N° d'ordre : ....

RÉPUBLIQUE ALGÉRIÈNNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI
Faculté de Mathématiques & Informatique

UNIVERSITE MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI
BORDJ BOU ARRERIDJ

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

En : **Mathématiques**

Spécialité : **Analyse mathématique et applications**

Par : **BOUAKAZ Hadjer & ABED Chaima**

Sujet :

Stabilisation de l'équation des ondes semi linéaire avec termes sources et dissipatifs

*Soutenu publiquement, le **06/09/2020**, devant le jury composé de :*

BENTERKI Djamila	Maître de Conférences/**A**	Présidente
BERKANI Amirouche	Maître de Conférences/**B**	Encadreur
ADDOUNE Smail	Maître de Conférences/**A**	Examinateur

Promotion 2019/2020

Remerciements

Nous remercions avant tout Allah qui nous'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

En premier lieu, nous tiens à remercier chaleureusement **Dr. BERKANI Amirouche**, enseignant à l'université Mohamed El Bachir El Ibrahimi, Bordj Bou Arréridj, pour son aide, sa disponibilité, son dynamisme et sa gentillesse. Il a su nous guider avec un enthousiasme constant et communicatif. Pendant ces années, il nous'a témoigné sa confiance. Ses grandes qualités scientifiques et humaines ont été indispensables à l'élaboration de cette thèse. Pour tout cela, nous ne l'en remercierons jamais assez.

Merci au membres de jury, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et nous les en remercions sincèrement.

Sans oublier de remercier tous nos enseignants pendant tous les paliers de notre parcours, et exceptionnellement aux enseignants qui ont enrichi nos connaissances.

Enfin, toute personne ayant aidé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire est vivement remerciée.

Table des matières

Introduction générale

Les mathématiques consistent d'abord en un langage, qui permet de transcrire des problèmes de nature quantitative : C'est la modélisation. Une fois cette transcription faite, des outils sont disponibles pour comprendre et résoudre les problèmes issus des phénomènes du monde réel qui utilisent les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, etc.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Équations Différentielles Ordinaires ou par des Équations aux Dérivées Partielles.

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés, en finance pour étudier les produits dérivés et en traitement d'images pour restaurer les dégradations. En particulier les équations d'ondes modélisent plusieurs phénomènes naturels en : Physique, Chimie et Biologie.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution ainsi que le comportement asymptotique de la solution de l'équation des ondes semi linéaires. Plus précisément, on s'intéresse à l'étude du problème suivant :

$$u_{tt} - \Delta u - \alpha \Delta u_t + \mu u_t = |u|^{p-2} u, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T] \tag{1}$$

soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $p > 2$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\partial\Omega$ sa frontière. La fonction u est essentiellement bornée et Δ est l'opérateur de Laplacien défini par $\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t)$.

Ce travail est décomposé en trois chapitres.

Chapitre 1 : Dans ce chapitre nous présentons des rappels sur l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans notre travail. En particulier, nous donnons quelques résultats fondamentaux concernant les espaces fonctionnels et les théorèmes d'existence pour certains problèmes d'évolution.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, en appliquant la méthode de Faedo-Galerkin, nous allons prouver un résultat d'existence et unicité de la solution de l'équation des ondes semi-linaire.

Chapitre 3 : Dans cette partie, nous montrons que la solution existe globalement en temps dans un ensemble stable et qu'elle est uniformément bornée. Sans aucune condition entre les paramètres p et m, nous prouvons dans la deuxième section la décroissance exponentielle de cette solution. Les techniques utilisées sont basées sur la construction d'une fonction de Lyapunov L, qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème, nous terminons ce travail par une conclusion.

Chapitre 1

Rappels de notions d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous allons présenter d'abord quelques notions fondamentales qui nous seront utiles par la suite. Nous introduirons quelques espaces fonctionnels, ensuite nous annonçons des notions fondamentales qui seront utilisÃ©e dans ce mémoire.

1.1 Rappels et prérequis :

Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport à x_i. Définissons aussi le gradient et le Laplacien de u, respectivement comme suit :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T \text{ et } \left|\nabla u\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2,$$

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}.$$

1.1.1 Les espaces $C^k(\Omega)$

Soient m un entier positif et Ω un intervalle de $\mathbb{R}$. On notera par :

$C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$\big(C(\Omega)\big)^m$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$,

$C_b(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et bornÃ©es, on le munit de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Pour $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, on définit alors :

$C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω,

$C_c^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $C^k(\Omega)$ dont le support est compact et inclus dans Ω,

$C_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.

1.1.2 Espaces $L^p(\Omega) : 1 \leq p < \infty$

On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'espace vectoriel $L^1(\Omega)$ est un espace complet muni de la norme :

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|\,dx.$$

Si $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p\,dx < \infty \right\}.$$

On munit cet espace vectoriel de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

qui le rend complet.

Si $p = \infty$, on définit :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \exists C > 0,\ \text{telle que } u \text{ est mesurable et } |u(x)| < C \right\}.$$

Cet espace vectoriel est complet pour la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\Big\{M > 0,\ |u(x)| \leq M \text{ p.p. sur } \Omega\Big\}.$$

Remarque 1.1 *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_\Omega uv\,dx,\ u, v \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert et l'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

1.1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.1 *(Dérivée faible) On dit que u est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$, s'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$, telle que $\forall\, v \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x)\frac{dv(x)}{dx}dx = -\int_\Omega v(x)w(x)dx. \tag{1.1}$$

Cela revient à dire que $\frac{du(x)}{dx} = w(x)$ au sens des distributions.

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace vectoriel $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega),\ \text{tel que : } \frac{du(x)}{dx} \in L^p(\Omega)\right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{du(x)}{dx}\right\|_{L^p(\Omega)}$$

est un espace de Banach. On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Pour $m \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega), \text{tel que } \frac{d^k u}{dx^k} \in L^p(\Omega),\ k \leq m \right\}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $\frac{d^k u}{dx^k}$ est la dérivée faible d'ordre k de u au sens de la définition (1.1). C'est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{k \leq m} \left\| \frac{d^k u}{dx^k} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 1.2 *Les espaces $H^m(\Omega)$, sont des espaces de Hilbert muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{k \leq m} \left(\frac{d^k u}{dx^k}, \frac{d^k v}{dx^k} \right)_{L^2(\Omega)},\ u, v \in H^m(\Omega).$$

1.1.4 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Définition 1.2 *Soient $1 \leq p < \infty$ et X un espace de Banach, si p est fini on définit $L^p(0, T; X)$ par :*

$$L^p\big(0, T; X\big) = \left\{ u : [0, T] \to X \textit{ mesurable, telle que } \int_0^T \|u\|_X^p \, dt < \infty \right\}$$

où $[0, T]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit cet espace de la norme :

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si p est infini, alors on définit

$$L^\infty\big(0, T; X\big) = \left\{ u :]0, T[\to X \textit{ mesurable, telle que } \sup_{t \in [0,T]} ess \|u\|_X < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in [0,T]} ess \|u(t)\|_X.$$

Théorème 1.1 *Les espaces* $L^p\big(0,T;X\big)$ *munis des normes précédentes sont des espaces de Banach pour* $p \in [0,\infty]$.

