

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire

Présentée par :

AGDOUCHE Fouzia
BENRAI Feriel

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Des Mathématiques appliquées.

Spécialité : Méthodes et outils pour la recherche Opérationnelle.

Thème :

Étude théorique et numérique d'un algorithme de point intérieur de type correcteur-prédicteur pour la programmation linéaire.

Soutenu publiquement le **30 juin 2022** devant le jury composé de

M.Ramdani Zoubir	M.A.A.	Président
Mme.Guerra Loubna	M.C.B.	Encadrant
M.Touati Hillal	M.A.A.	Examineur

Promotion 2021/2022



Remerciements

*A*vant tout on remercie "**Allah**" tout puissant pour la volonté, la patience que nous a données d'accomplir ce travail.

*U*n grand remerciement à notre encadreur "**Dr. GUERRA Loubna**"; maître de conférence classe B; à l'université Mohamed El-Bachir-El-Ibrahimi, Bordj Bou Arréridj; pour avoir accepté de diriger ce mémoire, et pour les conseils fructueux et sa disposition, l'encouragement et l'orientations qu'elle nous a attribuées.

*N*ous remercions les membres du jury pour leur présence, pour leur lecture attentive de ce mémoire, ainsi que pour les remarques qu'ils m'adresseront lors de cette soutenance afin d'améliorer mon travail.

*N*ous remercions tous les enseignants de la faculté des mathématiques et de l'informatique de l'université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et de ma connaissance

A mes frères, mes grands-parents et ma famille qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

A tous ceux qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

Merci!

ABDOULKE FOUZIA 

Dédicace

Je dédie ce modeste travail...

À le plus cher père du monde 'Lakhmissi'.

À la plus tendre du monde, ma mère 'Fadila'.

*Pour leur soutien moral, leur encouragement tout a long
de mes études.*

*Qu'Allah leur présente une bonne santé et une longue
vie.*

*Sans oublier la personne qui a en beaucoup de mérite
dans ce travail avec sont financier et moral merci
beaucoup 'GHARNOUI Abd Errezak'.*

*A tous mes frères 'Achref' et 'Adem' et ma chère sœur
'Imen'.*

A ma chère binôme 'Fouzia' pour montre longue amitié.

A mes belles amies 'Imen' et 'Merbouha'.

Merci!

BENROUJ Feriel 

Table des matières

Introduction	7
1 Rappels sur l'analyse convexe et la programmation mathématique	11
1.1 Préliminaires :	11
1.1.1 Produit scalaire et norme	11
1.2 Eléments d'analyse convexe	12
1.2.1 Ensemble et fonction convexe	12
1.2.2 Ensemble et application affine :	16
1.3 Programmation mathématique	17
1.3.1 Notions de base	17
1.3.2 Classification d'un programme mathématique	18
1.3.3 Qualification des contraintes	19
1.3.4 Existence et unicité d'une solution optimal d'une programme ma- thématique	19
1.3.5 Conditions d'optimalités	20
1.4 Méthode de Newton	21
2 Algorithme de point intérieur de type prédicteur - correcteur pour la pro- grammation linéaire	22
2.1 Programmation linéaire	22
2.1.1 définition du problème	22
2.2 Dualité en programmation linéaire	23
2.2.1 Dualité faible	23
2.2.2 Dualité forte	24
2.3 Formes d'un programme linéaire	24
2.3.1 Forme canonique	24
2.3.2 Forme standard	25
2.4 Modélisation de quelques problèmes linéaires	25
2.5 Méthode de trajectoire centrale	26
2.5.1 la trajectoire centrale	26
2.5.2 Nouvelle direction de recherche	27
2.5.3 La mesure de proximité	28
2.6 Algorithme correcteur-prédicteur	30
2.6.1 Description de l'algorithme	30
2.6.2 Algorithme	32
2.7 La convergence de l'algorithme et la analyse de la complexité	32
2.7.1 Analyse de la strictement faisabilité après la phase de correction	33
2.7.2 La convergence quadratique de la mesure de proximité	34
2.7.3 Analyse de la stricte faisabilité	37

2.7.4	La convergence quadratique de la mesure de la proximité après la phase de prédiction	38
2.7.5	L'influence du nouveau itéré en saut de dualité après la phase de prédiction	40
2.7.6	La mise à jour du paramètre barrière μ après la phase de prédiction	40
2.7.7	Analyse de la complexité	41
3	Implémentation numérique	42
3.1	Calcul des directions	42
3.1.1	La phase de correction	42
3.1.2	La phase de prédiction	44
3.2	Choix alternative du pas de déplacement	46
3.3	Tests numériques	46
	Conclusion	55
	Bibliographie	56

Table des figures

1.1	Ensembles convexe et non convexe.	13
1.2	Ensemble S_1 convexe.	13
1.3	Ensemble S_2 non convexe.	13
1.4	Réunion des parties convexe.	14
1.5	Fonction convexe- concave.	15
1.6	Ensemble affine(polyèdre).	16
1.7	Fonction affine.	17
1.8	Minimum local et globale.	18
1.9	Résolution graphique.	20
2.1	Un algorithme prédicteur-correcteur.	31

