

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



Mémoire

Présenté par

HADDAD IBTISSAM

pour l'obtention de diplôme de

**Master**

Filière : Mathématiques

Spécialité : Systèmes Dynamiques

---

## Thème

**Etude analytique d'un problème quasistatique en  
électro-élasto-viscoplasticité avec frottement et usure.**

---

Soutenu publiquement le 29 juin 2022 devant le jury composé de

AZRA SOUAD

Président

HAMMAR HENA

Encadreur

BENAISSA SOURIA

Examineur

DEBBICHE HANANE

Examineur

Promotion 2021/2022

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Modélisation</b>	<b>9</b>
1.1 Cadre physique-modèle mathématique . . . . .	9
1.1.1 Cadre physique . . . . .	9
1.1.2 Modèle mathématique . . . . .	11
1.2 Lois de comportement . . . . .	13
1.2.1 Lois de comportement visco-élastiques . . . . .	13
1.2.2 Lois de comportement visco-plastiques . . . . .	14
1.2.3 Loi de comportement élasto-viscoplastiques . . . . .	14
1.2.4 Loi de comportement électro-élasto-viscoplastique . . . . .	14
1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement . . . . .	15
1.3.1 Les conditions aux limites mécaniques (déplacement-traction). . . . .	15
1.3.2 Les conditions aux limites électriques . . . . .	16
1.3.3 Lois de contact bilatéral . . . . .	16
1.3.4 Lois de contact de Signorini . . . . .	16
1.4 Conditions aux limites de contact bilatéral avec frottement et usure . . . . .	17
<b>2 Outils Mathématiques</b>	<b>19</b>
2.1 Espaces de Sobolev . . . . .	19
2.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	22
2.3 Éléments d'analyse dans les espaces de Hilbert . . . . .	24
2.3.1 Equations et inéquations variationnelles d'évolution . . . . .	24
2.4 Fonctions convexes-semi-continuité inférieure . . . . .	25
2.4.1 Théorème du point fixe de Banach . . . . .	26
2.5 Compléments divers . . . . .	26
2.5.1 Lemmes de type Gronwall . . . . .	26
<b>3 Problème quasistatique en électro-élasto-viscoplasticité avec frottement et usure</b>	<b>28</b>
3.1 Position du problème . . . . .	28
3.2 Formulation variationnelle . . . . .	29
3.3 Existence et unicité de la solution . . . . .	35

**Conclusion** 51

**Bibliographie** 52

## REMERCIEMENTS

*L*a réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude spécialement mes chers parents, qui ont toujours été là pour moi.

*D*'abord, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire HAMMAR Hena, je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé, conseillé et guidé. Outre la confiance qu'elle m'a accordée, sa patience, disponibilité et surtout ses judicieux conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

*E*nsuite, ma reconnaissance va aussi à Monsieur (Madame) pour avoir accepté d'être président de jury. Je le (la) remercie profondément pour les suggestions importantes qu'il (elle) m'a faits. Je remercie également Monsieur (Madame) et Monsieur (Madame) de m'avoir l'honneur de participer au jury. Je les remercie très chaleureusement.

*J*'adresse à la fin mes sincères remerciements à tous mes enseignants surtout Monsieur *BENSAÏD*, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs sécris, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches. Mes amis qui trouveront ici toute ma reconnaissance pour leur aide et leurs encouragement qui m'a permis de terminer.

*A* ma chère petite princesse : *LINA GHEFRANE*

*A* mes chers parents : Rachid et Fadhila

*A* mes chères soeurs : Ines, Imen et ses enfants (Nour et Abdo), Aya et Amira.

*A* mon grand frère : Cherif et ses enfants (Chouaib et Siouar).

*A* mes chères amies : Chafika, Amani, Samia, Ferial, Ibtissam, Sahar,

*A*mina, Soumia, Yasmine, Sara, Amel, Yousra, Amel, Hadjira

*H*adjer, Zineb, Asma et Mouna.

*A* mes chères cousines : Randa, Dounia, Ikram, Rahma,

*M*adjeda, Hadil, Yasmine, Houda, Hiba, Hanane et Meriem.

*A* mes chers cousins.

*A* mes chères tantes et *A* mes chères ancles : spécialement à

*N*adia et son mari Rabeh, Nassima, Naima, Abla, Noura et Hakima

*A* mes grands-parents : Ali, Zuina et Kheira

*A* mes collègues.

*A* mes profs et mes élèves.

Je dédie mon mémoire de master avec gratitude et ma reconnaissance.

*IBTISSAM*

Soit  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ , on note par

- $\overline{\Omega}$  l'adhérence de  $\Omega$ .
- $\Gamma$  la frontière de  $\Omega$  supposée régulière.
- $mes\Gamma_1$  la mesure de Lebesgue  $(d - 1)$  dimensionnelle de  $\Gamma_1$ .
- $\Gamma_i (i = \overline{1, 3})$  une partie mesurable de  $\Gamma$ .
- $\nu$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ .
- $v_\nu, v_\tau$  les composante normales et tangentielles du champ vectoriel  $v$  sur  $\Omega$ .
- $H$  l'espace  $\mathbb{L}^2(\Omega)^d$ .
- $\mathcal{H}$  l'espace  $\mathbb{L}^2(\Omega)_s^{d \times d}$ .
- $H_1$  l'espace  $H^1(\Omega)^d$ .
- $\mathcal{H}_1$  l'espace  $\{\sigma \in \mathcal{H} / \text{Div}\sigma = (\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}) \in H\}$ .
- $H^{1/2}(\Gamma)$  l'espace de Sobolev d'ordre  $1/2$  sur  $\Gamma$ .
- $H^{-1/2}(\Gamma)$  l'espace dual de  $H^{1/2}(\Gamma)$ .
- $\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$  l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si  $H$  est un espace de Hilbert réel et  $d \in \mathbb{N}^*$ , on a les notations suivantes

- $H^d$  l'espace  $\{x = (x_i) / x_i \in H, i = \overline{1, d}\}$ .
- $(\cdot, \cdot)_H$  produit scalaire sur  $H$ .
- $(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$  produit de dualité entre  $H$  et  $H'$ .
- $|\cdot|_H$  la norme sur  $H$ .
- $H'$  l'espace dual de  $H$ .

Si de plus  $[0, T]$  un intervalle de temps,  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par

- $C(0, T; H)$  l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $H$ .
- $C^1(0, T; H)$  l'espace des fonctions continûment dérivables sur  $[0, T]$  dans  $H$ .

$L^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans $H$ .
$ \cdot _{L^p(0, T; H)}$	la norme de $L^p(0, T; H)$ .
$W^{k,p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev de paramètre $k$ et $p$ .
$ \cdot _{W^{k,p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$ .

Pour une fonction  $f$  ; on note par

$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivées première et seconde de $f$ par rapport au temps.
$supp f$	le support de $f$ .
$\partial_i f, f, i$	la dérivée partielle de $f$ par rapport à la $i$ ème composante $x_i$ .
$\nabla f$	le gradient de $f$ .
$Div \sigma$	la divergence de tenseur $\sigma$ .
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f$ .
$div f$	la divergence de vecteur $f$ .

#### Autre notations

$\lim inf$	la limite inférieure,
$\lim sup$	la limite supérieure,
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,
$D(\Omega)^d$	$\{\varphi = (\varphi_i), \varphi_i \in D(\Omega), i = \overline{1, d}\}$ ,
$C_0^\infty(\Omega)^d$	$\{f \in C^\infty(\Omega)^d, f = 0 \text{ sur } \Gamma\}$ ,
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs d'ordre deux symétriques sur $\mathbb{R}^d$ c'est à dire $\mathbb{S}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$ ,
"."	le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ ,
" ."	la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ ,
$C$	une constante générique strictement positive,
$\Lambda^n$	puissance $n$ de l'opérateur $\Lambda$ ,
$p.p.$	presque partout.

Les matériaux piézoélectriques sont extrêmement utilisés dans la vie quotidienne. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et inversement. Une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Les matériaux piézoélectrique pour lesquels les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés " les matériaux électro-viscoélastiques" et ceux pour lesquelles les propriétés mécaniques sont élasto-viscoplastiques sont appelés "les matériaux électro- élasto-viscoplastiques". Dans ce travail on s'intéresse au problème quasistatique pour des matériaux électro-viscoélastiques en piézoélectricité. Le contact est modélisé à l'aide d'une condition de contact bilatéral avec frottement. Prenant en compte les comportements divers des milieux continus, elle englobe l'hydrodynamique, la dynamique des gaz, l'élasticité, la plasticité et d'autres types de comportement, voir par exemple [2, 4, 7].

La piézoélectricité est aussi utilisée dans certaines des imprimantes de la marque Epson, rare entreprise à fabriquer des têtes jet d'encre piézoélectrique. Des impulsions électriques font se contracter de fines buses, emplies d'encre qui expulsent alors des minuscules gouttes d'encres.

Enfin, une utilisation tout à fait courante et connue de la piézoélectricité est celle qui est faite dans les allumes-gaz, la pression exercée sur le manche de l'appareil produit un courant électrique qui se manifeste sous la forme d'étincelles, voir [8]

À l'effet de la contribution à l'étude d'un problème aux limites en mécanique de contact nous considérons un loi de comportement électro-élasto-viscoplastique. Nous étudions analytiquement un problème du contact avec frottement et usure dans un processus quasistatique avec des conditions aux limites, commençant par la formulation variationnelle, ensuite l'existence et l'unicité de la solution faible. Ce manuscrit comporte trois parties que décrivons brièvement.

Dans la première partie, le but est d'introduire les outils nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des objets traités. Commençons par présenter les divers modèles mécaniques de contact étudiés. Puis, rappelons quelques lois de comportement et les conditions

aux limites.

Dans la deuxième partie, rappelons résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les opérateurs fortement, monotones et de Lipschitz, les équations et les inéquation variationnelles d'évolution et les lemmes de Gronwall.

Et la dernière partie de ce mémoire est consacrée à l'étude d'un problème de contact quasi-statique pour un corps électro-élasto-viscoplastique et une fondation. Le contact est bilatéral avec frottement et l'usure et une condition électrique régularisée. Nous dérivons une formulation variationnelle sous forme d'un système couplé en terme des champs de déplacement et du potentiel électrique. Aussi, établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour le modèle.

Dans le souci de rendre ce mémoire facile à lire, il nous est paru nécessaire de présenter dans ce chapitre un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire le cadre physique utilisé dans ce mémoire ; il est destiné à rappeler l'équation d'équilibre et l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement électro-élasto-viscoplastiques, et par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact.

## 1.1 Cadre physique-modèle mathématique

Dans cette section nous allons introduire le cadre physique et le modèle mathématique du problème mécanique intervenant dans ce mémoire.

