Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

Arrous mouna et Ghalmi khalissa

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : système dynamique

Thème

Étude théorique d'un problème aux limites parabolique gouverné par l'équation de Navier-Stokes instationnaire.

Soutenu publiquement le 05 septembre 2020 devant le jury composé de

DR. S.AZRA	Président
DR. H.DEBBICHE	Encadrant
DR. D.BENTERKI	Examinateur

Promotion 2019/2020

Table des matières

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Ma mère, qui m'a entouré d'amour et d'affection, qui m'a toujours soutenu et qui a œuvré pour ma réussite.
Mon père que je ne remercierai jamais assez pour ses sacrifices consentis afin que je puisse réussir et être ce que je suis aujourd'hui.
À ma promotrice Mlle.Hanene Debbiche .
Ma chère binôme « Mouna » et à toute sa famille
À mes chères sœurs Safa et Afaf pour leurs encouragements et à tous les membres de ma famille.
Ma meilleure amie Bouchra qui n'a pas cessé d'être un grand support pour moi malgré la distance.
Mes chères amies Samiha, Asma, Imene et Ahlam et tous mes amis que je n'ai pas cité.

Khalissa.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui na jamais dit non à mes exigences et qui na épargné aucun effort pour me rendre heureuse mon adorable mère .
Mon père que je ne remercierai jamais assez pour ses sacrifices consentis afin que je puisse réussir et être ce que je suis aujourd'hui.
À ma promotrice Mlle.Hanene Debbiche .
À mes oncles et tous les membres de la famille.
Mes meilleures amies Souad et Imene , et tous mes amis que je n'ai pas cité.
Sans oublier mon binôme Khalissa pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension de ce projet

Mouna.

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le bon Dieu qui nous a donnée la force, la santé et la patience pour achever ce modeste travail.

Nous tenons à saisir cette occasion et adresser nos profonds remerciements à notre promotrice Mlle. Hanene Debbiche pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire. Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu voir le jour sans ses précieux conseils, son soutien et son suivi.

Nous adressons non sincères remerciements à l'ensemble des enseignants et le personnel d'administration de la Faculté des Mathématique et de l'informatique Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi qui ont contribué à notre formation.

Nous remercions tous ceux qui ont collaboré de prés ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Nous profitons de cette occasion pour remercier nos familles et nos amis pour leur aide et leur soutien.

Introduction

Les équations de Navier-Stokes, dont l'origine remonte au XVIII^e siècle, décrivent le mouvement d'un fluide. En 1755, Leonhard Euler applique les lois de Newton à des volumes infinitésimaux de fluide sans tenir compte des phénomènes de viscosité donnant vie aux équations qui portent son nom. Puis en 1822, Claude-Luis Navier (mathématicien et ingénieur (1785-1836)) à la suite des travaux d'Euler, présente dans un rapport à l'Académie des Sciences, les équations générales du mouvement d'un fuide en tenant compte pour la première fois, du frottement intérieur du fuide, c'est-à-dire de la viscosité. Ces lois sont acceptées et utilisées par les ingénieurs et les physiciens et sont connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes, car George Gabriel Stokes (mathématicien et physicien britannique né en Irlande (1819-1903)) le premier, les a intégrées dans différents cas relativement simples.
Les équations de Navier-Stokes sont alors établies. A ces dernières s'ajoutent les deux équations de conservation de la masse et de l'énergie, forment le système des équations de Navier-Stokes.
Le système des équations de Navier-Stokes n'a jamais été aussi important que depuis l'an 2000, date à laquelle l'institut Clay de mathématiques l'a proposé dans la liste des sept ≪ problèmes de millénaire ≫. En effet, pour ce système, aucun théorème d'existence global de solutions régulières assorties de conditions initiales réalistes ne peut énoncé aujourd'hui.
Les problèmes d'écoulement des fluides sont impliqués dans plusieurs phénomènes physiques et jouent un rôle important dans de nombreuses applications industrielles. Le modèle fondamental en mécanique des fluides est le système bien connu de Navier-Stokes pour les fluides visqueux incompressibles qui a été intensivement étudié au cours des 80 dernières années. Souvent, dans l'analyse de l'écoulement des fluides Newtoniens, la propriété de la viscosité est considérée comme un paramètre constant. Cette forte simplification du modèle du mouvement de l'écoulement peut être justifiée pour l'écoulement isotherme. Nous considérons dans ce travail un écoulement de fluide incompressible instationnaire avec une viscosité constante. Plusieurs expériences ont montré que la condition classique d'adhérence/non glissement entre le fluide et la partie inférieure en mouvement de la frontière de son domaine n'est pas satisfaite et le comportement réel semble être donné par une condition de frottement de type Tresca [19]. Ce genre de condition aux limites non linéaire a été introduite par H. Fujita lors de ses conférences au Collège de France [8]. Pour le problème stationnaire, les propriétés d'existence, d'unicité et de régularité des solutions ont été établies par H. Fujita et N. Saito ([9], [21]). Pour le problème de Stokes linéaire instationnaire, l'existence et l'unicité d'une solution sont prouvées par H. Fujita [10] .

Pour résoudre un problème d'écoulement, il faut connaitre :
Les conditions initiales : initialement à $t = 0$, quel était la configuration de l'écoulement ?
Les conditions aux limites : au frontières du domaine qu'impose-t-on à l'écoulement ?
Pour les conditions aux limites, il y a deux types

- Conditions aux limites non glissement (par exemple les conditions aux limites de Dirichlet pour la vitesse).

- Les conditions aux limites de glissement qui peut être modélisé par des différentes loi de frottement par exemple la loi de Tresca.

Dans ce mémoire, on s'intéresse au système de Navier-Stokes comme dans [2] mais ici, on simplifie l'étude, on pend la condition de Dirichlet homogène et la condition de Tresca.
Dans [2] ,les auteurs ont pris de plus la condition de Dirichlet non homogène. Pour ramener à des conditions aux limites homogènes , ils ont fait un changement d'inconnue.
Le système de Navier-Stokes est donné par

$$N-S\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}+v\cdot\nabla v=f+\mathrm{div}(2\mu D(v))-\nabla p, \qquad \text{dans } \Omega\times(0,\tau),\\[2mm] \mathrm{div}(v)=0, \qquad \text{dans } \Omega\times(0,\tau).\\[2mm] v=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\times(0,\tau),\\[2mm] v_n=v\cdot n=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0\times(0,\tau),\\[2mm] |\sigma_{\mathcal{T}}|<\ell\Rightarrow v_{\mathcal{T}}=0, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Gamma_0\times(0,\tau),\\ |\sigma_{\mathcal{T}}|=\ell\Rightarrow\exists\lambda\geq 0 \quad \text{tel que} \quad v_{\mathcal{T}}=-\lambda\sigma_{\mathcal{T}},\\[2mm] v(0,.)=v_0, \quad \text{dans} \quad \Omega.\end{cases}$$

Ce mémoire est structuré comme suit :
Dans le premier chapitre, nous présentons quelques notions sur l'analyse fonctionnelle (les espaces de Hilbert, espaces de Lebesgue et Sobolev, théorèmes d'existence pour le système différentiel,...).
Dans le deuxième chapitre, on fait une description du problème parabolique gouverné par deux lois de conservation (conservation de la masse et conservation de la quantité du mouvement). Ensuite, on établit la formulation variationnelle de ce problème, avec la condition de Tresca on obtient que la formulation variationnelle du problème est donnée par une inéquation variationnelle parabolique.
Le troisième chapitre, est consacré essentiellement à l'étude de l'existence de solutions du problème obtenu dans le chapitre 2, par la méthode de Galerkin en utilisant une pénalisation de la divergence de la vitesse.
Enfin, on termine notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Quelques outils mathématiques

L'objectif de ce chapitre est de donner et rappeler quelques définitions et théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle, théorème d'existence de Carathéodory pour le système différentiel, le lemme de Gronwall, différentiabilité et convexité qui seront utilisées dans les chapitres ultérieurs.

1.1 Topologies faibles

La boule unité fermée d'un espace normé est compacte pour la topologie fortes si et seulement si cet espace est de dimension finie alors l'importance fondamentale des topologies faibles est de gagner la compacité dans les espaces de dimension infinie.
Soit E un espace de Banach (**ie, espace vectoriel normé complet**) et soit $f \in E'$ (E' le dual topologique de E qui est l'espace des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} |\langle f, x\rangle_{E',E}| \ ,$$

où $\langle ., .\rangle_{E',E}$ désigne le crochet de dualité entre E' et E . Soit E'' son bidual, (i.e le dual de E') muni de la norme

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} |\langle \xi, f\rangle_{E'',E'}.$$

où $\langle ., .\rangle_{E'',E'}$ désigne le crochet de dualité entre E'' et E'.

1.1.1 Définition et propriétés élémentaires de la topologie faible

On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle_{E',E}$. Lorsque f décrit E' on obtient la famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

Définition 1.2. *Soit (x_n) une suite d'éléments de E, si $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$, on notera et on dira que $x_n \rightharpoonup x$ converge faiblement vers x dans E.*

Proposition 1.1. *[4] Soit (x_n) une suite de E, on a :*

(i). $\big[x_n \rightharpoonup x \text{ pour } \sigma(E, E')\big] \Longleftrightarrow \big[\langle f, x_n\rangle_{E',E} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{E',E}, \forall f \in E'\big].$

(ii). Si $x_n \rightharpoonup x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.

(iii). Si $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E^{'})$ *alors* $\|x_n\|$ *est bornée et*

$$\|x\| \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \|x_n\|.$$

(iv). Si $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E^{'})$ *et si* $f_n \longrightarrow f$ *fortement dans* $E^{'}$*(i.e*$\|f_n - f\|_{E'} \longrightarrow 0)$ *alors* $\langle f_n, x_n \rangle_{E',E} \longrightarrow \langle f, x \rangle_{E',E}$.

Remarque 1.1. *Lorsque* E *est de dimension finie, la topologie faible* $\sigma(E, E^{'})$ *et la topologie usuelle coïncident. En particulier une suite* (x_n) *converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

1.1.2 La topologie faible *

On va définir maintenant une troisième topologie sur $E^{'}$ la topologie faible $*$ que l'on note $\sigma(E', E)$. Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ définie par

$$f \longmapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle_{E',E}.$$

Lorsque x parcourt E on obtient une famille d'application $(\varphi_x)_{x \in E}$ de $E^{'}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3. *La topologie faible* $*$ *désignée aussi par* $\sigma(E^{'}, E)$ *est la topologie la moins fine sur* $E^{'}$ *rendant continues toutes les applications* $(\varphi_x)_{x \in E}$.

Proposition 1.2. *[4]*

(i). $[f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E^{'}, E)] \Longleftrightarrow [\langle f_n, x \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle, \ \forall x \in E]$.

(ii). Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E^{'}, E)$ *alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|$.

(iii). Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E^{'}, E)$ *et si* $x_n \rightharpoonup x$ *fortement dans* E, *alors* $\langle f_n, x_n \rangle_{E',E} \longrightarrow \langle f, x \rangle_{E',E}$.

Théorème 1.1. ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** [4] *L'ensemble* $B_{E'} = \left\{ f \in E^{'} : \ \|f\| \leqslant 1 \right\}$ *est compact pour la topologie faible* $*$ $\sigma(E^{'}, E)$.

Définition 1.4. ***(Densité)*** *Soit* E *un espace vectoriel normé et* D *une partie de* E *. On dit que* D *est dense dans* E *si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *Pour tout* $x \in E$, *il existe une suite* (y_n) *d'éléments de* D *qui converge vers* x,
2. *pour tout* x *de* E, *pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $y \in D$ *avec* $\|y - x\| \leqslant \epsilon$,
3. *l'adhérence* $\overline{D}$ *de* D *est égale à* E.

Théorème 1.2. [4] *Soit* E *un espace de Banach séparable (contient un sous ensemble dense et dénombrable) et soit* (f_n) *une suite bornée dans* $E^{'}$, *alors il existe une sous-suite extraite* (f_{n_k}) *qui converge pour la topologie* $\sigma(E^{'}, E)$.

1.1.3 Espaces réflexifs

Une injection canonique $J : E \to E^{''}$ définie comme suit
Soit $x \in E$ fixé, l'application $f \mapsto \langle f, x \rangle_{E',E}$ de E dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur $E^{'}$. Un élément de $E^{''}$ noté Jx, on a donc

$$\langle Jx, f \rangle_{E'',E'} = \langle f, x \rangle_{E',E}, \ \forall x \in E, \forall f \in E^{'}.$$

Définition 1.5. *Soit* E *un espace de Banach et soit* J *l'injection canonique de* E *dans* $E^{''}$, *on dit que* E *est réflexif si* $J(E) = E^{''}$ *(i.e.J surjectif).*

Théorème 1.3. ***(Kakutani)*** [4] *Soit E un espace de Banach, alors E est réflexif si et seulement si $B_E = \left\{x \in E, \|x\| \leqslant 1\right\}$ est compact pour la topologie $\sigma(E, E^{'})$.*

Théorème 1.4. *[4] Soit E un espace de Banach réflexif et soit (x_n) une suite bornée dans E, alors il existe une sous-suite extraite (x_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E, E^{'})$.*

Proposition 1.3. [4] *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé, alors M muni de la norme induite par E est réflexif.*

Corollaire 1.1. [4] *Soit E un espace de Banach, alors E est réflexif si et seulement si $E^{'}$ est réflexif.*

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.6. *Soit H un espace vectoriel (réel ou complexe), on appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire symétrique resp hermitienne qui est définie positive.*

On notera $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in H$ cela signifie que l'application :

$$\begin{aligned} \langle ., .\rangle : H \times H &\longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \textit{ ou } \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y\rangle, \end{aligned}$$

vérifie

1. $\forall y \in H\,;\, \forall x \in H \longmapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. $\forall x, y \in H$, on a :$\begin{cases} \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle & \textit{dans } \mathbb{R}, \\ \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} & \textit{dans } \mathbb{C}. \end{cases}$
3. $\forall x \in H$, on a : $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ et $\langle x, x\rangle = 0$ ssi $x = 0$.

Définition 1.7. *Si un espace vectoriel H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace préhilbertien.*

Notation : Puisque $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ on peut poser $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Corollaire 1.2. *L'expression $\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$ définit une norme sur H appelée norme hilbertienne.*

Définition 1.8. ***(Espace de Hilbert)*** *Si un espace préhilbertien est complet pour sa norme hilbertienne, on dit que c'est un espace de Hilbert.*

Exemple 1.1.

1. *Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.*
2. *L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites complexes $(x_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$ muni de*

$$\left\langle (x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}\right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, \overline{y_n}.$$

1.2.1 Orthogonalité

Définition 1.9. ***(Orthogonalité)*** *On dit que deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien H sont orthogonaux, si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Définition 1.10. ***(Ensemble convexe)*** *Soit A un sous ensemble d'un espace vectoriel E, on dit que A est convexe ssi :*

$$\forall x, y \in A,\ \forall \alpha \in [0,1], (1-\alpha)\, x + \alpha\, y \in A.$$

Autrement dit, un ensemble est convexe s'il contient toute segment passant par deux de ses points.

Théorème 1.5. ***(Projection sur un convexe fermé)*** *Soit H un espace de Hilbert et soit A une partie convexe et fermé, non vide de H, alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in A$ tel que : $\|x - y\| = \inf_{a\in A} \|x - a\|$ on dit que $y = P_A(x)$ est la projection de x sur A.*

Remarque 1.2. [4] *La projection $P_A(x)$ est caractérisée par*

1) $\forall a \in A, Re\big(\langle x - P_A(x), a - P_A(x)\rangle\big) \leqslant 0$.

2) L'application $\quad x \mapsto P_A(x)$ est 1-lipschitzienne.

Définition 1.11. ***(Base Hilbertienne)*** *On appelle base Hilbertienne une suite (e_n) d'éléments de H tels que*

(i). $\|e_n\| = 1 \quad \forall n, \langle e_m, e_n\rangle = 0\ \forall m, n, m \neq n$. (i.e$(e_n)$ est une base orthonormée).

(ii). L'espace vectoriel engendré par les e_n est dense dans H.

