2 + 4(4 - x_1)^2 + 2(1 - x_2)^2 + 5(4 - x_2)^2 \\ &= 7\left(x_1^2 - \frac{38}{7}x_1 + x_2^2 - \frac{44}{7}x_2\right) + 149. \end{aligned}$$

Est-ce que le point  $x = (2,2)$  est un solution efficace

Donc nous identifions l'ensemble de niveau et la courbe de niveau en  $(2,2)$ , alors  $f_1(2,2) = 15$  et  $f_2(2,2) = 41$ .

L'ensemble de niveau  $\mathcal{L}_=(f_1(2,2)) = \{x \in \mathbb{R}^2 : f_1(x) = 15\}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} f_1(x) = 15 &\iff (x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2) + 51 = 15 \\ &\iff (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 1, \end{aligned}$$

et  $\mathcal{L}_=(f_2(2,2)) = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 1\}$ . Est un cercle de centre  $(2,3)$  et de rayon 1.

Pour  $f_2$  nous obtenons

$$\begin{aligned} f_2(x) = 41 &\iff 7\left(x_1^2 - \frac{38}{7}x_1 + x_2^2 - \frac{44}{7}x_2\right) + 149 = 41 \\ &\iff \left(x_1 - \frac{19}{7}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{22}{7}\right)^2 = \frac{89}{49}, \end{aligned}$$

et  $\mathcal{L}_=(f_2(2,2)) = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 19/7)^2 + (x_2 - 22/7)^2 = 89/49\}$ , est un cercle de centre  $\frac{19}{7}$  et de rayon  $\frac{89}{49}$ .

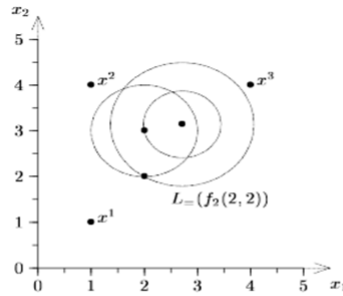
Dans la figure 2.9, nous observons que  $\bigcap_{i=1}^2 \mathcal{L}_\leq(f_i(2,2)) \neq \bigcap_{i=1}^2 \mathcal{L}_=(f_i(2,2))$  donc d'après le théorème de (Ehrgott)  $\hat{x}$  n'est pas efficace.

Notez que dans ce cas, les ensembles de niveaux sont tout simplement les disques entiers, les courbes de niveaux sont les cercles et les ensembles de niveaux stricts sont les intérieurs des disques.

Maintenant, nous vérifions si  $x = (2,3)$  est un solution efficace. Nous avons  $f_1(2,3) = 12$  et  $f_2(2,3) = 32$ .

Si on répéter les calculs, nous obtenons

$$f_1(x) = 12 \iff (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 0,$$



$\mathcal{L}_=(f_1(2,2,))$  est un cercle de centre  $(2,3)$  et de rayon  $1$ .  
 $\mathcal{L}_=(f_1(2,3))$  est  $\{(2,3)\}$ .  
 $\mathcal{L}_=(f_2(2,2))$  est un cercle de centre  $(\frac{19}{7}, \frac{22}{7})$  et de rayon  $\frac{89}{49}$   
 $\mathcal{L}_=(f_3(2,3))$  est un cercle de centre  $(\frac{19}{7}, \frac{22}{7})$  et de rayon  $\frac{26}{49}$ .

FIGURE 2.9 – Location du problème de l'exemple 2.3

d'où  $\mathcal{L}_=(f_1(2,3)) = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 0\} = \{(2,3)\}$ .

Pour  $f_2(x) = 32 \iff (x_1 - \frac{19}{7})^2 + (x_2 - \frac{22}{7})^2 = \frac{26}{49}$

et  $\mathcal{L}_=(f_2(2,3)) = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - \frac{19}{7})^2 + (x_2 - \frac{22}{7})^2 = \frac{26}{49}\}$ , est un cercle de centre  $(\frac{19}{7}, \frac{22}{7})$  et de rayon  $\frac{26}{49}$ .

Nous avons vérifiés si  $\mathcal{L}_=(f_1(2,3)) \cap \mathcal{L}_=(f_2(2,3))$  est le même que  $\mathcal{L}_\leq(f_1(2,3)) \cap \mathcal{L}_\leq(f_2(2,3))$ .

Mais pour  $x = (2,3)$  l'ensemble de niveau contient un seul point, ce qui est à la limite de  $\mathcal{L}_\leq(f_2(2,3))$ .