Introduction

La programmation linéaire (*PL*) est un domaine important, grâce à son utilisation dans différents domaines, et notamment : l'architecture, ingénierie électrique,...

avant, la résolution d'un programme linéaire qui consistait à utiliser la méthode classique du simplexe, qui est composé de deux phases dont la première consiste à trouver une solution de base réalisable de départ, et la deuxième est utilisée pour obtenir une solution optimale. Pour cela, on utilise les méthodes des points intérieurs qui ont été initialisées pour la première fois par **Karmakar** en 1984 [14]. Les méthodes de points intérieurs se distinguent en quatre types :

- **Méthodes affines.**
- **Méthodes projectives.**
- **Méthodes de réduction de potentiel.**
- **Méthodes de la trajectoire centrale.**

L'algorithme de trajectoire centrale (TC) de type primal-dual pour PL a été présenté pour la première fois par Roos et al en 1997 [22], ils utilisent les directions de Newton classiques pour obtenir le nouveau itéré et ils ont montré que cet algorithme a une complexité polynomiale. On note que l'algorithme de type correcteur-prédicteur pour la programmation linéaire a été présenté par [18, 23]. En 2003 [5], Darvay a introduit une transformation algébrique à l'équation de centralité $\psi(\frac{xz}{\mu}) = \psi(e)$ où $\psi(t) = \sqrt{t}$ pour obtenir une nouvelle direction de recherche.

En 2005, Darvay [6] a introduit l'algorithme correcteur-prédicteur pour PL qui est basé sur la même technique où $\psi(t) = \sqrt{t}$ avec le domaine $D = [0, +\infty]$ afin d'obtenir une nouvelle direction de recherche, il a montré que l'algorithme proposé a une complexité polynomiale. Le même auteur en 2016 [8] développe un algorithme de trajectoire centrale pour PL basé sur une nouvelle direction de recherche où la transformation algébrique équivalente est $\psi(t) = t - \sqrt{t}$. Pour $\theta = \frac{1}{27\sqrt{n}}$, ils ont montré théoriquement que la complexité de l'algorithme proposé est polynomiale mais numériquement est lente alors ils ont introduit un algorithme correcteur-prédicteur.

En effet, en 2020 Darvay et al [10] proposent un algorithme correcteur-prédicteur pour PL, ils ont utilisé la transformation algébrique $\psi(t) = t - \sqrt{t}$. Ils ont montré que l'algorithme associé a une complexité polynomiale avec $\theta = \frac{1}{5\sqrt{n}}$.

On s'intéresse à implémenter numériquement l'algorithme qui présente par Darvay selon le choix de θ théorique et un autre choix alternative pour voir l'influence de θ sur le comportement numérique. Ce mémoire est composé de trois chapitres :

- Dans le **premier chapitre**, on présente quelques définitions de produit scalaire, norme et l'analyse convexe ainsi que la programmation mathématique et la méthode de Newton qui est utilisée par la suite.
- Le **deuxième chapitre** est consacré à la définition des problèmes primal-dual de la programmation linéaire, on a étudié l'algorithme correcteur-prédicteur basé sur une

nouvelle direction de recherche pour résoudre le PL où $\psi(t) = t - \sqrt{t}$.

- Dans **le troisième chapitre**, on implémente numériquement des pas de déplacement θ de la phase de prédiction, et on présente les tests numériques appliqués sur quelques problèmes linéaire, avec la comparaison entre le choix théorique de θ et d'autres alternatives du pas de déplacement.

On terminera ce mémoire par une conclusion générale.

Notations

\mathbb{R}^n	:	L'espace des vecteurs réels de dimension n ,
\mathbb{R}_+^n	:	L'orthant positif de \mathbb{R}^n ,
$\mathbb{R}^{m \times n}$:	L'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(m \times n)$,
$\ \cdot\ $:	Norme euclidienne sur \mathbb{R}^n ,
$\text{rg}(A)$:	Le rang de la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,
A^t	:	Le transposé d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,
a_{ij}	:	Elément de la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,
x^t	:	Transposé d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$,
xz	=	$x_i z_i, \forall i$,
$\frac{x}{z}$	=	$\frac{x_i}{z_i}, \forall i; z_i \neq 0$,
x^2	=	$x_i^2, \forall i$,
x^{-1}	=	$\frac{1}{x_i} (x_i \neq 0, \forall i)$,
$x \geq 0 (x > 0)$	=	$x_i \geq 0 (x_i > 0), \forall i$,
$x \leq 0 (x < 0)$	=	$x_i \leq 0 (x_i < 0), \forall i$,
\sqrt{x}	=	$\sqrt{x_i} (x_i > 0, \forall i)$,
e	:	Un vecteur de \mathbb{R}^n tel que $e_i = 1, \forall i = 1, \dots, n$,
$\frac{1}{2}e$	=	$(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$,
$\Delta x, \Delta z$:	les directions de Newton,
$0_{m \times n}$:	La matrice zéro $(m \times n)$,
I_m	:	La matrice identité de taille $(m \times m)$,
$\min(x)$:	$\min(x_i), i = 1, \dots, n$,
$\text{diag}(x)$	=	X la matrice diagonale avec $X_{ii} = x_i$.