Théorème 1.6. [4] *Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.*

Théorème 1.7. ***(Projection sur un s.e.v de dimension finie)****[11] Soit $e_1, ...e_n$ un système orthonormal fini et $V = Vect[e_1, ...e_n]$ le sous-espace vectoriel de H engendré par les e_i. Alors,*

$$\forall x \in H,\ P_V(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, e_i,$$

où $P_V(x)$ est la projection orthogonale de x sur V.

1.3 Espaces de Lebesgue et de Sobolev

Les outils d'analyse fonctionnelle sont les ingrédients quasiment essentiels à l'étude des équations aux dérivées partielles, notamment l'espace de Lebesgue et celui de Sobolev. Les espaces de fonctions à valeurs vectorielles sont adaptés à l'étude de problèmes d'évolution. On rappelle dans cette partie des résultats fondamentaux pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

En mathématiques, un domaine lipschitzien (ou domaine « à frontière lipschitzienne ») est un ouvert d'un espace euclidien dont la frontière est « suffisamment régulière », dans le sens qu'elle peut localement être représentée comme le graphe d'une fonction continue lipschitzienne.

Dans toute la suite de ce chapitre Ω désigne un domaine (ouverte connexe) lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue dx et p.p=presque partout (=sauf sur un ensemble négligeable (de mesure nulle)).

1.3.1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.12. *Pour p donné avec $1 \leqslant p < \infty$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de fonctions) v mesurables sur Ω et telle que*

$$\|v\|_p = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pour $p = \infty, L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions v mesurables et essentiellement bornées sur Ω i.e, il existe une constante C telle que $|v| \leqslant C$ p.p. sur Ω, muni de la norme

$$\|v\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} |v(x)| = \inf\{C; |v(x)| \leq C \ p.p.\ x \in \Omega\}.$$

***En particulier**, pour $p = 2, L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Exemple 1.2. *La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$. En effet, on a*

$$\begin{aligned}\int_\mathbb{R} f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} [\arctan x]_a^b \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi < \infty.\end{aligned}$$

Quelques inégalités utiles

Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Théorème 1.8. ***(Inégalité de Young)*** *Soit $a, b \geqslant 0$ et $p \in]1, \infty[$. Alors,*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Preuve . *On a la fonction* $\log$ *est concave sur* $]0, \infty[$,

$$\log\left(\frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{p'}\,b^{p'}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\,\log b^{p'} = \log ab,$$

d'où le résultat. ∎

Lemme 1.1. *Pour tout $p > 1$, on a*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \quad \forall a, b \geq 0.$$

Preuve . On a

$$(a+b)^p = 2^p\Big(\Big(\frac{1}{2}(a+b)\Big)^p\Big).$$

Considérons la fonction ν_p définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\nu_p(z) = z^p,$$

on a

$$\nu_p'(z) = pz^{p-1}, \quad \nu_p''(z) = p(p-1)z^{p-2},$$

pour $p > 1$ on a $\nu_p''(z) \geq 0$ donc ν_p est convexe donc, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\nu_p\Big(\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2\Big) \leq \frac{1}{2}\nu_p(z_1) + \frac{1}{2}\nu_p(z_2).$$

Avec cette inégalité, on a

$$\begin{aligned}(a+b)^p &= 2^p\Big(\Big(\frac{1}{2}(a+b)\Big)^p\Big)\\ &\leq 2^p\Big(\frac{1}{2}(a^p+b^p)\Big)\\ &\leq 2^{p-1}(a^p+b^p).\end{aligned}$$

■

Théorème 1.9. ***(Inégalité de Hölder)*** [4] *Si* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *et* $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ *alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega \big|f(x)g(x)\big| \,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Si $p = p' = 2$, *on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Théorème 1.10. $L^p(\Omega)$ *est un espace vectoriel et* $\|.\|_p$ *est une norme pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

Preuve . Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont évidents. Supposons que $1 < p < \infty$ et soient $f, g \in L^p(\Omega)$, on a :

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant (|f(x)|+|g(x)|)^p \leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p),$$

par conséquent $f + g \in L^p(\Omega)$, d'autre part on a

$$\|f+g\|_p^p = \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f+g| \,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f| \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g| \,\mathrm{d}x,$$

or $|f+g|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ et grâce à l'inégalité de Hölder on obtient

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p-1}\|f\|_p + \|f+g\|_p^{p-1}\|g\|_p,$$

d'où

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p,$$

cette inégalité s'appelle l'inégalité de Minkowski.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(\Omega)$. On a

$$\int_\Omega |\alpha f(x)|^p \,\mathrm{d}x = |\alpha|^p \int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty,$$

donc $\alpha f \in L^p(\Omega)$. D'après les propriétés précédentes on déduit que l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel.

L'application $\|\cdot\|_p : f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega)$. En effet, on a

1. $\|f\|_p \geq 0$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$.
2. $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$ pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. L'inégalité de Minkowski donne $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour tous $f, g \in L^p(\Omega)$.
4. $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$.

■

Lemme 1.2. (Lemme de Fatou) [4] *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que*

- *pour chaque n, $f_n(x) \geq 0$ p.p. sur Ω,*
- $\sup_n \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose

$$f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x),$$

alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 1.11. (Convergence dominée dans $L^p(\Omega)$) [17] *Soient $p \in [1,\infty[$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$. On suppose que*

1- *$f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω,*

2- *il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque n on a*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p sur } \Omega.$$

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$(c'est-à-dire $\|f_n - f\|_p \to 0$).

Théorème 1.12. ***(Fischer-Riesz)*** *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Preuve . Cas 1 : Si $p = \infty$.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(\Omega)$. Pour $k, m, n \geq 1$, on définit :

$$\begin{aligned}
&A_k = \{x \in \Omega, |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}, \\
&B_{m,n} = \{x \in \Omega, |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\}, \\
&E = (\cup_k A_k) \cup (\cup_{n,m} B_{m,n}).
\end{aligned}$$

Par définition de la norme infinie les ensembles A_k et $B_{m,n}$ sont de mesure nulle, on en déduit que

$$mes(E) \leqslant \sum_k mes(A_k) + \sum_{m,n} mes(B_{n,m}) = 0.$$

2. Sur $\Omega \setminus E$, on a :

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty,$$

c-à-d, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de Cauchy uniforme sur $\Omega \setminus E$.
En particulier, pour tout $x \in \Omega \setminus E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy réelle qui converge car $\mathbb{R}$ est complet. On note f la limite ponctuelle de f_n sur $\Omega \setminus E$. On a

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\longrightarrow\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{m\longrightarrow\infty} \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_ε tel que pour $n, m > N_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Alors pour $n > N_\varepsilon$,

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\Omega \setminus E$.

3. En posant $f = 0$ sur E. Pour $n > N_\varepsilon$ et $x \in \Omega \setminus E$, on a
$$|f(x)| < |f_n(x)| + \varepsilon \leq \|f_n\|_\infty + \varepsilon,$$
on en déduit que $\|f\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty + \varepsilon < \infty$, donc $f \in L^\infty(\Omega)$. Ainsi $L^\infty(\Omega)$ est complet.

Cas 2 : Si $p \in [1, \infty[$.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Par récurrence, on construit une sous-suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \geq 0$, il existe un $n_{k+1} > n_k$ tel que
$$n, m \geq n_k \Longrightarrow \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}.$$
On pose
$$g_k(x) = \sum_{i=0}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|,$$
pour tout $k \geq 0$, on a
$$\|g_k\|_p = \left\| \sum_{i=0}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| \right\|_p.$$
D'après l'inégalité de Minkowski,
$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=0}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \sum_{i=0}^{k} 2^{-i} < 2.$$
D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que $g_k(x)$ converge p.p. sur Ω vers une limite finie noté $g(x)$ avec $g \in L^p(\Omega)$.
D'après le lemme de Fatou, on déduit que $\|g\|_p \leq 2$.
2. La suite $(g_k^p)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions intégrables, positives et telles que
$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_k^p \, \mathrm{d}x \leq 2^p < \infty.$$
Par le théorème de convergence monotone on obtient
$$\sup_{k\in\mathbb{N}} g_k < \infty \text{ p.p sur } \ \Omega.$$
Plus précisément, il existe E tel que $mes(E) = 0$ et
$$\sum_{i=0}^{\infty} |(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| < \infty \text{ sur } \Omega \setminus E.$$
D'autre part, on a évidemment :
$$f_{n_k}(x) = f_{n_0}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)), \forall x \in \Omega.$$
On définit
$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} f_{n_k}(x) \quad si \quad x \in \Omega \setminus E, \\ 0 \quad si \quad x \in E. \end{cases}$$

Puisque $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ p.p sur Ω et que $|f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + g(x)$ p.p sur Ω, le théorème de convergence dominée dans $L^p(\Omega)$ 1.11 montre que $f \in L^p(\Omega)$ et $\|f_{n_k} - f\|_p \longrightarrow 0$. Enfin, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, on en déduit que $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$. En conclusion $L^p(\Omega)$ est complet.

■

Le tableau suivant résume les principales propriétés des espaces $L^p(\Omega)$

	Réflexif	Séparable	Espace dual
$L^p(\Omega)$ $1 < p < \infty$	oui	oui	$L^{p'}(\Omega)$
$L^1(\Omega)$	non	oui	$L^\infty(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	non	non	contient strictement $L^1(\Omega)$

Définition 1.13. *On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω :*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \Big\{ f \in C^\infty(\Omega) : supp(f) \ borné, supp(f) \subset \Omega \Big\},$$

où $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Exemple 1.3. *Dans $\mathbb{R}$ la fonction définie sur $]-1,1[$ par $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ et sur $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$ par $\varphi(x) = 0$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, son support est $[-1,1]$.*

Définition 1.14. *Une distribution T sur Ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ ($\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$)*

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow < T, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.13. ***(Densité)*** [4] *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, $\forall\, 1 \leqslant p < \infty$.*

Théorème 1.14. ***(Comparaison entre les espaces** $L^p(\Omega)$**)*** [6]
Supposons que

$$vol(\Omega) = \int_\Omega \mathrm{d}x < \infty.$$

Alors

1) $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leqslant (vol(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|v\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall v \in L^q(\Omega).$
2) $\lim\limits_{p\to\infty} \|v\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \ \forall v \in L^\infty(\Omega).$
3) *Supposons que, pour tout $1 \leqslant p < \infty$, on a $v \in L^p(\Omega)$, et qu'il existe une constante C telle que $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C$. Alors $v \in L^\infty(\Omega)$.*

Ici et partout dans ce mémoire, $E \hookrightarrow F$, pour $(E, \ \|.\|_E)$ et $(F, \ \|.\|_F)$ espaces normés, signifie $E \subset F$ avec l'injection continue, c'est-à-dire, il existe une constante C telle que

$$\|u\|_F \leq C\|u\|_E, \qquad \forall u \in E.$$

En outre, on écrit $E \hookrightarrow_{compacte} F$ si de toute suite bornée dans E, on peut extraire une sous suite qui converge dans F.

1.3.2 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Définition 1.15. *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) | \exists g_1, g_2, .., g_d \in L^2(\Omega), \quad \textit{tels que}$$
$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega g_i \, \varphi \, \mathrm{d}x, \, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, .., d\}$$

Pour $u \in H^1(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \textit{et} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right) = \operatorname{grad} u.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est équivalente à la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exemple 1.4. *Soit $\Omega =]0, 2[$ et soit la fonction affine par morceau*

$$u(x) = \begin{cases} x & \textit{si } x \in]0, 1], \\ 2 - x & \textit{si } x \in [1, 2[. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas dérivable au sens classique en $x = 1$, cette fonction est dans $H^1(\Omega)$. En effet, on doit montrer que $u \in L^2(\Omega), u' \in L^2(\Omega)$
et

$$\int_\Omega u(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \varphi(x) u'(x) \, \mathrm{d}x, \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On a

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x + \int_1^2 (2 - x)^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_1^2 = \frac{2}{3} < \infty.$$

D'où $u \in L^2(\Omega)$.
De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega u(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^2 u(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x\varphi'(x) dx + \int_1^2 (2 - x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x,$$

on intègre par parties, on obtient

$$\int_\Omega u(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \Big[x\varphi(x) \Big]_0^1 - \int_0^1 \varphi \, \mathrm{d}x + \Big[(2 - x)\varphi(x) \Big]_1^2 + \int_1^2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \varphi(1) + \int_1^2 \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\Big[\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big] \\
&= -\Big[\int_0^2 v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big],
\end{aligned}
$$

où la fonction $v(x)$ est donnée par

$$
v(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in]0,1], \\ -1 & si\ x \in [1,2[. \end{cases}
$$

D'où $u'(x) = v(x)$. Montrons que $u' \in L^2(\Omega)$, en effet

$$
\int_\Omega |u'(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^2 |u'(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \int_1^2 1\,\mathrm{d}x = \Big[x\Big]_0^1 + \Big[x\Big]_1^2 = 2 < \infty,
$$

d'où $u' \in L^2(\Omega)$. On en déduit que $u \in H^1(\Omega)$.

Théorème 1.15. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Preuve . Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, c'est à dire

$$
\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n, m > N, \ \text{on a} \quad \|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon.
$$

En d'autre terme

$$
\|u_n - u_m\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u_n - u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} < \epsilon.
$$

D'où les suites (u_n) et $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})$ sont de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, qui est un espace complet, il en résulte l'existence d'une fonction u de $L^2(\Omega)$ limite dans $L^2(\Omega)$ de la suite u_n et une fonction v_i de $L^2(\Omega)$ limite dans $L^2(\Omega)$ de la suite $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})$

$$
\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} = v_i, \quad \text{dans l'espace } L^2(\Omega).
$$

L'injection de l'espace $L^2(\Omega)$ dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$
L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),
$$

assure la convergence de la suite (u_n) vers u ainsi que la dérivée $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})$ vers v_i dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. L'opérateur de dérivation étant continu dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors

$$
\lim_{n\to\infty} \Big\langle \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \varphi \Big\rangle = \lim_{n\to\infty} -\Big\langle u_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big\rangle = -\Big\langle \lim_{n\to\infty} u_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big\rangle = -\Big\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi\Big\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).
$$

D'où, on obtient

$$
\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i \quad dans \quad \mathcal{D}'(\Omega),
$$

et en vertu de l'unicité de la limite dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$, on a

$$
\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i \in L^2(\Omega).
$$

D'où la convergence de (u_n) vers u dans $H^1(\Omega)$. ■

Théorème 1.16. [4] *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace séparable et réflexif.*

Théorème 1.17. ***(Injection de Sobolev)*** [6]

1) Si $d > 2$ alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*]$ où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}.$$

2) Si $d = 2$ alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$.

Remarque 1.3. *D'après le théorème de compacité de Rellich-Kondrachov (voir [6]), on a que la première injection est compacte pour tout $q \in [1, p^*[$. De plus, la deuxième injection est compacte.* ***En particulier*** *$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec l'injection compacte.*

1.3.3 Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.16. *On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $(H^1(\Omega), \|.\|_{H^1(\Omega)})$ (l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ muni de sa norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$)*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}}^{H^1(\Omega)},$$

$$i.e \quad H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \forall \epsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \|v - \varphi\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon\}.$$

Théorème 1.18. (*Inégalité de Poincaré*) [4] *Il existe une constante $c_\Omega > 0$ telle que*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega); \|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

où c_Ω ne dépend que de Ω (ce résultat est évidement faux dans $H^1(\Omega)$: prendre $v = 1$).

Définition 1.17. *Le dual de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est appelé $H^{-1}(\Omega)$ on note*

$$\langle L, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = L(\phi),$$

le crochet de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.

Remarque 1.4. *On a les inclusions avec les injections continues et denses*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

1.3.4 Espace de Sobolev fractionnaire $H^s(\Omega)$

Définition 1.18. *Soit $0 < s < 1$, on définit l'espace*

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{d}{2} + s}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{d+2s}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.4. [6] *Soient $0 < s \leq s' < 1$, et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ fonction mesurable. Alors*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{s'}(\Omega)} \text{ où } C = C(d, s, 2) \geq 1,$$

c'est à dire $H^{s'}(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega)$. De plus, cette injection est compacte.