Ainsi  $x = (2,3)$  est un point efficace il est même strictement efficace.

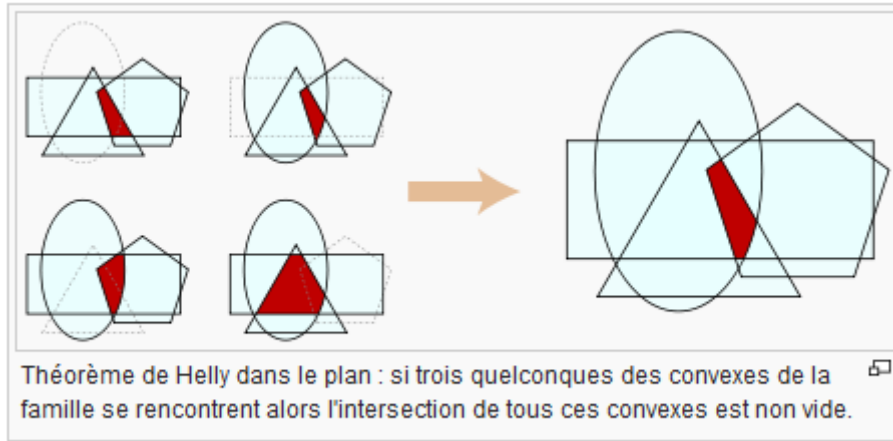
Pour le reste de cette section, nous supposons que  $X \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble convexe et  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions convexes. Cela implique que tous les ensembles de niveaux sont convexes. Le théorème sur intersections est connu dans l'analyse convexe : le théorème de Helly .

**Théorème 2.7. (Helly)** On considère  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  une famille finie de  $n$  ensembles convexes de  $\mathbb{R}^d$  (où on suppose que  $n \geq d + 1$ ). On suppose que, pour tout choix de  $d + 1$  convexes parmi  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , ces  $d + 1$  convexes se rencontrent. Il existe alors un point qui appartient à tous les  $Y_i$ .

**Corollaire 2.3.** Si  $(Y_i)_{i \in I}$  est une collection de sous-ensembles compacts convexes de  $\mathbb{R}^d$  et que pour toute partie  $J \subset I$  finie de cardinal inférieur ou égal à  $d + 1$ ,  $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$  alors l'intersection de tous les  $Y_i$  est non vide, c'est-à-dire  $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$ .

## 2.5 Les solutions efficaces propres

La difficulté principale lorsque l'on cherche à minimiser simultanément plusieurs critères est qu'il n'existe généralement pas de solution qui minimise tous les critères en même temps. En revanche, il existe (généralement) des solutions qui sont battues par au moins une autre solution sur tous les critères. On sait alors que de telles solutions ne peuvent pas intéresser le décideur puisqu'on peut en obtenir qui réalisent de meilleures performances sur tous les critères. Ces solutions sont appelées solutions de compromis. Lorsque nous résolvons notre problème d'optimisation multi-objectifs, nous obtenons une multitude de solutions. Seul un



nombre restreint de ces solutions va nous intéresser. Nous avons introduire la définition de **Geoffrion** des solutions efficaces avec compromis bornées, et quelques définitions d'efficacité propre appropriée par Borwein, Benson et Kuhn et Tukher.

**Une forme de dominance importante dans le monde de l'optimisation multi-objectifs est la dominance au sens de Geoffrion. Les solution optimales obtenues par ce type de dominance sont appelées les solutions Pareto optimales propres.**

**Définition 2.13. (Geoffrion)** Une solution  $\hat{x} \in X$  est appelée solution Pareto optimale propre si :

- Elle est Pareto optimale ;
- Il existe un nombre  $M > 0$  tel que  $\forall i$  et  $\forall x \in X$  vérifiant  $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ , il existe un indice  $j$  tel que

$$f_j(\hat{x}) < f_j(x) \text{ et } \frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M.$$

Comme mentionné dans l'introduction de cette section, Geoffrion est pas le seul l'à introduire des solutions efficaces propres. Avant de pouvoir présenter la définition de Borwein et Benson, nous devons introduire deux définitions des cônes reliés à des ensembles  $Y \subset \mathbb{R}^p$ .