### 1.1.1 Cadre physique

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2; 3$ ) avec une surface régulière  $\Gamma$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que  $mes\Gamma_1 > 0$ ,  $mes\Gamma_a > 0$  et  $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$ . On note par  $\nu$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . Le corps est encastré sur  $\Gamma_1$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2$  agisse des tractions surfaciques de densité  $h$  et dans  $\Omega$  agisse des forces volumiques de densité  $f_0$  et des charges électriques de densité volumiques  $q_0$  (figure 1.1). On suppose que  $h$  et  $f_0$  varient très lentement par rapport au temps. Le milieu est soumis à l'action de potentiel fixé  $q_0$  sur la partie  $\Gamma_a$  de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique  $q_2$ , agissent sur la partie  $\Gamma_b$ . Soit  $T > 0$  et soit  $[0, T]$  l'intervalle de temps. Le corps est en contact avec frottement avec une fondation conductive (ou isolatrice) sur la partie  $\Gamma_3$ .

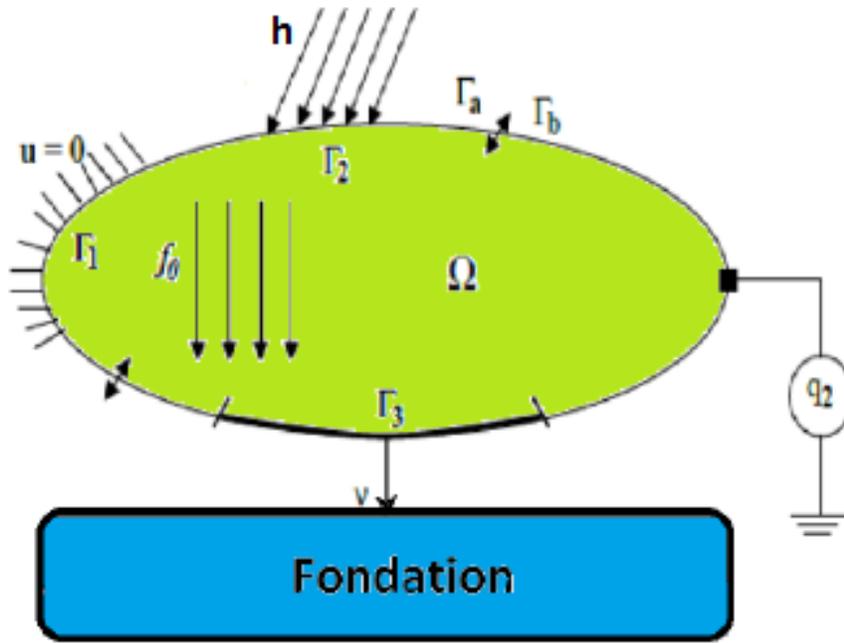


FIGURE 1.1 – Cadre physique

On étudie l'évolution de ces propriétés dans l'intervalle de temps  $[0, T]$ , sous l'hypothèse des petites transformations. Les hypothèses physiques introduites pour la piézoélectricité consistent à négliger les effets magnétiques et à considérer l'interaction électro-mécanique uniquement. Cette hypothèse est raisonnable pour les matériaux piézoélectriques utilisés habituellement comme les céramique, les polymères et les piézo-composites.

Avant d'aborder les modèles mathématiques qui correspondent au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de ce mémoire. Nous désignons par  $\mathbb{S}^d$  ( $d = 2; 3$ ) l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}$ .  $(\cdot, \cdot)$  et  $|\cdot|$  représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$ . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_i v_i, & |v| &= (v, v)^{1/2}, & \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & |\tau| &= (\tau, \tau)^{1/2}, & \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet. Pour un vecteur  $v$ , nous utilisons la notation  $v$  pour désigner la trace  $\gamma v$  de  $v$  sur  $\Gamma$ . Nous notons par  $v_\nu$  et  $v_\tau$  les composantes normale et tangentielle de  $v$  sur la frontière données par

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu. \quad (1.1)$$

Nous désignons par  $\sigma = \sigma(x, t)$  le champ des contraintes, par  $u = u(x, t)$  le champ des

déplacements et par  $\varepsilon(u)$  le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à  $x \in \bar{\Omega}$  et  $t \in [0, T]$ .

Pour un champ des contraintes  $\sigma$  nous dénotons par  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  les composantes normale et tangentielle à la frontière donnée par

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma\nu) \cdot \nu = \sigma_\nu \nu_\nu + \sigma_\tau \nu_\tau, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans la formulation variationnelle du problème mécanique de contact.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps,

par exemple :  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ ,

où  $\dot{u}$  désigne le champ des vitesses.

Pour le champ des vitesses  $\dot{u}$  les notations  $\dot{u}_\nu$  et  $\dot{u}_\tau$  représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\dot{u}_\nu = \dot{u} \cdot \nu, \quad \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu \nu.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ où } u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.4)$$

Notons qu'ici et tout au long de ce mémoire, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description du modèle mathématique associée au cadre physique ci-dessus.

### 1.1.2 Modèle mathématique

Le modèle mathématique présenté dans ce mémoire, décrit l'évolution du corps dans le cadre physique ci-dessus. C'est un modèle électro mécanique, les fonctions inconnus du problème sont le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ .

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mou-

vement de Cauchy.

$$Div\sigma + f_0 = \rho\ddot{u}, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.5)$$

où  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  désigne la masse volumique ; ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs,  $Div\sigma = (\sigma_{ij,j})$ .  $\ddot{u}$  représente l'accélération et  $\dot{u}$  la vitesse du corps, le processus d'évolution défini par (1.5) s'appelle processus dynamique. Dans certaine situation, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où le champs des vitesses  $\dot{u}$  vraie très lentement par rapport au temps, le terme  $\rho\ddot{u}$  peut être négligé. Dans ce cas, le processus s'appelle quasistatique et l'équation (1.5) s'appelle l'équation d'équilibre et devient

$$Div\sigma + f_0 = 0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.6)$$

Puisque le corps est encastré sur  $\Gamma_1$ , le champ des déplacements s'annule

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T]. \quad (1.7)$$

La condition aux limites de traction est

$$\sigma_\nu = h, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T]. \quad (1.8)$$

Les inconnus mécaniques du problème sont le champ des déplacements  $u$ , le champ des contraintes  $\sigma$  satisfaisant les égalités (1.7)-(1.8). A celles-ci se rajoutent les inconnus électriques du problème, à savoir le champ de déplacements électriques  $D : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .

L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques.

$$div D = q_0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.9)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs,  $div D = (D_{i,i})$  et  $q_0$  représente la densité des charges électriques volumiques. Rappelons que dans le cadre physique précédent, le potentiel électrique s'annule sur la partie  $\Gamma_a$  de la frontière

$$\varphi = 0, \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T], \quad (1.10)$$

tandis que sur  $\Gamma_b$ , une charge électrique de densité  $q_2$  est prescrite,

$$D\nu = q_2, \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T], \quad (1.11)$$

Ce modèle piézoélectrique (1.6)-(1.11) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact  $\Gamma_3$ .

Les équation précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du

corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui même, c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

## 1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes  $\sigma$  et le tenseur des déformations  $\varepsilon$  et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation. Dans la description des phénomènes purement mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes  $\sigma$ , le tenseur des déformations infinitésimales  $\varepsilon$  et leurs dérivées temporelles  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\varepsilon}$ , voir [2]

### 1.2.1 Lois de comportement visco-élastiques

Le corps suit une loi de comportement de Kelvin-Voigt de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u), \quad (1.12)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{G}$  sont des fonctions constitutives non linéaires, tel que  $\mathcal{A}$  représente l'opérateur de viscosité et  $\mathcal{G}$  est l'opérateur d'élasticité.

Pour un corps élastique, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(u)). \quad (1.13)$$

On rappelle qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contrainte  $\sigma = (\sigma_{ij})$  est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\dot{u}) + g_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u),$$

où  $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$  est le tenseur de viscosité et  $\mathcal{G} = (g_{ijkl})$  est le tenseur d'élasticité, pour  $i, j, k, l = 1, \dots, d$ .

### 1.2.2 Lois de comportement visco-plastiques

Pour les matériaux viscoplastiques, la loi de comportement est de la forme

$$\dot{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + G(\sigma, \varepsilon), \quad (1.14)$$

où  $\mathcal{A}$  représente l'opérateur de viscosité et  $G$  est l'opérateur de plasticité.

### 1.2.3 Loi de comportement élasto-viscoplastiques

La loi de comportement élasto-viscoplastique peut être écrite sous la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)))ds, \quad (1.15)$$

où les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des tenseurs d'ordre quatre et non linéaires ; leurs composantes  $a_{ijkl}$  et  $b_{ijkl}$  s'appellent coefficient de viscosité et élasticité respectivement et  $\mathcal{G}$  représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoplastique du matériau.

Cette loi modifie légèrement la description des phénomènes thermo-mécaniques ou électromécanique car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de température  $\theta$ , le champ de déplacements électriques  $D = (D_i)$  ainsi que le champ électrique

$E(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i})$ . Nous présentons par la suite les lois de comportement qui interviennent dans ce mémoire.

### 1.2.4 Loi de comportement électro-élasto-viscoplastique

Les matériaux piézoélectriques sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique lors de l'application des contraintes mécaniques, et inversement, des contraintes mécaniques sont générées lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Un matériau piézoélectrique dont les propriétés mécaniques sont élasto-viscoplastiques est appelé matériau électro-élasto-viscoplastique et pour la contrainte on a  $\sigma = \sigma^{ve} + \sigma^{el}$ , où  $\sigma^{ve}$  et  $\sigma^{el}$  sont respectivement les parties élasto-viscoplastiques et électriques de la contrainte, telles que  $\sigma^{ve}$  définie par (1.15) et  $\sigma^{el} = -\xi^*E(\varphi)$ .

A partir de la loi (1.15), nous obtenons une loi de comportement électro-élasto-viscoplastique comme suit

$$\begin{cases} \sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)))ds - \xi^*E(\varphi), & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ D = \beta E(\varphi) + \xi\varepsilon(u) & \text{dans } \Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (1.16)$$

dans laquelle les opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{B}$  sont définis ci-dessus,  $\xi$  le tenseur piézoélectrique et  $\beta$  représente le tenseur de la permittivité électrique.

### 1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernière étant appelées condition de frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsque l'obstacle est rigide), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle), de complaisance normale (lorsque l'obstacle est déformable) ou bien de réponse normale instantanée (lorsque la surface de contact est lubrifiée). A part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle ( le cas sans frottement), le frottement peut être à seuil (quand le glissement se produit lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de Coulomb ; elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié.

On définit maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de  $\Gamma$ .

#### 1.3.1 Les conditions aux limites mécaniques (déplacement-traction).

$$u = 0, \quad \Gamma_1 \times [0, T], \quad (1.17)$$

Sa signification consiste à ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie  $\Gamma_1$  de frontière  $\Gamma$  (le corps est encastré par la partie  $\Gamma_1$ ).

$$\sigma_\nu = h, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T]. \quad (1.18)$$

Elle signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy  $\sigma_\nu$  est imposé sur la partie  $\Gamma_2$  de la frontière  $\Gamma$ ,  $h$  représentant la densité des forces appliquées sur la surface et constituant une donnée du problème.