1.3.5 Trace des fonctions des espaces de Sobolev

Théorème 1.19. [17] *Il existe une unique application linéaire continue* $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ *qui prolonge l'application de restriction* $u \mapsto u_{|\partial\Omega}$ *définie sur le sous espace dense* $C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.5. *1)* γ *appelée application trace, son image notée* $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, *c'est à dire il s'agit d'espace de Sobolev d'ordre fractionnaire i.e,*

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega)) = \{\gamma_0(u), u \in H^1(\Omega)\}.$$

2) La continuité de l'application trace s'écrit :

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

3) Le noyau de l'opérateur trace est $H_0^1(\Omega)$ *c'est à dire,*

$$H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega), \gamma_0(\varphi) = 0 \ sur \ \partial\Omega\}.$$

4) Formule de Green

$$\forall u, \ v \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \ \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v) n_i \ \mathrm{d}Y,$$

où $(n_i)_{i=1,\dots,d}$ *sont les composantes de* n *avec* n *est le vecteur unitaire de la normale extérieure à* $\partial\Omega$.

5) Pour tout $u \in H^1(\Omega)$ *et* $v \in (H^1(\Omega))^d$ *on a (voir [3])*

$$\int_\Omega u div(v) \ \mathrm{d}x + \int_\Omega v \cdot \nabla u \ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)(\gamma_0(v) \cdot n) \, \mathrm{d}Y.$$

où $v \cdot n$ *est le produit Euclidien du vecteur* $v = (v_1, \dots, v_d)$ *et* n.
La divergence de v *est un scalaire défini par*

$$div(v) = tr(\nabla v) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Théorème 1.20. [14] *Soit* $\frac{1}{2} < s < 1$. *Alors, il existe une unique application linéaire continue*

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^s(\Omega) &\to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ v &\to \gamma_1(v) = v_{|\partial\Omega}, \end{aligned}$$

tel que

$$\| \gamma_1(v) \|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Omega)} \leqslant C \| v \|_{H^s(\Omega)} .$$

1.3.6 Espace de fonctions nulles sur une partie du bord de Ω

On définit

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \quad u = 0 \ sur \ \Gamma_0\},$$

où Γ_0 est une partie de $\partial\Omega$. On suppose Γ_0 de mesure non nulle $mes(\Gamma_0) = |\Gamma_0| \neq 0$.
L'espace $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ est fermé dans $H^1(\Omega)$. On donne l'inégalité de Poincaré généralisée.

Théorème 1.21. [16] *On suppose que* $mes(\Gamma_0) > 0$ *alors*

$$\exists C > 0,\ \|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},\ \forall u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Maintenant, on a l'inégalité de Korn suivante

Théorème 1.22. ***(Inégalité de Korn)*** [15] *Il existe une constante* $C_K > 0$ *(appelée constante de Korn) telle que pour tout* $u \in \left(H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right)^d$, *on a*

$$\|u\|_{1.2} \leq C_K |u|_{1.2},$$

où

$$\|u\|_{1.2} = (\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x)^{1/2},$$
$$|u|_{1.2} = (\int_\Omega |D(u)|^2 \mathrm{d}x)^{1/2},$$

avec $D(u)$ *est le tenseur des taux de déformations donné par*

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t),$$

et $|.|$ *est la norme euclidienne.*

Dans la théorie des équations d'évolution, il y a lieu de faire jouer en général des rôles distincts à la variable temporelle et aux variables d'espace, et donc on rencontre en particulier des espaces de fonctions à valeurs vectorielles suivants :

1.3.7 Espaces $L^p(0,T;E)$

Définition 1.19. *Soit* E *un espace de Banach et* T *un réel strictement positif. Pour* $p \in [1,+\infty[$, *on note* $L^p(0,T;E)$ *l'ensemble des fonctions Lebesgue mesurables définies sur* $]0,T[$ *et à valeurs dans* E, *telles que* $t \to \|f(t)\|^p_E$ *est intégrable sur* $]0,T[$. *C'est un espace de Banach pour la norme*

$$\|f\|_{L^p(0,T;E)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|^p_E \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De même façon, pour $p = +\infty$, *on définit un espace de Banach* $L^\infty(0,T;E)$ *muni de la norme*

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;E)} = \sup_{t\in]0,T[} ess\|f(t)\|_E.$$

Remarque 1.6.
1) *Si* E *s'injecte continument dans* F, $L^p(0,T;E)$ *s'injecte continument dans* $L^p(0,T;F)$.
2) *La plupart des propriétés rencontrées dans le cas à valeurs réelles sont encore valables moyennant des hypothèses convenables sur* E *(*E *réflexif, ou bien* E *séparable). Par exemple, si* E *réflexif et si* $1 < p < \infty$ *alors* $L^p(0,T;E)$ *est réflexif .*

Définition 1.20. ***(Dualité)*** *Soient* p *et* p' *deux exposants conjugués,* $p \in [1,+\infty[$. *Le dual de* $L^p(0,T;E)$ *est* $L^{p'}(0,T;E')$.

Lemme 1.3. ***(de Lions-Aubin)*** [23] *Soient B_0, B, B_1 trois espaces de Banach avec $B_0 \subset B \subset B_1$, on suppose que l'injection $B_0 \hookrightarrow B$ est compacte et celle $B \hookrightarrow B_1$ est continue, soit $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$. On suppose que B_0 et B_1 sont réflexifs et on définit :*

$$W = \Big\{ u \in L^p(0,T;B_0) \quad \textit{tel que } u' \in L^q(0,T;B_1) \Big\},$$

alors, W est un espace de Banach réflexif pour la norme

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^q(0,T;B_1)},$$

et $W \hookrightarrow_{compacte} L^p(0,T;B)$.

Définition 1.21. *Soit E un espace de Banach et T un réel positive, on définit l'espace*

$$C([0,T],E) := \{\phi : [0,T] \to E \quad | \quad \phi \textit{ continue}\}.$$

Lemme 1.4. ***(de Simon)*** [22] *Soient X_0, X, X_1 trois espaces de Banach tels que, l'injection de $X_0 \subset X$ est compacte. Si F est borné dans $L^p(0,T;X_0)$ où $1 \leq p < +\infty$, et $\frac{\partial F}{\partial t} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, \quad f \in F\}$ est borné dans $L^1(0,T;X_1)$. Alors F est relativement compacte dans $L^p(0,T;X)$.*
Si F est borné dans $L^\infty(0,T;X_0)$ et $\frac{\partial F}{\partial t}$ est borné dans $L^r(0,T;X_1)$ où $r > 1$, alors F est relativement compacte dans $C([0,T];X)$.

1.3.8 L'espace $H^1(0,T;E)$

Définition 1.22. *Soit E un espace de Banach et T un réel strictement positif, on définit l'espace*

$$H^1(0,T;E) = \Big\{ u \in L^2(0,T;E),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;E), \quad \textit{telle que}$$
$$\int_0^T u\phi' \, \mathrm{d}t = \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} \phi \, \mathrm{d}t, \forall \phi \in \mathcal{D}(0,T) \Big\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(0,T;E)} = \|u\|_{L^2(0,T;E)} + \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^2(0,T;E)},$$

ou la norme équivalente

$$\|u\|_{H^1(0,T;E)} = \big(\|u\|^2_{L^2(0,T;E)} + \|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{L^2(0,T;E)}\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.23. [7] *L'espace $H^1(0,T;E)$ est un espace de Hilbert.*

1.4 Théorie des équations différentielles ordinaires

1.4.1 Théorème de Carathéodory

Définition 1.23. ***(fonction de Carathéodory)*** *Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}, D$ un sous ensemble quelconque de $\mathbb{R}^m$.*
Soit $f : I \times D \to \mathbb{R}$ telle que :

(i). pour tout $x \in D, f(.,x)$ est mesurable en t,

(ii). p.p .tout $t \in I, f(t,.)$ est continue en x,

(iii). pour tout compact $\boldsymbol{K}$ *de* D, *il existe*

$$\begin{aligned} M_{\boldsymbol{K}} : I &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\to M_{\boldsymbol{K}}(t), \end{aligned}$$

intégrable sur I *telle que :*

$$| f(t,x) | \leqslant M_{\boldsymbol{K}}(t) \quad (t,x) \in I \times \boldsymbol{K},$$

alors, la fonction f *est dite de Carathéodory sur* $I \times D$.

Théorème 1.24. [5] *On considère le système :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où la fonction f *est définie sur* $R = \{(t,x) :| t - t_0 | \leqslant a \text{ et } \| x - x_0 \| \leqslant b\}$.
Si f *satisfait les conditions de Carathéodory sur* R, *alors ce système admet au moins une solution locale* $x(t, t_0, x_0)$.

1.4.2 Lemme de Gronwall

Lemme 1.5. ***(de Gronwall)*** *Soient* φ, ψ *et* y *trois fonctions continues sur un segment* $[a,b]$, *à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leqslant \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Alors,

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leqslant \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) exp\Big(\int_s^t \psi(u)\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}s.$$

Preuve . Posons $\mathcal{F}(t) = \displaystyle\int_a^t \psi(s)y(s)ds$. En multipliant les deux membres de l'inégalité donnée en hypothèse par $\psi(t)$, on obtient

$$\mathcal{F}^{'}(t) - \psi(t)\mathcal{F}(t) \leqslant \varphi(t)\psi(t),$$

ce qui s'écrit aussi

$$G'(t) \leqslant \varphi(t)\,\psi(t)\,exp\Big(-\int_a^t \psi(s)ds\Big) \quad avec \quad G(t) = \mathcal{F}(t)\,exp\Big(-\int_a^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\Big).$$

Comme $G(a) = \mathcal{F}(a) = 0$, on en déduit, par intégration

$$G(t) \leqslant \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,exp\Big(-\int_a^s \psi(u)\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}s.$$

Or par hypothèse,

$$y(t) \leqslant \varphi(t) + G(t) exp\Big(\int_a^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\Big),$$

d'où le résultat en utilisant l'inégalité ci-dessus. ∎

Corollaire 1.3. [13] *Soient* ψ *et* $y : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ *deux fonctions continues vérifiant*

$$\exists c \geqslant 0, \quad \forall t \in [a,b], \quad y(t) \leqslant c + \int_a^t \psi(s)\,y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Alors,

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leqslant c\; exp\Big(\int_a^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\Big).$$

1.5 Un peu de calcul différentiel et convexité

1.5.1 Différentiabilité

Soient $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ deux espaces vectoriels normés, on désigne par f une application définie sur une partie U de $\mathcal{X}$ à valeurs dans $\mathcal{Y}$. On supposera que U est ouvert.

Définition 1.24. ***(Dérivée directionnelle)*** *On dit que f a une dérivée directionnelle en $x_0 \in U$, (ici U n'est pas forcément ouvert) dans la direction $h \in \mathcal{X}$ si, pour $t > 0$ suffisamment petit, $x_0 + th \in U$ et si la limite*

$$f'(x_0; h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(f(x_0 + th) - f(x_0)),$$

existe.

Définition 1.25. ***(Gâteaux différentiabilité)*** *On dit qu'une fonction f est Gâteaux-différentiable en $x_0 \in U$ si elle admet une dérivée directionnelle en x_0 suivant toutes les directions $h \in \mathcal{X}$ et si l'application*

$$h \in \mathcal{X} \longmapsto f'(x_0; h) \in \mathcal{Y},$$

est linéaire continue. On note $f'(x_0)$ cet opérateur. On a alors

$$\forall h \in \mathcal{X}, f'(x_0)h = f'(x_0; h).$$

Définition 1.26. ***(Fréchet différentiabilité)*** *On dit que f est différentiable (Fréchet différentiabilité) en x_0 si il existe une forme linéaire continue $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ telle que*

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + L(x) + \|x\|\epsilon(x),$$

où $\epsilon(x) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est une fonction qui tend vers 0 en 0.On dit alors que L est la différentielle de f en x_0, on notera $df(x_0)$ cette différentielle.

Remarque 1.7. *1) Si f est différentiable en x_0, alors elle est continue en x_0.*

2) Toute fonction différentiable au sens de Fréchet est différentiable au sens de Gâteaux.

L'exemple suivant montre que la différentiabilité au sens de Gâteaux n'implique pas la différentiabilité au sens de Fréchet. Elle n'implique même pas la continuité.

Exemple 1.5. *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ y = x^2 \quad et\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0 \quad ou\ y \neq x^2. \end{cases}$$

La fonction f est Gâteaux différentiable en $(0, 0)$ et $f'(0; h) = 0$ pour tout h mais elle n'est pas Fréchet différentiable en $(0, 0)$ puisqu'elle n'est pas continue en ce point.

1.5.2 Convexité

Définition 1.27. ***(Fonction convexe)*** *Soit S un sous-ensemble non-vide convexe de $\mathbb{R}^n$. Une fonction réelle f définie sur S est dite convexe si pour tout $(x, y) \in S^2$ et pour tout $\alpha \in [0, 1]$,*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Théorème 1.25. *Si f est Gâteaux différentiable sur l'ouvert convexe S, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1) f convexe sur S.

2) Pour tout $x, y \in S$, $\quad f(x) \geqslant f(y) + (f'(y), x-y)\,.$

Preuve . On a

$$f(y + \alpha(x-y)) \leqslant f(y) + \alpha(f(x) - f(y)),$$

d'où

$$\frac{f(y+\alpha(x-y)) - f(y)}{\alpha} \leqslant f(x) - f(y),$$

en passant à la limite quand $\alpha \to 0^+$, on obtient

$$f'(x; x-y) \leqslant f(x) - f(y),$$

d'où le résultat.
Inversement, on a

$$f(y) \geqslant f(y + \alpha(x-y)) - \alpha\,(f'(y + \alpha(x-y)), x-y)\,,$$

et

$$f(x) \geqslant f(y + \alpha(x-y)) + (1-\alpha)\,(f'(y + \alpha(x-y)), x-y)\,.$$

On multiple la première inégalité par $(1-\alpha)$ et la deuxième par α, on obtient

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \geqslant f(y + \alpha(x-y)).$$

∎

Chapitre 2

Modélisation mathématique du problème de Navier-Stokes et formulation variationnelle

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de **Navier-Stokes** instationnaire (ie., les variables décrivant le mouvement dépendent le temps) qui décrivent le mouvement d'un fluide incompressible (voir [2]) mais avec une viscosité constante et des conditions aux limites de Dirichlet homogène et de Tresca. On donne les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse, la condition initiale et les conditions aux limites. Ensuite, on établit la formulation variationnelle de ce problème dont les inconnues sont la vitesse et la pression du fluide. Avec la condition de Tresca on obtient que cette formulation est donnée par une inéquation variationnelle parabolique.

2.1 Description du problème

Soit ω un sous ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ avec une frontière lipschitzienne continue. On considère le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ donné par

$$\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, x' \in \omega, 0 < x_3 < h(x')\},$$

où $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3$. La frontière de Ω est $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, où

$$\Gamma_0 = \{(x', x_3) \in \overline{\Omega}, x_3 = 0\},$$

et

$$\Gamma_1 = \{(x', x_3) \in \overline{\Omega}, x_3 = h(x')\} \cup \Gamma_L,$$

avec Γ_L est la partie latérale. On suppose que h est une fonction lipschitzienne continue et

$$\exists h_{min}, h_{max} > 0, h_{min} < h(x') < h_{max}, \forall x' \in \mathbb{R}^2.$$

1. **La loi de conservation de la masse** : Soit $v(x,t)$ le champ de vecteurs vitesse à l'instant $t \in [0,\tau]$ des points $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. L'équation de la conservation de la masse est (voir [20])
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div(v) = 0, \qquad \text{dans } \Omega \times (0,\tau), \tag{2.1}$$
où $\rho = \rho(x,t)$ est la densité du fluide au point $x \in \Omega$ à l'instant $t \in [0,\tau]$.
La dérivée particulière ou la dérivée totale $\dfrac{d}{dt}$ est donnée par :
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla, \tag{2.2}$$

où ∇ est le vecteur gradient de composantes $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$.
Avec la relation (2.2) l'équation (2.1) devient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + \rho div(v) = 0. \tag{2.3}$$

2. **La loi de conservation de la quantité de mouvement** est donnée par (voir [20])

$$\rho \frac{dv}{dt} = div(\sigma) + \rho f, \qquad \text{dans } \Omega \times (0, \tau), \tag{2.4}$$

où le vecteur f de composantes f_i $(i = 1, 2, 3)$ représente une distribution volumique de forces extérieures, σ est le tenseur des contraintes de composantes σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$.
En utilisant l'équation (2.2), l'équation (2.4) s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = div(\sigma) + \rho f, \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0, \tau). \tag{2.5}$$

- $\sigma : D$ est le produit de deux tenseurs σ et D défini par l'expression

$$\sigma : D = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} d_{ij}(v).$$

Le tenseur des contraintes σ d'un fluide newtonien (**ie**, viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) s'écrit

$$\sigma = 2\mu D(v) - pI, \tag{2.6}$$

où

- $D(v)$ est le tenseur des taux de déformation de composantes

$$d_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \qquad 1 \leq i, j \leq 3. \tag{2.7}$$

- μ est la viscosité du fluide.
- p est un réel appelé pression du fluide.
- I est la matrice identité de rang 3.