Terminologie

- PM** : Programmation mathématique,
- PL** : Programmation linéaire,
- (P)** : Le problème linéaire sous forme primal,
- (D)** : Le problème dual de (P),
- K.K.T** : Karush-Kuhn-Tucker,
- TC** : Trajectoire centrale,
- CPI** : Condition de points intérieurs.

Chapitre 1

Rappels sur l'analyse convexe et la programmation mathématique

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement certaines propriétés de l'analyse convexe, et quelques notions fondamentales de la programmation mathématique.

1.1 Préliminaires :

1.1.1 Produit scalaire et norme

On commence par la définition du produit scalaire de deux vecteurs.

Définition 1.1.1.

Étant donné deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire euclidien est définie par :

$$\langle x, y \rangle = x^t y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Et de la norme euclidienne associée :

$$\|x\| = (x^t x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition 1.1.2.

La norme vectorielle est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}_+ notée par $\|\cdot\|$ et vérifie les conditions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On note que les normes usuelles sur \mathbb{R}^n , pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ sont :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2},$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Sur \mathbb{R}^n les trois normes $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$ sont équivalentes. C'est à dire :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Ces définitions est très importante par la suite.

Définition 1.1.3.

L'ensemble de m vecteurs v_i est dit linéairement indépendant si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, m.$$

Remarque 1.1.1.

La matrice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ qui est formé de m vecteurs linéairement indépendantes est inversible.

Définition 1.1.4.

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, le nombre maximale des lignes (ou des colonnes) de A linéairement indépendantes est appelé le rang de A , est noté par $\text{rg}(A)$.

De plus, A est dite de plein rang si :

$$\text{rg}(A) = \min(m, n).$$

1.2 Eléments d'analyse convexe

La notion de convexité est un propriété mathématique important pour l'étude théorique et numérique des problèmes d'optimisation. On présente dans cette section quelques notions d'analyse convexe d'usage courant.

1.2.1 Ensemble et fonction convexe

Définition 1.2.1.

Un sous ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe si le segment joignant toute paire de points appartenant à S appartient également entièrement à S . C'est à dire :

$$\forall (x, y) \in S, \lambda x + (1 - \lambda)y \in S. \text{ pour tout } \lambda \in [0, 1].$$

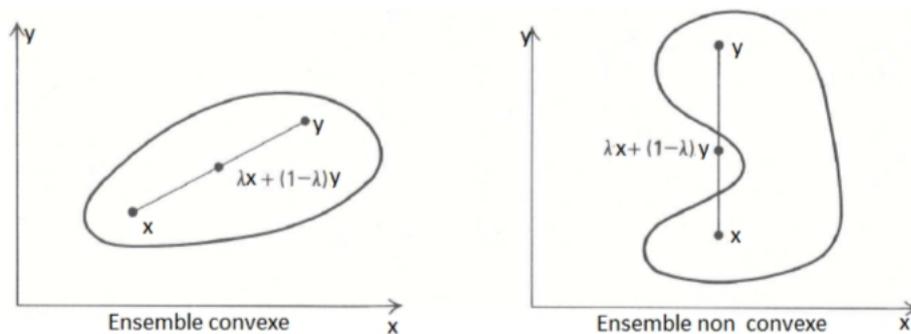


FIGURE 1.1 – Ensembles convexe et non convexe.

Exemple 1.1.

Soit $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4, x_1 + x_2 \leq 1\}$.

La figure (1.2) montre que S_1 est convexe.

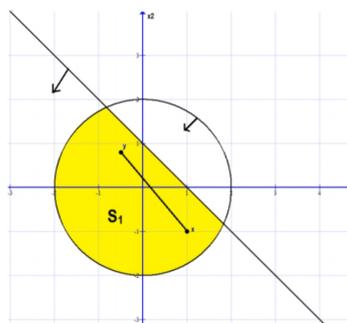


FIGURE 1.2 – Ensemble S_1 convexe.

Soit $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 6 \leq 0, x_1^3 - x_2 \geq 0, x_1, x_2 \geq 0\}$.

La figure suivante montre que S_2 est non convexe.

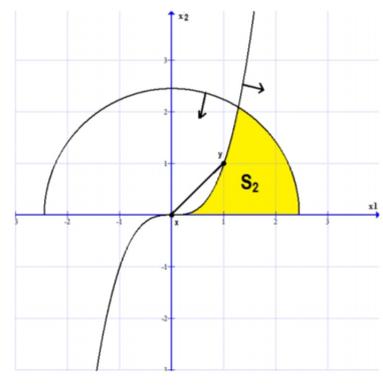


FIGURE 1.3 – Ensemble S_2 non convexe.

• **Opérations sur les ensembles convexe**

1. L'intersection $\cap_{i \in I} S_i$ d'une famille quelconque d'ensembles convexes $(S_i)_{i \in I}$ est un ensemble convexe.
2. Soient S_1, S_2 deux ensembles convexes, alors les ensembles :

$$S_1 + S_2 = \{x + y : x \in S_1 \text{ et } y \in S_2\},$$

$$S_1 - S_2 = \{x - y : x \in S_1 \text{ et } y \in S_2\},$$

$$S_1 \times S_2 = \{(x, y) : x \in S_1 \text{ et } y \in S_2\},$$

sont convexes.