Démonstration. Voir [2]. ■

On peut, comme dans le cas d'une fonction réelle définir la dérivée au sens classique ou au sens généralisé d'une fonction à valeurs vectorielles.

Définition 1.3 $C\big([0,T],X\big) = \Big\{u : [0,T] \longrightarrow X$ *continue i.e.* $\|u(t)-u(t_0)\|$ *tend vers zéro quand* t *tend vers* $t_0\Big\}$. *Si pour tout* $t_0 \in [0,T]$, *la limite suivante existe dans* X

$$u'(t_0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h}\Big[u(t_0+h) - u(t_0)\Big]$$

alors on dira que u est dérivable au sens classique et si de plus, la fonction $t \longmapsto u'(t)$ *est continue on dira alors que u appartient à* $C^1\big([0,T],X\big)$. *De façon générale, pour* $k \geq 1$ *entier, on peut définir :*

$$C^k\big([0,T],X\big) = \Big\{u \in C^{k-1}\big([0,T],X\big) \text{ tel que } u^{(k)} \in C\big([0,T],X\big)\Big\}.$$

1.1.5 Résultats de compacité

Le résultat de compacité générale dans l'espace de fonction à valeurs vectorielles est donné par le célèbre théorème de Lions-Aubin .

Théorème 1.2 *Soient* B_0, B *et* B_1 *trois espaces de Banach avec* $B_0 \subset B \subset B_1$ *(l'injection est algébrique et topologique) .On suppose que l'injection* $B \hookrightarrow B_1$ *est continue . Soit T un nombre rÃ©el fini et* $1 < p_0 < \infty$, $1 < p_1 < \infty$. *On suppose que* B_0 *et* B_1 *sont réflexifs et on définit :*

$$W = \Big\{u : (0,T) \longrightarrow B_0,\ u \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p_1}(0,T;B_1)\Big\}, \tag{1.2}$$

W est un espace de Banach réflexif pour la norme :

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)}. \tag{1.3}$$

Démonstration. Ce théorème est classique , pour sa démonstration nous renvoyons le lecteur au livre de J. L. Lions [5]. ■

Évidement $W \subset L^{p_0}(0,T;B_0)$.

On a alors le résultat suivant :

Lemme 1.1 *Si en plus des hypothèses de théorème 1.2 nous supposons que l'injection $B_0 \hookrightarrow B$ est compacte, alors pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $C_\eta > 0$ dépendant seulement de η, telle que :*

$$\forall v \in B_0,\ \|v\|_B \leq \eta \|v\|_{B_0} + C_\eta\ \|v\|_{B_1}. \tag{1.4}$$

Comme conséquence, il existe une constante C_η telle que :

$$\forall v \in B_0, \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B)} \leq \eta\ \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + C_\eta\ \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)}. \tag{1.5}$$

Théorème 1.3 *Si $1 < p_0$, $p_1 < \infty$, alors l'injection de W dans $L^{p_0}(0,T;B)$ est compacte.*

1.1.6 Inégalités

Lemme 1.2 *(Inégalité de Hölder) (Voir [1]) Soit $1 < p \leq \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p définie par*

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\, \|v\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Corollaire 1.1 *Si $p = q = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.7}$$

Lemme 1.3 *(Inégalité de Young) Soient $1 < p,q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a,b \geq 0$. Alors pour tout $\eta > 0$,*

$$ab \leq \eta a^p + C_\eta b^q$$

où

$$C_\eta = \frac{1}{q\left(\eta p\right)^{\frac{p}{q}}}.$$

Démonstration. Voir [3]. ■

Remarque 1.3 *pour $p = q = 2$, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme*

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}. \tag{1.8}$$

On introduit ensuite :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \text{adhèrence de } D(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega), \\ &= \text{sous-espce } de H^1(\Omega)\text{, des fonctions "nulles" sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Lemme 1.4 *(Inégalité de poincaré). Soit Ω un ouvert $\mathbb{R}^n$ que l'on supposons borné, connexe et de frontière suffisamment régulière. Alors, il existe une constante $C_\Omega > 0$, telle que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$.

Lemme 1.5 *(Inégalité de Gronwall). Soient α une fonction non-négative de $L^1(0,\infty)$ et g une fonction de $L^\infty(0,\infty)$. Soit β une constante positive ou nulle. Si*

$$g(t) \leq \beta + \int_0^t \alpha(s) g(s) ds;$$

alors

$$g(t) \leq \beta \exp\left(\int_0^t \alpha(s) ds\right).$$

1.1.7 Une formule utile

Lemme 1.6 *(Formule de Green). Pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds,$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u le long de $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur.

1.1.8 Stabilité de l'énergie

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e

$$E(t) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow \infty,$$

c'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t), \forall t > 0,$$

où C et β sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}}, \forall t > 0,$$

où C et α sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

1.2 Méthode de Faedo-Galerkin

1.2.1 Introduction

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espace de dimension fine. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie.

Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

Définition 1.2.1 *Soit V un espace de Hilbert séparable et $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'espace vectoriels de dimension finie vérifiant les axiomes :*

1) $V_n \subset V$, *dim* $V_n < \infty$;

2) $V_n \longrightarrow V$ *quand* $n \longrightarrow \infty$.

Au sens suivant : il existe V_n sous-espace dense dans V, tel que pour tout $u \in V_n$, on peut trouver une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant : pour tout n, $u_n \in V_n$ et $u_n \longrightarrow u$ dans V lorsque $n \longrightarrow \infty$. L'espace V_n s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre n.

1.2.2 Le schéma de la méthode de Faedo-Galerkin

Soit $(\mathscr{P})$ le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution dans un espace de fonction construit sur un espace de Hilbert séparable V. Soit u la solution unique du problème $(\mathscr{P})$.

Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin V_n de V, il convient de définir un problème approché $(\mathscr{P}_n)$ dans l'espace de dimension finie (V_n) ayant une unique solution (u_n). Le déroulement de l'étude est alors le suivant :

Étape 1 : on définit la solution u_n du problème $(\mathscr{P}_n)$.

Étape 2 : on établit des estimations sur u_n (dites estimation a priori) pour montrer que u_n est uniformément bornée.

Étape 3 : par l'utilisation des résultats que u_n est uniformément bornée, il est possible d'extraire de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous suite $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui a une limite dans la topologie faible des espace qui interviennent dans les estimations de l'étape 2.

Soit alors u la limite obtenue.

Étape 4 : on montrer que u est solution du problème $(\mathscr{P})$.

Étape 5 : résultats de convergences fortes.

Chapitre 2

Existence locale d'une solution faible

Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème hyperbolique semi linéaire pour l'opérateur fortement elliptique avec un terme source non linéaire de type polynomial et deux termes dissipatifs l'un fort de la forme Δu_t et l'autre dépend d'une fonction continue g. Sous certaines hypothèses sur les données initiales,nous montrons l'existence locale et l'unicité d'une solution faible. La preuve est basée sur les approximations de Faedo-Galerkin,la méthode de compacité et le théorème du point fixe.