Enfin, le corps est éventuellement en contact avec une fondation sur  $\Gamma_3 \times [0, T]$ . C'est ici que commence toute la richesse des problèmes et que réside notre intérêt, car les conditions sur la surface potentielle de contact  $\Gamma_3$  peuvent être très diverses et donner ainsi lieu à une variété de modèle contact avec ou sans frottement.

### 1.3.2 Les conditions aux limites électriques

$$\varphi = 0, \quad \Gamma_a \times [0, T]. \quad (1.19)$$

Sa signification consiste à ce qu'un champ potentiel électrique est imposé sur la partie  $\Gamma_a$  de la frontière  $\Gamma$ .

$$D\nu = q_2, \quad \Gamma_b \times [0, T]. \quad (1.20)$$

Elle signifie que le vecteur de déplacements électriques  $D_\nu$  est imposé sur la partie  $\Gamma_b$  de la frontière  $\Gamma$ ,  $q_2$  représentant la densité surfacique appliquée sur la surface et constituant une donnée du problème.

Nous citons ici les principales lois de frottement

### 1.3.3 Lois de contact bilatéral

On suppose que le contact entre le corps et la fonction se produit avec frottement bilatéral c'est-à-dire le contact est maintenu pendant le mouvement. Cette propriété se traduit mathématiquement par

$$u_\nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.21)$$

### 1.3.4 Lois de contact de Signorini

On dit que le contact entre le corps et une base rigide est sans frottement, si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui se traduit par

$$\sigma_\tau = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.22)$$

Puisque la base est rigide, elle ne subira donc pas de déformations. Le corps ne pourra donc pas y pénétrer. Cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité suivante

$$u_\nu = u \cdot \nu \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.23)$$

Aux points de  $\Gamma_3$  tels que  $u_\nu < 0$ , le corps déformable quitte la base rigide. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a

$$u_\nu < 0 \implies \sigma_\nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.24)$$

Aux points de  $\Gamma_3$  tels que  $u_\nu = 0$ , on suppose que la base rigide exerce une réaction inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers  $\Omega$ . On a

$$u_\nu = 0 \implies \sigma_\nu \leq 0, \quad \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.25)$$

Pour résumer, les conditions de contact (1.22)-(3.25) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.26)$$

Les conditions aux limites de contact de la forme (1.26) sont aussi appelées conditions de contact de Signorini.

Les conditions de contact de Signorini (1.26) modélisent le contact d'un corps déformable avec une base rigide. On peut envisager donc les conditions de contact d'un corps déformable avec une base déformable.

## 1.4 Conditions aux limites de contact bilatéral avec frottement et usure

Introduisons la fonction d'usure  $\omega : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$  qui mesure l'usure de la surface. L'usure est identifiée comme étant la profondeur normale de la matière qui est perdue. Puisque le corps est en contact bilatéral avec la fondation, il en résulte que

$$u_\nu = -\omega, \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.27)$$

Ainsi, l'emplacement du contact évolue avec l'usure. Nous rappelons que l'effet de l'usure est la récession sur  $\Gamma_3$ , il est normal de prévoir que  $u_\nu \leq 0$  sur  $\Gamma_3$ , ce qui implique  $\omega \geq 0$  sur  $\Gamma_3$ .

L'évolution de l'usure de la surface de contact est régie par une version simplifiée de la loi d'Achard (voir[13]). Nous décrivons maintenant la forme du taux de la loi d'Archard est

$$\dot{\omega} = -k\sigma_\nu |\dot{u}_\tau - v^*|,$$

où  $k > 0$  est le coefficient d'usure,  $v^*$  est la vitesse tangentielle de la fondation et  $|\dot{u}_\tau - v^*|$  représente la vitesse de glissement entre la surface de contact et la fondation.

On voit que l'évolution d'usure est supposée être proportionnelle à la contrainte de contact et la vitesse de glissement. Par souci de simplicité, nous supposons dans le reste de la section que la mouvement de la fondation est uniforme, c-à-d,  $v^*$  ne varie pas dans le temps. Notons  $v^* = |v^*| > 0$ .

Nous supposons que  $v^*$  est grande pour pouvoir négliger dans la suite  $\dot{u}_\tau$  par rapport à  $v^*$  afin d'obtenir la version suivante de la loi d'Archard

$$\dot{\omega} = -kv^* \sigma_\nu. \quad (1.28)$$

L'utilisation de la loi simplifiée (1.28) pour l'évolution de l'usure permet d'éviter certaines difficultés mathématiques dans l'étude des problèmes de contact. Nous pouvons maintenant éliminer la fonction inconnue  $\omega$  du problème. De cette manière, le problème étant découplé, et une fois que la solution du problème de contact de frottement a été obtenue, l'usure de la surface peut être obtenue par intégration de (1.28). Soient  $\zeta = kv^*$  et  $\alpha = \frac{1}{\zeta}$ . En utilisant (1.27) et (1.28) nous avons

$$\sigma_\nu = \alpha \dot{u}_\nu. \quad (1.29)$$

Nous modélisons le contact de frottement entre le corps et la fondation avec la loi de Coulomb de frottement sec. Puisqu'il n'y a qu'un contact glissant, donc

$$|\sigma_\tau| = \mu |\sigma_\nu|, \quad \sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - v^*), \quad \lambda \geq 0, \quad (1.30)$$

où  $\mu > 0$  est le coefficient de frottement. Ces relations définissent l'évolution des contraintes, en particulier la contrainte tangentielle. Celle ci est dans le sens opposé à la vitesse de coulissement relative  $|\dot{u}_\tau - v^*|$ .

Naturellement, l'usure augmente dans le temps, c-à-d :  $\dot{\omega} \geq 0$ . Par conséquent, il résulte de (1.27) et (1.28) que  $\dot{u}_\nu \leq 0$  et  $\sigma_\nu \leq 0$  sur  $\Gamma_3$ . Alors les conditions (1.29) et (1.30) impliquent

$$-\sigma_\nu = \alpha |\dot{u}_\nu|, \quad |\sigma_\tau| = -\mu \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - v^*), \quad \lambda \geq 0 \quad (1.31)$$

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire, et donnons quelques propriétés nécessaires pour l'élaboration de ce travail. Partout dans ce chapitre  $\Omega$  est un domaine borné et Lipschitzien de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2; 3$ ), avec une frontière  $\Gamma$  régulière et de Lipschitz. Par ailleurs, nous considérons deux décompositions de  $\Gamma$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  et  $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$  avec  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$  telle que  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  sont mesurables et  $\text{mes } \Gamma_1 > 0$  et  $\text{mes } \Gamma_a > 0$ .

## 2.1 Espaces de Sobolev

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1 \dots d\}$$

D'abord, on note par  $\nabla u$  le vecteur de composante  $\partial_i u$ . On a  $\nabla u \in \mathbb{L}^2(\Omega)^d$  pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ . On sait que  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}.$$

et la norme associée

$$|u|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{1/2} \text{ et on écrit } |u|_{H^1(\Omega)}^2 = |u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + |\nabla u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants

**Théorème 2.1.1. (*Trace de Sobolev*) [1]**

Il existe une application linéaire et continue  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Gamma)$  telle que  $\gamma u = u|_\Gamma$  pour  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ .

**Remarque 2.1.1.** L'espace  $\mathbb{L}^2(\Gamma)$  ci-dessus représente l'espace des fonctions réelles sur  $\Gamma$  qui sont  $\mathbb{L}^2$  pour la mesure superficielle d  $\Gamma$ . L'application  $\gamma$  s'appelle application trace; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application  $u \rightarrow u|_\Gamma$  définie pour  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ .

On note que l'application de trace  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Gamma)$  est un opérateur compact. Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques  $u$  et  $\sigma$

$$\begin{aligned} H &= \{u = (u_i) \text{ tel que } u_i \in L^2(\Omega)\} = (L^2(\Omega))^d, \\ \mathcal{H} &= \{\sigma = (\sigma_{ij}) \text{ tel que } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\} = (L^2(\Omega))_s^{d \times d}, \\ H_1 &= \{u = (u_i) \text{ tel que } u_i \in H^1(\Omega)\} = H^1(\Omega)^d, \\ \mathcal{H}_1 &= \{\sigma \in \mathcal{H} \text{ tel que } \sigma_{ij,j} \in H\}. \end{aligned}$$

Les espaces  $H, \mathcal{H}, H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés respectivement par

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= \int_\Omega u_i \cdot v_i \, dx, \\ (\sigma, \tau)_\mathcal{H} &= \int_\Omega \sigma_{ij} \cdot \tau_{ij} \, dx, \\ (u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_\mathcal{H}, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_\mathcal{H} + (Div \sigma, Div \tau)_H, \end{aligned}$$

où  $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$  et  $Div : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$  sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Soit  $X$  un espace de Banach, nous désignons par  $|\cdot|_X$  la norme associée, en particulier les normes associées aux espaces  $H, \mathcal{H}, H_1$  et  $\mathcal{H}_1$

Puisque la frontière  $\Gamma$  est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur  $\nu$  à la frontière est défini *p.p.* Pour tout champ de vecteurs  $v \in H_1$  nous utilisons la notation  $v$  pour désigner la trace  $\gamma v$  de  $v$  sur  $\Gamma$ . Rappelons que l'application de trace  $\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$  est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de  $H_1$  par cette application est notée par  $H_\Gamma$ , ce sous-espace s'injecte continûment dans  $\mathbb{L}^2(\Gamma)^d$ . Désignons par  $H'_\Gamma$  le dual de  $H_\Gamma$  et  $(\cdot, \cdot)$  le produit de dualité entre  $H'_\Gamma$  et  $H_\Gamma$ . Pour tout  $\sigma \in \mathcal{H}_1$ , il existe un élément  $\sigma\nu \in H'_\Gamma$  tel que

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_\mathcal{H} + (Div \sigma, v)_H, \quad \forall v \in H_1.$$

En outre, si  $\sigma$  est assez régulier (par exemple  $C^1$ ), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v) = \int_{\Gamma} \sigma\nu.v da, \forall v \in H_1.$$

Donc, pour  $\sigma$  assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de Green)

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div\sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma\nu.v da, \forall v \in H_1. \quad (2.1)$$

Nous définissons les sous-espaces fermés de  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  et  $H^1$

$$Y = \{v \in \mathbb{L}^2(\Omega) / \varepsilon_{ij}(v) \in \mathbb{L}^2(\Omega)\} = H^1(\Omega), \quad V = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Puisque  $mes \Gamma_1 > 0$ , l'inégalité de Kron s'applique sur  $V$ , alors, il existe une constante  $C_K > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$  telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_K |v|_{H_1}, \quad \forall v \in V.$$

Nous considérons sur l'espace  $V$ , le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad \forall u, v \in V, \quad (2.2)$$

et soit  $|\cdot|_V$  la norme associée, i.e.