3. Le produit d'un ensemble convexe S avec un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ est un convexe

$$\alpha S = \{\alpha x : x \in S\}.$$

Remarque 1.2.1.

La réunion des parties convexes généralement pas convexes : l'hexagone et l'ellipse ci-dessous sont convexes, leur intersection il est convexe mais leur réunion ne l'est pas convexe.

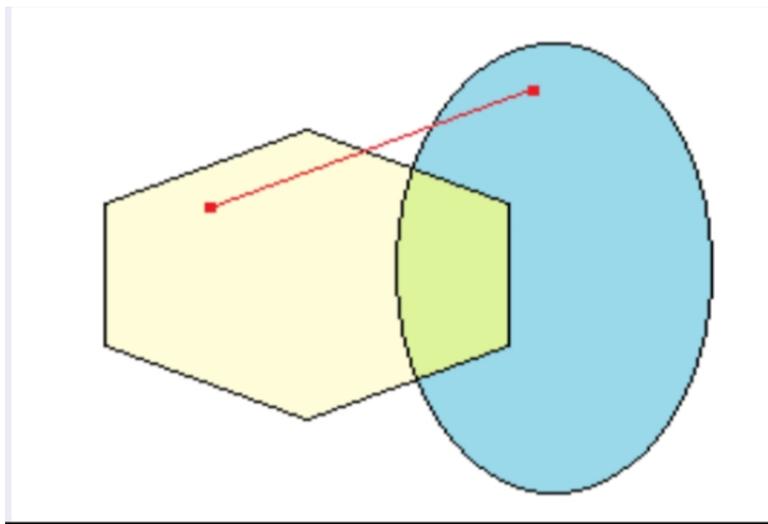


FIGURE 1.4 – Réunion des parties convexe.

Définition 1.2.2.

Soit S un ensemble non vide. On dit que S est un polyèdre convexe s'il est de la forme :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_i^t x \leq b_i, i = 1, \dots, m\},$$

où α_i est un vecteur non nul de \mathbb{R}^n et b_i un scalaire pour $i = 1, \dots, m$.

Remarque 1.2.2.

S peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

où A est un matrice de $\mathbb{R}^{m \times n}$ et b un vecteur de \mathbb{R}^m .

Définition 1.2.3.

La fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe sur S si :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in S.$$

Où d'une manière équivalente : si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x_i \in S.$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i),$$

et si l'inégalité au dessus est stricte, alors f est dite strictement convexe pour tout $x \neq y$.

Remarque 1.2.3.

On dit que f est concave si $(-f)$ est convexe.

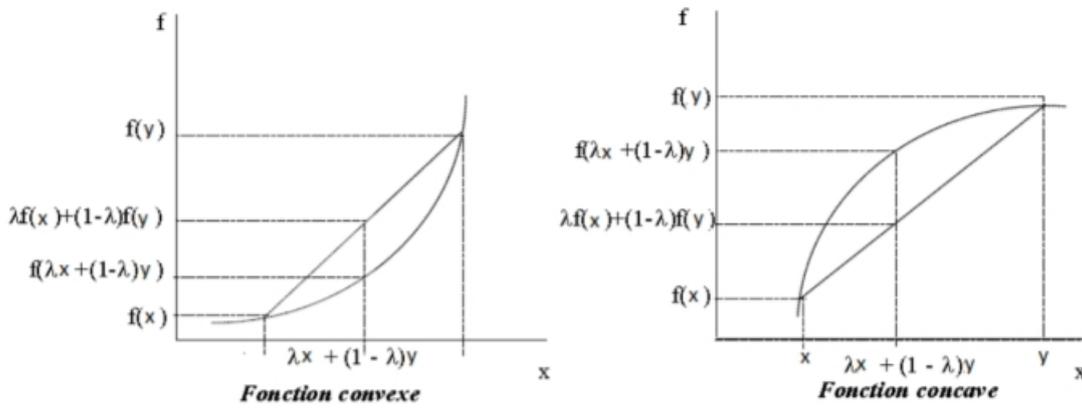


FIGURE 1.5 – Fonction convexe- concave.

Exemple 1.2.

- la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow |x|$ est convexe.
- la fonction $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \ln(x)$ est concave.

• Opérations sur les fonctions convexes

1. Soient $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions convexes alors :

(i) $f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x), \alpha_i \geq 0$ est convexe.

(ii) $f(x) = \max_{1 \leq i \leq k} f_i(x)$ est convexe.

2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors la fonction composée $g \circ h$ est convexe.

3. Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave et

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}.$$

Supposons que S non vide, alors la fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ est convexe.

1.2.2 Ensemble et application affine :

Définition 1.2.4.

Un sous ensemble C de \mathbb{R}^n est dit affine si :

$$\forall x, y \in C \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Définition 1.2.5.