Par conséquent, le tenseur des contraintes est une fonction linéaire du tenseur des déformations. Si le fluide est incompressible, la masse volumique d'une particule de fluide incompressible reste constante au cours de l'écoulement elle est donc de plus indépendante des variables d'espace c'est à dire $\rho = \rho_0$ =constante. Il est même loisible de poser $\rho_0 = 1$, ce qui sera fait dans la suite.

Finalement, les équations générales de l'écoulement isotherme d'un fluide newtonien incompressible sont données par le système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = f + \operatorname{div}(2\mu D(v)) - \nabla p, & \text{dans } \Omega \times (0, \tau), \\ \operatorname{div}(v) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, \tau). \end{cases} \tag{2.8}$$

Ce système est appelé système de **Navier-Stokes** instationnaire.
Si on néglige le terme de convection le système précédent devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = f + \operatorname{div}(2\mu D(v)) - \nabla p, & \text{dans } \Omega \times (0,\tau), \\ \operatorname{div}(v) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,\tau). \end{cases}$$

Ce système appelé système de **Stokes** instationnaire.
De plus, si on se place dans le cas stationnaire on obtient les systèmes suivants

$$\begin{cases} v \cdot \nabla v = f + \operatorname{div}(2\mu D(v)) - \nabla p, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(v) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu D(v)) + \nabla p = f, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(v) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Dans ce travail, on étudie le problème de **Navier-Stokes** instationnaire (2.8).
Conditions aux limites : Dans toute la suite, on désigne par $u \cdot v$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v et par $|\cdot|$ la norme euclidienne.
On définit respectivement les vitesses normale et tangentielle sur Γ_0 par

$$v_n = v \cdot n = v_i n_i \quad , \quad v_{\mathcal{T}} = (v_{\mathcal{T}_i})_{1 \le i \le 3} \quad \text{où} \quad v_{\mathcal{T}_i} = v_i - v_n n_i, \qquad 1 \le i \le 3,$$

et les composantes du tenseur de contraintes normales et tangentielle sur Γ_0 par

$$\sigma_n = (\sigma \cdot n) \cdot n = \sigma_{ij} n_i n_j \quad , \quad \sigma_{\mathcal{T}_i} = (\sigma_{\mathcal{T}_i})_{1 \le i \le 3} \quad \text{où} \quad \sigma_{\mathcal{T}_i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i, \qquad 1 \le i \le 3.$$

On utilise ici et dans toute la suite la convention de sommation d'Einstein qui consiste à supprimer la somme sur les indices répétés.
On suppose que la vitesse du fluide vérifie la condition de Dirichlet homogène

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,\tau), \tag{2.9}$$

et la composante normale de la vitesse sur la partie inférieure de la frontière est donnée par

$$v_n = v \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0,\tau), \tag{2.10}$$

la vitesse tangentielle sur $\Gamma_0 \times (0,\tau)$ est inconnue et satisfait la loi de frottement de Tresca

$$\begin{aligned} &|\sigma_{\mathcal{T}}| < \ell \quad \Rightarrow \quad v_{\mathcal{T}} = 0, \\ &|\sigma_{\mathcal{T}}| = \ell \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \ge 0 \quad \text{tel que} \quad v_{\mathcal{T}} = -\lambda \sigma_{\mathcal{T}}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

où $\ell : [0,\tau] \times \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ est le seuil de frottement de Tresca .
La condition initiale est donnée par

$$v(0,.) = v_0, \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

2.2 Formulation variationnelle du problème

La formulation variationnelle est une autre manière d'énoncer un problème physique réagi par des équations différentielles ou aux dérivées partielles.
L'intérêt de cette approche est de pouvoir disposer de concepts et des propriétés de l'analyse fonctionnelle en particulier ceux des espaces de Sobolev.

Le principe de la formulation variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente dite variationnelle ou faible, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test et en utilisant la formule de Green. Une solution de cette dernière est naturellement appelée solution faible.
On note

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^3, \mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3.$$

Supposons que

$$\mu > 0, f \in L^2(0,\tau; L^2(\Omega)), \ell \in L^\infty(0,\tau; L^\infty_+(\Gamma_0)), \tag{2.12}$$

où $L^\infty_+(\Gamma_0) = L^\infty(\Gamma_0; \mathbb{R}^+)$ et $\tau > 0$.
Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel suivant

$$\mathcal{V}_0 = \{\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \varphi_n = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

et

$$\mathcal{V}_{0div} = \{\varphi \in \mathcal{V}_0 : div(\varphi) = 0 \; dans \; \Omega\},$$

de plus

$$L^2_0(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q \, dx = 0 \right\}.$$

Pour la formulation variationnelle du problème, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1. *La condition de Tresca (2.11) est équivalente à la relation suivante :*

$$|\sigma_\mathcal{T}| \leq \ell, \; v_\mathcal{T} \cdot \sigma_\mathcal{T} + \ell|v_\mathcal{T}| = 0, \quad sur \quad \Gamma_0 \times (0,\tau). \tag{2.13}$$

Preuve .

- Supposons que v vérifie la condition aux limites de Tresca .
  - ▷ Si $|\sigma_\mathcal{T}| < \ell$, alors $v_\mathcal{T} = 0$, d'où (2.13).
  - ▷ Si $|\sigma_\mathcal{T}| = \ell$, alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $v_\mathcal{T} = -\lambda\sigma_\mathcal{T}$, d'où

$$v_\mathcal{T} \cdot \sigma_\mathcal{T} + \ell|v_\mathcal{T}| = -\lambda|\sigma_\mathcal{T}|^2 + \lambda|\sigma_\mathcal{T}|^2 = 0.$$

- Réciproquement, on suppose que $v_\mathcal{T} \cdot \sigma_\mathcal{T} + \ell|v_\mathcal{T}| = 0$.
  - ▷ Si $|\sigma_\mathcal{T}| = \ell$, alors on a

$$v_\mathcal{T} \cdot \sigma_\mathcal{T} = -|v_\mathcal{T}||\sigma_\mathcal{T}|,$$

d'où l'existence d'un $\lambda \geq 0$ tel que $v_\mathcal{T} = -\lambda\sigma_\mathcal{T}$.

▷ Si $|\sigma_{\mathcal{T}}| < \ell$, alors

$$\begin{aligned} 0 = v_{\mathcal{T}} \cdot \sigma_{\mathcal{T}} + \ell |v_{\mathcal{T}}| &\geqslant -|v_{\mathcal{T}}||\sigma_{\mathcal{T}}| + \ell |v_{\mathcal{T}}| \\ &\geqslant |v_{\mathcal{T}}| \underbrace{(\ell - |\sigma_{\mathcal{T}}|)}_{>0} \end{aligned}$$

donc $|v_{\mathcal{T}}| = 0$, d'où $v_{\mathcal{T}} = 0$.

■

Proposition 2.1. *La formulation variationnelle du problème fort* (2.8)-(2.11) *conduit au problème* (P) *suivant*

Problème (P) : Sous l'hypothèse (2.12). On cherche
$v \in L^2(0,\tau,\mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(0,\tau,\mathbf{L}^2(\Omega))$, $\dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^{\frac{4}{3}}(0,\tau,(\mathcal{V}_{0div})')$, $p \in H^{-1}(0,\tau,L_0^2(\Omega))$ vérifiant pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_0$ et pour tout $\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)$, l'inéquation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{d}{dt}(v,\varphi),\chi \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} + \langle b(v,v,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} - \langle (p, div(\varphi)),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} \\ &+ a(v,\varphi\chi) + \Psi(v+\varphi\chi) - \Psi(v) \geq \langle (f,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Avec la condition initiale

$$v(0,.) = v_0 \in \mathbf{H}, \tag{2.15}$$

où $\mathbf{H}$ est la fermeture dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ de l'espace

$$\{\varphi \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3 : div(\varphi) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\},$$

$(.,.)$ indique le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\langle .,. \rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau).\mathcal{D}(0,\tau)}$ représente le produit dualité entre $\mathcal{D}'(0,\tau)$ et $\mathcal{D}(0,\tau)$.

$$\begin{aligned} a(.,.) : L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0) \times L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0) &\to \mathbb{R} \\ (u,v) \to a(u,v) &= \int_0^\tau \int_\Omega 2\mu D(u) : D(v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\tau \int_\Omega 2\mu d_{ij}(u) d_{ij}(v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi : L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0)) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Psi(u) = \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell |u|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

La forme trilinéaire b est donnée par

$$\begin{aligned} b : \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 &\to \mathbb{R} \\ (u,v,w) &\mapsto b(u,v,w) = \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Preuve . Soient $\varphi \in \mathcal{V}_0, \chi \in \mathcal{D}(0,\tau)$. On multiplie l'équation $(2.8)_1$ par $\varphi\chi$, et on intègre sur Ω, puis de 0 à τ. En utilisant la formule de Green, on trouve

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v_i\right)(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_0^\tau \int_\Omega \sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^\tau \left(\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}n_j(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}y + \int_\Omega f_i(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_0$ on a

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}n_j(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij}n_j(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x'.$$

Or $\sigma_{ij}n_j = \sigma_{\mathcal{T}_i} + \sigma_n n_i$, et $\varphi_i\chi n_i = 0$ sur Γ_0 donc

$$\int_{\Gamma_0} \sigma_{ij}n_j(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x' = \int_{\Gamma_0} (\varphi_i\chi)(\sigma_{\mathcal{T}_i} + \sigma_n n_i)\,\mathrm{d}x' = \int_{\Gamma_0} \varphi_i\chi\sigma_{\mathcal{T}_i}\,\mathrm{d}x'.$$

On obtient

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v_i\right)(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \sigma_{\mathcal{T}_i}(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau \int_\Omega f_i(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

On rajoute et on retranche du premier membre de l'équation ci-dessus le terme suivant

$$\int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell(|\varphi_i\chi + v| - |v|)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t.$$

On aura

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v_i\right)(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \sigma_{ij}\frac{\partial(\varphi_i\chi)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell(|\varphi_i\chi + v| - |v|)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \sigma_{\mathcal{T}_i}(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t - \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell(|\varphi_i\chi + v| - |v|)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau \int_\Omega f_i(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

On pose

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Gamma_0} \sigma_{\mathcal{T}_i}(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x' + \int_{\Gamma_0} \ell(|\varphi\chi + v| - |v|)\,\mathrm{d}x' \\ &= \int_{\Gamma_0} [\sigma_{\mathcal{T}_i}(\varphi_i\chi + v_i) - \sigma_{\mathcal{T}_i}v_i + \ell|(\varphi\chi + v| - |v|)]\,\mathrm{d}x'. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.1, on aura

$$A = \int_{\Gamma_0} \sigma_{\mathcal{T}_i}(\varphi_i\chi + v_i) + \ell|\varphi\chi + v|\,\mathrm{d}x',$$

mais

$$\sigma_{\mathcal{T}_i}(\varphi_i\chi + v_i) \geq -|\sigma_{\mathcal{T}}||\varphi\chi + v| \geq -\ell|\varphi\chi + v|, \qquad \text{sur } \Gamma_0$$

donc $A \geq 0$, on aura alors

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v_i\right)(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \sigma_{ij}\frac{\partial(\varphi_i\chi)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell(|\varphi\chi + v| - |v|)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t \geq \int_0^\tau \int_\Omega f_i(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

En remplaçant σ_{ij} par son expression, on obtient

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v_i\right)(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega (2\mu d_{ij}(v))\frac{\partial(\varphi_i\chi)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^\tau \int_\Omega p\frac{\partial(\varphi_i\chi)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} (|\varphi\chi+v|-|v|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geq \int_0^\tau \int_\Omega f_i(\varphi_i\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

■

D'où le résultat.

2.2.1 Lemmes utiles

On considère les lemmes suivants

Lemme 2.2. *Il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\alpha\|u\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} \leq 2\mu\int_\Omega |D(u)|^2\,\mathrm{d}x \leq \mu^*\|u\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)},\ \forall u\in\mathcal{V}_0,\ \textit{pour p.p}\ \ t\in(0,\tau).$$

Preuve . On a

$$\begin{aligned} 2\mu\int_\Omega |D(u)|^2\,\mathrm{d}x &= 2\mu\int_\Omega \left|\frac{1}{2}\nabla u + \frac{1}{2}(\nabla u)^T\right|^2\,\mathrm{d}x \\ &\leq 2\mu\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u| + \frac{1}{2}\left|(\nabla u)^T\right|\right)^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

D'après la convexité de la fonction $\mathcal{Z}\mapsto\mathcal{Z}^2$, on a

$$\begin{aligned} 2\mu\int_\Omega |D(u)|^2\mathrm{d}x &\leq 2\mu\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|(\nabla u)^T|^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \mu\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |(\nabla u)^T|^2)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

et de

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 &= \sum_{1\leq i,j\leq 3} |\partial_j u_i|^2 \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq 3} |\partial_i u_j|^2 = |(\nabla u)^T|^2, \end{aligned}$$

où on note indifféremment $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ou ∂_i, on obtient

$$2\mu\int_\Omega |D(u)|^2\mathrm{d}x \leq 2\mu\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x.$$

Donc

$$2\mu\int_\Omega |D(u)|^2\,\mathrm{d}x \leq \mu^*\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

où $\mu^* = 2\mu$.
En utilisant l'inégalité de Korn (voir le théorème 1.22), on obtient

$$\exists\alpha>0,\qquad 2\mu\int_\Omega |D(u)|^2\mathrm{d}x \geq \alpha\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

■

Lemme 2.3.

$$\left|\int_\Omega D(u) : D(v)dx\right| \leqslant \|u\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)}\|v\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} \ , \quad \forall u, v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega). \tag{2.16}$$

Preuve . En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega D(u) : D(v)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_\Omega d_{ij}(u)\,d_{ij}(v)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_\Omega |d_{ij}(u)|\,|d_{ij}(v)|\ \mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega \left(\sum_{ij=1}^{3}|d_{ij}(u)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{ij=1}^{3}|d_{ij}(v)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{3}|\partial_j u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{2}|\partial_j v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega D(u) : D(v)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \left(|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right) \\
&\leq \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.4. *L'application* Ψ *est convexe et continue.*

Preuve .

1. Ψ est convexe c.à.d, pour tous $u_1, u_2 \in L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))$, pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\Psi(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \leq \lambda\Psi(u_1) + (1-\lambda)\Psi(u_2).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\Psi(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) &= \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell|\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \lambda\ell|u_1| + (1-\lambda)\ell|u_2|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t \\
&\leq \lambda\int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell|u_1|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t + (1-\lambda)\int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell|u_2|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

d'où

$$\Psi(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \leq \lambda\Psi(u_1) + (1-\lambda)\Psi(u_2)$$

.