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in V. \quad (2.3)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que  $|\cdot|_{H_1}$  et  $|\cdot|_V$  sont des normes équivalentes sur  $V$  et ainsi  $(V, |\cdot|_V)$  est un espace de Hilbert. En outre, par le théorème de trace de Sobolev il existe une constante  $C_0$  dépendant uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$|v|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 |v|_V, \quad \forall v \in V. \quad (2.4)$$

De plus, on note par  $V'$  l'espace dual de  $V$  et par  $Y'$  celui de  $Y$ . Nous utilisons les notations  $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$  et  $(\cdot, \cdot)_{Y' \times Y}$  pour représenter la dualité entre  $V'$ ,  $V$  et  $Y'$ ,  $Y$  respectivement.

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnues électriques (champ du déplacement électrique  $D$  et le potentiel électrique  $\varphi$ ) des problèmes électromécaniques.

Soient les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{D = (D_i) / D_i \in \mathbb{L}^2(\Omega), \operatorname{div} D \in \mathbb{L}^2(\Omega)\}, \\ W &= \{\zeta \in H^1(\Omega) / \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}, \end{aligned}$$

où  $\operatorname{div} D = (D_{i,i})$  : Ces espaces  $\mathcal{W}$  et  $W$  sont des espaces réels de Hilbert munis des produits

scalaires donnés par

$$\begin{aligned}(D, E)_W &= (D, E)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \operatorname{div} E)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \\ (\varphi, \phi)_W &= (\nabla\varphi, \nabla\phi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d},\end{aligned}$$

et leurs normes associées  $|\cdot|_W$  et  $|\cdot|_W$ , respectivement.

$$|D|_W^2 = |D|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}^2 + |\operatorname{div} D|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2, \quad |\varphi|_W = |\nabla\varphi|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}.$$

Puisque  $\operatorname{mes}(\Gamma_a) > 0$ , l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$|\nabla\xi|_W \geq C |\xi|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \xi \in W, \quad (2.5)$$

où  $C > 0$  est une constante qui dépend uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_a$  et  $\nabla\xi = (\xi_i)$ . Il s'ensuit de (2.5) que  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  et  $|\cdot|_W$  sont des normes équivalentes sur  $W$  et donc  $(W, |\cdot|_W)$  est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante  $\tilde{c}_0$  dépendant uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$|\xi|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 |\xi|_W, \quad \forall \xi \in W. \quad (2.6)$$

Aussi, rappelons que lorsque  $D \in \mathbb{L}^2(\Omega)^d$  est une fonction régulière, la formule de Green (2.1) est satisfaite

$$(D, \nabla\xi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \xi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D\nu \cdot \xi \, da, \quad \forall \xi \in H^1(\Omega). \quad (2.7)$$

## 2.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit  $0 < T < \infty$  et soit  $(X; |\cdot|_X)$  un espace de Banach réel. Notons par  $C_c(0, T; X)$  l'ensemble des fonctions continues à support compact dans  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$ .

Soit  $1 \leq p \leq \infty$  l'espace de Lebesgue  $L^p(0, T; X)$  est l'ensemble des classes des fonctions  $f : [0, T] \rightarrow X$  mesurables telles que l'application  $t \rightarrow |f|_X$  appartient à  $L^p[0, T]$ . On sait que  $L^p(0, T; X)$  est un espace vectoriel normé avec la norme

$$|f|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T |f|_X^p \, dt \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p \leq \infty,$$

par ailleurs, on a les résultats suivants.

**Proposition 2.2.1.** [1]

(1)  $L^p(0, T; X)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) est un espace de Banach.

(2) Si  $X$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  alors  $L^2(0, T; X)$  est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

(3)  $L^r(0, T; X) \subset L^q(0, T, X)$  avec injection continue  $1 \leq q \leq \infty$ .

(4) Si  $X$  est un espace de Hilbert, alors

$$\begin{aligned} L^p(0, T; X)' &= L^q(0, T; X), \quad \text{si } 1 < q, p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\ L^1(0, T, X)' &= L^\infty(0, T; X), \end{aligned}$$

où  $L^p(0, T; X)'$  représente le dual de l'espace  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Soit  $1 \leq p \leq \infty$  l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(0, T; X)$  est l'espace des fonctions  $u : [0, T] \rightarrow X$  telles que  $u \in L^p(0, T; X)$  et  $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$ . L'espace  $W^{1,p}(0, T; X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$|u|_{W^{1,p}(0, T; X)} = |u|_{L^p(0, T; X)} + |\dot{u}|_{L^p(0, T; X)}.$$

Étant donné un entier  $k \geq 2$  et un réel  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{ u \in L^p(0, T; X), u^{(s)} \in L^p(0, T; X), s \leq k \},$$

on vérifie aisément que  $u \in W^{k,p}(0, T; X)$  si et seulement s'il existe  $k$  fonctions  $g_1, \dots, g_k \in L^\infty(0, T; X)$  telles que

$$\int_0^T u(t) \varphi^{(j)}(t) dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}_c^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, \dots, k,$$

où  $\varphi^{(j)}$  désigne la dérivée d'ordre  $j$  de  $\varphi$ . On peut donc considérer les dérivées successives  $\dot{u} = g_1, u^{(2)} = g_2, \dots, u^{(k)} = g_k$ . L'espace  $W^{k,p}(0, T; X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$|u|_{W^{k,p}(0, T; X)} = |u|_{L^p(0, T; X)} + \sum_{\alpha=1}^k |u^{(\alpha)}|_{L^p(0, T; X)}$$

Nous dénotons aussi par  $C(0, T; X)$  et  $C^1(0, T; X)$  les espaces des fonctions continues et continument différentiables sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$ , respectivement, avec les normes

$$\begin{aligned} |x|_{C(0, T; X)} &= \max_{t \in [0, T]} |x(t)|_X, \\ |x|_{C^1(0, T; X)} &= \max_{t \in [0, T]} |x(t)|_X + \max_{t \in [0, T]} |\dot{x}(t)|_X. \end{aligned}$$

## 2.3 Eléments d'analyse dans les espaces de Hilbert

Dans cette section nous rappelons quelques éléments d'analyse dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les inéquations variationnelles d'évolution non linéaire du premier ordre qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques. Puis nous rappelons le théorème de point fixe de Banach.

### 2.3.1 Equations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous commençons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert  $V$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  et la norme associée  $|\cdot|_V$  et  $V'$  l'espace dual de  $V$  en notant par  $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$  le produit de dualité entre  $V$  et  $V'$ .

**Définition 2.3.1.** L'opérateur  $A : V \rightarrow V'$  est dit

(a) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq 0, \quad \forall u, v \in V.$$

(b) fortement monotone s'il existe  $m \geq 0$  tel que

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m|u - v|_V^2, \quad \forall u, v \in V.$$

(c) de Lipschitz s'il existe  $L > 0$

$$|Au - Av|_{V'} \leq L|u - v|_V, \quad \forall u, v \in V$$

(d) hemicontinu si pour toute suite numérique  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  telle que  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  on a

$$(A(u + \lambda_n v), w)_{V' \times V} \rightarrow (A(u + \lambda v), w)_{V' \times V} \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad \forall w \in V.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant

**Proposition 2.3.1.** [1] *Tout opérateur de Lipschitz est hemicontinu.*

**Corollaire 2.3.1.** *Soit  $X$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme associée  $|\cdot|_X$ .*

*Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout  $f \in X$  il existe un unique élément  $u \in X$  tel que  $Au = f$ .*

*Le corollaire précédent représente un cas particulier du théorème de Minty-Browder.*

**Inégalité de Friedrichs-Poincaré.** Soit mes  $\Gamma_a > 0$ . Alors il existe une constante  $C_F > 0$  qui dépend seulement de  $\Omega$  et  $\Gamma_a$  telle que

$$|\nabla\varphi|_H \geq C_F |\varphi|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in W,$$

$$\nabla\varphi = \left( \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}$$

## 2.4 Fonctions convexes-semi-continuité inférieure

### -Convexité

On considère une fonction  $\varphi$  définie sur un espace vectoriel réel  $X$  et à valeurs dans  $] -\infty, +\infty[$ . Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à  $+\infty$ , c'est-à-dire s'il existe  $u_0 \in X$  tel que  $\varphi(u_0) < +\infty$ . La fonction  $\varphi$  est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v), \quad \forall u, v \in X, t \in ]0, 1[.$$

La fonction  $\varphi$  est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout  $u, v \in X$  tels que  $u \neq v$ .

### -Semi-continuité inférieure

Une fonction  $\varphi : H \rightarrow ] -\infty, +\infty]$  est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en  $u_0 \in H$  si

$$\liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0).$$

Une fonction est dite (s.c.i) sur  $K \subset H$  si elle est (s.c.i) en tout point de  $K$  et elle est dite (s.c.i) si elle est (s.c.i) sur tout  $H$ .

**Théorème 2.4.1.** [1] Soient  $(V, |\cdot|)$  un espace de Banach réel réflexif avec son dual  $(V', |\cdot|)$  et  $K \subset V$  un ensemble non vide convexe et fermé.

On considère  $j : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonctionnelle convexe semicontinue inférieurement et propre et un opérateur  $A : V \rightarrow V'$  hémicontinu et fortement monotone, c'est-à-dire

$$\begin{cases} (a) \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } (Au - Av, u - v)_V \geq \alpha |u - v|_V^2, \quad \forall u, v \in V. \\ (b) \quad \forall u, v \in V, \text{ l'application } t \in [0, 1] \rightarrow (A(1-t)u + tv, u - v)_V, \text{ est continue.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Alors, pour tout  $f \in V'$ , il existe  $u \in K$  unique tel que

$$(Au, v - u)_V + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_V, \quad \forall v \in K. \quad (2.9)$$

**Théorème 2.4.2.** [1] Soit  $(X, |\cdot|_X)$  un espace de Banach réel et soit  $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$  un opérateur défini p.p. sur  $[0, T]$  qui satisfait les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ |F(t, x) - F(t, y)|_X \leq L_F |x - y|_X, \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ \text{il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in \mathbb{L}^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{cases} \quad (2.10)$$

Alors, pour tout  $x_0 \in X$ , il existe une fonction unique  $x \in W^{1,p}(0, T; X)$  telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.11)$$

**Proposition 2.4.1.** *Si  $u, v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz*

$$|(u, v)| \leq |u| |v|. \quad (2.12)$$

### 2.4.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach va être utilisé plus tard dans ce mémoire pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Soit  $X$  un espace de Banach muni de la norme  $|\cdot|_X$ ,  $K \subset X$  une partie de  $X$  et soit  $\Lambda : K \rightarrow X$  un opérateur défini sur  $K$ . On s'intéresse à l'existence d'une solution de l'équation

$$\Lambda(u) = u, \quad u \in K. \quad (2.13)$$

Une telle solution de (2.13) s'appelle un point fixe de  $\Lambda$  dans  $K$ .