L'ensemble C qui s'écrit sous la forme :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : p_i^t x \leq \alpha_i, i = 1, \dots, m\},$$

où p_i est un vecteur non nulle de \mathbb{R}^n et α_i est un scalaire pour $i = 1, \dots, m$ est dite polyèdre .

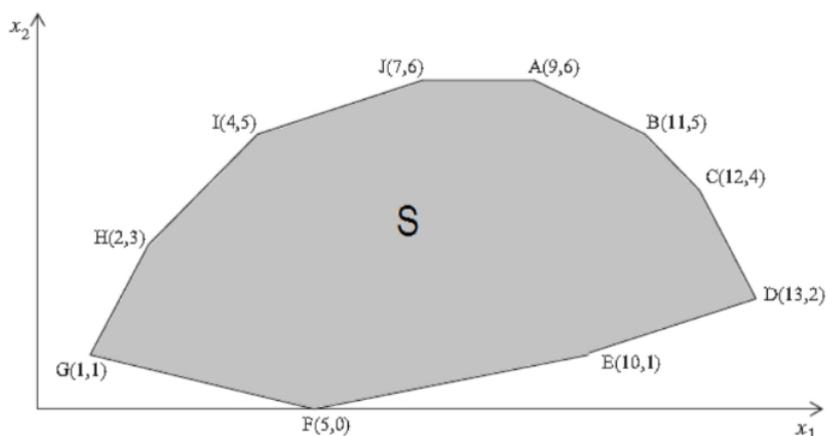


FIGURE 1.6 – Ensemble affine(polyèdre).

Définition 1.2.6.

Une fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite affine si :

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

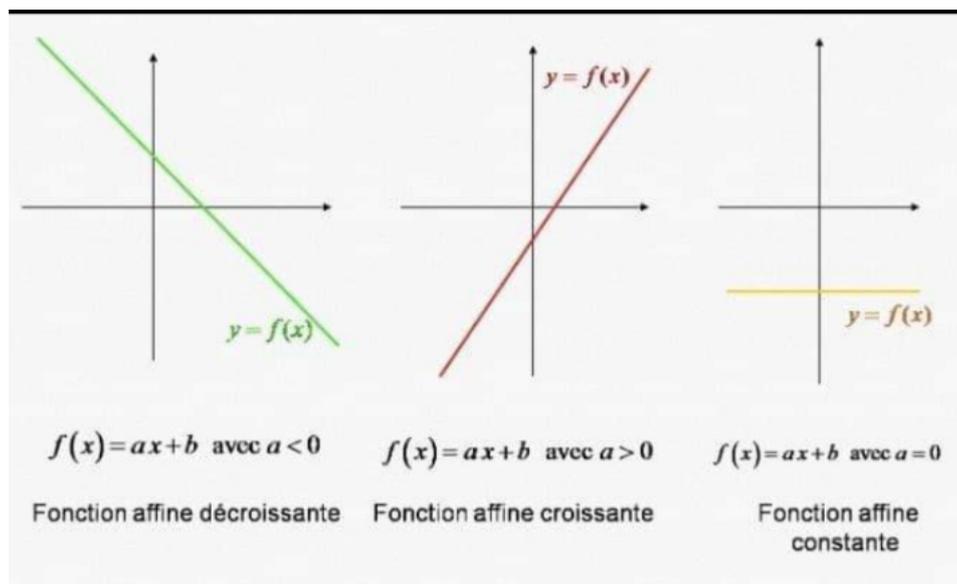


FIGURE 1.7 – Fonction affine.

Remarque 1.2.4.

Soit $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction affine (i.e., $h(x) = Ax + b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$), alors la fonction composée $g \circ h$ est convexe.

1.3 Programmation mathématique

1.3.1 Notions de base

- **Problème d'optimisation**

Sous sa forme générale, un problème d'optimisation s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des contraintes .

Si $C = \mathbb{R}^n$, ce problème est appelé problème d'optimisation sans contraintes.

- **Programme mathématique**

Un programme mathématique est un problème d'optimisation qui consiste à trouver une solution du problème qui maximise ou minimise une fonction donnée sous un ensemble de contraintes.

En générale, un programme mathématique est défini par :

$$(PM) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in D, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction objective de (PM), $D \subseteq \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des contraintes. Souvent D est présenté comme suit :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p\},$$

avec g_i, h_j sont des fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

• **Solution réalisable**

On appelle solution réalisable de (PM) tout point vérifiant les contraintes c'est à dire : $x^* \in D$.

• **Solution optimale globale**

Une solution réalisable qui optimise l'objectif sur D est dit solution optimale globale de (PM) (c'est à dire : $x^* \in D$ est un minimum global de f si et seulement si pour tout $x \in D, f(x^*) \leq f(x)$).

• **Solution optimale locale**

Tout point $x^* \in D$ satisfaisant :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D \cap v,$$

où v est un voisinage de x^* est appelée solution optimale locale. On note que $f(x^*)$ est appelée valeur optimale de (PM) .