2. Ψ est continue. En effet, on a

$$\begin{aligned}
|\Psi(u) - \Psi(v)| &= \left|\int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell(|u| - |v|)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell|u - v|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

En utilisent les inégalités de Cauchy-Schwarz en temps et en espace on obtient

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq \|\ell\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Gamma_0))}\|u - v\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))},$$

donc Ψ est lipschitzienne d'où Ψ est continue. ∎

Lemme 2.5. *Pour tous $u, v, w \in \mathcal{V}_0$, on a*

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v) - \int_\Omega div(u)v \cdot w \,\mathrm{d}x.$$

Preuve . On a,

$$\begin{aligned} b(u, v, w) &= \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega v_j \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i w_j) \,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\partial\Omega} u_i v_j w_j n_i \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Sachant que $w = 0$ sur Γ_1 et $u \cdot n = 0$ sur Γ_0 le terme $\int_{\partial\Omega} u_i v_j w_j n_i \mathrm{d}y = 0$, d'où

$$\begin{aligned} b(u, v, w) = &-\int_\Omega v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} w_j \,\mathrm{d}x \\ &-\int_\Omega v_j u_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x \\ = &-\int_\Omega div(u)v \cdot w \,\mathrm{d}x - b(u, w, v). \end{aligned}$$

∎

Chapitre 3

Résultats d'existence pour le problème (P)

Dans ce chapitre, on montre l'existence de la vitesse et la pression solutions du problème (P). Pour cela, on commence par régulariser la condition aux limites de Tresca, pour obtenir une suite de problèmes approchés (P_ε) de type Navier-Stokes dont on démontre l'existence de solutions, par la méthode de Galerkin en utilisant une pénalisation de la divergence de la vitesse.

3.1 Problèmes approchés

La formulation variationnelle du problème nous a donné une inéquation variationnelle à cause de la condition de Tresca impliquant la fonctionnelle Ψ, qui est convexe et continue (voir lemme 2.4) mais n'est pas différentiable.
Alors, on procède par régularisation du problème (P) pour transformer l'inéquation variationnelle (2.14) en une équation et pouvoir appliquer par la suite la méthode de Galerkin pour l'étude de l'existence des solutions du problème (P). Pour traiter ce problème, on va approcher Ψ par une famille régularisante $(\Psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définie par

$$\Psi_\varepsilon(u) = \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell\sqrt{\varepsilon^2 + |u|^2}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t, \qquad \forall u \in L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0)).$$

Lemme 3.1. *On a Ψ_ε est différentiable au sens de Gâteaux sur $L^2(0,\tau;\boldsymbol{L}^2(\Gamma_0))$, où $\Psi'_\varepsilon(u) \in (L^2(0,\tau;\boldsymbol{L}^2(\Gamma_0)))' = L^2(0,\tau;\boldsymbol{L}^2(\Gamma_0))$, pour tout $u \in L^2(0,\tau;\boldsymbol{L}^2(\Gamma_0))$ donnée par*

$$\langle \Psi'_\varepsilon(u), w\rangle = \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell \frac{u\cdot w}{\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t, \qquad \forall w \in L^2(0,\tau;\boldsymbol{L}^2(\Gamma_0)),$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(0,\tau;\boldsymbol{L}^2(\Gamma_0))$.

Preuve . Montrons que

$$\lim_{\hat t\to 0^+} \frac{\Psi_\varepsilon(u+\hat t\, w) - \Psi_\varepsilon(u)}{\hat t} = \langle \Psi'_\varepsilon(u), w\rangle,$$

et cette forme est linéaire est continue en w. En effet

$$\begin{aligned}
\frac{\Psi_\varepsilon(u+\hat{t}\,w)-\Psi_\varepsilon(u)}{\hat{t}} &= \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell\, \frac{\sqrt{\varepsilon^2+|u+\hat{t}\,w|^2}-\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}{\hat{t}}\, \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \frac{\ell\,(\varepsilon^2+|u+\hat{t}\,w|^2-\varepsilon^2+|u|^2)}{\hat{t}\,\left(\sqrt{\varepsilon^2+|u+\hat{t}\,w|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}\right)}\, \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \frac{\ell\,(\hat{t}\,|w|^2+2\,u\cdot w)}{\sqrt{\varepsilon^2+|u+\hat{t}\,w|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\, \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On a,

$$\left|\hat{t}\int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \frac{\ell\,|w|^2}{\left(\sqrt{\varepsilon^2+|u+\hat{t}\,w|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}\right)}\, \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t\right| \leq \hat{t}\int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell\, \frac{|w|^2}{\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\, \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\lim_{\hat{t}\to 0^+} \hat{t}\int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \frac{\ell\,|w|^2}{\left(\sqrt{\varepsilon^2+|u+\hat{t}\,w|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}\right)}\, \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t = 0.$$

D'autre part, pour presque tout $x\in\Omega$, on a

$$2\,\ell\, \frac{u\cdot w}{\left(\sqrt{\varepsilon^2+|u+\hat{t}\,w|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}\right)} \underset{\hat{t}\to 0^+}{\longrightarrow} \ell\, \frac{u\cdot w}{\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}.$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
\left|2\,\ell\, \frac{u\cdot w}{\sqrt{\varepsilon^2+|u+\hat{t}\,w|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\right| &\leq 2\,\ell\, \frac{|u\cdot w|}{\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}} \\
&\leq 2\,\ell|w| \in L^1(\Gamma_0).
\end{aligned}$$

D'après le théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\int_{\Gamma_0} 2\,\ell\, \frac{u\cdot w}{\sqrt{\varepsilon^2+|u+\hat{t}w|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\, \mathrm{d}x' \underset{\hat{t}\to 0^+}{\longrightarrow} \int_{\Gamma_0} \ell\, \frac{u\cdot w}{\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\, \mathrm{d}x'.$$

De plus, on a

$$\left|\int_{\Gamma_0} 2\,\ell\, \frac{u\cdot w}{\sqrt{\varepsilon^2+|u+\hat{t}\,w|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\, \mathrm{d}x'\right| \leq 2\,\|\ell\|_{L^2(\Gamma_0)}\,\|w\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_0)} \in L^1(0,\tau).$$

Par le théorème de la convergence dominée, on a

$$\int_0^\tau \int_{\Gamma_0} 2\,\ell\, \frac{u\cdot w}{\sqrt{\varepsilon^2+|u+\hat{t}w|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\, \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t \underset{\hat{t}\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell\, \frac{u\cdot w}{\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\, \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t.$$

Donc

$$\lim_{\hat{t}\to 0^+} \frac{\Psi_\varepsilon(u+\hat{t}w)-\Psi_\varepsilon(u)}{\hat{t}} = \langle \Psi'_\varepsilon(u), w\rangle.$$

De plus, on remarque que cette forme est linéaire et continue en w. ■

On considère la suite $(v_{\varepsilon 0})_{\varepsilon>0}$ telle que

$$v_{\varepsilon 0} \to_{\varepsilon\to 0} v_0 \quad \text{fortement dans} \quad \mathbf{H}, \tag{3.1}$$

et on approche le problème (P) par les problèmes $(P_\varepsilon), \varepsilon > 0$ suivants :

Problème (P_ε) : On cherche

$$v_\varepsilon \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)),\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \in L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;(\mathcal{V}_{0div})'),\ p_\varepsilon \in H^{-1}(0,\tau;L^2_0(\Omega)),\ \text{vérifiant}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_0$ et pour tout $\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)$, l'équation variationnelle suivante

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{d}{dt}(v_\varepsilon,\varphi),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} + \langle b(v_\varepsilon,v_\varepsilon,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} - \langle (p_\varepsilon,\mathrm{div}(\varphi)),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)}\\ &+ a(v_\varepsilon,\varphi\chi) + \langle \Psi'_\varepsilon(v_\varepsilon),\varphi\chi\rangle = \langle (f,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)},\end{aligned} \tag{3.2}$$

avec la condition initiale

$$v_\varepsilon(0,.) = v_{\varepsilon 0} \in \mathbf{H}. \tag{3.3}$$

Maintenant, on se place dans des espaces ne sont pas à divergence nulle . La méthode de pénalisation de paramètre delta nous permet d'avoir un meilleur aperçu sur le lien entre la vitesse et la pression. Plus précisément, on pénalise la condition de la divergence nulle en remplaçant la pression par

$$p_\varepsilon = -\frac{1}{\delta}\, div(v^\delta_\varepsilon)$$

Un second terme est ajouté pour des raisons techniques (voir plus bas (3.14)). Cette idée est proposée par J. L. Lions [18]. Pour cela on considère le problème variationnel pénalisé (P^δ_ε), $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ suivant

Problème (P^δ_ε) : Trouver

$$v^\delta_\varepsilon \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0) \cap L^\infty\left(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)\right), \frac{\partial v^\delta_\varepsilon}{\partial t} \in L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;(\mathcal{V}_0)'),$$

de sorte que, pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_0$ et pour tout $\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)$, on a

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{d}{dt}(v^\delta_\varepsilon,\varphi),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} + \left\langle b(v^\delta_\varepsilon,v^\delta_\varepsilon,\varphi),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} + \frac{1}{2}\left\langle \int_\Omega v^\delta_\varepsilon\, div(v^\delta_\varepsilon)\varphi\,\mathrm{d}x,\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)}\\ &+ \frac{1}{\delta}\left\langle (div(v^\delta_\varepsilon),div(\varphi)),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} + a(v^\delta_\varepsilon,\varphi\chi) + \left\langle \Psi'_\varepsilon(v^\delta_\varepsilon),\varphi\chi\right\rangle = \langle (f,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)}\end{aligned} \tag{3.4}$$

avec la condition initiale

$$v^\delta_\varepsilon(0,.) = v^\delta_{\varepsilon 0} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \tag{3.5}$$

et on suppose que la suite $(v^\delta_{\varepsilon 0})_{\delta>0}$ satisfait

$$v^\delta_{\varepsilon 0} \to_{\delta\to 0} v_{\varepsilon 0} \quad \text{fortement dans} \quad \mathbf{L}^2(\Omega). \tag{3.6}$$

3.2 Existence de solutions du problème pénalisé (P_ε^δ)

On étude d'abord l'existence d'une solution faible pour le problème variationnel pénalisé (P_ε^δ), en utilisant la méthode de Galerkin. Comme $\mathcal{V}_0$ est un sous-espace fermé de $\mathbf{H}^1(\Omega)$, elle admet une base hilbertienne $(w_i)_{i\geq 1}$, qui est orthogonale pour le produit scalaire de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et orthonormée pour le produit scalaire de $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Alors, pour tout $m \geq 1$, on cherche une fonction $v_{\varepsilon m}^\delta$ donnée par

$$v_{\varepsilon m}^\delta(t,x) = \sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j}^\delta(t)\, w_j(x), \quad \forall t \in (0,\tau),\, \forall x \in \Omega, \tag{3.7}$$

tel que, pour tout $k \in \{1, ..., m\}$, on a

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial v_{\varepsilon m}^\delta}{\partial t}, w_k\right) + b(v_{\varepsilon m}^\delta, v_{\varepsilon m}^\delta, w_k) + \frac{1}{2}\int_\Omega v_{\varepsilon m}^\delta\, div(v_{\varepsilon m}^\delta)\, w_k \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\delta}\left(div(v_{\varepsilon m}^\delta), div(w_k)\right) \\ &+ \int_\Omega 2\,\mu\, D(v_{\varepsilon m}^\delta) : D(w_k)\, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} \ell\, \frac{v_{\varepsilon m}^\delta \cdot w_k}{\sqrt{\varepsilon^2 + |v_{\varepsilon m}^\delta|^2}}\, \mathrm{d}x' = (f, w_k) \qquad \text{p.p dans } (0,\tau), \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec la condition initiale

$$v_{\varepsilon m}^\delta(0,.) = v_{\varepsilon m0}^\delta, \tag{3.9}$$

où $v_{\varepsilon m0}^\delta$ est définie comme la projection orthogonale de $v_{\varepsilon 0}^\delta$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sur $\mathrm{Vect}\{w_1, ..., w_m\}$. Pour tous $i, j, k \in \{1, ..., m\}$, on note

$$F_k = (f, w_k) \in L^2(0,\tau),$$

et

$$A_{j,k} = \int_\Omega 2\,\mu\, D(w_j) : D(w_k)\, \mathrm{d}x \in L^\infty(0,\tau), \qquad B_{i,j,k} = b(w_i, w_j, w_k) \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant $v_{\varepsilon m}^\delta$ par son expression (3.7) dans l'équation (3.8) et en utilisant l'orthonormalité de $(w_i)_{i\geqslant 1}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} &(g_{\varepsilon k}^\delta)' + \sum_{i,j=1}^m g_{\varepsilon j}^\delta\, g_{\varepsilon i}^\delta\, B_{i,j,k} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m g_{\varepsilon i}^\delta\, g_{\varepsilon j}^\delta \int_\Omega w_i\, div(w_j)\, w_k\, \mathrm{d}x + \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j}^\delta\, (div(w_j), div(w_k)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j}^\delta A_{j,k} + \int_{\Gamma_0} \ell\, \frac{(\sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j} w_j)\cdot w_k}{\sqrt{\varepsilon^2 + \left|\sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j}^\delta w_j\right|^2}}\, \mathrm{d}x' = F_k,\ \forall k \in \{1, ..., m\}. \end{aligned}$$

On peut écrire ce système différentiel comme suit

$$\begin{cases} (g_\varepsilon^\delta)' = G(t, g_\varepsilon^\delta), \quad (g_\varepsilon^\delta) = (g_{\varepsilon j}^\delta)_{1\leq j\leq m}, \\ g_\varepsilon^\delta(0) = g_\varepsilon^{0\delta}, \end{cases}$$

où G satisfait aux hypothèses du théorème de Carathéodory (voir théorème 1.24). En effet,

(1) Comme $\ell \in L^\infty(0,\tau; L_+^\infty(\Gamma_0))$, $F_k \in L^2(0,\tau)$, alors la fonction G est mesurable en t pour tout $g_\varepsilon^\delta \in \mathbb{R}^m$.

(2) La fonction G est continue en g_ε^δ sur $\mathbb{R}^m$, pour presque tout $t \in (0,\tau)$ car elle est combinaison de fonctions continues.

(3) Soit $\mathbf{K}$ un compact de $\mathbb{R}^m$. Par définition de compact sur $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{K}$ est borné, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|g^\delta_{\varepsilon k}| \leq C,\ \forall k \in \{1, ..., m\},$$

d'où

$$\begin{aligned}
|G_k(t, g^\delta_\varepsilon)| = |F_k - &\sum_{i,j=1}^{m} g^\delta_{\varepsilon j}\, g^\delta_{\varepsilon i}\, B_{i,j,k} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} g^\delta_{\varepsilon i}\, g^\delta_{\varepsilon j} \int_\Omega w_i \ \mathrm{div}(w_j)\, w_k\, \mathrm{d}x - \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{m} g^\delta_{\varepsilon j}(\mathrm{div}(w_j), \mathrm{div}(w_k)) \\
&- \sum_{j=1}^{m} g^\delta_{\varepsilon j}\, A_{jk} - \int_{\Gamma_0} \ell \frac{\left(\sum_{j=1}^m g^\delta_{\varepsilon j}\, w_j\right)\cdot w_k}{\sqrt{\varepsilon^2 + \left|\sum_{j=1}^m g^\delta_{\varepsilon j}\, w_j\right|^2}}\, \mathrm{d}x'| \\
&\leq |F_k| + \left|\sum_{i,j=1}^{m} g^\delta_{\varepsilon j}\, g^\delta_{\varepsilon i}\, B_{i,j,k}\right| + \frac{1}{2}\left|\sum_{i,j=1}^{m} g^\delta_{\varepsilon i}\, g^\delta_{\varepsilon j}\int_\Omega w_i \ \mathrm{div}(w_j)\, w_k\, \mathrm{d}x\right| \\
&+ \frac{1}{\delta}\left|\sum_{j=1}^{m} g^\delta_{\varepsilon j}\, (\mathrm{div}(w_j), \mathrm{div}(w_k))\right| + \left|\sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}\, A_{jk}\right| + \left|\int_{\Gamma_0} \ell \frac{\left(\sum_{j=1}^m g^m_{\varepsilon j}\, w_j\right)\cdot w_k}{\sqrt{\varepsilon^2 + \left|\sum_{j=1}^m g^\delta_{\varepsilon j}\, w_j\right|^2}}\, \mathrm{d}x'\right| \\
&\leq |F_k| + C^2\sum_{i,j=1}^{m}|B_{i,j,k}| + \frac{1}{2}\, C^2\sum_{i,j=1}^{m}\left|\int_\Omega w_i \ \mathrm{div}(w_j)\, w_k\, \mathrm{d}x\right| \\
&+ \frac{1}{\delta}\, C\sum_{j=1}^{m}|(\mathrm{div}(w_j), \mathrm{div}(w_k))| + C\sum_{j=1}^{m}|A_{jk}| + \int_{\Gamma_0} \ell\, |w_k|\, \mathrm{d}x'.
\end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'une application $t \mapsto M_{\mathbf{K}}(t)$ de $(0, \tau)$ dans $\mathbb{R}_+$ intégrable sur $(0, \tau)$, telle que

$$\text{pour p.p } \ t \in (0, \tau), \forall g^\delta_\varepsilon \in \mathbf{K} : |G(t, g^\delta_\varepsilon)| \leq M_{\mathbf{k}}(t).$$

De plus, la fonction G est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable g^δ_ε car la fonction G admet des dérivées partielles continues en g^δ_ε sur $\mathbb{R}^m$. On en déduit que pour toute donnée initiale $g^{0\delta}_\varepsilon$, le système différentiel précédent admet une unique solution locale $g^\delta_{\varepsilon j}$ dans $H^1(0, \tau_m), 1 \leq j \leq m$ avec $0 < \tau_m \leq \tau$. On a donc l'existence locale en temps d'une solution $v^\delta_{\varepsilon m} \in H^1(0, \tau_m; \mathcal{V}_0)$ au système (3.8)-(3.9).
Dans le lemme suivant, des estimations a priori indépendantes de m , δ et ε seront établies, ce qui nous permet de prolonger cette solution à l'intervalle $[0, \tau]$.