**Définition 2.14.** Soit  $Y \in \mathbb{R}^p$  et  $y \in Y$ .

1. le cône tangent de  $Y$  à  $y \in Y$  est

$$T_Y(y) = \{d \in \mathbb{R}^p : \exists (t_K) \subset \mathbb{R}, (y^K) \subset Y \text{ telque } y^K \rightarrow y, t_K(y^K - y) \rightarrow d\}.$$

2. l'enveloppe conique de  $Y$  est

$$Cone(Y) = \{\alpha y : \alpha \geq 0, y \in Y\} = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha Y.$$

Notez que les conditions  $y^K \rightarrow y$ , et  $t_K(y^K - y) \rightarrow d$  dans la définition de le cône tangent implique que  $t_K \rightarrow \infty$ . On pourrait exiger de manière équivalente  $y^K \rightarrow y$ , et  $(\frac{1}{t_K})(y^K - y) \rightarrow d$ , d'où  $t_K \rightarrow 0$ . L'enveloppe conique d'un ensemble  $Y$  et le cône tangent de  $Y$  à un point  $y$  sont représentés sur la figure 2.10.

Le cône tangent est le cône de toutes les directions tangentielle à  $Y$  dans  $y$ .

Proposition 2.7 sur les propriétés des cônes tangents et des enveloppes coniques sera utile plus tard.

**Proposition 2.7.**

1. le cône tangent  $T_Y(y)$  est un cône fermé.
2. Si  $Y$  est convexe alors  $T_Y(y) = cl(\text{cone}(Y - y))$  et par suite c'est un cône convexe fermé.

**Démonstration. le cône tangent  $T_Y(y)$  est un cône fermé.**

D'abord notons que  $0 \in T_Y(y)$  (prendre  $y^k = y$  pour tous  $k$ ). Pour  $\alpha > 0, d \in T_Y(y)$  on obtient  $\alpha d \in T_Y(y)$ . Alors  $T_Y(y)$  est un cône, on prend  $\alpha t_K$  à la place de  $t_K$ .

Pour montrer qu'il est fermé il faut prendre une suite  $(d^l) \subset T_Y(y), y \in Y$ , avec  $d^l \rightarrow d$ , pour certain  $d \in \mathbb{R}^p$ . Depuis  $d^l \in T_Y(y)$ , pour tous  $l$  il existe des suites  $(y^{l,k}), (t_{l,k})$  dans la définition 2.14.

Pour la convergence, on fixe  $l$  il y'a un certain  $k_l$  tel que

$$\|t_{l,k_l}(y^{l,k_l} - y) - d^l\| \leq \frac{1}{l}$$

Pour tous  $K \geq k_l$ , nous fixons  $k_l$ , si  $l \rightarrow \infty, t_{l,k_l}(y^{l,k_l} - y) \rightarrow d$   
 $i, e, d \in T_Y(y)$ .

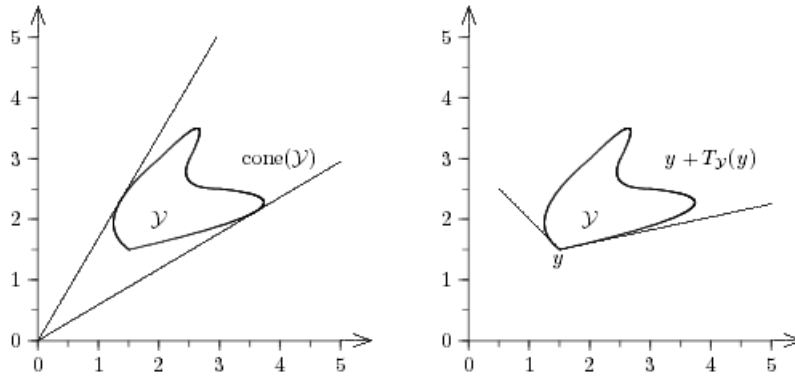


FIGURE 2.10 – Le cône tangente et l'enveloppe conique

**Si  $Y$  est convexe et  $T_Y(y) = cl(\text{cone}(Y - y))$ , alors  $T_Y(y)$  est cône convexe fermé**

Soit  $Y$  un convexe,  $y \in Y$ , par la définition de la fermeture de l'enveloppe conique, il est évident que  $cl(\text{cone}(Y - y))$  est un cône convexe fermé.

Pour voir que  $T_Y(y) \subset cl(\text{cone}(Y - y)), d \in T_Y(y)$ . Il y'a des suites  $(t_k), (y^k)$  avec  $t_k(y^k - y) \rightarrow d, t_k(y^k - y) \in \alpha(Y - y)$  pour certain  $\alpha > 0, d \in cl(\text{cone}(Y - y))$ .