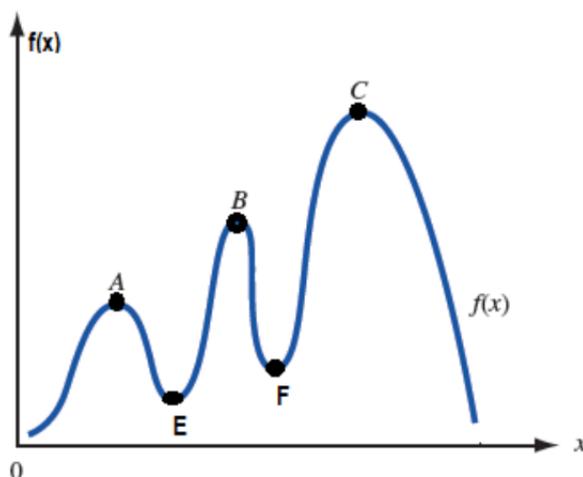


FIGURE 1.8 – Minimum local et globale.

1.3.2 Classification d'un programme mathématique

On classe le problème (PM) à partir de deux propriétés fondamentales à savoir la convexité et la différentiabilité de la fonction objectif et les contraintes :

1. (PM) est différentiable si les fonctions f, g_i, h_j sont différentiables.
2. (PM) est convexe si f, g_i sont convexes et h_j sont affines.

On note que Si (PM) est convexe, alors tout optimum locale est un optimum globale.

1.3.3 Qualification des contraintes

La condition de qualification des contraintes est satisfaite pour tout $\bar{x} \in D$ dans l'un des trois cas suivants :

1. Les contraintes sont affines (D est un polyèdre convexe).

2. La condition de Slater : Si D est convexe (c-à-d $g_i(x)$ sont convexes et $h_j(x)$ sont affines) et $\text{int}(D) \neq \emptyset$ c-à-d

$$\exists x^0 : g_i(x^0) < 0 \text{ et } h_j(x^0) = 0, \forall i, j.$$

3. La condition de Magazarian-Fromowitz : Si les gradients des contraintes saturées en $\bar{x} \in D$ sont linéairement indépendants.

1.3.4 Existence et unicité d'une solution optimal d'une programme mathématique

- Existence

Théorème 1.3.1. (Weirstrass)

Si f est une fonction continue sur $D \subseteq \mathbb{R}^n$, D est compact (fermé et borné), alors (PM) admet au moins une solution optimale $x^* \in D$.

Exemple 1.3.

Considérons le (PM) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

f est une fonction continue et l'ensemble des solutions réalisables qui donne par l'arc est compact (voir la figure 1.9). D'après le théorème 1.3.1 on obtient une solution optimale de (1.1) qui n'est pas unique.

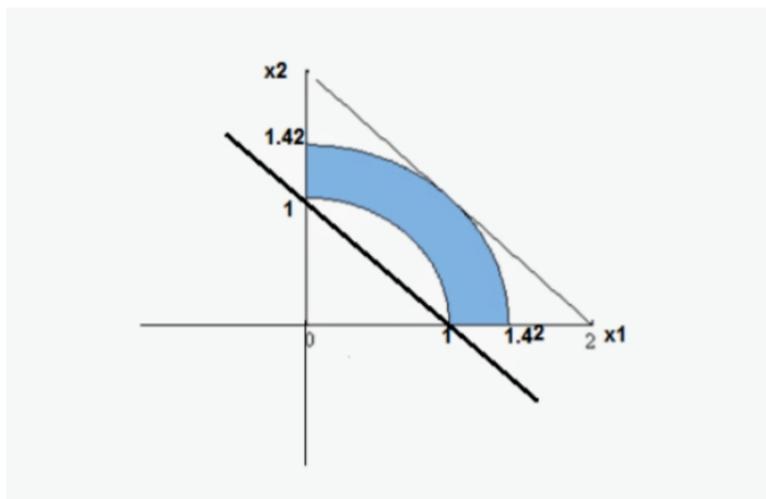


FIGURE 1.9 – Résolution graphique.

Corollaire 1.3.1.

Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ est non vide et fermé et si f est continue et coercive sur D (c-à-d $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$), alors (PM) admet au moins une solution optimale.

• **Unicité**

Si f est strictement convexe et l'ensemble D est convexe, alors si (PM) admet une solution optimale, la solution est unique .

Remarque 1.3.1.

La strict convexité n'assure pas l'existence de la solution mais assure l'unicité .

1.3.5 Conditions d'optimalités

Le théorème suivant dit de Karush-Kuhn-Tucker-Lagrange donne une condition nécessaire d'optimalité (condition du premier ordre).

Théorème 1.3.2.

Supposons que les fonctions f, g_i, h_j sont de classe C^1 dans un voisinage de $\bar{x} \in D$ et que les contraintes vérifient une des trois conditions de qualification déjà citée. Si f a un minimum local en \bar{x} sur D alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^m, \exists \mu \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$(K.K.T) \begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0, \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \forall i = 1, \dots, m \\ h_j(\bar{x}) = 0, \forall j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Les quantités λ_i et μ_j sont appelées multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker-Lagrange.

Remarque 1.3.2.

1. Si les contraintes de (PM) ne sont pas qualifiées en \bar{x} , les conditions de (K.K.T) ne s'appliquent pas.
2. Si (PM) est convexe, les conditions de (K.K.T) sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que \bar{x} soit un minimum global.