Lemme 3.2. *On suppose que* (2.12) *existe et que* $(v^\delta_{\varepsilon 0})_{\varepsilon>0,\delta>0}$ *est une suite bornée de* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. *Le problème* (3.8)-(3.9) *admet une solution unique* $v^\delta_{\varepsilon m} \in H^1(0, \tau; \mathcal{V}_0)$ *qui satisfait les estimations suivantes*

$$\|v^\delta_{\varepsilon m}\|_{L^\infty(0,\tau;\boldsymbol{L}^2(\Omega))} \leqslant C, \tag{3.10}$$

$$\|v^\delta_{\varepsilon m}\|_{L^2(0,\tau;\boldsymbol{H}^1(\Omega))} \leqslant C, \tag{3.11}$$

$$\|div\,(v^\delta_{\varepsilon m})\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \leqslant C\sqrt{\delta}, \tag{3.12}$$

où C *est une constante indépendante de* m, δ *et* ε.

Preuve . En multipliant l'équation (3.8) par $g^\delta_{\varepsilon k}(t)$ et en sommant de $k = 1$ à m, on obtient

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial v^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, v^\delta_{\varepsilon m}\right) + b(v^\delta_{\varepsilon m}, v^\delta_{\varepsilon m}, v^\delta_{\varepsilon m}) + \frac{1}{2}\int_\Omega v^\delta_{\varepsilon m}\mathrm{div}(v^\delta_{\varepsilon m})\, v^\delta_{\varepsilon m}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\delta}\left(\mathrm{div}(v^\delta_{\varepsilon m}), \mathrm{div}(v^\delta_{\varepsilon m})\right)\\ &+\int_\Omega 2\,\mu\, D(v^\delta_{\varepsilon m}) : D(v^\delta_{\varepsilon m})\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} \ell\,\frac{|v^\delta_{\varepsilon m}|^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + |v^\delta_{\varepsilon m}|^2}}\,\mathrm{d}x' = (f, v^\delta_{\varepsilon m}), \qquad \text{p.p dans } (0, \tau_m),\end{aligned} \tag{3.13}$$

en utilisant le lemme 2.5 on obtient

$$b(v^\delta_{\varepsilon m}, v^\delta_{\varepsilon m}, v^\delta_{\varepsilon m}) + \frac{1}{2}\int_\Omega v^\delta_{\varepsilon m}\,\mathrm{div}(v^\delta_{\varepsilon m})\, v^\delta_{\varepsilon m}\,\mathrm{d}x = 0, \tag{3.14}$$

comme ℓ est positive, on obtient

$$\left(\frac{\partial v^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, v^\delta_{\varepsilon m}\right) + \frac{1}{\delta}\left(\mathrm{div}(v^\delta_{\varepsilon m}), \mathrm{div}(v^\delta_{\varepsilon m})\right) + \int_\Omega 2\,\mu\, D(v^\delta_{\varepsilon m}) : D(v^\delta_{\varepsilon m})\,\mathrm{d}x \leqslant (f, v^\delta_{\varepsilon m}), \qquad \text{p.p dans } (0, \tau_m),$$

on a alors,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|v^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\delta}\,\|div(v^\delta_{\varepsilon m})\|_{L^2(\Omega)} + 2\,\mu\int_\Omega |D(v^\delta_{\varepsilon m})|^2\,\mathrm{d}x \le (f, v^\delta_{\varepsilon m}), \qquad \text{p.p dans } (0, \tau_m).$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz puis celle de Young, on obtient

$$\begin{aligned}\left|(f, v^\delta_{\varepsilon m})\right| &\leqslant \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|v^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\,\|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Avec le lemme 2.2 et une intégration de 0 à s, avec $0 < s < \tau_m$, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|v^\delta_{\varepsilon m}(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\delta}\int_0^s \|div(v^\delta_{\varepsilon m})\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \alpha\int_0^s \|v^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\,\|v^\delta_{\varepsilon m}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\ &+\frac{1}{2}\int_0^s \|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^s \|v^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En rappelant que $v^\delta_{\varepsilon m0}$ est définie comme la projection orthogonale de $v^\delta_{\varepsilon 0}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sur $\mathrm{Vect}\{w_1, ..., w_m\}$ et que la suite $(v^\delta_{\varepsilon 0})_{\varepsilon>0,\delta>0}$ est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on en déduit qu'il existe une constante C_0, indépendant de δ et ε tel que

$$\|v^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \|v^\delta_{\varepsilon m0}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le \|v^\delta_{\varepsilon 0}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C_0, \quad \forall m \ge 1, \forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|v^\delta_{\varepsilon m}(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\delta}\int_0^s \|div(v^\delta_{\varepsilon m})\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \alpha\int_0^s \|v^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t \le C_1\\ &+ C_2\int_0^s \|v^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{3.15}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes indépendantes de m, δ et ε, avec

$$C_1 = \frac{1}{2}C_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^\tau \|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t,$$

et $C_2 = \frac{1}{2}$.
En utilisant le corollaire 1.3, on obtient

$$\|v^\delta_{\varepsilon m}(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 2\,C_1\,\exp(2\,s\,C_2) \leq 2\,C_1\,\exp(2\,\tau\,C_2), \quad \forall s \in [0,\tau_m). \tag{3.16}$$

Avec (3.7) on en déduit que les fonctions $g^\delta_{\varepsilon j}$, $1 \leq j \leq m$, admettent une limite finie en τ_m et, par définition de la solution maximale, on peut conclure que $\tau_m = \tau$. Maintenant, (3.10) découle de (3.16). En reprenant (3.10) dans (3.15) avec $s = \tau$, on obtient (3.11) et (3.12). ∎

Dans le lemme suivant, on établit une estimation de la dérivée de la vitesse.

Lemme 3.3. *Sous les hypothèses du lemme 3.2, on a*

$$\left\|\frac{\partial v^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}\right\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;\mathcal{V}'_0)} \leq C_\delta, \tag{3.17}$$

où C_δ est une constante indépendante de m et ε.

Preuve . Soit $\varphi \in \mathcal{V}_0$. Pour tout $m \geq 1$, on définit φ_m comme la projection orthogonale pour le produit scalaire de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ de φ sur $\mathrm{Vect}\{w_1, ..., w_m\}$. Avec

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^{m} \beta_k\, w_k,\ \beta_k \in \mathbb{R},$$

et de (3.8) on obtient

$$\left(\frac{\partial v^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi_m\right) = -b(v^\delta_{\varepsilon m}, v^\delta_{\varepsilon m}, \varphi_m) - \frac{1}{2}\int_\Omega v^\delta_{\varepsilon m}\, div(v^\delta_{\varepsilon m})\,\varphi_m\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\delta}\,(div(v^\delta_{\varepsilon m}), div(\varphi_m))$$
$$-\int_\Omega 2\,\mu\, D(v^\delta_{\varepsilon m}) : D(\varphi_m)\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_0} \ell\,\frac{v^\delta_{\varepsilon m}\cdot\varphi_m}{\sqrt{\varepsilon^2 + |v^\delta_{\varepsilon m}|^2}}\,\mathrm{d}x' + (f,\varphi_m), \qquad \text{p.p dans } (0,\tau).$$

On estime tous les termes dans la partie droite de l'égalité précédente, on obtient

$$\left|\left(\frac{\partial v^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi_m\right)\right| \leq \left(\|v^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}\,\|\nabla v^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\,\|v^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}\,\|div(v^\delta_{\varepsilon m})\|_{L^2(\Omega)}\right)\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)}$$
$$+ \frac{1}{\delta}\,\|div(v^\delta_{\varepsilon m})\|_{L^2(\Omega)}\,\|div(\varphi_m)\|_{L^2(\Omega)} + \mu_*\,\|v^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,\|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$
$$+ \|\ell\|_{L^2(\Gamma_0)}\,\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_0)} + \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \qquad \text{p.p dans } (0,\tau),$$

où $2\,\mu = \mu^*$. En utilisant l'inégalité classique (voir [4])

$$\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\,\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^6(\Omega)} \quad \forall u \in L^6(\Omega),$$

et l'injection de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^6(\Omega)$, on en déduit qu'il existe une constante c, indépendante de m, δ et ε, de sorte que

$$\|v^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}\|\nabla v^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} \leq c\|v^\delta_{\varepsilon m}\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|v^\delta_{\varepsilon m}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Comme $(w_j)_{j\geq 1}$ est une famille orthogonale de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et φ_m est la projection orthogonale pour le produit scalaire de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ de φ sur $\mathrm{Vect}\{w_1, ..., w_m\}$, on a

$$\|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

et
$$\left(\frac{\partial v^{\delta}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi_m\right) = \left(\frac{\partial v^{\delta}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi_k\right), \qquad \forall k \geq m.$$
Puisque $(w_j)_{j\geq 1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{V}_0$, la suite $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ converge fortement vers φ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et on obtient
$$\left(\frac{\partial v^{\delta}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi_m\right) = \left(\frac{\partial v^{\delta}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi\right).$$
Maintenant, montrons que
$$\|div(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{3}\,\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$
En effet,
$$\begin{aligned}\|div(v)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |div(v)|^2 \,\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x.\end{aligned}$$
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient
$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{3}(1)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right| &\leq \left(\sum_{i=1}^{3}(1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\\ &\leq \sqrt{3}\,|\nabla v|.\end{aligned}$$
Donc,
$$\|div(v)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 3\int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x.$$
Par définition de la norme $\mathbf{H}^1(\Omega)$, on obtient
$$\|div(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{3}\,\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$
Donc, on obtient
$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial v^{\delta}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi\right)\right| &\leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) c\,\|v^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\|v^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\\ &+ \frac{\sqrt{3}}{\delta}\,\|div(v^{\delta}_{\varepsilon m})\|_{L^2(\Omega)}\,\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \mu_*\,\|v^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \tilde{c}\,\|\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_0)}\,\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\\ &+ \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad \text{p.p dans } (0,\tau),\end{aligned}$$
où $\tilde{c}$ est la norme de l'opérateur trace $\gamma_0 : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{L}^2(\Gamma_0)$. D'où
$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial v^{\delta}_{\varepsilon m}}{\partial t}\right\|_{\mathcal{V}_0'} &\leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) c\,\|v^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\|v^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \frac{\sqrt{3}}{\delta}\,\|div(v^{\delta}_{\varepsilon m})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \mu_*\,\|v^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\\ &+ \tilde{c}\,\|\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_0)} + \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \text{p.p dans } (0,\tau).\end{aligned}$$
En utilisant (voir le lemme 1.1 avec $p = \frac{4}{3} > 1$)
$$(a+b)^{\frac{4}{3}} \leqslant 2^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right), a, b \geqslant 0,$$

on obtient,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial v_{\varepsilon m}^{\delta}}{\partial t}\right\|_{\mathcal{V}_0'}^{\frac{4}{3}} \leq\, & 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^{\frac{4}{3}} c^{\frac{4}{3}}\left[\|v_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|v_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{4}{3}} \\ & + 2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\delta}\right)^{\frac{4}{3}}\left\|div\left(v_{\varepsilon m}^{\delta}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{3}} + 2\,\mu_*^{\frac{4}{3}}\left\|v_{\varepsilon m}^{\delta}\right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{4}{3}} \\ & + 2^{\frac{4}{3}}\,\widetilde{c}^{\frac{4}{3}}\,\|\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_0)}^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{4}{3}}\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{4}{3}}.\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau}\left[\|v_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|v_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}t &= \int_0^{\tau}\|v_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{3}}\|v_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{2}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \|v_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}^{\frac{2}{3}}\|v_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega))}^{2},\end{aligned}$$

on trouve des estimations du lemme 3.2 qu'il existe une constante $C_\delta > 0$, indépendant de m et ε, de sorte que

$$\int_0^{\tau}\left\|\frac{\partial v_{\varepsilon m}^{\delta}}{\partial t}\right\|_{\mathcal{V}_0'}^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}t \leq C_\delta,$$

ce qui termine la preuve. ■

Pour passer à la limite quand m tend vers ∞, on considère le lemme suivant

Lemme 3.4. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\ell \in L^\infty(0,\tau;L_+^\infty(\Gamma_0))$. Alors l'application Ψ_ε' est lipschitzienne de $L^2(0,\tau;\boldsymbol{L}^2(\Gamma_0))$ dans $L^2(0,\tau;\boldsymbol{L}^2(\Gamma_0))$.*

Preuve . Rappelons que, pour tout $u \in L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))$, $\Psi_\varepsilon'(u) \in (L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0)))' = L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))$ est définie par

$$\langle\Psi_\varepsilon'(u),w\rangle = \int_0^{\tau}\int_{\Gamma_0}\ell\,\frac{u\cdot w}{\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t, \qquad \forall w \in L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0)),$$

où $\langle .,.\rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))$ i.e.

$$\Psi_\varepsilon'(u) = \ell\,\frac{u}{\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}, \qquad \forall u \in L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0)).$$

Mais l'application

$$h_\varepsilon : \begin{cases}\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ u \mapsto \frac{u}{\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}},\end{cases}$$

est Fréchet différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathrm{Jac}(h_\varepsilon)(u) = \left(\frac{\partial h_{\varepsilon i}}{\partial x_j}(u)\right)_{1\leq i,j\leq 3} = \left(\frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}} - \frac{u_i\,u_j}{(\varepsilon^2+|u|^2)^{\frac{3}{2}}}\right)_{1\leq i,j\leq 3},$$

où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. De plus, on a

$$\left|\frac{\partial h_{\varepsilon i}}{\partial x_j}(u)\right| \leq \frac{2}{\varepsilon}, \qquad \forall i,j \in \{1,...,3\},\ \forall u \in \mathbb{R}^3.$$

et h_ε est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^3$. C'est à dire,

$$\exists\, c > 0,\ |h_\varepsilon(u) - h_\varepsilon(v)| \leq c\,|u - v|.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
\|\Psi_\varepsilon'(u) - \Psi_\varepsilon'(v)\|^2_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))} &= \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} |\Psi_\varepsilon'(u) - \Psi_\varepsilon'(v)|^2 \,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \left| \ell \left(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon^2 + |u|^2}} - \frac{v}{\sqrt{\varepsilon^2 + |v|^2}} \right) \right|^2 \mathrm{d}x'\mathrm{d}t \\
&\leq c^2 \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} |\ell|^2 |u - v|^2 \,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t \\
&\leq c^2 \|\ell\|^2_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Gamma_0))} \|u - v\|^2_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))},
\end{aligned}$$

d'où Ψ_ε' est lipschitzienne de $L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))$ dans $L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))$. ■

Maintenant, en utilisant les estimations obtenues dans le lemme 3.2 et lemme 3.3 et les arguments de compacité, on peut prouver le résultat d'existence suivant pour le problèmes pénalisés (P_ε^δ).