Pour  $cl(\text{cone}(Y - y)) \subset T_Y(y)$ , nous savons que  $T_Y(y)$  est fermé et  $(Y - y) \subset T_Y(y)$ .

Soit  $d \in \text{cone}(Y - y)$  i, e  $d = \alpha(y' - y), \alpha \geq 0, y' \in Y$ .

On définit  $y^k = (1 - \frac{1}{k})y + (\frac{1}{k})y' \in Y$  et  $t_k = \alpha k \geq 0$  par conséquent

$$t_k(y^k - y) = \alpha k \left( \left( \frac{k-1}{k}y + \frac{1}{k}y' \right) - y \right) = \alpha((k-1)y + y' - ky) = \alpha(y' - y).$$

Donc  $y^k \rightarrow y$  et  $t_k(y^k - y) \rightarrow d$  implique  $d \in T_Y(y)$ .

■



**Définition 2.15.**

1. (**Borwein (1977)**) Une solution  $\hat{x} \in X$  est appelée efficace propre (au sens de Borwein ) si

$$T_{Y+\mathbb{R}_{\geq}^p}(f(\hat{x})) \cap (-\mathbb{R}_{\geq}^p) = \{0\}.$$

2. (**Benson (1979)**) Une solution  $\hat{x} \in X$  est appelée efficace propre si

$$cl(\text{cone}(Y + \mathbb{R}_{\geq}^p - f(\hat{x}))) \cap (-\mathbb{R}_{\geq}^p) = \{0\}.$$

**Théorème 2.8.**

1. Si  $x$  est efficace propre au sens de Benson, alors il est efficace propre au sens de Borwein.

2. Si  $X$  est convexe et  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont convexes, alors les deux définitions coïncident.

**Exemple 2.4.** On considère  $X = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  et  $f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2$ . Les deux points  $(-1, 0)$  et  $(0, -1)$  sont des solutions efficaces, mais n'est pas propre au sens de Borwein.

Le cône tangent traduit au point  $y = (-1, 0)$  contient toutes les directions dans lequel  $Y$  étend à partir de  $y$ .

La tangente de cercle  $(-1, 0)$  est une ligne verticale donc

$$T_Y(-1, 0) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 0\}$$

$$T_Y(-1, 0) \cap (-\mathbb{R}_{\geq}^p) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = 0, y_2 \geq 0\},$$

indiqué par la ligne en gras dans la figure 2.11. Une interprétation similaire applique à  $(0, -1)$ .

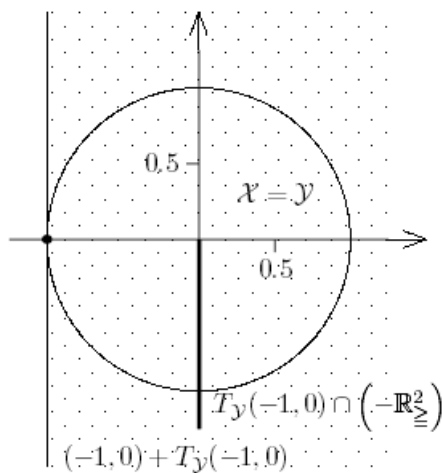


FIGURE 2.11 –

**Proposition 2.8.** *Si  $\hat{x}$  est efficace propre au sens de Borwein, alors  $\hat{x}$  est efficace.*

**Théorème 2.9. (Benson(1979))** *Une solution  $\hat{x} \in X$  est efficace propre au sens de Geoffrion si et seulement si elle est efficace propre au sens de Benson.*

Dans l'optimisation multi-critère, en particulier dans les applications, où  $X$  est donné implicitement par des contraintes,

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : (g_1(x), \dots, g_n(x)) \leq 0\}.$$

Pour de telles contraintes on a une autre définition de proprement efficace. Supposons que les fonctions d'objectifs  $f_i, i = 1, \dots, p$ , et les fonctions des contraintes  $g_i, i = 1, \dots, m$  sont continûment différentiables. Nous considérons le problème multi objective

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{avec } g \leq 0, \end{aligned}$$

ou  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Définition 2.16. (Kuhn and Tucker(1951))** *Une solution réalisable  $\hat{x} \in X$  est appelée proprement efficace (au sens de Kuhn- Tucker) si elle est efficace et si il n'y a pas  $d \in \mathbb{R}^n$  vérifiant*