2.1 Équation des ondes

L'équation des ondes modélisee des phénoménes de propagation d'ondes ou de vibration. Par exemple, en deux dimensions d'espace c'est un modèle pour étudier les vibrations d'une membrane élastique tendue. En une dimension d'espace, elle est aussi appelée équation des cordes vibrantes. Au repos, la membrane occupe un domaine plan, sous l'action d'une force normale à ce plan d'intensité F, elle se déforme et son déplacement normal est noté u.

L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique, plus précisément, elle est de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - c^2 \triangle u(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t),$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}^+$ sont deux variables indépendantes avec $n \geq 1$, et $c > 0$ est un nombre réel. Cette É. D. P. apparaît naturellement dans beaucoup de problèmes physiques comme : corde ou membrane vibrante, ondes acoustiques, ondes électromagnétiques, ondes sismiques,...

Remarquons qu'il s'agit d'une équation du deuxième ordre en temps et qu'il faut donc deux conditions initiales pour u.

2.1.1 L'équation des ondes en dimension $n = 1$

2.1.2 Modélisation

On considère une corde sans raideur, de longueur L inextensible, de masse linéique constante ρ, fixée en deux extrémités et soumise à une tension T. On néglige l'action de la pesanteur devant la tension imposée, de sorte que sa position au repos est droite et confondue avec l'axe Ox. On s'intéresse aux déplacements transversaux de part et d'autre de cette position d'équilibre dans le plan vertical xOz. Cette corde est soumise à une force extérieure de densité linéique $f(x, t)$. On suppose que ses déplacements sont suffisamment petits pour que la tension reste constante au cours du temps ce qui permet de linéariser les équations fondamentales de la dynamique appliquées à une petite portion de corde.

Un point M_0 d'abscisse x au repos est situé au point Mà l'instant t. Le mouvement de la corde est donc décrit par le déplacement M_0M représenté par une seule inconnue scalaire $u(x, t)$ comme le montre la figure suivante :

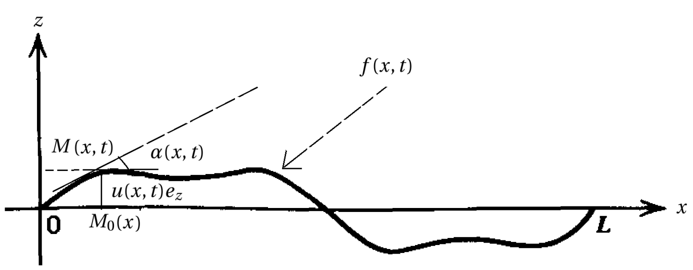

FIGURE 2.1 – Géométrie de la corde.

On note ainsi : $M_0M = u(x,t)e_z$. La tangente en M à la corde fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x,t)$ que l'on suppose également petit.On aura donc :

$$\alpha(x,t) = \tan\big(x\big) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t).$$

La contrainte exerce au point x parla corde sur une portion de corde $[x, x+dx]$ est en fait la composante normale de la tension en ce point. Dans la suite, cette contrainte sera notée q. On a

$$q(x,t) = T\alpha(x,t) \approx T\frac{\partial u}{\partial x}(x,t).$$

Sous ces hypothèses, et en l'absence d'effort extérieur, le déplacement u est régi par l'équation de corde vibrante suivante :

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \quad \forall x \in]0,L[, \quad \forall t, \tag{2.1}$$

où le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$ représente l'inertie d'accélération locale tandis que le terme $T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ représente le rappel du à la tension de la corde.

Posons

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

qui a la dimension d'une vitesse (c est la célérité). L'équation (2.1) s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = F(x,t), \quad \forall x \in]0,L[, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

qui est l'équation de d'Alembert, appelée aussi équation des cordes vibrantes non-homogènes, avec $F(x,t) \equiv \dfrac{f(x,t)}{\rho}$.

Conditions aux bords : comme les deux extrémités de la corde sont fixées en $x = 0$ et $x = L$, alors, la fonction de déplacement en ces points doit être égale à zéro, c'est-à-dire :

$$u(0,t) = 0, \quad \text{et} \quad u(L,t) = 0, \quad x \in [0,L].t \geq 0$$

Conditions initiales : le fait que l'É. D. P. soit d'ordre 2 en temps, ils nous faut imposer deux données initiales sur $u(x,t)$ et $\partial_t u(x,t)$ pour le temps $t = 0$, c'est-à-dire :

$$u(x,0) = h(x), \quad \text{et} \quad \partial_t u(x,0) = g(x), \quad x \in [0,L]$$

où h et g sont des fonctions données.

Finalement, notre problème est modélisé par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = F(x,t), \quad \forall x \in]0, L[, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

avec les conditions aux limites

$$u(0,t) = 0, \quad \text{et} \quad u(L,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

et les conditions initiales

$$u(x,0) = h(x), \quad \text{et} \quad \partial_t u(x,0) = g(x), \quad x \in [0,L].$$

Remarque 2.1 *L'équation des ondes homogènes en dimension n d'espace s'écrit :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x},t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x},t) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), & \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},0) = u_1(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où c est la célérité, et u_0 et v_0 sont deux fonctions données sur $C^2(\mathbb{R}^n)$ et $C^1(\mathbb{R}^n)$, respectivement.

Définition 2.1 *L'opérateur*

$$\Box = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

est appelé opérateur d'onde, ou d'alembertien en dimension n.

2.1.3 Équation des ondes amorties

Si la vitesse de mouvement est retardé par une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse de la membrane on obtient l'equation des ondes amorties suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x},t) + \eta \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t) - c^2 \bigtriangleup u(\mathbf{x},t) = F(\mathbf{x},t), \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0,T[$$

Où T finie et η est le coefficient d'amortissement constant. On dit qu'il s'agit d'un terme d'amortissement. On parle alors d'équation des ondes amorties.

Si le membrane est construit par des marteaux viscoélastiques, alors la vitesse de mouvement est retardé par une force d'amortissement viscoélastique proportionnelle à la vitesse de la membrane. Du point de vue mathématique, c'est le terme mémoire suivant qui est responsable de cette amortissement

$$\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds.$$

Ce terme mémoire tient compte de toute la préhistoire du matériel à travers un noyau appelé fonction de relaxation en théorie de viscoélasticité. Dans ce cas là, on obtient l' équation des ondes intégro-différentielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x},t) - c^2 \triangle u(\mathbf{x},t) + \int_0^t h(t-s)\Delta u(\mathbf{x},s)\, ds = F(\mathbf{x},t) & \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[\\ u(\mathbf{x},t) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma\times]0,T[\\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) \quad , \quad u_t(\mathbf{x},0) = u_1(\mathbf{x}) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

où h(t) est la fonction de relaxation, et les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des données initiales avec Γ c'est la frontière de Ω.

2.2 Notations et position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière Γ.On dénote par

$$u' = u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u'' = u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Pour simplifier les notations,nous n'indiquons par explicitement la dépendance de la fonction u par rapport á x (parfois par rapport á t).

L'objet de ce chapitre est de chercher $u : Q = \Omega \times (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ solution locale du problème

$$\begin{cases} u_{tt} + Au - \alpha\Delta u_t + g(u_t) = f(x,t), & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

Où $f(x,t) = \beta|u|^{p-2}u,\ p > 2$ et α, β sont des constantes positives u_0, u_1 sont des fonctions données.