**Théorème 2.4.3. (*Point fixe de Banach*) [6]**

*Soit  $K$  une partie non vide et fermée de l'espace de Banach  $X$  et soit  $\Lambda : K \rightarrow K$  une contraction, i.e.,  $\exists k \in ]0, 1[$  tel que*

$$|\Lambda u - \Lambda v|_X \leq k|u - v|_X, \quad \forall u, v \in K. \quad (2.14)$$

*Alors il existe un unique élément  $u \in K$  tel que  $\Lambda(u) = u$ , i.e.,  $\Lambda$  possède un point fixe unique dans  $K$ .*

*Rappelons que les puissances de l'opérateur  $\Lambda$  sont définies récursivement par*

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \text{ pour } n \geq 2.$$

**Théorème 2.4.4. [6]**

*Sous les mêmes conditions du théorème (2.4.3), on suppose que  $\Lambda^n$  est une contraction pour un certain entier  $n \geq 2$ . Alors  $\Lambda$  admet un point fixe unique dans  $K$ .*

## 2.5 Compléments divers

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section.

### 2.5.1 Lemmes de type Gronwall

**Lemme 2.5.1.** *Soient  $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $a \geq 0$  une constante et  $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$  une fonction.*

1. Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left( a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left( \int_0^t n(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T]$$

2. Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \cdot \int_0^t \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

pour le cas particulier  $m = 0$  la partie (1) de ce lemme devient

**Corollaire 2.5.1.** Soient  $n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telle que  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $a \geq 0$  une constante et  $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$  une fonction telle que

Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \exp \left( \int_0^t n(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T],$$

Le corollaire (2.5.1) est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. On suppose deux solutions, en notant par  $\phi$  la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer  $\phi$  sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s) \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction  $n \geq 0$ . Le corollaire (2.5.1) donne immédiatement la nullité de  $\phi$ .

**Corollaire 2.5.2.** Soit  $m \in C(0, T; \mathbb{R})$  telle que  $m(t) \leq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $a \geq 0$  une constante et  $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$  une fonction telle que

Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe  $c > 0$  tel que

$$\phi(t) \leq a + c \int_0^t m(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

## CHAPITRE 3

# PROBLÈME QUASISTATIQUE EN ÉLECTRO-ÉLASTO-VISCOPLASTICITÉ AVEC FROTTEMENT ET USURE

Dans ce dernier chapitre, nous allons traiter un problème de contact quasistatique entre un corps électro-élasto-viscoplastique et une fondation. Le contact est bilatérale avec frottement et l'usure et une condition électrique régularisée. Nous écrivons le problème et précisons les hypothèses adéquates sur les données. Ensuite, nous établissons une formulation variationnelle et un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour ce problème.

### 3.1 Position du problème

Le problème dans ce chapitre entre le cadre physique présenté dans le premier chapitre de ce mémoire et le modèle mathématique d'équation d'équilibre pour que l'étude soit complet, précisons que la loi de comportement est électro-élasto-viscoplastique de type (1.16) et la condition de contact bilatéral avec frottement et usure est prescrite dans (1.31).

Alors, le modèle classique pour ce processus est le suivant

**Problème  $\mathcal{P}$**  : Trouver un champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , un champ potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , un champ des déplacements électriques  $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et l'usure  $\omega : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  tel que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s))) ds - \xi^* E(\varphi), \quad \text{sur } \Omega \times [0, T], \quad (3.1)$$

$$D = \beta E(\varphi) + \xi \varepsilon(u) \quad \text{sur } \Omega \times [0, T], \quad (3.2)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} D = q_0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.4)$$

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (3.5)$$

$$\sigma_\nu = h, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu = -\alpha|\dot{u}_\nu|, & |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\nu, \\ \sigma_\tau = -\lambda(\dot{u}_\tau - v^*), & \lambda \geq 0, \dot{\omega} = -kv^*\sigma_\nu, k > 0. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \quad (3.7)$$

$$\varphi = 0, \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T], \quad (3.8)$$

$$D\nu = q_2, \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T] \quad (3.9)$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \text{sur } \Omega. \quad (3.10)$$

Les équations (3.1)-(3.2) représentent la loi constitutive électro-élasto-viscoplastique que nous avons introduite dans (1.16). On note  $\varepsilon(u(t))$  (respectivement  $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\xi$ ,  $\xi^*$ ,  $\mathcal{B}$ ) le champ de déplacement (respectivement : le champ électrique, l'opérateur de viscosité, le tenseur de visco-plasticité, le tenseur piézoélectrique et son transposé, et l'opérateur d'élasticité). Ensuite, les équations (3.3) – (3.4) sont les equations d'équilibre des champs de contrainte et déplacement électrique, que nous avons déjà vues dans (1.6) et (1.9). Les conditions, (3.5) et (3.6) représentent les conditions aux limites déplacements traction, tandis que (3.8) et (3.9) sont les conditions aux limites électriques que nous avons définis dans les chapitres précédents. Le contact bilatéral avec frottement et l'usure est modélisé par la condition (3.7). Finalement, (3.10) est la condition initiale où  $u_0$ ,  $v_0$  et  $\omega_0$  sont données.

## 3.2 Formulation variationnelle

Nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données du problème. Supposons que l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists M_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telque : } |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq M_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega, \\ (b) : \exists m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telque : } |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2| \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (d) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists M_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que : } |\mathcal{B}(x, \xi_1) - \mathcal{B}(x, \xi_2)| \leq M_{\mathcal{B}} |\xi_1 - \xi_2| \\ \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega, \\ (b) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{B}(x, \xi) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{B}(x, 0) \in \mathcal{H} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

L'opérateur de viscoplasticité  $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que :} \\ |\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|) \\ \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega, \\ (b) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0) \in \mathcal{H}, \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Le tenseur piézoélectrique  $\xi(x) = (e_{ijk}(x))_{i,j,k=1}^d : \tau \in \mathbb{S}^d \rightarrow \xi(x)(\tau) \in \mathbb{R}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \xi = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ (b) : \xi(x, \tau) = (e_{ijk}(x) \tau_{jk}), \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega, \\ (c) : e_{ijk} = e_{ikj} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Le tenseur de permittivité électrique  $\beta(x) = (b_{ij}(x))_{i,j=1}^d : E \in \mathbb{R}^d \rightarrow B(x)(E) \in \mathbb{R}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \beta = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ (b) : \beta(x, E) = (b_{ij}(x) E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, p.p.x \in \Omega, \\ (c) : b_{ij} = b_{ji} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega), \\ (d) : \exists m_{\beta} > 0 \text{ tel que : } b_{ij}(x) E_i E_j \geq m_{\beta} |E|^2, \\ \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Tandis que le coefficient de frottement  $\mu$  et  $\alpha$  vérifient

$$\begin{aligned} \mu &\in L^\infty(\Gamma_3), \mu(x) \geq 0, \text{ p.p.x sur } \Gamma_3. \\ \alpha &\in L^\infty(\Gamma_3) \quad \alpha(x) \geq \alpha^* > 0, \text{ p.p.x sur } \Gamma_3, \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les forces volumiques, la traction surfacique et la densité des charges électrique volumiques et surfaciques vérifient

$$\begin{cases} f_0 \in L^2(0, T; H), & h \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \\ q_0 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), & q_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_b)). \end{cases} \quad (3.17)$$

Finalement, nous supposons que le déplacement initial satisfait

$$u_0 \in V, \quad \omega_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \quad (3.18)$$

Utilisons le théorème de Riesz, nous définissons les applications  $f : [0, T] \rightarrow V'$  et  $q : [0, T] \rightarrow W$  comme suit

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) v \, dx + \int_{\Gamma_2} h(t) v \, da, \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T], \quad (3.19)$$

$$(q(t), \psi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \psi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \psi \, da, \quad \forall \psi \in W, \quad t \in [0, T]. \quad (3.20)$$

Notons que la condition (3.17) implique

$$f \in L^2(0, T; V'), \quad q \in L^2(0, T; W). \quad (3.21)$$

On considère la fonctionnelle  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \alpha |u_\nu| (v_\nu - \mu |v_\tau - v^*|) \, da. \quad (3.22)$$

D'après la formule de Green (2.1), on a

$$(\sigma, \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v - \dot{u}(t))_H = \int_{\Gamma} \sigma_\nu (v - \dot{u}(t)) \, da \quad (3.23)$$

et d'après (3.3) on a :  $Div \sigma = -f_0$ .

d'une part on a

$$\int_{\Gamma} \sigma_{\nu}(v - \dot{u}(t)) \, da = \int_{\Gamma_1} \sigma_{\nu}(v - \dot{u}(t)) \, da + \int_{\Gamma_2} \sigma_{\nu}(v - \dot{u}(t)) \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(v - \dot{u}(t)) \, da.$$

D'après (3.5) et (2.6) on a

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_1} \sigma_{\nu}(v - \dot{u}(t)) \, da = 0. \\ \int_{\Gamma_2} \sigma_{\nu}(v - \dot{u}(t)) \, da = \int_{\Gamma_2} h(v - \dot{u}(t)) \, da \end{cases}$$

De plus

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(v - \dot{u}(t)) \, da &= \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}(t)) \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau}(v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}(t)) \, da. \\ \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau}(v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}(t)) \, da &= \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau}(v_{\tau} - v^*) \, da - \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau}(\dot{u}_{\tau} - v^*) \, da. \end{aligned}$$

On a :  $|\sigma_{\tau}| = -\mu\sigma_{\nu}$ .