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_K(\hat{x}), d \rangle & \leq 0 \quad \forall \quad K = 1, \dots, p \\ \langle \nabla f_j(\hat{x}), d \rangle & < 0 \quad \text{pour certain } j \in \{1, \dots, p\}, \\ \langle \nabla g_j(\hat{x}), d \rangle & \leq 0 \quad \forall \quad j \in J(x) = \{j = 1, \dots, m, g_j(\hat{x}) = 0\}. \end{aligned}$$

**Définition 2.17.** *Le problème d'optimisation multi-critère différentiable vérifie la contrainte de KT en  $\hat{x} \in X$ , si*

*pour  $d \in \mathbb{R}^n$  avec  $\langle \nabla g_j(\hat{x}), d \rangle \leq 0$  pour tous  $j \in J(x)$ , et pour  $\bar{t} > 0$  (un nombre réel), une fonction  $\theta : [0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\alpha > 0$ , tel que  $\theta(0) = \hat{x}, g(\theta(t)) \leq 0$  pour tous  $t \in [0, \bar{t}]$  et  $\theta'(0) = \alpha d$ .*

**Théorème 2.10. (Geoffrion(1968))** *Si le problème d'optimisation multi-critère différentiable vérifie la contrainte de KT en  $\hat{x}$  et  $\hat{x}$  est efficace propre au sens de Geoffrion, alors elle est efficace propre au sens de Kuhn - Tucker.*

**Théorème 2.11.** *Soit  $f_K, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , des fonctions convexes, continument différentiable et  $\hat{x}$  est efficace propre au sens de KT, alors elle est efficace propre au sens de Geoffrion.*

---

---

## CHAPITRE 3

---

# MÉTHODES D'OPTIMISATION MULTI-OBJECTIFS

### 3.1 Classification des méthodes de résolution

Dans le contexte de la résolution de (PMO), très peu sont les travaux sur les méthodes exactes. Parmi ces méthodes, qui ont porté essentiellement sur les problèmes à deux critères, nous trouvons le "branch et bound" [Sen et al. , 1988, Sayin et Karabati, 1999, Visée et al. , 1998], l'algorithme A [Stewart et White, 1991] et la programmation dynamique [White, 1982, Carraway et al. , 1990]. Ces méthodes restent efficaces pour des problèmes de petites tailles. Pour des problèmes de grandes tailles ou à plus de deux critères, il n'existe pas de procédures exactes efficaces, étant donné la complexité NP-difficile et le cadre multi-critère de ces problèmes. Ceci justifie le recours aux méthodes heuristiques qui sacrifient la complétude pour gagner l'efficacité.

Dans la littérature, nous trouvons deux classifications différentes des méthodes de résolution des (PMO). Le premier classement adopte un point de vue décideur. Le deuxième classement les méthodes suivant leur façon de traiter les fonctions objectifs.

**Le premier classement** divise ces méthodes en trois familles suivant la coopération entre la méthode d'optimisation et le décideur :

Les méthodes a priori : Dans ces méthodes, le décideur définit le compromis qu'il désire réaliser. Ainsi, il est supposé connaître a priori le poids de chaque objectif, ce qui revient à transformer le (PMO) en un problème mono-objectif. On retrouve dans cette méthode la plupart des méthodes par agrégation.

Les méthodes interactives : Dans ce cas, il y a coopération progressive entre la méthode d'optimisation et le décideur. Le décideur son choix de coma-fine promis au fur et à mesure du déroulement du processus de résolution à partir des connaissances acquises à chaque étape du processus.

Les méthodes a posteriori : Dans ce cas, le décideur choisit une solution parmi toutes les

solutions de l'ensemble (PO) fourni par la méthode d'optimisation.

Cette méthode est utilisable lorsque la cardinalité de l'ensemble (PO) est réduite. On peut trouver des méthodes d'optimisation multi-objectifs qui n'entrent pas exclusivement dans une famille. On peut utiliser, par exemple, une méthode a priori en lui fournissant des préférences choisies aléatoirement. Le résultat sera alors un ensemble (PO) à cardinalité élevée qui sera présenté au décideur pour qu'il choisisse une solution. Cette combinaison forme alors une méthode a posteriori.