A fin d'étudier le problème (2.2) et de formuler le théorème d'existence et d'unicité on aura besoin des hypothèses suivantes :

(H1) L'opérateur fortement elliptique A est défini comme suit :

$$A(t)\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big),$$

où les fonctions $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,\infty)), \forall 1 \le i,j \le n$ sont symétriques et il existe une constante $a_0 > 0$ telle que :

a) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge a_0 \mid \xi \mid^2$

b) $\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial t} a_{ij}(x,t)\Big)\xi_i\xi_j \le 0,$

pour tout $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,\infty)$et $\xi = (\xi_1 \cdots \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

(H2) On suppose que la fonction $g \in C^1(\mathbb{R}^*)$ est croissante. En outre,on suppose qu'il existe une constante positive k_0 telle que :

$$g(u)u \ge k_0 \mid u \mid^m, \tag{2.3}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $2 < m < \infty$.

2.3 Formulation variationnelle

Pour étudier l'existence locale,globale et la décroissance exponentielle de la fonctionnelle d'énergie,nous procédons à obtenir une formulation variationnelle du problème (2.2).Pour cela, on définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme fermeture de l'ensemble $D(\Omega)$,des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω,dans $H^1(\Omega)$.On peut le caractériser comme suit

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

muni du produit scalaire

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

la dérivation étant prise au sens des distributions.

L'inégalité de Poincaré est valable dans $H_0^1(\Omega)$ i.e.

$\forall u(t) \in H_0^1(\Omega), \| u(t) \|_p \leq C_* \| \nabla u(t) \|_2$, où

$$\begin{cases} 2 \leq p \leq \frac{2n-2}{n-2} & \text{si } n \geq 3 \\ 2 \leq p \leq +\infty & \text{si } n = 1, 2. \end{cases} \tag{2.4}$$

où C_* est la constante de Poincaré.

Multiplions la première équation du (2.2) par un élément $v \in H_0^1(\Omega)$,intégrons le résultat obtenu sur Ω et utilisons le formule de Green, on obtient la formule variationnelle suivante

$$(u_{tt}, v) + a(u,v) + \alpha(\nabla u_t, \nabla v) + (g(u_t), v) = \beta(| u |^{p-2} u, v), \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = (Au, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx. \tag{2.5}$$

En utilisant l'hypothèse sur les fonctions a_{ij},on vérifie facilement que la forme bilinéaire $a(.,.) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est symétrique et continue.

D'autre part,de$(H_1 : a)$ pour $\xi_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, on trouve

$$a(u,u) \geq a_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx = a_0 \| \nabla u \|_2^2, \tag{2.6}$$

ce qui implique que $a(.,.)$ est coercive.

Remarque 2.2 *L'application $u \longmapsto (a(u,u))^{\frac{1}{2}}$ définit une semi norme sur $H_0^1(\Omega)$, de plus on a*

$$a_0 \| \nabla u \|_2^2 \leq a(u,u) \leq a_1 \| \nabla u \|_2^2, \ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

où a_1 est une constante positive.

2.4 Existence et unicité

Dans ce paragraphe et sous les hypothèses que nous avons cité précédemment, l'existence local et l'unicité d'une solution faible seront obtenus en se basant sur les approximations de Faedo-Galarkin et la méthode de compacité.

Théorème 2.1 *Supposons que les hypothèses* $(H_1), (H_2)$ *sont vérifiées. Soit* $m \geq 2$.*Si* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), u_1 \in H^2(\Omega)$ *et* $f \in H^1([0,T]; L^2(\Omega))$*, alors il existe* $T > 0$ *et une solution unique* u *du problème (*(2.2)*) sur* $[0,T]$ *tels que*

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \tag{2.7}$$

$$u_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^m(\Omega \times [0,T]), \tag{2.8}$$

$$u_{tt} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{2.9}$$

Preuve du Théorème 2.1 :

La démonstration de ce théorème est formée de trois étapes suivantes :

— On construit des solutions "approchée" par la méthode de Faedo-Galerkin,

— On établit,pour ces solutions approchées,des estimations à priori,

— On passe à la limite (dans les termes non linéaires) par la méthode de compacité.

Commençons par introduire la suite $(w_j)_j$ de fonction ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_j \in H_0^1(\Omega), \forall j; \\ \forall j, w_1, \cdots, w_j \text{ sont linéairement indépendants;} \\ \text{l'espace engendré par la famille } w_1, w_2, \cdots, w_k \text{ est dense dans } H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.10}$$

On cherche alors une suite $(u_k) = (u_k(t))$ sous la forme

$$u_k(x,t) = \sum_{j=1}^{k} h_{jk}(t) w_j(x), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T_k]; \tag{2.11}$$

solution du problème variationnel approché,associé au problème (2.2), suivant :

$$(u"_k(t), w_j) + a(u_k(t), w_j) + \alpha(\nabla u_k'(t), \nabla w_j) + (g(u_k'(t)), w_j) = \beta(f(t), w_j), j = 1, \cdots, k, \tag{2.12}$$

avec les conditions initiales

$$u_k(x,0) = u_{0k} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{jk} w_j \longrightarrow u_0, \text{ dans, } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{2.13}$$

$$u'_k(x,0) = u_{1k} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{jk} w_j \longrightarrow u_1, \text{ dans, } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{2.14}$$

On obtient un système d'équations différentielles non linéaires du second ordre.

D'aprés le théorème de Carathéodorie,il existe une unique solution u_k dans l'intervalle $[0, T_k]$.Les estimations à priori qui suivent montrent que $T_k = T$.

On note par C_i les différentes constantes positives,dépendantes des données initiales mais pas de$k$.

1. **Première estimation à priori :**

Multiplions l'équation (2.12) par $h'_k(t)$ et sommons de $j = 1$ à k, il vient que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u'_k(t) \|_2^2 + a(u_k(t), u'_k(t)) + \alpha \| \nabla u'_k(t) \|_2^2 + (g(u'_k(t)), u'_k(t)) = \beta(f(t), u'_k(t)). \tag{2.15}$$

D'autre part,on a

$$\frac{d}{dt} a(u_k(t), u_k(t)) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a'_{ij}(x,t) \frac{\partial u_k(t)}{\partial x_j} \frac{\partial u_k(t)}{\partial x_i} dx + 2a(u_k(t), u'_k(t)).$$

D'où

$$a(u_k(t), u'_k(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u_k(t), u_k(t)) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a'_{ij}(x,t) \frac{\partial u_k(t)}{\partial x_j} \frac{\partial u_k(t)}{\partial x_i} dx. \tag{2.16}$$

Remplaçons (2.16) dans (2.15),intégrons sur $(0, t)$ et utilisons (2.6),$(H_2 : a)$ on en déduit que

$$\begin{aligned} &\| u'_k(t) \|_2^2 + a_0 \| \nabla u_k(t) \|_2^2 + 2\alpha \int_0^t \| \nabla u'_k(s) \|_2^2 ds + 2k_0 \int_0^t \| u'_k(s) \|_m^m ds \\ &\leq \| u'_k(0) \|_2^2 + a_0 \| \nabla u_k(0) \|_2^2 + 2\beta \int_0^t (f(s), u'_k(s)) ds \\ &+ \int_0^t \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a'_{ij}(x,s) \frac{\partial u_k(s)}{\partial x_j} \frac{\partial u_k(s)}{\partial x_i} dx ds. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Par l'inégalité de Young,on a

$$\left| \int_0^t (f(s), u'_k(s)) ds \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^t (\| f(s) \|_2^2 + \| u'_k(s) \|_2^2) ds. \tag{2.18}$$