1.4 Méthode de Newton

Parmi les méthodes les plus populaires appliquées pour la résolution du système d'équations non linéaire (K.K.T) est la méthode de Newton, dans ce qui suit nous décrivons son principe.

On considère le problème suivant :

$$F(x) = 0, \text{ où } F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } n \geq 2.$$

c-à-d trouver $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0, \\ f_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0. \end{cases}$$

Chaque équation $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ est considéré comme une surface de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; l'intersection de n surfaces nous donne la solution $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$; $F(\bar{x}) = 0$. Alors on peut remplacer chaque surface associé à $f_i(x) = 0$ par l'hyperplan qui est tangent au point $x^{(k)}$.

On définit alors le point $x^{(k+1)}$ comme l'intersection de ces n hyperplan avec l'hyperplan $y = 0$.

On a :

$$F(x^{(k+1)}) \simeq F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}),$$

alors :

$$0 = F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}),$$

et par conséquent :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}).$$

Puisque $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, alors $F'(x^{(k)}) = J(x^{(k)})$ ou $J(x)$ désigne la matrice jacobienne donc :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [J(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}).$$

Pour éviter le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne on résoud le système linéaire suivant :

$$\nabla F'(x^{(k)}) \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}).$$

Et on prend :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}.$$

Chapitre 2

Algorithme de point intérieur de type prédicteur - correcteur pour la programmation linéaire

Dans ce chapitre, on présente une synthèse sur le problème linéaire et ainsi la méthode de point intérieur de type prédicteur -correcteur basée sur une nouvelle direction de recherche pour PL.

2.1 Programmation linéaire

2.1.1 définition du problème

Un programme linéaire est un modèle d'optimisation mathématique qui à pour objectif de trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines égalités et / ou inégalités dites contraintes. En langage mathématique un programme linéaire s'écrit sous sa forme primal standard suivante :

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

tels que :

$c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ des données et $x \in \mathbb{R}_+^n$ (inconnu).

On note par :

- L'ensemble des solutions réalisables primales de (\mathbf{P}) est :

$$F_p = \{Ax = b, x \geq 0\}.$$

On note que F_p est un polyèdre convexe fermé.

- L'ensemble des solutions strictement réalisable primales est :

$$F_p^+ = \{Ax = b, x > 0\}.$$

- La valeur optimale primale du problème (\mathbf{P}) est définie par :

$$val(P) = \inf_x \{c^t x : Ax = b, x \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

- x^* est une solution optimale primale du problème (\mathbf{P}) si :

$$x^* \in F_p \text{ et } val(P) = c^t x^*.$$

2.2 Dualité en programmation linéaire

Le dual de **(P)** est donné par :

$$(\mathbf{D}) \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y + z = c, \\ y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0, \end{cases}$$

où l'inconnu est $(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n$.

– L'ensemble des solutions réalisables duales de **(D)** est noté par :

$$F_D = \{A^t y + z = c, z \geq 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^m\}.$$

– L'ensemble des solutions strictement réalisable duales de **(D)** est noté par :

$$F_D^+ = \{A^t y + z = c, z > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^m\}.$$

– La valeur optimale dual de **(D)** est définie par :

$$val(D) = \sup_{(y,z)} \{b^t y : A^t y + z = c, z \geq 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^m\}.$$

– On dit que (y^*, z^*) est une solution optimal dual de **(D)** si :

$$(y^*, z^*) \in F_D \text{ et } val(D) = b^t y^*.$$

– Et on note par :

$$F_P \times F_D \text{ et } F_P^+ \times F_D^+,$$

les ensembles des solutions réalisables primales-duales et strictement réalisable primales-duales de **(P)** et **(D)** respectivement.

2.2.1 Dualité faible

Définition 2.2.1. (Saut de dualité)

Soient $x \in F_P$, $(y, z) \in F_D$, alors la différence :

$$\begin{aligned} val(P) - val(D) &= c^t x - b^t y, \\ &= x^t z. \end{aligned}$$

est appelée le saut de dualité des problèmes **(P)** et **(D)**.

Théorème 2.2.1. [22]

Soit x et z deux solutions réalisables de **(P)** et **(D)** respectivement, alors

$$c^t x - b^t y = x^t z \geq 0.$$

Si le saut de dualité $x^t z = 0$, alors x est un solution optimal de **(P)** et (y, z) solution optimale de **(D)**.

Preuve.

On a :

$$\begin{aligned} c^t x - b^t y &= (A^t y + z)^t x - (Ax)^t y, \\ &= (y^t A + z^t) x - x^t A^t y, \\ &= \langle A^t y, x \rangle + \langle z, x \rangle - \langle Ax, y \rangle. \end{aligned}$$

Comme $\langle A^t y, x \rangle = \langle Ax, y \rangle$, donc :

$$\begin{aligned} c^t x - b^t y &= x^t z, \\ &= \sum_{i=1}^n x_i z_i \geq 0 \text{ car } x \geq 0 \text{ et } z \geq 0. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

2.2.2 Dualité forte

Théorème 2.2.2. [22]

Soient $(x, y) \in F_P \times F_D$ une solution réalisable de **(P)** et **(D)**, respectivement tel que :

$$b^t y = c^t x.$$

Alors x et y sont des solutions optimales de **(P)** et **(D)**.