Mais d'après (3.7), on a

$$\sigma_{\nu} = -\alpha |\dot{u}_{\nu}| \leq 0,$$

et

$$\begin{aligned} |\sigma_{\tau}| = -\mu\sigma_{\nu} &\implies \sigma_{\tau} = \begin{cases} -\mu\sigma_{\nu} & \text{si } \sigma_{\tau} \geq 0 \\ \mu\sigma_{\nu} & \text{si } \sigma_{\tau} \leq 0 \end{cases} \\ \implies |\sigma_{\tau}| = -\mu\alpha |\dot{u}_{\nu}| &= \begin{cases} \alpha\mu |\dot{u}_{\nu}| & \text{si } \sigma_{\tau} \geq 0 \\ -\alpha\mu |\dot{u}_{\nu}| & \text{si } \sigma_{\tau} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Et, on a

$$\sigma_{\tau} = -\lambda(\dot{u}_{\tau} - v^*), \lambda \geq 0 \quad \text{alors } \sigma_{\tau} \text{ et } (\dot{u}_{\tau} - v^*) \quad \text{ont des signes opposés.}$$

Mais  $\dot{u}_{\tau} \leq v^*$  alors  $\sigma_{\tau} \geq 0$ , d'où

$$\sigma_{\tau}(\dot{u}_{\tau} - v^*) = -\alpha\mu |\dot{u}_{\nu}| (\dot{u}_{\tau} - v^*).$$

Alors :

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau}(v_{\tau} - v^*) \, da - \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau}(\dot{u}_{\tau} - v^*) \, da \leq \int_{\Gamma_3} \alpha\mu |\dot{u}_{\nu}| (v_{\tau} - v^*) \, da - \int_{\Gamma_3} \alpha\mu |\dot{u}_{\nu}| (\dot{u}_{\tau} - v^*) \, da.$$

Ce qui donne

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) da = - \int_{\Gamma_3} \alpha |\dot{u}_\nu| (v_\nu - \dot{u}_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) da.$$

D'où

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_3} \alpha |\dot{u}_\nu| (v_\nu - \dot{u}_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau (v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) da &\leq - \int_{\Gamma_3} \alpha |\dot{u}_\nu| (v_\nu - \dot{u}_\nu) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \alpha \mu |\dot{u}_\nu| [(v_\tau - v^*) - (\dot{u}_\tau - v^*)] da, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\Gamma_3} \alpha |\dot{u}_\nu| [\dot{u}_\nu - \mu(\dot{u}_\tau - v^*)] da - \int_{\Gamma_3} \alpha |\dot{u}_\nu| [v_\nu - \mu(v_\tau - v^*)] da. \\ &\leq j(\dot{u}, \dot{u}) - j(\dot{u}, v). \end{aligned}$$

Donc (3.13) devient

$$(\sigma(t), \varepsilon(w - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \geq \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - \dot{u}(t)) dx + \int_{\Gamma_2} h(v - \dot{u}(t)) da + j(\dot{u}, \dot{u}) - j(\dot{u}, v).$$

D'après (3.9), on trouve

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq \int_{\Omega} f(t) \cdot (v - \dot{u}(t)) dx.$$

$$\iff (\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad (3.24)$$

D'après (3.1)

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), (\varepsilon(u(s)))) ds - \xi^* E(\varphi) \quad \text{sur } \Omega \times [0, T],$$

Devient

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))), \varepsilon(\omega - \dot{u}(t))) + (\mathcal{B}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(\omega - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \\
 & + \left( \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), (\varepsilon(u(s)))) \, ds - \xi^* E(\varphi), \varepsilon(\omega - \dot{u}(t)) \right)_{\mathcal{H}} \\
 & + j(\dot{u}, \omega) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (f(t), \omega - \dot{u}(t))_V
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

D'après la formule de Green (2.7), on a

$$(D, \nabla \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D\nu \cdot \varphi \, da, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{3.26}$$

On a

$$\int_{\Gamma} D\nu \cdot \varphi \, da = \int_{\Gamma_a} D\nu \cdot \varphi \, da + \int_{\Gamma_b} D\nu \cdot \varphi \, da.$$

D'après (3.8) et (3.9), on a

$$\int_{\Gamma} D\nu \cdot \varphi \, da = \int_{\Gamma_b} q_2 \cdot \varphi \, da,$$

D'après (3.4), (3.26) devient

$$(D, \nabla \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (q_0, \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_{\Gamma_b} q_2 \cdot \varphi \, da, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

On utilise (3.20), on trouve

$$(D(t), \nabla \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (q(t), \varphi)_W = 0 \quad \forall \varphi \in W.$$

D'après (3.2)

$$\begin{aligned}
 D &= \beta E(\varphi) + \xi \varepsilon(u) \quad \text{sur } \Omega \times [0, T] \\
 \Rightarrow \quad &(\beta E(\varphi) + \xi \varepsilon(u), \nabla \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} = -(q(t), \varphi)_W, \quad \forall \varphi \in W. \\
 \Rightarrow \quad &(\beta \nabla \varphi(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} - (\xi \varepsilon(u(t)), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \quad \forall \varphi \in W. \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

D'après les relations (3.25) et (3.27), on trouve la formulation variationnelle suivante

**Problème  $\mathcal{PV}$**  : Trouver un champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , un champ potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , un champ des déplacements électriques  $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et l'usure  $\omega : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  tels que

$$\begin{aligned}
 &(\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))), \varepsilon(w - \dot{u}(t))) + (\mathcal{B}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(w - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, w) - j(\dot{u}, \dot{u}) \\
 &+ \left( \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), (\varepsilon(u(s)))) \, ds - \xi^* E(\varphi), \varepsilon(w - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \geq (f(t), w - \dot{u}(t))_V \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

$$(\beta \nabla \varphi(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} - (\xi \varepsilon(u(t)), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \quad \forall \varphi \in W. \quad (3.29)$$

$$\dot{\omega} = -k v^* \sigma_\nu, \quad k > 0. \quad (3.30)$$

Notre résultat principal d'existence et d'unicité est présenté dans la section suivante.

### 3.3 Existence et unicité de la solution

L'existence d'une solution unique du problème variationnel  $\mathcal{PV}$  est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 3.3.1.** *Supposons que (3.11) - (3.18) sont vérifiées. Alors, le problème  $\mathcal{PV}$  possède une solution unique  $(u, \varphi, \omega)$ . En outre, la solution satisfait*

$$u \in W^{1,2}(0, T; U). \quad (3.31)$$

$$\varphi \in W^{1,2}(0, T; W). \quad (3.32)$$

$$\omega \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3)). \quad (3.33)$$

**Remarque 3.3.1.** Un "quintuplet" des fonctions  $(u, \sigma, \varphi, D, \omega)$  qui satisfont (3.1), (3.2), (3.3), (3.28)–(3.30) est appelé solution faible du problème de contact  $\mathcal{PV}$ . Nous concluons par le théorème (3.3.1) que, sous les hypothèses (3.11) – (3.18) il existe une unique solution faible du problème  $\mathcal{PV}$ . Pour préciser la régularité de la solution faible, notons que les relations constitutives (3.1) et (3.2) les hypothèses (3.11) – (3.18) et la régularité (3.30) et (3.31) montrent que  $\sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H})$  et  $D \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$ ; de plus, en utilisant (3.1) et (3.2), il s'ensuit que (3.28) et (3.29) sont vérifiées pour tout  $w \in V$ ,  $\varphi \in W$  et  $t \in [0, T]$ . Nous prenons  $w = \dot{u}(t) \pm z \in C_0^\infty(\Omega)^d$  dans (3.28) et  $\varphi \in C_0^\infty$  dans (3.29), on trouve

$$\operatorname{Div} \sigma(t) + f_0(t) = 0, \quad \operatorname{div} D(t) = q_0(t), \quad p.p \text{ dans } \Omega, \quad \forall t \in [0, T],$$

il s'ensuit maintenant des régularités (3.17) que  $\operatorname{Div} \sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)^d)$  et  $\operatorname{div} D \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$ , ce qui montre que

$$\sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1), \tag{3.34}$$

$$D \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{W}). \tag{3.35}$$

Nous concluons que la solution faible  $(u, \sigma, \varphi, D, \omega)$  du problème de contact piézoélectrique  $\mathcal{P}$  possède la régularité (3.31) – (3.35)

### Démonstration du théorème 3.3.1.

Notre objectif principal dans ce paragraphe est d'établir la démonstration du théorème d'existence et d'unicité pour le problème variationnel  $\mathcal{PV}$ . Pour ceci, nous supposons dans ce qui suit que (3.11) – (3.18) sont satisfaites, partout ci-dessous, nous dénotons par  $C$  une constante positive indépendante du temps et dont sa valeur peut changer d'une ligne à l'autre. La démonstration se fait en plusieurs étapes. Elle est basée sur les arguments des inéquation d'évolution non linéaires de premier ordre et des arguments de point fixe, voir par exemple [1, 3].

Dans le premier étape, pour  $g \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$ , on considère le problème intermédiaire suivant

**Problème  $\mathcal{P}V^g$**  : Trouver un champ de déplacement  $u_g : \Omega \times [0, T] \rightarrow U$ , tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_g(t) \in U, (\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_g(t))), \varepsilon(w - \dot{u}_g(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u_g(t)), \varepsilon(w - \dot{u}_g(t)))_{\mathcal{H}} + j(g, w) - j(g, \dot{u}_g) \\ + (\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_g(s))), \varepsilon(u_g(s))) ds - \xi^* E(\varphi), \varepsilon(w - \dot{u}_g(t)))_{\mathcal{H}} \geq (f(t), w - \dot{u}_g(t))_V \\ \forall w(t) \in V, \end{array} \right. \quad (3.36)$$

$$u_g(0) = u_0. \quad (3.37)$$

Dans le deuxième étape, pour  $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$  on considère le problème intermédiaire suivant

**Problème  $\mathcal{P}V^{g\eta}$**  : Trouver un champ de déplacement  $u_{g\eta} : \Omega \times [0, T] \rightarrow U$ , tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{g\eta}(t) \in U, (\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_{g\eta}(t))), \varepsilon(w - \dot{u}_{g\eta}(t)))_{\mathcal{H}} + j(g, w) - j(g, \dot{u}_{g\eta}) \\ \geq (f(t), w - \dot{u}_{g\eta}(t))_V - (\eta, \varepsilon(w - \dot{u}_{g\eta}(t)))_{\mathcal{H}} \quad \forall w(t) \in V, \end{array} \right. \quad (3.38)$$

$$u_{g\eta}(0) = u_0. \quad (3.39)$$

Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir les opérateurs  $A : V \rightarrow V'$  et la fonction  $f_\eta : [0, T] \rightarrow V'$  par les égalités

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (3.40)$$

$$(f_\eta, v)_{V' \times V} = (f(t) - \eta(t), v)_{V' \times V}, \quad \forall v \in V, \quad (3.41)$$

D'après l'hypothèse (3.21), on a

$$f_\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V').$$

On pose maintenant  $u_{g\eta} : [0, T] \rightarrow U$  une fonction définie par

$$u_{g\eta}(t) = \int_0^t v_{g\eta}(s) + u_0 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.42)$$

D'après (3.38) - (3.42), on obtient le problème suivant

**Problème**  $QV^{g\eta}$  : Trouver un champ de déplacement  $v_{g\eta} : \Omega \times [0, T] \rightarrow U$ , tel que

$$(Av_{g\eta}(t), (w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} + j(g, w) - j(g, v_{g\eta}(t))) \geq (f_\eta(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V}, \quad (3.43)$$

$$\forall w(t) \in V, \eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$$

Dans l'étude du problème variationnel  $QV^{g\eta}$ , nous avons le résultat suivant

**Lemme 3.3.1.** *Pour tout  $g \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$  et  $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$ ,  $QV^{g\eta}$  admet une solution unique de régularité*

$$v_{g\eta} \in \mathbb{L}^2(0, T; U), \quad (3.44)$$

pour tout  $v, w \in V$  et  $t \in [0, T]$ . Nous appliquons le théorème (2.4.1). Nous utilisons (3.11) et (3.20) pour avoir que  $A$  est fortement monotone et de Lipschitz et satisfait

$$(Av_1(t) - Av_2(t), v_1 - v_2)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2)|_{\mathcal{H}}^2$$

$$(Av_1(t) - Av_2(t), v_1 - v_2)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon(v_1 - v_2)|_{\mathcal{H}}^2$$

on utilise (2.3), on trouve

$$(Av_1(t) - Av_2(t), v_1 - v_2)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |v_1 - v_2|_V^2. \quad (3.45)$$

Alors l'opérateur  $A$  est fortement monotone.