Théorème 3.1. *Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$. Supposons que (2.12) est vérifiée et que $(v_{\varepsilon 0}^\delta)_{\varepsilon>0,\delta>0}$ est une suite bornée de $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Alors, il existe une sous suite de $(v_{\varepsilon m}^\delta)_{m\geq 1}$, notée encore $(v_{\varepsilon m}^\delta)_{m\geq 1}$, de sorte que*

$$v_{\varepsilon m}^\delta \rightharpoonup v_\varepsilon^\delta \text{ faiblement étoile dans } L^\infty(0,\tau;\boldsymbol{L}^2(\Omega)), \tag{3.18}$$

$$v_{\varepsilon m}^\delta \rightharpoonup v_\varepsilon^\delta \text{ faiblement dans } L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0), \tag{3.19}$$

et v_ε^δ est la solution de (P_ε^δ). De plus $\frac{\partial v_\varepsilon^\delta}{\partial t}$ appartient à $L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;\mathcal{V}_0')$.

Preuve . Des estimations a priori du lemme 3.2 on obtient (3.18) et (3.19). De l'estimation (3.17) du lemme 3.3, donc, il existe une sous suite de $(\frac{\partial v_{\varepsilon m}^\delta}{\partial t})_{m\geq 1}$ notée encore $(\frac{v_{\varepsilon m}^\delta}{\partial t})_{m\geq 1}$ vérifiant

$$\frac{\partial v_{\varepsilon m}^\delta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial v_\varepsilon^\delta}{\partial t}, \qquad \text{faiblement dans } L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;\mathcal{V}_0'). \tag{3.20}$$

En utilisant le lemme 1.2 et les convergences (3.19) et (3.20), avec $B_0 = \mathcal{V}_0, B = \mathbf{L}^4(\Omega)$ et $B_1 = \mathcal{V}_0'$ on obtient

$$v_{\varepsilon m}^\delta \to v_\varepsilon^\delta \qquad \text{fortement dans } L^2(0,\tau;\mathbf{L}^4(\Omega)).$$

On peut réutiliser le lemme 1.2 avec $B_0 = \mathcal{V}_0, B = \mathbf{H}^s(\Omega)$ et $B_1 = \mathcal{V}_0'$ avec $\frac{1}{2} < s < 1$, l'injection de B_0 dans B est compacte, on obtient donc

$$v_{\varepsilon m}^\delta \to v_\varepsilon^\delta \qquad \text{fortement dans } L^2(0,\tau;\mathbf{H}^s(\Omega)).$$

Comme $s - \frac{1}{2} > 0$, on a

$$\mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \hookrightarrow \mathbf{H}^0(\Gamma_0) = \mathbf{L}^2(\Gamma_0).$$

Avec le théorème de trace 1.20 et de la continuité de l'opérateur trace, on a

$$v_{\varepsilon m}^\delta \to v_\varepsilon^\delta \qquad \text{fortement dans } L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0)).$$

Maintenant, en utilisant (3.18)-(3.20) et le lemme de Simon 1.3, on peut extraire une autre sous suite notée encore $(v^\delta_{\varepsilon m})_{m\geq 1}$, on obtient

$$v^\delta_{\varepsilon m} \to v^\delta_\varepsilon \quad \text{fortement dans } C([0,\tau]; H), \tag{3.21}$$

où H est un espace de Banach tel que $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset H \subset \mathcal{V}_0'$ avec l'injection de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans H est compacte.
Soit $\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)$ et $\varphi \in \mathcal{V}_0$. Pour tout $m \geq 1$ on définit à nouveau φ_m comme la projection orthogonale pour le produit scalaire de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ de φ sur Vect$\{w_1, ..., w_m\}$.
Avec (3.8), on a

$$\int_0^\tau \left[\left(\frac{\partial v^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi_m\right) + b(v^\delta_{\varepsilon m}, v^\delta_{\varepsilon m}, \varphi_m) + \frac{1}{2}\int_\Omega v^\delta_{\varepsilon m}\, div(v^\delta_{\varepsilon m})\, \varphi_m \,\mathrm{d}x\right] \chi \,\mathrm{d}t$$
$$+ \frac{1}{\delta}\int_0^\tau \left(div(v^\delta_{\varepsilon m}), div(\varphi_m)\,\chi\right)\,\mathrm{d}t + a(v^\delta_{\varepsilon m}, \varphi_m\,\chi) + \left\langle \Psi'_\varepsilon(v^\delta_{\varepsilon m}), \varphi_m\,\chi\right\rangle = \int_0^\tau (f,\varphi_m)\chi\,\mathrm{d}t.$$

Avec une intégration par parties du premier terme, on obtient

$$\int_0^\tau \left(v^\delta_{\varepsilon m}, \varphi_m\right)\frac{\partial \chi}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \left[b(v^\delta_{\varepsilon m}, v^\delta_{\varepsilon m}, \varphi_m) + \frac{1}{2}\int_\Omega v^\delta_{\varepsilon m}\, div(v^\delta_{\varepsilon m})\, \varphi_m\,\mathrm{d}x\right]\chi\,\mathrm{d}t$$
$$+ \frac{1}{\delta}\int_0^\tau \left(div(v^\delta_{\varepsilon m}), div(\varphi_m)\,\chi\right)\,\mathrm{d}t + a(v^\delta_{\varepsilon m}, \varphi_m\,\chi) + \left\langle \Psi'_\varepsilon(v^\delta_{\varepsilon m}), \varphi_m\,\chi\right\rangle = \int_0^\tau (f,\varphi_m)\,\chi\,\mathrm{d}t.$$

En rappelant que $(\varphi_m)_m \geq 1$ converge fortement vers φ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et on utilise le lemme 3.4, on peut passer à la limite quand $m \longrightarrow \infty$ on obtient

$$\int_0^\tau \left(v^\delta_\varepsilon, \varphi\right)\frac{\partial \chi}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \left[b(v^\delta_\varepsilon, v^\delta_\varepsilon, \varphi) + \frac{1}{2}\int_\Omega v^\delta_\varepsilon\, div(v^\delta_\varepsilon)\,\varphi\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\delta}\left(div(v^\delta_\varepsilon), div(\varphi)\right)\right]\chi\,\mathrm{d}t$$
$$+ a(v^\delta_\varepsilon, \varphi\,\chi) + \left\langle \Psi'_\varepsilon(v^\delta_\varepsilon), \varphi\,\chi\right\rangle = \int_0^\tau (f,\varphi)\chi\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui donne (3.4).
D'autre part, avec (3.21), on a

$$v^\delta_{\varepsilon m}(0) \to v^\delta_\varepsilon(0) \quad \text{fortement dans } H,$$

avec $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset H \subset \mathcal{V}_0'$ et aussi on a

$$v^\delta_{\varepsilon m}(0) = v^\delta_{\varepsilon m0} \to v^\delta_{\varepsilon 0} \quad \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

d'où $v^\delta_\varepsilon(0) = v^\delta_{\varepsilon 0}$. ■

3.2.1 Propriétés de la pression approchée

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, on définit et on approche la pression $p^\delta_\varepsilon \in L^2\left(0,\tau; L^2(\Omega)\right)$ par

$$p^\delta_\varepsilon = -\frac{1}{\delta}\,\mathrm{div}\left(v^\delta_\varepsilon\right), \tag{3.22}$$

où $\left(v^\delta_\varepsilon\right)$ est la solution du problème pénalisé (P^δ_ε).
De (3.4), on a

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{d}{dt}\left(v^\delta_\varepsilon, \varphi\right), \chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} + \left\langle b\left(v^\delta_\varepsilon, v^\delta_\varepsilon, \varphi\right), \chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} \\
&+ \frac{1}{2}\left\langle \int_\Omega v^\delta_\varepsilon\,\mathrm{div}\left(v^\delta_\varepsilon\right)\varphi\,\mathrm{d}x, \chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} - \left\langle\left(p^\delta_\varepsilon, \mathrm{div}(\varphi)\right), \chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} + a\left(v^\delta_\epsilon, \varphi\chi\right) \\
&+ \left\langle \Psi'_\varepsilon\left(v^\delta_\varepsilon\right), \varphi\chi\right\rangle = \langle (f,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)},\ \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \forall x \in \mathcal{D}(0,\tau).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

De plus, avec la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega p_\varepsilon^\delta \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\delta}\int_{\partial\Omega} v_\varepsilon^\delta \cdot n \,\mathrm{d}y = 0, \qquad \text{p.p dans } (0.\tau), \tag{3.24}$$

et, avec (3.12), on trouve

$$\left\|p_\varepsilon^\delta\right\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq \frac{C}{\sqrt{\delta}},$$

où C est une constante indépendante de δ et ε. Malheureusement, avec cette estimation on ne peut pas passer à la limite quand δ tend vers 0 dans le terme $\left\langle \left(p_\varepsilon^\delta, div(\varphi)\right), \chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)}$.
Donc, on doit établir une autre estimation indépendante de ε et δ.

Lemme 3.5. *Sous les hypothèses du lemme 3.2, il existe une constante C, indépendante de δ et ε, telle que*

$$\left\|p_\varepsilon^\delta\right\|_{H^{-1}(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C. \tag{3.25}$$

Preuve . Soient $\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)$ et $w \in L_0^2(\Omega)$. Alors, il existe $\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ telle que

$$\operatorname{div}(\varphi) = w$$

dans Ω, et $\varphi = P(w)$ où P est un opérateur linéaire continu de $L_0^2(\Omega)$ dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (voir [18] , [12]). Avec une intégration par parties dans le premier terme de (3.23), on obtient

$$\int_0^\tau \left(p_\varepsilon^\delta, \operatorname{div}(\varphi)\right)\chi\,\mathrm{d}t = -\int_0^\tau \left(v_\varepsilon^\delta,\varphi\right)\frac{\partial\chi}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \left[b\left(v_\varepsilon^\delta, v_\epsilon^\delta,\varphi\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^\delta \operatorname{div}\left(v_\varepsilon^\delta\right)\varphi\,\mathrm{d}x\right]\chi\,\mathrm{d}t$$
$$+ a\left(v_\varepsilon^\delta\cdot\varphi\chi\right) - \int_0^\tau (f,\varphi)\chi\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^T \Big(b\left(v_\varepsilon^\delta, v_\varepsilon^\delta,\varepsilon\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^\delta \operatorname{div}\left(v_\varepsilon^\delta\right)\varphi\,\mathrm{d}x\Big)\chi\mathrm{d}t\Big| \\
&\leqslant \int_0^T \Big(\left|b\left(v_\varepsilon^\delta, v_\varepsilon^\delta,\varphi\right)\right| + \frac{1}{2}\Big|\int_\Omega v_\varepsilon^\delta \operatorname{div}\left(v_\varepsilon^\delta\right)\varphi\,\mathrm{d}x\Big|\Big)|\chi|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^T \Big(\Big|\int_\Omega \left(v_\varepsilon^\delta\right)_i \frac{\partial\left(v_\varepsilon^\delta\right)_j}{\partial x_i}\varphi_j dx\Big| + \frac{1}{2}\Big|\int_\Omega v_\varepsilon^\delta \operatorname{div}\left(v_\varepsilon^\delta\right)\varphi\,\mathrm{d}x\Big|\Big)|\chi|\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^T \Big(b\left(v_\varepsilon^\delta, v_\varepsilon^\delta,\varepsilon\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^\delta \operatorname{div}\left(v_\varepsilon^\delta\right)\varphi\,\mathrm{d}x\Big)|\chi|\mathrm{d}t\Big| \\
&\leqslant \int_0^T \Big(\left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \left\|\frac{\partial\left(v_\varepsilon^\delta\right)_j}{\partial x_i}\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\
&+ \frac{1}{2}\left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \left\|\operatorname{div}\left(v_\varepsilon^\delta\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\Big)|\chi|\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On pose $\varphi\chi = \eta$, de l'injection continue de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^4(\Omega)$ et comme

$$\left\|\operatorname{div}\left(v_\varepsilon^\delta\right)\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \sqrt{3}\left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\tau \left[b\left(v_\varepsilon^\delta, v_\varepsilon^\delta, \varphi\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^\delta \operatorname{div}\left(v_\varepsilon^\delta\right)\varphi \,\mathrm{d}x\right]\chi \,\mathrm{d}t\right| \leq \\
&\leq \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{L^2\left(0,\tau;\mathbf{L}^4(\Omega)\right)}\left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{L^2\left(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega)\right)}\|\eta\|_{L^\infty\left(0,\tau;\mathbf{L}^4(\Omega)\right)} \\
&\leq K^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left\|v_\varepsilon^\delta\right\|^2_{L^2\left(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega)\right)}\|\eta\|_{L^\infty\left(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega)\right)},
\end{aligned}$$

où K est la constante de l'injection continue de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^4(\Omega)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\tau \left(p_\varepsilon^\delta, w\right)\chi dt\right| \leq \left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{L^2\left(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)}\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L^2\left(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)} \\
&+ K^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left\|v_\varepsilon^\delta\right\|^2_{L^2\left(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega)\right)}\|\eta\|_{L^\infty\left(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega)\right)} \\
&+ \mu_*\sqrt{\tau}\left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{L^2\left(0,\tau:\mathbf{H}^1(\Omega)\right)}\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega))} + \sqrt{\tau}\|f\|_{L^2(0,\tau,\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de l'opérateur P et l'injection continue de $H^1(0,\tau)$ dans $L^\infty(0,\tau)$ (voir [4]), on a

$$\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega))} = \|\chi\|_{L^\infty(0,\tau)}\|P(w)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C\|\chi\|_{H^1(0,\tau)}\|w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C\|\eta\|_{H^1(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))},$$

où C est une constante indépendante de δ et ε. Avec les estimations (3.10) et (3.11), on déduit que v_ε^δ est bornée dans $L^2\left(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$ indépendamment de δ et ε, et on obtient

$$\left|\int_0^\tau \left(p_\varepsilon^\delta, w\right)\chi dt\right| \leq C \mid w\chi\|_{H^1(0,\tau;L^2(\Omega))}, \quad \forall w \in L_0^2(\Omega), \forall\chi \in \mathcal{D}(0,\tau), \tag{3.26}$$

où C une constante indépendante de δ et ε.
Soit $\widetilde{w} \in L^2(\Omega)$. On peut appliquer (3.26) avec

$$w = \widetilde{w} - \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega \widetilde{w}\,\mathrm{d}x.$$

En effet, $w \in L_0^2(\Omega)$. De plus, avec (3.24), on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\tau \left(p_\varepsilon^\delta, \widetilde{w} - \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega \widetilde{w}\,\mathrm{d}x\right)\chi \,\mathrm{d}t\right| = \\
&= \left|\int_0^\tau \left(p_\varepsilon^\delta, \widetilde{w}\right)\chi \,\mathrm{d}t - \frac{1}{mes\Omega}\int_0^\tau \left(\int_\Omega p_\varepsilon^\delta \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_\Omega \widetilde{w}\,\mathrm{d}x\right)\chi \,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^\tau \left(p_\varepsilon^\delta, \widetilde{w}\right)\chi \,\mathrm{d}t\right|.
\end{aligned}$$

Observant que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\widetilde{w}\|_{L^2(\Omega)},$$

on obtient

$$\left|\int_0^\tau \left(p_\varepsilon^\delta, w\right)\,\chi \,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^\tau \left(p_\varepsilon^\delta, \widetilde{w}\right)\chi \,\mathrm{d}t\right| \leq C\|\widetilde{w}\chi\|_{H^1(0,\tau;L^2(\Omega))}, \forall\widetilde{w} \in L^2(\Omega), \forall\chi \in \mathcal{D}(0,\tau). \tag{3.27}$$

De, la densité de $\mathcal{D}(0,\tau) \otimes L^2(\Omega)$ dans $H^1\left(0,\tau;L^2(\Omega)\right)$ on obtient (3.25). ∎

3.3 Existence de solutions du problème (P_ε)

On peut maintenant passer à la limite dans le problème pénalisé (P_ε^δ) quand δ tend vers zéro.