Puisque,les fonctions $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$,alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega | a'_{ij}(x,s) \frac{\partial u_k(s)}{\partial x_j} \frac{\partial u_k(s)}{\partial x_i} | dx d\sigma \\
&\leq \int_0^t \sum_{i,j=1}^N \Big[\frac{1}{2} \int_\Omega | a'_{ij}(x,t) \frac{\partial u_k(s)}{\partial x_i} |^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega | \frac{\partial u_k(s)}{\partial x_j} |^2 dx \Big] ds \\
&\leq \frac{N}{2} \int_0^t \| \nabla u_k(s) \|_2^2 ds + \max_{1\leq i \leq N} \Big(\sum_{j=1}^N \sup_{(x,t)} | a'_{ij}(x,t) |^2 \Big) \int_0^t \| \nabla u_k(s) \|_2^2 ds \\
&\leq C_1 \int_0^t \| \nabla u_k(s) \|_2^2 ds,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

où $C_1 = max\Big(n/2, \max_{1\leq i\leq n}\Big(\sum_{j=1}^n \sup_{(x,t)} | a'_{ij}(x,t) |^2\Big)\Big) = max(n/2, c'_1)$.
Moyennement à (2.13),(2.14),(2.18)et(2.19),de l'inégalité (2.17),il découle

$$\begin{aligned}
&\| u'_k(t) \|_2^2 + a_0 \| \nabla u_k(t) \|_2^2 + 2\alpha \int_0^t \| \nabla u'_k(s) \|_2^2 ds + 2k_0 \int_0^t \| u'_k(s) \|_m^m ds \\
&\leq C_2 + \beta \int_0^t \| f(s) \|_2^2 ds + \int_0^t \Big(C_1 \| \nabla u_k(s) \|_2^2 ds + \beta \| u'_k(s) \|_2^2 \Big) ds,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

où $C_2 = \| u'_k(0) \|_2^2 + a_0 \| \nabla u_k(0) \|_2^2$ est une constante positive.
L'hypothèse $f \in L^2([0,T]; L^2(\Omega))$donne

$$\int_0^t \| f(s) \|_2^2 ds \leq constante.$$

Par conséquent,en utilisant l'inégalité de Gronwall,on en déduit l'existence d'une constante positive C_T indépendante de k et $t \in [0, T_k]$ telle que

$$\| u'_k(t) \|_2^2 + a_0 \| \nabla u_k(t) \|_2^2 + 2\alpha \int_0^t \| \nabla u'_k(s) \|_2^2 ds + 2k_0 \int_0^t \| u'_k(s) \|_m^m ds \leq C_T. \tag{2.21}$$

De cette dernière estimation (2.21), on conclut que t est indépendant de k,et par conséquent $\forall k \in \mathbb{N}, T_k = T$.

2. Seconde estimation à priori :

Nous commerçons par estimer $\| u"_k(0) \|_2$ .Pour cela,posant $t = 0$ et $w_j = u"_k(0)$ dans (2.12),on déduit que

$$\| u"_k(0) \|_2^2 = (\beta f(0) - Au_{0k} + \alpha \Delta u_{1k} - g(u_{1k}), u"_k(0)). \tag{2.22}$$

Comme l'opérateur A est continu, alors de (2.14) on déduit que $Au_{0k} \leq constante$ et en utilisant le fait que $f(0) \in L^2(\Omega)$, $g(u'_k(0)) \in C^0(\mathbb{R})$,il résulte qu'il existe une constante C_3 indépendante de $k \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\| u"_k(0) \|_2 \leq C_3. \tag{2.23}$$

Dérivons l'équation (2.12) en t,multiplions le résultat obtenu par $2h"_{jk}(t)$, on obtient, aprés sommation en j :

$$\frac{d}{dt} \| u"_k(t) \|_2^2 + 2a(u'_k(t), u"_k(t)) + 2\alpha \| \nabla u"_k(t) \|_2^2 + 2\int_\Omega g'(u'_k(t))(u"_k(t))^2 dx = 2\beta(f'(x,t), u"_k(t)) - 2\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a'_{ij}(x,t)\frac{\partial u_k(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u"_k(t)}{\partial x_i} dx.$$

Étant donné que la fonction g est croissante,on en déduit

$$\frac{d}{dt}\left[\|u''_k(t)\|_2^2 + a_0\|\nabla u'_k(t)\|_2^2\right] + 2\alpha\|\nabla u''_k(t)\|_2^2 \leq$$
$$\leq 2\beta(f'(x,t), u''_k(t)) - \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a'_{ij}(x,t)\left(2\frac{\partial u_k(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u''_k(t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u'_k(t)}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k(t)}{\partial x_j}\right)dx$$

En intégrant la dernière estimation de 0 à t,utilisons l'inégalité de Young et l'hypothèse $(H_1 : b)$,on obtient

$$\begin{aligned}&\|u''_k(t)\|_2^2 + a_0\|\nabla u'_k(t)\|_2^2 + 2\alpha\int_0^t \|\nabla u''_k(s)\|_2^2 ds \leq \\ &\leq C_5 + \beta\int_0^t \|u''_k(s)\|_2^2 ds - 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega a'_{ij}(x,s)\frac{\partial u_k(s)}{\partial x_j}\frac{\partial u''_k(t)}{\partial x_i} dxds,\end{aligned} \tag{2.24}$$

où

$$C_5 = \|u''_k(0)\|_2^2 + a_0\|\nabla u_{1k}\|_2^2 + \beta\int_0^t \|f'(s)\|_2^2 ds$$

En utilisant (2.14),(2.23) et le fait que $f' \in L^2([0,T], L^2(\Omega))$,on déduit que C_5 est une constance positive.Par l'inégalité de Young,nous majorons le dernier terme de deuxiéme membre de l'inégalité (2.24) comme suit :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega\Big|a'_{ij}(x,s)\frac{\partial u_k(s)}{\partial x_j}\frac{\partial u"_k(s)}{\partial x_i}\Big|dxds\le\\
&\le\int_0^t\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\frac{1}{4\mu_1}\int_\Omega\Big|\frac{\partial u_k(s)}{\partial x_j}\Big|^2dx+\mu_1\int_\Omega\Big|a'_{ij}(x,t)\frac{\partial u''_k(s)}{\partial x_i}\Big|^2dx\Big]ds\\
&\le\frac{n}{4\mu_1}\int_0^t\|\nabla u_k(s)\|_2^2ds+\mu_1\max_{1\le i\le n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\sup_{(x,t)}|a'_{ij}(x,t)|^2\Big)\int_0^t\|\nabla u''_k(s)\|_2^2ds\\
&\le\frac{N}{4\mu_1}\int_0^t\|\nabla u_k(s)\|_2^2ds+\mu_1C'_1\int_0^t\|\nabla u''_k(s)\|_2^2ds,
\end{aligned}$$

pour $\mu_1>0$.