Nous utilisons (3.11), (2.3) et Cauchy Schwartz, nous obtenons

$$(Av_1(t) - Av_2(t), w)_{V' \times V} \leq |Av_1(t) - Av_2(t)| |w| = |\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2)|_{\mathcal{H}} |w|_V \leq M_{\mathcal{A}} |\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2)|_{\mathcal{H}} |w|_V$$

$$\iff |\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2)|_{\mathcal{H}} |w|_V \leq M_{\mathcal{A}} |v_1 - v_2|_V |w|_V$$

ce qui donne

$$|\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2)|_{\mathcal{H}} \leq M_{\mathcal{A}}|v_1 - v_2|_V$$

alors

$$|Av_1(t) - Av_2(t)|_{V'} \leq M_{\mathbf{A}}|v_1 - v_2|_V. \quad (3.46)$$

Donc,  $A$  est de Lipschitz

Il est facile de montrer que  $j(g, \cdot)$  est convexe semi continue inférieurement et propre. Donc, d'après le théorème (2.4.1). Le problème  $QV^{g\eta}$  admet une solution unique de régularité  $v_{g\eta} \in \mathbb{L}^2(0, T; U)$ ,

On utilise le résultat suivant

**Lemme 3.3.2.** *Le problème  $PV^{g\eta}$  possède une solution unique  $u_{g\eta} \in W^{1,2}(0, T; U)$ .*

**Preuve.** La preuve du lemme (3.3.2) est une conséquence du lemme (3.3.1) et la relation (3.42)

Dans l'étape suivante nous utilisons la solution  $u_{g\eta} \in W^{1,2}(0, T; U)$  obtenue dans le lemme (3.3.2) pour construire le problème variationnel suivant

**Problème  $P^{\varphi_{g\eta}}$**  : Trouver un champ potentiel électrique  $\varphi_{g\eta} : \Omega \times [0, T] \rightarrow W$  tels que

$$(\beta \nabla \varphi_{g\eta}(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} - (\xi \varepsilon(u_{g\eta}(t)), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, \quad t \in [0, T]. \quad (3.47)$$

**Lemme 3.3.3.** *Il existe une solution unique  $\varphi_{g\eta} \in W^{1,2}(0, T; W)$  qui satisfait (3.47). De plus, si  $\varphi_{g\eta_1}$  et  $\varphi_{g\eta_2}$  sont deux solution de (3.47). Alors, il existe une constante  $C > 0$  tel que*

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq C|u_1(t) - u_2(t)|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.48)$$

**Preuve.** Soit  $t \in [0, T]$ . Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur  $A_{g\eta} : W \rightarrow W$  par

$$(A_{g\eta}(t)\varphi, \psi)_W = (\beta \nabla_{\varphi_{g\eta}}(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} - (\xi \varepsilon(u_{g\eta}(t)), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.49)$$

pour tout  $\varphi, \psi \in W$ . Soit  $\varphi_1, \varphi_2 \in W$ ; nous utilisons (3.15) on trouve

$$(A_{g\eta}(t)\varphi_1 - A_{g\eta}(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 + c_\xi |u_1 - u_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W$$

Donc

$$(A_{g\eta}(t)\varphi_1 - A_{g\eta}(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \quad (3.50)$$

alors l'opérateur  $A_{g\eta}(t)$  est fortement monotone.

D'après Cauchy Schwartz, on a

$$|(A_{g\eta}(t)\varphi_1 - A_{g\eta}(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W| \leq M_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 - c_\xi |u_1 - u_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W$$

mais

$$|(A_{g\eta}(t)\varphi_1 - A_{g\eta}(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W| \leq M_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2$$

d'où

$$|(A_{g\eta}(t)\varphi_1 - A_{g\eta}(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W| \leq M_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W \quad (3.51)$$

alors l'opérateur  $A_{g\eta}(t)$  est Lipschitz

Les inégalités (3.50) et (3.51) montrent que l'opérateur  $A_{g\eta}(t)$  fortement monotone et de Lipschitz, donc nous utilisons un résultat standard sur les égalités variationnelles, il s'ensuit qu'il existe un unique élément  $\varphi_{g\eta} \in W$  tel que

$$A_{g\eta}\varphi_{g\eta}(t) = q(t) \quad (3.52)$$

Nous combinons maintenant (3.49) et (3.52) pour déduire que  $\varphi_{g\eta} \in W$  est l'unique solution de l'équation variationnelle (3.47).

Nous prouvons maintenant que  $\varphi_{g\eta} \in W^{1,2}(0, T; W)$ . Pour ceci, nous considérons  $t_1, t_2 \in [0, T]$  et pour des raisons de simplicité, nous écrivons  $\varphi_{g\eta}(t_i) = \varphi_i$ ,  $u_{g\eta}(t_i) = u_i$ ,  $q(t_i) = q_i$ , pour  $i = 1, 2$ . Moyennant (3.47), (3.14) et (3.15) ainsi que Cauchy Schwartz nous trouvons

$$\begin{cases} (\beta\varphi_1 - \beta\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} \geq m_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \\ (\xi\varepsilon(u_1 - u_2), \varphi_1 - \varphi_2)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (q_1 - q_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \leq c_\xi |u_1 - u_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W \\ + |q_1 - q_2|_W |\varphi_1 - \varphi_2|_W \end{cases}$$

donc

$$m_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \leq c_\xi |u_1 - u_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W |\varphi_1 - \varphi_2|_W \quad (3.53)$$

Alors, nous avons

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \leq C (|u_1(t) - u_2(t)|_V + |q_1(t) - q_2(t)|_W), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.54)$$

La relation (3.21) implique que  $q \in \mathbb{L}^2(0, T; W)$ , nous avons  $u_{g\eta} \in W^{1,2}(0, T; U)$  donc l'inégalité (3.54) implique que  $\varphi_{g\eta} \in W^{1,2}(0, T; W)$ .

En utilisant (3.47) et moyennant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.52) on déduit que

$$m_\beta |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c_\xi |u_1(t) - u_2(t)|_V + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.55)$$

Alors nous avons le résultat du lemme (3.3.3).

considérons maintenant l'opérateur

$$\begin{aligned}
 \Lambda &: \mathbb{L}^2(0, T; V \times V') \longrightarrow \mathbb{L}^2(0, T; V \times V') \text{ défini par} \\
 \Lambda(g, \eta) &= (\Lambda_1(g), \Lambda_2(\eta)), \forall g \in \mathbb{L}^2(0, T; V), \forall \eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V'), \\
 \Lambda_1(g) &= v_{g\eta} \\
 (\Lambda_2(t), \xi)_{V' \times V} &= (\mathcal{B}(\varepsilon(u_{g\varphi\eta}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{g\eta}(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(v_{g\eta}(s))), \varepsilon(u_{g\eta}(s)))ds - \xi^* E(\varphi_{g\eta}), \xi)_{V' \times V} \\
 |\Lambda(g_1, \eta_1) - \Lambda(g_2, \eta_2)|^2 &= |(\Lambda_1(g_1), \Lambda_2(\eta_1)) - (\Lambda_1(g_2), \Lambda_2(\eta_2))|^2, \\
 &= |\Lambda_1(g_1) - \Lambda_1(g_2)|^2 + |\Lambda_2(\eta_1) - \Lambda_2(\eta_2)|^2.
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Dans la dernière étape, nous montrons que l'opérateur  $\Lambda$  possède un point fixe unique

**Lemme 3.3.4.** *Il existe un unique élément  $(g^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; V \times V')$  tel que*

$$\Lambda(g^*, \eta^*) = (g^*, \eta^*). \tag{3.57}$$

**Preuve.** Soient  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$ ,  $g_1, g_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$  et par simplicité, nous utilisons les notation  $u_i$  et  $\varphi_i$  pour les fonctions  $u_{g\eta_i}$  et  $\varphi_{g\eta_i}$  obtenues dans les lemmes (3.3.2) et (3.3.3) pour  $i = 1, 2$ . Soit  $t \in [0, T]$ . On a

$$\Lambda_1(g) = v_{g\eta}$$

Ce qui donne

$$|g_1(t) - g_2(t)| \leq |v_1 - v_2|_V,$$

à partir de (3.38) on a

$$\begin{aligned}
 &(\mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t))) + (\eta_1(t) - \eta_2(t), v_1(t) - v_2(t)) \\
 &+ j(g_1, v_1(t)) - j(g_1, v_2(t)) - j(g_2, v_1(t)) + j(g_2, v_2(t)) \leq 0,
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

et, on a

$$\begin{aligned}
 & j(g_1, v_2(t)) - j(g_1, v_1(t)) - j(g_2, v_2(t)) + j(g_2, v_1(t)) = \\
 & \int_{\Gamma_3} \alpha |g_{1\nu}| (v_{2\nu} - \mu |v_{2\tau} - v^*|) da - \int_{\Gamma_3} \alpha |g_{1\nu}| (v_{1\nu} - \mu |v_{1\tau} - v^*|) da - \\
 & \int_{\Gamma_3} \alpha |g_{2\nu}| (v_{2\nu} - \mu |v_{2\tau} - v^*|) da - \int_{\Gamma_3} \alpha |g_{2\nu}| (v_{1\nu} - \mu |v_{1\tau} - v^*|) da.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

De (2.4) et (3.16), on trouve

$$j(g_1, v_2(t)) - j(g_1, v_1(t)) - j(g_2, v_2(t)) + j(g_2, v_1(t)) \leq C |g_1 - g_2|_V |v_1 - v_2|_V \tag{3.60}$$

Donc (3.58) devient

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t))) + (\eta_1(t) - \eta_2(t), v_1(t) - v_2(t)) \\
 & \leq C |g_1 - g_2|_V |v_1 - v_2|_V
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

et en utilisant les relation (2.3),(3.11) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on trouve

$$\begin{aligned}
 & m_{\mathcal{A}} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'} |v_1(t) - v_2(t)|_V \\
 & + C |g_1(t) - g_2(t)|_V |v_1(t) - v_2(t)|_V,
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . De plus d'après l'inéquation  $2ab \leq \frac{2C}{m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2C} b^2$  et  $2ab \leq \frac{2}{m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} b^2$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 & m_{\mathcal{A}} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{4} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \\
 & + \frac{C}{m_{\mathcal{A}}} |g_1(t) - g_2(t)|_V^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{4} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

On trouve

$$|v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq C \left( |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 + |g_1(t) - g_2(t)|_V^2 \right). \tag{3.64}$$