Théorème 3.2. *Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que $\left(v_{\varepsilon 0}^\delta\right)_{\varepsilon>0,\delta>0}$ est une suite bornée de $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. D'autre part, on suppose que (2.12) et (3.6) sont vérifiées. Alors, il existe une sous suite de $\left(v_\varepsilon^\delta, p_\varepsilon^\delta\right)_{\delta>0}$,notée encore $\left(v_\varepsilon^\delta, p_\varepsilon^\delta\right)_{\delta>0}$ telle que*

$$v_\varepsilon^\delta \to v_\varepsilon \text{ faiblement étoile dans } L^\infty\left(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{3.28}$$

$$v_\varepsilon^\delta \to v_\varepsilon \quad \text{faiblement dans } L^2\left(0,\tau;\mathcal{V}_0\right), \tag{3.29}$$

$$p_\varepsilon^\delta \to p_\varepsilon \text{ faiblement dans } H^{-1}\left(0,\tau;L_0^2(\Omega)\right), \tag{3.30}$$

et $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)$ est la solution de (P_ε). De plus, $\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}$ appartient à $L^{\frac{4}{3}}\left(0,\tau;(\mathcal{V}_{0div})'\right)$.

Preuve . Comme les estimations (3.10) et (3.11) indépendantes de m, δ et ε on a la suite $\left(v_\varepsilon^\delta\right)_{\delta>0}$ est bornée dans $L^2\left(0,\tau;\mathcal{V}_0\right)\cap L^\infty\left(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$. Du lemme 3.5, on déduit que la suite $\left(p_\varepsilon^\delta\right)_{\delta>0}$ bornée dans $H^{-1}\left(0,\tau;L_0^2(\Omega)\right)$. Donc, on a immédiatement les convergences (3.28)-(3.30). De (3.12), on déduit que

$$\left\|\operatorname{div}\left(v_\varepsilon^\delta\right)\right\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \le C\sqrt{\delta},$$

avec une constante C indépendant de δ et ε. Ainsi,

$$\operatorname{div}\left(v_\varepsilon^\delta\right) \to 0 \quad \text{fortement dans } L^2\left(0,\tau;L^2(\Omega)\right).$$

Maintenant, on peut obtenir une estimation de $\frac{\partial v_\varepsilon^\delta}{\partial t}$ dans $L^{\frac{4}{3}}\left(0,\tau;(\mathcal{V}_{0div})'\right)$ en utilisant les mêmes calculs comme dans le lemme 3.3. En effet, soient $\varphi \in \mathcal{V}_{0div}$ et $\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)$. Avec (3.23) on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt}\left(v_\varepsilon^\delta,\varphi\right),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} &= \int_0^\tau\int_\Omega \frac{\partial v_\epsilon^\delta}{\partial t}\varphi\chi dxdt = -\left\langle b\left(v_\varepsilon^\delta,v_\varepsilon^\delta,\varphi\right),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} \\ -\frac{1}{2}\left\langle \int_\Omega v_\varepsilon^\delta \operatorname{div}\left(v_\varepsilon^\delta\right)\varphi dx,\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau).\mathcal{D}(0,\tau)} &- a\left(v_\varepsilon^\delta,\varphi\chi\right) - \left\langle \Psi_\varepsilon'\left(v_\varepsilon^\delta\right),\varphi\chi\right\rangle + \langle (f,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)}.\end{aligned}$$

On peut estimer tous les termes dans la partie droite de l'équation précédente et on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\tau\int_\Omega \frac{\partial v_\varepsilon^\delta}{\partial t}\varphi\chi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| &\le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)c\int_0^\tau \left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{3}{2}}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\chi|\,\mathrm{d}t \\ &+ \mu_*\int_0^\tau \left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\chi|\,\mathrm{d}t + \tilde{c}\int_0^\tau \|\ell\|_{L^2(\Gamma_0)}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\chi|\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\chi|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{3}{2}}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\chi|\,\mathrm{d}t &\le \left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\tau \left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{3}{4}}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\chi\|_{L^4(0,\tau)} \\ &\le \left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}^{\frac{1}{2}}\left\|v_\varepsilon^\delta\right\|_{L^2(0.\tau;\mathbf{H}^1(\Omega))}^{\frac{3}{2}}\|\varphi\,\chi\|_{L^4(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega))},\end{aligned}$$

et en rappelant que $\left(v_\varepsilon^\delta\right)_{\delta>0}$ bornée dans $L^2\left(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega)\right)\cap L^\infty\left(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$ indépendante de δ et ε on déduit que

$$\left\|\frac{\partial v_\varepsilon^\delta}{\partial t}\right\|_{L^{\frac{4}{3}}\left(0,\tau;(\mathcal{V}_{0div})'\right)} \le C, \tag{3.31}$$

où C est une constante indépendante de δ et ε.
On peut donc extraire une autre sous suite notée encore $\left(\frac{\partial v_\varepsilon^\delta}{\partial t}\right)_{\delta>0}$, on obtient

$$\frac{\partial v_\varepsilon^\delta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \quad \text{faiblement dans } L^{\frac{4}{3}}\left(0,\tau;(\mathcal{V}_{0div})'\right). \tag{3.32}$$

En utilisant le lemme 1.2, avec $B_0 = \mathcal{V}_0, B = \mathbf{L}^4(\Omega)$ and $B_1 = (\mathcal{V}_{0div})'$, on obtient

$$v_\varepsilon^\delta \to v_\varepsilon \quad \text{fortement dans } L^2\left(0,\tau : \mathbf{L}^4(\Omega)\right),$$

et, avec $B_0 = \mathcal{V}_0, B = \mathbf{H}^s(\Omega), \frac{1}{2} < s < 1$, et $B_1 = (\mathcal{V}_{0div})'$

$$v_\varepsilon^\delta \to v_\varepsilon \quad \text{fortement dans } L^2\left(0,\tau;\mathbf{H}^s(\Omega)\right).$$

D'où,

$$v_\varepsilon^\delta \to v_\varepsilon \quad \text{fortement dans } L^2\left(0,\tau;\mathbf{L}^2\left(\Gamma_0\right)\right).$$

En utilisant (3.28)-(3.32) et le lemme de Simon, on peut extraire une autre sous suite notée encore $\left(v_\varepsilon^\delta\right)_{\delta>0}$, on obtient

$$v_\varepsilon^\delta \to v_\varepsilon \quad \text{fortement dans } C([0,\tau];H),$$

où H est un espace de Banach tel que $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset H \subset (\mathcal{V}_{0div})'$ avec une injection compacte de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans H.
Avec toutes ces convergences et avec l'hypothèse (3.6), on peut passer à la limite dans (3.4) et (3.5) par les mêmes techniques comme dans le théorème 3.1 et on obtient (3.2) et (3.3). ■

3.4 Existence de solutions du problème (P)

Du lemme 3.1 et la convexité de la fonctionnelle Ψ_ε, on a

$$\Psi_\varepsilon\left(v_\varepsilon + \varphi\chi\right) - \Psi_\varepsilon\left(v_\varepsilon\right) \geq \left\langle \Psi_\varepsilon'\left(v_\varepsilon\right), \varphi\chi\right\rangle, \forall\varphi \in \mathcal{V}_0, \forall\chi \in \mathcal{D}(0,\tau),$$

et de (3.2) on obtient

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{d}{dt}\left(v_\varepsilon,\varphi\right),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} + \left\langle b\left(v_\varepsilon,v_\varepsilon,\varphi\right),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} - \left\langle\left(p_\varepsilon,\operatorname{div}(\varphi)\right),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)} \\ &+ a\left(v_\varepsilon,\varphi\chi\right) + \Psi_\varepsilon\left(v_\varepsilon+\varphi\chi\right) - \Psi_\varepsilon\left(v_\varepsilon\right) \geq \langle (f,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,\tau),\mathcal{D}(0,\tau)},\end{aligned} \tag{3.33}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_0$ et pour tout $\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)$, avec la condition initiale

$$v_\varepsilon(0,\cdot) = v_{\varepsilon 0}. \tag{3.34}$$

Pour passer à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans (3.33), on utilise le lemme suivant

Lemme 3.6. *Soient $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de $L^2\left(0,\tau;\mathbf{L}^2\left(\Gamma_0\right)\right)$ et $w \in L^2\left(0,\tau;\mathbf{L}^2\left(\Gamma_0\right)\right)$ telle que $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement vers w dans $L^2\left(0,\tau;\mathbf{L}^2\left(\Gamma_0\right)\right)$.Alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_\varepsilon\left(w_\varepsilon\right) = \Psi(w).$$

Preuve . Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de Ψ et Ψ_ε, on a

$$\Psi_\varepsilon(w_\varepsilon) - \Psi(w) = \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell\left(|w_\varepsilon| - |w|\right) \mathrm{d}x' \,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell\left(\sqrt{\varepsilon^2 + |w_\varepsilon|^2} - |w_\varepsilon|\right) \mathrm{d}x' \,\mathrm{d}t.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |\Psi_\varepsilon(w_\varepsilon) - \Psi(w)| &\leq \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell\, \big||w_\varepsilon| - |w|\big| \,\mathrm{d}x' \,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_{\Gamma_0} \ell\, \varepsilon \,\mathrm{d}x' \,\mathrm{d}t \\ &\leq \|\ell\|_{L^2(0,\tau;\mathrm{L}^2(\Gamma_0))} \left(\|w_\varepsilon - w\|_{L^2\left(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0)\right)} + \varepsilon\sqrt{\tau\, \mathrm{meas}\,(\Gamma_0)}\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Maintenant, on peut montrer que le problème (P) admet une solution.

Théorème 3.3. *Supposons que $\left(v_{\varepsilon 0}^\delta\right)_{\varepsilon>0,\delta>0}$ est une suite bornée de $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Sous les hypothèses (2.12) et (3.1). Alors, il existe sous suite de $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, notée encore $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que*

$$v_\varepsilon \to v \quad \textit{étoile dans } L^\infty\left(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{3.35}$$

$$v_\varepsilon \to v \quad \textit{faiblement dans } L^2\left(0,\tau;\mathcal{V}_0\right), \tag{3.36}$$

$$p_\varepsilon \to p \quad \textit{faiblement dans } H^{-1}\left(0,\tau;L_0^2(\Omega)\right), \tag{3.37}$$

et (v,p) est solution du problème (P). De plus, $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ appartient à $L^{\frac{4}{3}}\left(0,\tau;(\mathcal{V}_{0div})'\right)$.

Preuve . Rappelant que les estimations (3.10)-(3.11) sont indépendantes de m, δ et ε, on en déduit que $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2\left(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$. De plus, comme l'estimation (3.25) est indépendante de δ et ε, la suite $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $H^{-1}\left(0,\tau;L_0^2(\Omega)\right)$ on obtient donc les convergences (3.35)-(3.37). D'autre part, de l'estimation (3.31) implique que $\left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}\right)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^{\frac{4}{3}}\left(0,\tau;(\mathcal{V}_{0div})'\right)$.D'où, on peut extraire une autre sous suite notée encore $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$,on a

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \to \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{faiblement dans } L^{\frac{4}{3}}\left(0,\tau;(\mathcal{V}_{0div})'\right),$$

et avec les mêmes arguments que dans le théorème précédent, on obtient

$$v_\varepsilon \to v \text{ fortement dans } L^2\left(0,\tau;\mathbf{L}^4(\Omega)\right),$$

$$v_\varepsilon \to v \text{ fortement dans } L^2\left(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Gamma_0)\right),$$

et

$$v_\varepsilon \to v \text{ fortement dans } C([0,\tau],H),$$

où H est un espace de Banach tel que $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset H \subset (\mathcal{V}_{0div})'$ avec l'injection compacte de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans H.

Avec toutes ces convergences et l'hypothèse (3.1), on peut passer à la limite dans (3.33) et (3.34) par la même technique utilisée dans le théorème 3.1 et le théorème 3.2, on obtient (2.14) et (2.15). ■

Remarque 3.1. *L'unicité de la solution en dimension deux est assurée par contre en dimension 3, cela nécessite des régularités supplémentaires et une viscosité assez grande (voir [1] pour plus de détails).*

Conclusion

Les équations de Stokes et de Navier Stokes jouent un rôle central dans la mécanique des fluides ,de l'ingénierie et des mathématique appliquées .
Dans ce mémoire, on a

- donné quelques outils mathématiques qui sont nécessaires dans l'étude mathématique du problème de Navier-Stokes instationnaire,
- fait une description du problème parabolique d'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible gouverné par le système de Navier-Stokes avec des conditions aux limites mixtes (la loi de Tresca et la condition de Dirichlet homogène),
- établit une formulation faible de ce problème,
- on a présenté la méthode de Galerkin pour montrer l'existence en utilisant une pénalisation de la divergence de la vitesse.

Bibliographie

[1] M. Boukrouche, I. Boussetouan, L. Paoli. *Non-isothermal Navier-Stokes system with mixed boundary conditions and friction law : uniqueness and regularity properties*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, Vol. 102, 168-185, 2014.

[2] M. Boukrouche, I. Boussetouan, L. Paoli. *Unsteady 3D-Navier-Stokes system with Tresca's friction law*, Quarteley of Applied Mathematics, Vol 78, pp 525-543, 2020.

[3] F. Boyer, P. Fabrie. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 183, Springer, New York, 2013.

[4] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Dunod, Paris, 1999.

[5] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, Mc Graw Hill, New York, 1955.

[6] F. Demengel, G. Demengel. *Espaces fonctionnels, Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles*, EDP Sciences, Paris, 2007.

[7] J. Droniou. *Intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles*, Polycopié de l'école doctorale de Maths- Info de Marseille, 2001.

[8] H. Fujita. *Flow problems with unilateral boundary conditions.* Leçons, Collège de France, 1993.

[9] H. Fujita. *A mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak or slip boundary conditions*, Mathematical Fluid Mechanics and Modeling, Vol. 888, 199-216, 1994.

[10] H. Fujita, *Non-stationary Stokes flows under leak boundary conditions of friction type*, J. Comput. Appl. Math, 19 : 1-8, 2001.

[11] M.L. Gallardo. *Notes du cours sur les espaces de Hilbert, licence 3 ème année, Université de Tours*, 2007-2008.

[12] V. Girault, P.A. Raviart. *Finite element approximation of the Navier Stokes equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986.

[13] X. Gourdon, *Analyse*, 2e édition, Ellipses, 2008.

[14] R.H.W. Hoppe.*Finite Element Methods*, Spring, 2011.

[15] V.A. Kondratév, O.A.Oleinik. *Boundary-value problems for the system of elasticity theory in unbounded domains. Korn's inequalities.* Russian Math. Surveys, 43(5) :95–119, 1998.

[16] G. Leborgne. *Approximations variationelles de problèmes aux limites elliptiques et éléments finis*, 2003.

[17] H. Le Dert. *Equations aux dérivées partielles non linéaires*, Mathématiques et Applications, Vol. 72, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

[18] J.L. Lions. *Some problems connected with Navier-Stokes equations*, Academic Press, Vol. 40, 59-84, New York, 1978.

[19] I.J. Rao, K.R. Rajagopal. The effect of the slip boundary condition on the flow of fuids in a channel. Acta Mechanica 135 : 113-126, 1999.

[20] F. Saidi. *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes avec des conditions aux bords non linéaires. Etude mathématique et numérique*, thèse de doctorat à l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne, 2005.

[21] N. Saito. *On the stokes equations with the leak and slip boundary conditions of friction type : regularity of solutions*. Publ. RIMS Kyoto Univ, 40 :345–383, 2004.

[22] J. Simon. *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 146, 65-95, 1987.

[23] R. Temam. *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.