Cette classification permet donc seulement de se faire une idée sur la démarche que l'on devra suivre pour obtenir la solution. La deuxième classification divise les méthodes de résolution de (PMO) en deux classes :

la classe de méthodes transformant le problème initial en un problème mono-objectif, ainsi ces méthodes retournent une solution unique, elles utilisent généralement des méthodes d'agrégation et la classe de méthodes fournissant un ensemble de solution (PO) : cette classe est aussi divisée en deux sous-classes

\* Les méthodes Pareto : ces méthodes utilisent directement la notion de dominance au sens de Pareto dans la sélection des solutions générées. Cette idée a été initialement introduite par Goldberg [Goldb] pour résoudre les problèmes proposés par Schaffer [Schaffer, 1985].

\* Les méthodes non Pareto : ces méthodes optimisent séparément les objectifs Nous allons décrire dans la suite de cette section des méthodes appartenant à la première classe. Nous allons nous focaliser pour les méthodes de la deuxième classe sur les méta heuristiques.

## 3.2 Méthodes de transformation en problèmes mono-objectif

Dans la résolution de (PMO), plusieurs méthodes traditionnelles les transforment le (PMO) en un problème mono-objectif. Parmi ces méthodes on trouve les méthodes d'agrégation et les méthodes  $\epsilon$ -contrainte.

### 3.2.1 Méthode d'agrégation

C'est l'une des premières méthodes utilisée pour la génération de solutions Pareto optimales. Elle consiste à transformer le problème (PMO) en un problème  $((PMO)_\lambda)$  qui revient à combiner les différentes fonctions coût  $f_i$  du problème en une seule fonction objectif  $F$  généralement de façon linéaire (Hwang and Masud, 1979) :

$$PMO_\lambda : \left\{ \begin{array}{l} \min F(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) \\ \lambda_i \in [0, 1]; \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right.$$

où les poids  $\lambda_i \in [0, 1]$  et  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

La figure illustre le fonctionnement de la méthode d'agrégation. Fixer un vecteur poids revient à trouver un hyperplan dans l'espace objectif (une droite pour un problème bi-critères) avec une orientation fixée. La solution Pareto optimale est le point où l'hyperplan possède une tangente commune avec l'espace réalisable (point  $x$  dans la figure 3.1).

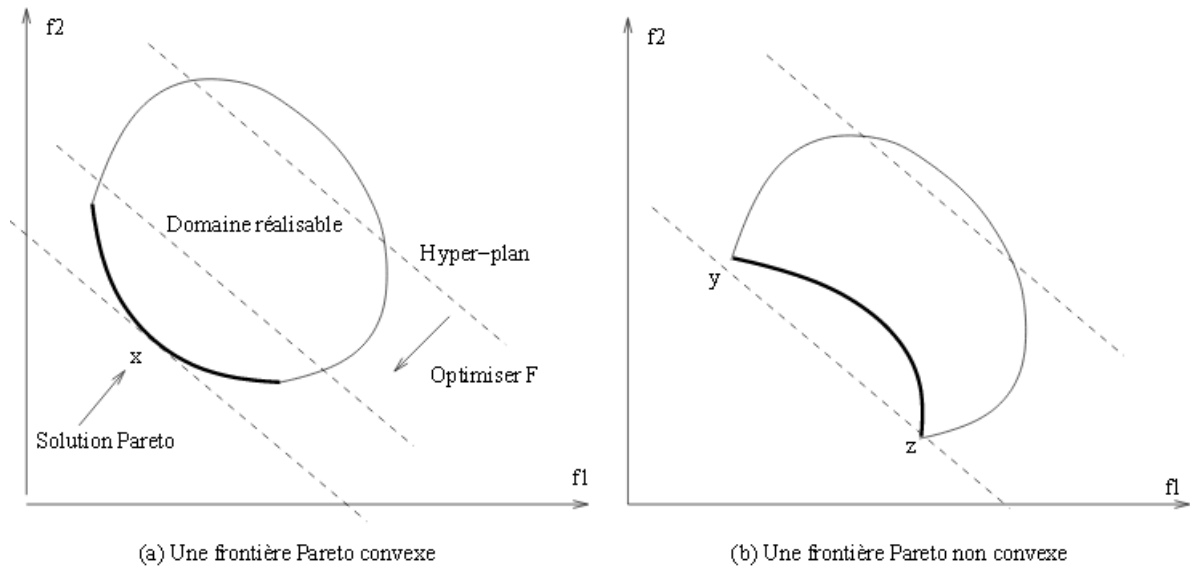


FIGURE 3.1 – La méthode d'agrégation.