D'une part , on a

$$(\Lambda_2(\eta), \xi)_{V' \times V} = \left( \mathcal{B}(\varepsilon(u(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(v(s))), \varepsilon(u(s))) ds - \xi^* E(\varphi), \xi \right)_{V' \times V} \quad \forall \xi \in V.$$

à partir de (3.11)-(3.13)

$$|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 \leq C \left( |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 ds + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \right), \quad (3.65)$$

Sachant que

$$\sigma_i(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(v_i(t))) + \eta_i(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.66)$$

et en utilisant les relations (3.11), on obtient

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C \left( |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \right).$$

Donc

$$|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 \leq C \left( |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \right), \quad (3.67)$$

en utilisons (3.48), on trouve

$$|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 \leq C \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \right), \quad (3.68)$$

Par intégration de (3.61), et en utilisant les relations (2.3), (3.11) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on trouve

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds &\leq \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'} |v_1(s) - v_2(s)|_V ds \\ &+ C \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V |v_1(s) - v_2(s)|_V ds, \end{aligned} \quad (3.69)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . De plus, d'après l'inéquation  $2ab \leq \frac{2C}{m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2C} b^2$  et  $2ab \leq \frac{2}{m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} b^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds &\leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \frac{m_{\mathcal{A}}}{4} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \\ &+ \frac{C}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds + \frac{m_{\mathcal{A}}}{4} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \end{aligned} \quad (3.70)$$

On trouve

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq C \left( \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds \right). \quad (3.71)$$

On a

$$u_i(t) = u_0 + \int_0^t v_i(s) ds,$$

nous obtenons

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V ds, \quad (3.72)$$

On applique cette inégalité dans (3.71), on trouve

$$|u_1 - u_2|_V^2 \leq C \left( \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds \right). \quad (3.73)$$

De (3.68)

$$|\eta_1 - \eta_2|_{V'}^2 \leq C \left( \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds \right). \quad (3.74)$$

On remplace (3.74) et (3.64) dans (3.56), on trouve

$$\begin{aligned} |\Lambda(g_1, \eta_1) - \Lambda(g_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0,T;V \times V')}^2 &\leq C (|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 + |g_1(t) - g_2(t)|_V^2) \\ &+ C \left( \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds \right), \end{aligned} \quad (3.75)$$

on pose  $N = C$  et  $M = C$  alors

$$\begin{aligned} |\Lambda(g_1, \eta_1) - \Lambda(g_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0,T;V \times V')}^2 &\leq N (|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 + |g_1(t) - g_2(t)|_V^2) \\ &+ M \left( \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds \right). \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ , par récurrence, avec  $\Lambda^p$  la composée  $p^{\text{ième}}$  de l'opérateur  $\Lambda$ , on a on pose

$$\begin{cases} I_0(t) = |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 + |g_1(t) - g_2(t)|_V^2 \\ I_1(t) = \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds \\ I_3(t) = \int_0^t \int_0^{s_1} (|\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 + \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2) dr ds_1 \\ I_j(t) = \int_0^t \int_0^{s_{j-1}} \dots \int_0^{s_1} (|\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 + \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2) dr ds_1 \dots ds_{j-1}, \forall j \geq 2. \end{cases}$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ , on note  $p$  la puissance de l'opérateur  $\Lambda$  alors (3.75) implique

$$|\Lambda^p(g_1, \eta_1) - \Lambda^p(g_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0,T;V \times V')}^2 \leq \left( \sum_{j=0}^p C_p^j N^{p-j} \frac{M^j T^j}{j!} \right) |(g_1, \eta_1) - (g_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0,T;V \times V')}^2. \quad (3.76)$$

Et par conséquent (3.76) implique, pour tout  $t \in [0, T]$  et  $p \in \mathbb{N}$ , que

$$|\Lambda^p(g_1, \eta_1) - \Lambda^p(g_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')}^2 \leq \frac{(N_p + MT)^p}{p!} |(g_1, \eta_1) - (g_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')}^2 \quad (3.77)$$

Supposons que  $C < \frac{1}{e}$ , il s'en suit d'après le critère de d'Alembert que la série  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(N_p + MT)^j}{j!}$  est convergente, d'où il résulte que le terme général  $\frac{(N_p + MT)^p}{p!}$  tend vers 0, lorsque  $p \rightarrow \infty$ , voir par exemple [8].

Ce qui implique pour  $p$  suffisamment grand que l'application  $\Lambda^p$  est une contraction dans l'espace de Banach  $\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')$ . Alors, il existe un unique  $(g^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; V \times V')$  tel que  $\Lambda^p(g^*, \eta^*) = (g^*, \eta^*)$  et de plus  $(g^*, \eta^*)$  est l'unique point fixe de  $\Lambda$ , tel que

$$\Lambda(g^*, \eta^*) = (g^*, \eta^*). \quad (3.78)$$

Soit l'opérateur  $\mathcal{L} : C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$ , défini par

$$\mathcal{L}\omega(t) = -kv^* \int_0^t \sigma_\nu(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.79)$$

**Lemme 3.3.5.** *L'opérateur  $\mathcal{L} : C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$  possède un point fixe unique  $\omega^* \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$ , tel que*

$$\mathcal{L}\omega^* = \omega^*.$$

**Preuve :** Soient  $\omega_1, \omega_2 \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$ , on dénote par  $(u_i, \sigma_i, \varphi_i, D_i)$   $i = 1, 2$ . les solutions associées de problème  $PV$  alors

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}\omega_1(t) - \mathcal{L}\omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 &\leq kv^* \int_0^t |\sigma_{1\nu}(s) - \sigma_{2\nu}(s)|^2 ds, \\ &\leq kv^* \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|^2 ds, \end{aligned} \quad (3.80)$$

A partir de (3.1) et en utilisant les relations (3.11)-(3.13), on obtient

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + \int_0^t (|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 + |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 + |u_1(s) - u_2(s)|_V^2) ds + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2) \quad (3.81)$$

On utilise (3.48), on trouve

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + \int_0^t (|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 + |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 + |u_1(s) - u_2(s)|_V^2) ds). \quad (3.82)$$

D'après Gronwall, et la relation (3.72), on trouve

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C\left(\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2\right) \quad (3.83)$$

On a

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \quad (3.84)$$

A partir de (3.84), on a

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds.$$

Donc

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq C \left( \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + |\omega_1(t) - \omega_1(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 \right) \quad (3.85)$$

D'après Gronwall, on a

$$\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq C|\omega_1(t) - \omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2$$

Donc, (3.83) devient

$$\int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 ds \leq C \int_0^t |\omega_1(s) - \omega_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (3.86)$$

Donc, (3.80) devient

$$|\mathcal{L}\omega_1(t) - \mathcal{L}\omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t |\omega_1(s) - \omega_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 ds.$$

Par récurrence, avec  $\mathcal{L}^p$  la composée  $p^{\text{ième}}$  de l'opérateur  $\mathcal{L}$ , on a

$$|\mathcal{L}^p\omega_1(t) - \mathcal{L}^p\omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \frac{(Ct)^p}{p!} |\omega_1(t) - \omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2$$

On sait que  $\left(\frac{(Ct)^p}{p!}\right)$  converge vers 0, donc pour  $p$  assez grand  $\frac{(Ct)^p}{p!} < 1$ . C'est-à-dire que l'opérateur  $\mathcal{L}^p$  est une contraction sur l'espace de Banach  $C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$ . Alors, il existe un unique  $\omega^* \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$  tel que

$$\mathcal{L}\omega^* = \omega^*.$$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du théorème (3.3.1)

**Existence.** Soient  $(g^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; V \times V')$ ,  $\omega^* \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$  les points fixes et

soit  $(u^*, \varphi^*)$  la solution de  $PV^{g\eta}, P\varphi^{g\eta}$  pour  $(g, \eta) = (g^*, \eta^*)$  pour  $u^* = u_{g^*\eta^*}$ ,  $\varphi^* = \varphi_{g^*\eta^*}$  et  $\omega^* = \omega$ . Nous concluons par (3.28) et (3.30) que  $(u^*, \varphi^*, \omega^*)$  possède la régularité donnée par (3.1) et (3.3)

**Unicité :** L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  et l'opérateur  $\mathcal{L}$  définis respectivement par (3.56), (3.79) et l'unicité de la solution des problèmes  $PV^{g\eta}$  et  $P\varphi^{g\eta}$  ce qui achève la démonstration.

Nous avons présenté dans ce mémoire un modèle pour le processus quasistatique en mécanique de contact entre un corps électro-élasto-viscoplastique et une fondation. Le contact est bilatérale et avec frottement, usure et une condition électrique régularisée. Le problème a été mis comme un système couplé en terme des champs de déplacement et du potentiel électrique. L'existence de la solution faible unique pour le problème a été établi en utilisant des arguments de la théorie des égalités variationnelles évolutionnaires, la théorie des opérateurs frottement monotones et de Lipschitz et celle de point fixe.

Les résultats présenté dans ce travail nous laissent entrevoir plusieurs pistes de recherche. De nombreuse questions peuvent être posées. Tout d'abord au sujet du modèle considéré et des résultats obtenus.

Peut-on étendre ces résultats à des situations plus générales? Si, l'existence globale des solutions fortes des EDP, l'amélioration de ces résultats restent toujours possible et peuvent être des problèmes ouverts et très importants à aborder.

- [1] C. Anca, Inéquation variationnelles et problèmes de contact avec frottement, Preprint nr.10/2011.
- [2] A. Azeb Ahmed, S.Boutechebak, Analysis of a dynamic electro-elasto-viscoplastic contact problem, Wulfenia Journal Klagenfurt Austria, Vol20, No. 3 ; pp. 43-63 ; Mars 2013.
- [3] A. Bachmar, T.Serrar, Analysis of electro-visco-elastic contact problem with friction, J . Comuter Sci. 16(2016), 529-540.
- [4] M. Barboteu, J.R. Fernandez, Y. Ouafik, Numerical analysis of a frictionless visco-elastic piezoelectric contact problem, M2AN Math. Model. Numer. Anal. (in press).
- [5] R.C. Batra, J.S. Yang, Saint Venant's principle in linear piezoelectricity, Journal of Elasticity, 38(1995), 209-218.
- [6] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris(1983).
- [7] L.Chouchane, Etude variationnelle de quelques problèmes en elasto-visco-plasticité, Thèse de doctorat, Université de Sétif, (2008).
- [8] Z. Lerguet, M.Sofonea, S.Drabla, Analysis of a friction contact problem with adhesion, Accepté dans Acta Mathematica Universitatis Comenianae.
- [9] J. Necas, I. Hlavacek, Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [10] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, Models and Analysis of Quasistatic Contact, Lecture Notes in PPhysics 655, Springer, Berlin, (2004).
- [11] M. Sofonea, E.H. Essoufi, Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body, Adv. Math. Sci. Appl.14 (1)(2004) 25-40.
- [12] N. Stromberg, L. Johansson, A. Klarbing, Dervation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear, Int.J.Solids Structure, 33(1996), 1817-1836.