En utilisant (2.21),alors,l'inégalité (2.24) donne

$$\begin{aligned}
&\|u''_k(t)\|_2^2+a_0\|\nabla u'_k(t)\|_2^2+(2\alpha-\mu_1C'_1)\int_0^t\|\nabla u''_k(s)\|_2^2ds\le\\
&\le C_6+\beta\int_0^t\|u''_k(s)\|_2^2ds,
\end{aligned}\tag{2.25}$$

où $C_6=C_5+\frac{N}{4\mu_1}TC_T$

En choisissant $\mu_1<\frac{2\alpha}{C'_1}$,on peut appliquer l'inégalité de Gronwall pour obtenir une constante $\tilde{C}_T$ indépenendante de k et $t\in[0;T]$ telle que :

$$\|u''_k(t)\|_2^2+a_0\|\nabla u'_k(t)\|_2^2+2\alpha\int_0^t\|\nabla u''_k(s)\|_2^2ds\le\tilde{C}_T\tag{2.26}$$

Par conséquent,à partir de (2.21) et (2.26),on déduit

$$\begin{cases}
(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\ \text{demeure dans un borné de}\ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}\ \text{demeure dans un borné de}\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^m([0,T]\times\Omega),\\
(u''_k)_{k\in\mathbb{N}}\ \text{demeure dans un borné de}\ L^\infty(0,T,L^2(\Omega))
\end{cases}\tag{2.27}$$

3. Passage à la limite :

On déduit de (2.27) qu'on peut extraire des sous-suites convergentes (u_k),(u'_k),et (u''_k) de (u_k),(u'_k),et (u''_k) respectivement et telles que, lorsque $k \to +\infty$,on a

$$\begin{aligned} &u_k \to u \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ &u'_k \to u' \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^m([0,T]\times\Omega) \\ &u''_k \to u'' \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Par ailleurs ,il résultat,en particulier,de (2.27) que

$$\begin{cases} (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est borné dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ (u'_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est borné dans } L^2(Q)\cap L^m(Q), \\ (u''_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est borné dans } L^2(0,T,L^2(\Omega)) = L^2(Q). \end{cases}$$

On sait (voir [6]) que l'injection $H^1(Q) \to L^2(Q)$ est compacte .Donc

$$u_k \to u \text{ fortement dans } L^2(Q) \tag{2.29}$$

Pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixe quelconque et $\forall k > j$,on a

$$(u''_k, w_j) + a(u_k, w_j) + \alpha(\nabla u'_k, \nabla w_j) + (g(u'_k), w_j) = \beta(f, w_j) \tag{2.30}$$

De la convergence faible(2.28),on déduit que

$$\begin{aligned} &a(u_k, w_j) \to a(u, w_j) \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T) \\ &(u'_k, w_j) \to (u', wj) \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T) \\ &(\nabla u'_k, \nabla w_j) \to (\nabla u', \nabla w_j) \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T). \\ &(g(u'_k), w_j) \to (g(u'), w_j) \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Et par conséquent par passage à la limite de (2.30) il devient

$$(u'', w_j) + a(u, w_j) + \alpha(\nabla u', \nabla w_j) + (g(u'), w_j) = \beta(f, w_j)$$

comme $\langle w_1, w_2, \cdots, w_k \rangle$ est dense dans H_0^1 ,on obtient pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$

$$(u'', w) + a(u, w) + \alpha(\nabla u', \nabla w) + (g(u'), w) = \beta(f, w) \tag{2.32}$$

D'où il résulte que u satisfait à la première équation de (2.2).

4. Unicité :

Soient v et w deux solutions du problème (2.2). On pose $z = v - w$. Alors z satisfait

$$\begin{aligned} &\|z'(t)\|_2^2 + a(z(t), z(t)) + 2\alpha \int_0^t \|\nabla z'(s)\|_2^2 ds + \\ &+ 2\int_0^t \int_\Omega (g(v'(s)) - g(w'(s)))(v'(s) - w'(s)) dx ds \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \int_\Omega a'_{ij}(x, s) \frac{\partial z(s)}{\partial x_j} \frac{\partial z(s)}{\partial x_i} dx ds. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Puisque,g est une fonction croissante alors

$$2\int_0^t \int_\Omega (g(v'(s)) - g(w'(s)))(v'(s) - w'(s)) dx ds \geq 0 \tag{2.34}$$

Encore,en utilisant (2.19) l'estimate (2.33) donne

$$\begin{gathered} \|z'(t)\|_2^2 + a_0 \|\nabla z(t)\|_2^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla z'(s)\|_2^2 ds \leq \\ 0 + C_1 \int_0^t \|\nabla z(s)\|_2^2 ds \end{gathered}$$

Ainsi,en utilisant le lemme de Gronwall,nous obtenons $z = 0$. D'où l'unicité.

Chapitre 3

Existence globale et comportement asymptotique

Ce chapitre est dédié à l'étude du l'existence globale et le comportement asymptotique de la solution local trouvée dans le chapitre précédent.En appliquant la méthode du puits potentiel de Payne et Sattinger,nous montrons que la solution existe globalement en temps dans un ensemble stable et qu'elle est uniformément bornée.Sans ancune condition entre les paramètres p et m, nous prouvons dans la deuxième section la décroissance exponentielle de cette solution.Les techniques utilisées sont basées sur la construction d'une fonction de Lyapunov L, qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème (2.2).

3.1 Exitence globale

Pour étudier l'éxistence globale et le comportement asymptotique de la solution locale du problème (2.2) donnée par le théorème 2.1 ,on définit les fonctions suivantes :

$$I(u(t)) = I(t) = a(u(t), u(t)) - \beta \| u(t) \|_p^p$$
$$J(u(t)) = J(t) = \frac{1}{2} a(u(t), u(t)) - \frac{\beta}{p} \| u(t) \|_p^p$$

pour $u \in H_0^1(\Omega)$,nous définissons le puits du potentiel $\mathbb{H}$ par

$$\mathbb{H} = \{u \in H_0^1(\Omega), I(t) > 0\} \cup \{0\},\ t \geq 0$$

Pour $u \in H_0^1(\Omega)$,on introduit la fonctionnelle d'énergie totale associée au problème (2.2) par

$$E(u(t), u_t(t)) = E(t) = \frac{1}{2}\| u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}a(u(t), u(t)) - \frac{\beta}{p}\| u(t)\|_p^p, \forall t \geq 0, \tag{3.1}$$

avec $E(0) = \frac{1}{2}\| u_1\|_2^2 + J(u_0)$ désigne l'énergie initiale.

Lemme 3.1 *Soit $u(x,t)$ solution du problème (2.2).Alors la fonctionnelle d'énergie définie par (3.1) est strictement décroissante sur $[0,\infty)$.De plus*

$$E'(t) = -\alpha\|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \int_\Omega g(u_t(t))u_t(t)dx + \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a'_{ij}(x,t)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}dx, \forall t \geq 0. \tag{3.2}$$

Démonstration : Multiplions la première équation du (2.2) par u_t,intégrons le résultat obtenu sur Ω et utilisons la formule de Green,on trouve l'équation (3.2).Comme $\alpha > 0$,de(H_1 : b)) et (2.3) on déduit que la fonctionnelle d'énergie est strictement décroissante.