Les résultats obtenus dans la résolution du problème  $((PMO)_\lambda)$  dépendent fortement des paramètres choisis pour le vecteur de poids  $\lambda$ . Les poids doivent aussi être choisis en fonction des préférences associées aux objectifs, ce qui est une tâche délicate. Ainsi, une approche généralement utilisée est de résoudre le problème  $((PMO)_\lambda)$  avec différentes valeurs de  $\lambda$ . Si les différents objectifs sont non-commensurables, on peut transformer l'équation précédente sous la forme :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i f_i(x)$$

où  $c_i$  sont des constantes qui mettent à la même échelle les différents objectifs. Les constantes  $c_i$  sont généralement initialisées à  $\frac{1}{f_i(\hat{x})}$ , où  $f_i(\hat{x})$  est la solution optimale associée à la fonction objectif  $f_i$ . Dans ce cas, le vecteur est normalisé par rapport au vecteur idéal.

### 3.2.2 Méthode $\epsilon$ -contrainte

Cette méthode consiste à retenir une des fonctions qu'il faut optimiser comme unique objectif et transformer les critères restants en contraintes. Le problème d'optimisation peut être donc reformulé sous la forme suivante  $k = 1, \dots, m$  :

$$(PMO)_k(\epsilon) : \begin{cases} \min f_k(x), \\ \text{avec } f_j(x) \leq \epsilon_j \quad j = 1, \dots, k, j \neq k \end{cases}$$

Où  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ . En d'autres termes, le problème consiste à retenir une fonction  $f_k$  comme critère unique à optimiser, tandis que les critères restants sont transformés en contraintes. Différentes valeurs de  $\epsilon$  peuvent être données pour pouvoir générer plusieurs solutions de compromis. La connaissance a priori des intervalles appropriés pour les valeurs  $\epsilon_i$  est requise pour tous les objectifs.

L'inconvénient principal de cette méthode est qu'elle nécessite une résolution mono-objectif pour chacune des solutions du front.

**Discussion** Cette méthode présente plusieurs inconvénients à savoir :

- La formulation des préférences est délicate et nécessite une connaissance approfondie du problème de départ.
- Les contraintes rajoutées compliquent la résolution du problème.

La figure 3.2 illustre la méthode  $\epsilon$ -contrainte pour un problème de maximisation bi-objectifs, où  $f(X)$  est l'espace objectif du problème original, restreint à  $f'(X)$  par la transformation du problème, en maximisant la fonction  $f_1$  et en rajoutant la contrainte  $f_2(x) \leq \epsilon_2$ .

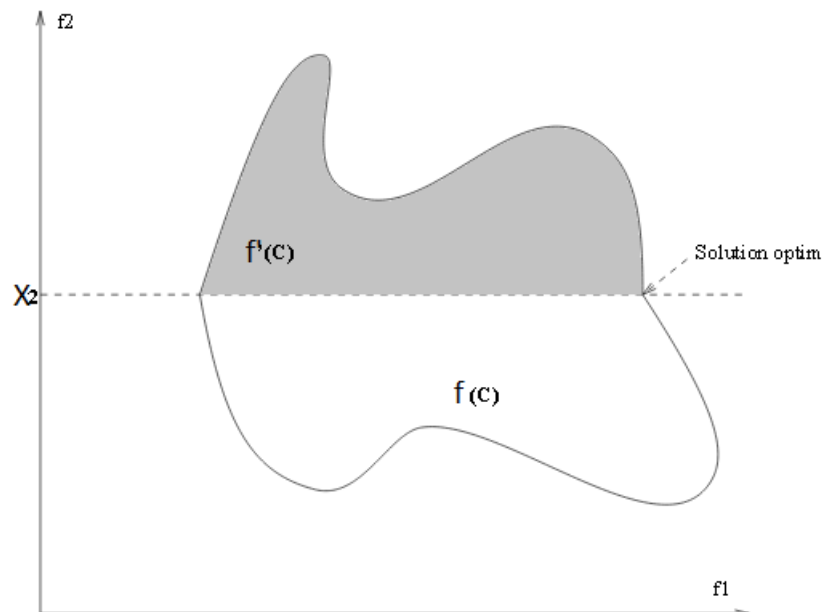


FIGURE 3.2 – La méthode  $\epsilon$ -contrainte.