Lemme 3.2 *Supposons que*

$$2 < p \leq 2\frac{n-1}{n-2},\ \ n \geq 3. \tag{3.3}$$

Si $u_0 \in \mathbb{H}$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\theta = \beta C_*^p a_0^{-\frac{p}{2}}\left(\frac{2p}{p-2}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} < 1, \tag{3.4}$$

Alors $u(t) \in \mathbb{H}$,pour tout $t \in [0,T)$.C_* est la constante de Sobolev-Poincaré.

Démonstration : Puisque $u_0 \in \mathbb{H}$,Alors $I(u_0) > 0$.Donc par continuité,il existe $T_j < T$ tel que $I(u(t)) \geq 0$,pour tout $t \in [0,T_j)$.Par la définition de I et J, on a la relation suivante

$$J(t) = \tfrac{p-2}{2p}a(u(t), u(t)) + \tfrac{1}{p}I(t).$$

Par conséquent on obtient

$$J(t) \geq \tfrac{p-2}{2p}a(u(t), u(t)),\ \ \forall t \in [0,T_j).$$

Ou encore

$$a(u(t),u(t)) \leq \frac{2p}{p-2}J(t) \leq \frac{2p}{p-2}E(t), \ \ \forall t \in [0,T_j) \tag{3.5}$$

Utilisons (2.6) et le résultat du lemme 3.1,on obtient :

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2}\frac{1}{a_0}E(0), \ \ \forall t \in [0,T_j). \tag{3.6}$$

Exploitions (2.4),(3.4)et(3.6),il résulte que

$$\begin{aligned} \beta\|u(t)\|_p^p &\leq \beta C_*^p\|\nabla u(t)\|_2^p \leq \beta C_*^p\|\nabla u(t)\|_2^{p-2}\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq \beta C_*^p a_0^{\frac{-p}{2}}\left(\frac{2p}{p-2}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} a(u(t),u(t)) \\ &\leq a(u(t),u(t)), \ \ \forall t \in [0,T_j). \end{aligned} \tag{3.7}$$

D'où $\beta\|u(t)\|_p^p < a(u(t),u(t)), \ \ \forall t \in [0,T_j)$, ce qui implique que $u(t) \in \mathbb{H}$, pour tout $t \in [0,T_j), \ \ \forall j$.
Puisque l'énergie E est strictement décroissante, on a les inégalités suivantes :

$$\lim_{t\longrightarrow T_j} \beta C_*^p a_0^{\frac{-p}{2}}\left(\tfrac{2p}{p-2}E(t)\right)^{\frac{p-2}{2}} < \beta C_*^p a_0^{\frac{-p}{2}}\left(\tfrac{2p}{p-2}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} < 1.$$

Ainsi, en répétant cette procédure, T_j est étendue à T.

Théorème 3.1 *Supposons que (3.3) est vérifiée.Si $u_0 \in H$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$ satisfaisant (3.4),alors la solution $u(x,t)$ du problème (2.2) est globale en temps.*

Démonstration *: Il suffit de montrer que $\|u_t(t)\|_2^2 + a(u(t),u(t))$ est majorée par une constante indépendante de t.*

Sous les hypothèse du Théorème 3.1, le lemme 3.2 assure que $u(t) \in \mathbb{H}$ sur $[0,T)$. Par conséquent,en utilisant le lemme 3.1, de (3.5), il s'en suit

$$\tfrac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \tfrac{p-2}{2p}a(u(t),u(t)) \leq E(t) = \tfrac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + J(t) \leq E(0),$$

Ainsi, $\forall t \in [0,T)$, la norme $\|u_t(t)\|_2^2 + a(u(t),u(t))$ est uniformément majorée par une constante ne dépendant que de $E(0)$ et p.

3.2 Décroissance exponentielle

Dans ce paragraphe, en utilisant la méthode de l'énergie avec un choix convenable de la fonction de Lyapunov et sans aucune relation entre les paramètres p et m,nous allons montrer que l'énergie asociée au problème (2.2) décroit exponentiellement en temps au voisinage de l'infini.Pour cela, nous supposons, en plus de (H_2) que

$$|g(v)| \leq k_1|v|(1+|v|^{m-2}), \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R} \text{ et } 2 \leq m \leq +\infty \tag{3.8}$$

où k_1 est une constante positive.

Pour des raisons purement explicatives, nous allons commencer par démontrer les lemmes suivants :

Lemme 3.3 *Supposons que*

$$2 \leq m \leq \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3 \tag{3.9}$$

alors la solution $u(x,t)$ du problème (2.2) satisfait

$$\| u(t)\|_m^m \leq CE(t), \tag{3.10}$$

où C est une constante indépendante de t.

Démonstration : En utilisant (2.4),(3.5) et (3.6) pour tout $t \in [0,T)$,on obtient

$$\begin{aligned} \| u(t)\|_m^m &\leq C_*^m \|\nabla u(t)\|_2^m = C_*^m \|\nabla u(t)\|_2^{m-2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq C_*^m \Big(\frac{2p}{p-2}\frac{1}{a_0}E(0)\Big)^{\frac{m-2}{2}} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq C_*^m a_0^{\frac{-m}{2}} \Big(\frac{2p}{p-2}E(0)\Big)^{\frac{m-2}{2}} \frac{2p}{p-2}E(t) = CE(t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

où C est une constante indépendante de t.

Pour $\varepsilon > 0$ à le choisir ultérieurement et $u(t) \in \mathbb{H}$,on définit la fonction de Lyapunov L comme suit

$$L(t) = E(t) + \varepsilon \int_\Omega u_t(t)u(t)dx + \frac{\varepsilon\alpha}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.12}$$

Lemme 3.4 *Les fonctionnelles L et E sont équivalentes.*

Démonstration : En utilisant l'inégalité de Schwarz,(2.4) et (2.6),on obtient

$$|L(t)-E(t)| \leq \varepsilon E(t)+\tfrac{\varepsilon}{2a_0}(\alpha+C_*^2)(a(u(t),u(t)).$$

De(3.5),la dernière inégalité devient :

$$|L(t)-E(t)| \leq \varepsilon\Big(1+\tfrac{1}{2a_0}(\alpha+C_*^2)\tfrac{2p}{p-2}\Big)E(t).$$

Par conséquent ,pour ε suffisamment petit,il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{3.13}$$

où

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 1+\varepsilon\Big(1+\tfrac{1}{2\alpha_0}(\alpha+C_*^2)\Big)\\ \beta_1 &= 1-\varepsilon\Big(1+\tfrac{1}{2\alpha_0}(\alpha+C_*^2)\Big)\end{aligned}$$

Théorème 3.2 *Si les hypothèses du théorème 3.1 sont valides,et (3.9) ,(3.8) ont lieu .Alors,il existe deux constantes positives K et k telle que l'énergie associèe au problème (2.2) satisfait*

$$E(t) \leq Kexp(-kt), \quad \forall t \geq 0 \tag{3.14}$$

Démonstration. : Dérivons par rapport à t la fonction L définie dans l'équation (3.12) ,utilisons la première équation du problème (2.2),après une intégration par partie ,on obtient

$$\begin{aligned}L'(t) = &-\int_\Omega g(u_t(t))u_t(t)dx-\alpha\|\nabla u_t(t)\|_2^2-\varepsilon\alpha(u(t),u(t))\\ &+\varepsilon\int_\Omega u_t^2(t)dx-\varepsilon\int_\Omega g(u_t(t))u(t)dx+\varepsilon\int_\Omega |u(t)|^p dx\end{aligned} \tag{3.15}$$