**Théorème 3.1. Chankong et Haimes 1983** Supposons que  $X$  et  $f$  sont convexes. Si, pour un certain  $k$ ,  $\hat{x}$  est solution de  $((PMO)_k(\epsilon))$ , il existe alors  $\lambda$  tel que  $\hat{x}$  est solution de  $(PMO)_\lambda$ , et inversement.

### 3.3 Les méthodes non agrégées et non Pareto

Approches Non Pareto : ces approches transforment le problème d'origine. Elles effectuent leur recherche en traitant indépendamment chacun des objectifs. Ces méthodes ont souvent du mal à trouver les solutions de compromis puisqu'elles se focalisent sur les portions extrêmes du front.

Nous pouvons classer dans cette catégorie les méthodes lexicographiques qui donnent un ordre de priorité sur les objectifs à traiter.

#### 3.3.1 Méthode lexicographique

Dans cette méthode les objectifs sont préalablement rangés par ordre d'importance par le décideur. Ensuite, l'optimum est obtenu en minimisant tout d'abord la fonction objectif la plus importante puis la deuxième et ainsi de suite.

**Définition 3.1.** Une solution  $\hat{x} \in X$  est optimal au sens lexicographique si :

$$\hat{x} \leq_{lex} x, \forall x \in X - \{\hat{x}\}.$$

Si  $x, y \in X$ , on dit que  $x \leq_{lex} y$  s'il existe une valeur d'index  $q^*$  telle que :

$$x_q = y_q \text{ pour } q = 1, \dots, (q_1^*) \quad x_{q^*} < y_{q^*}.$$

La relation entre  $x_q$  et  $y_q$  pour  $q \geq q^*$  ne sont pas prises en compte car nous arrêtons à l'indice  $q^*$  (c'est le premier indice pour lequel  $x_q < y_q$ ).

Cette définition implique que l'utilisateur ait rangé par ordre d'importance les différents objectifs. La comparaison entre les deux solutions se fera dans l'ordre de classement des objectifs.

Illustrons l'utilisation de cette relation en prenant un exemple. Soient deux points

$A = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$  et  $B = (1, 2, 3, 9, 4, 9)$ . Pour ces deux points, on a :  $A \leq_{lex} B$  car, jusqu'à la 3<sup>ème</sup> position, on a  $A_i = B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  et pour la 4<sup>ème</sup> position, on a  $4 < 9$ . On conclut donc que  $A$  domine lexicographiquement la solution  $B$ . La procédure est répétée jusqu'à ce que tous les objectifs soient traités. La solution obtenue à l'étape  $k$  sera la solution de la procédure.

**Critique :** Le risque essentiel de cette méthode est la grande importance attribuée aux objectifs classés en premier. La meilleure solution  $f_1^*$  trouvée pour l'objectif le plus important va faire converger l'algorithme vers une zone restreinte de l'espace d'état.

---

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce mémoire avait pour objectif de présenter dans un premier temps les principales définitions nécessaires à la présentation des problèmes d'optimisation multi-objectifs. Puis différentes problématiques liées aux spécificités du multi-objectifs, comme l'intervention du décideur dans le processus de décision, les choix des méthodes d'optimisation à utiliser ou encore l'analyse de performances ont été évoquées afin de montrer l'étendue du spectre des recherches dans le domaine.



---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] habil. Matthias Ehrgott, Multicriteria Optimization, Université Auckland.
- [2] Ihsen saad, Mohamed Benrejeb, Optimisation multicritère par Pareto-optimalité de problèmes d'ordonnancement en tenant compte du coût de la production, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 2015.
- [3] Alain Berro, Optimisation multi-objectifs discrète par propagation de contraintes, Université des Sciences Sociales Toulouse I, 2001.
- [4] Halima Mahideb, L'optimisation multi-objectifs basée sur l'intelligence computationnelle, Université Constantine 2, 2014.
- [5] Daniel VANDERPOOTEN LAMSADE, Aide multicritère à la décision Optimisation multi-objectifs, Université Paris Dauphine, 2011.
- [6] Hafid Zidani, Représentation de solution en optimisation continue multi-objectifs et applications, Université Mohammed V-Agdal, 2014.
- [7] Yacine Kessaci, Nouredine Melab, El-Ghazali Talbi, Optimisation multi-critère pour l'allocation de ressources sur clouds distribuées avec prise en compte de l'énergie, 2011.
- [8] Ouiza ZERDANI, L'Optimisation non Linéaire multi-objectifs, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2013.