Les hypothéses (2.3) et (3.8),nous permettent d'estimer le premier et le cinquième termes du deuxième membre de l'égalité précédente comme suit

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega g(u_t(t))u_t(t)dx \leq -K_0\|u_t(t)\|_m^m\\ &-\int_\Omega g(u_t(t))u_t(t)dx \leq \Big|\int_\Omega g(u_t)(t))u(t)dx\Big| \leq\\ &\qquad \leq K_1\int_\Omega |u(t)||u_t(t)|dx+K_1\int_\Omega |u(t)||u_t(t)|^{m-1}dx\end{aligned} \tag{3.16}$$

Exploitons l'inégalité de Young suivante

$$XY \leq \frac{\delta^r}{r} X^r + \frac{\delta^{-s}}{s} Y^s, \;\; X, Y \geq 0, \;\; \delta > 0, \;\; \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1,$$

avec $r = m$ et $s = \frac{m}{m-1}$ pour obtenir

$$K_1 \int_\Omega |u_t(t)|^{m-1} |u(t)| dx \leq K_1 \mu \| u(t) \|_m^m + K_1 c(\mu) \| u_t(t) \|_m^m, \forall \mu > 0 \tag{3.17}$$

Moyennement à l'inégalité de Hölder ,(2.4) et (2.6), on trouve

$$K_1 \int_\Omega |u_t(t)| |u(t)| dx \leq K_1 \frac{C_*^2}{2a_0} a(u(t), u(t)) + \frac{K_1}{2} \| u_t \|_2^2 \tag{3.18}$$

Ce qui joint à (3.16) et (3.17),de (3.15),il résulte

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -k_0 \| u_t(t) \|_m^m + \varepsilon k_1 (\mu \| u(t) \|_m^m + c(\mu) \| u_t(t) \|_m^m) - \\ & - \alpha \| \nabla u_t(t) \|_2^2 - \varepsilon a(u(t), u(t)) + \varepsilon \beta \| u(t) \|_p^p + \\ & + \varepsilon k_1 \Big(\frac{1}{2} \| u_t(t) \|_2^2 + \frac{C_*^2}{2a_0} a(u(t), u(t)) \Big) \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -(k_0 - k_1 \varepsilon c(\mu)) \| u_t(t) \|_m^m - \alpha \| \nabla u_t(t) \|_2^2 - \varepsilon E(t) \\ & + \varepsilon k_1 \mu \| u(t) \|_m^m + \frac{\varepsilon}{2} (3 + k_1) \| u_t(t) \|_2^2 + \varepsilon \beta \Big(1 - \frac{1}{p} \Big) \| u(t) \|_p^p \\ & - \varepsilon \Big(\frac{1}{2} - k_1 \frac{C_*^2}{2\alpha_0} \Big) \alpha(u(t), u(t)) \end{aligned}$$

En utilisant le résultat du lemme 3.1 , (3.7) et l'inégalité de Poincaré suivante

$$\| u_t(t) \|_2^2 \leq C_1 \| \nabla u_t(t) \|_2^2$$

on trouve

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -(k_0 - k_1 \varepsilon c(\mu)) \| u_t(t) \|_m^m - \Big(\alpha - \frac{\varepsilon}{2} C_1 (3 + k_1) \Big) \| \nabla u_t(t) \|_2^2 \\ & - \varepsilon \Big[\frac{1}{2} - \theta \Big(1 - \frac{1}{p} \Big) - k_1 \frac{C_*^2}{2\alpha_0} \Big] \alpha(u(t), u(t)) \\ & - \varepsilon (1 - k_1 \mu C) E(t) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Notons qu'à partir de (3.4) ,le coefficient de $\alpha(u(t), u(t))$ dans (3.19) est négatif

$$B_1 = \frac{1}{2} - \theta \Big(1 - \frac{1}{p} \Big) - k_1 \frac{C_*^2}{2\alpha_0} < 0.$$

Par conséquent,en utilisant (3.5),l'inégalité (3.19) donne

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -(k_0 - k_1 \varepsilon c(\mu)) \| u_t(t) \|_m^m - \Big(\alpha - \frac{\varepsilon}{2} C_1 (3+k_1)\Big) \| \nabla u_t(t) \|_2^2 \\ & - \varepsilon \Big(B_1 \frac{2p}{p-2} + 1 - k_1 \mu C \Big) E(t) \end{aligned} \tag{3.20}$$

A ce point ,on choisit μ de sort que

$$B_2 = B_1 \tfrac{2p}{p-2} + 1 - k_1 \mu C > 0.$$

Lorsque μ est fixé ,on choisit

$$\varepsilon = min\Big(\tfrac{k_0}{k_1 c(\mu)}, \tfrac{2\alpha}{C_1(3+k_1)} \Big)$$

et que (3.13) rest valide ,alors de (3.20) il résulte

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -\varepsilon \Big[B_1 \frac{2p}{p-2} + 1 - k_1 \mu C \Big] E(t) \leq \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{\beta_2} \Big[B_1 \frac{2p}{p-2} + 1 - k_1 \mu C \Big] L(t), \end{aligned}$$

en vertu de (3.13).

Intégrons l'inégalité différentielle précédente entre 0 et t ,on trouve l'estimation suivante

$$L(t) \leq L(0) e^{-kt}, \ \forall t \geq 0$$

où $k = \frac{\varepsilon}{\beta_2} (B_1 \frac{2p}{p-2} + 1 - k_1 \mu C)$

Encore,en utilisant (3.13),on obtient

$$E(t) \leq \tfrac{L(0)}{\beta_1} e^{-kt} = K e^{-kt}, \ \forall t \geq 0$$

Ainsi ,(3.14) est établie.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons considéré une équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, plus précisément, on étudie l'équation des ode semi linaire dans un domaine Ω qu'est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Après une introduction, dans le Chapitre 1, nous avons introduit quelques rappels de notions d'analyse fonctionnelle. Ensuite, dans le Chapitre 2, nous avons étudiè l'existance et l'unicité de la solutions pour notre problème en utilisant la méthode de Faedo-Galarkin.

Enfin, dans le dernier Chapitre, nous avons établi un résultat un résultats de stabilité exponentielle du problème sous certaines hypothèses **(H1)** et **(H2)**. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthodes des multiplicateurs.

La stabilisation de l'équation des ondes semi linaire avec des dissipations forte et faible est un problème qui nous semble technique, et qui peut se résoudre en définissant une bonne fonction de de Lyapunov.

Bibliographie

[1] R. A. Adams and J. F. Fourier, *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2003.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, 1987.

[3] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[4] F. Gazzola and M. Squassina,, *Global solutions and finite time blow up for damped semilinear wave equations*. Ann. I. H. Poincaré-(AN 23) 185–207 2006.

[5] J. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogenes et applications*, Vol.1 et 2. Paris 1968.

[6] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. second Edition, Dunod, Paris 2002.

[7] J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*. Birkhäuser Basel 1993.