Corollaire 2.2.1.

- Si $c^t x$ est non borné inférieurement sur F_P alors **(D)** est non réalisable (l'ensemble des contraintes duales F_D est vide).
- Si $b^t y$ est non borné supérieurement alors **(P)** est non réalisable (c-à-d : F_P est vide).
- Si **(P)** est non réalisable alors **(D)** est non borné (et réciproquement).

2.3 Formes d'un programme linéaire

On peut montrer que tout programme linéaire peut se ramener à l'une des deux formes suivantes :

2.3.1 Forme canonique

On peut écrire un programme linéaire sous forme canonique, lorsque toutes ses contraintes sont des inégalités et toutes ses variables sont non-négatives. C'est à dire :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ Ax \geq b \text{ (ou } \leq), \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_m)^t \in \mathbb{R}^m$ et A est une matrice de taille $m \times n$.

2.3.2 Forme standard

On peut écrire un programme linéaire sous forme standard, lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toutes ses variables sont non-négatives. C'est à dire :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

2.4 Modélisation de quelques problèmes linéaires

Rappel

Les étapes de modélisation d'un problème de PL sont les suivantes :

- 1) Identifier les variables de décision .
- 2) Identifier les contraintes en les exprimant sous la forme d'équations ou d'inéquations linéaires.
- 3) Identifier l'objectif et le représenter sous forme linéaire en fonction des variables de décision, puis spécifier s'il faut maximiser ou bien minimiser l'objectif.

Exemple 2.1.

Une avion peut porter W kg supplémentaire sur un vol régulier, il y a n colis à transporter et chaque colis $i, i = 1, 2, \dots, n$ pèse a_i et génère un profit de p_i en dinar.

Ce problème est un modèle du sac à dos.

Considérons les variables binaires

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le coli } i, i = 1, 2, 3, \dots, n \\ 0 & \text{si non .} \end{cases}$$

Le modèle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max Z = \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq W, \\ x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Exemple 2.2.

Une compagnie de taxi dispose de quatre véhicules libres et doit transporter quatre clients. Le but de la compagnie est d'assigner un taxi par client en minimisant la somme des distances parcourues. Les distances respectives (**en kilomètres**) entre les taxis et les voyageurs sont données par le tableau suivant :

Distance	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Taxi 1	6	3	4	5
Taxi 2	4	5	4	6
Taxi 3	5	6	6	7
Taxi 4	4	4	3	5

Le problème de cette compagnie de taxis appartient à la classe "Problème d'affectation" où il s'agit d'affecter chacun des taxi à un seul client ou voyageur.

Pour cela, considérons les variables de décision suivantes :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le taxi "i" est affecter au voyageur "j",} \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Avec $i = 1, 2, 3, 4$ et $j = 1, 2, 3, 4$ au total on dispose de 16 variables de décision.

Les contraintes :

— Chaque taxi i est affecté à un et un seul voyageur j

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

— Chaque voyageur j est affecté à un et un seul taxi i

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

— Toutes les variables sont booléennes $x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4$.

La fonction objectif :

L'objectif de la compagnie en question est d'affecter ces 4 taxis aux 4 voyageurs de manière à minimiser les distances parcourues. Notons par c_{ij} la distance en kilomètre entre le taxi $i = 1, 2, 3, 4$ et le voyageur $j = 1, 2, 3, 4$. Notons que ces distances sont données dans le tableau précédent.

La fonction objectif s'écrit alors $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij}$.

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \sum_{i=1}^4 x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

2.5 Méthode de trajectoire centrale

2.5.1 la trajectoire centrale

On rappelle qu'on cherche à résoudre un programme linéaire **(P)** qui est défini par :

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

et son dual est donné par :

$$(\mathbf{D}) \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y + z = c, \\ y \in \mathbb{R}^m, \quad z \geq 0. \end{cases}$$

Pour résoudre les deux problèmes **(P)** et **(D)**, on suppose qu'ils vérifient les hypothèses suivantes :

Hypothèses

1. la matrice A est de plein rang (c-à-d : $rg(A) = m \leq n$).
2. Condition de point intérieur (CPI) : $\exists(x^0, y^0, z^0) \in F_P^+ \times F_D^+$, tels que :

$$\begin{cases} Ax^0 = b, \\ A^t y^0 + z^0 = c, \\ x^0 > 0, z^0 > 0, y^0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

On note que **(P)** consiste à minimiser une fonction linéaire (convexe) sous l'ensemble des contraintes qui est un polyèdre convexe. Comme F_P est non vide (hypothèse 2), $\exists z \in \mathbb{R}_+^n$; $\exists y \in \mathbb{R}^m$. Alors les conditions d'optimalité de Karuch -Kuhn- Tucher sont nécessaires et suffisantes et s'écrivent comme suit :

$$(K.K.T) \begin{cases} \nabla(c^t x) - \sum_{i=1}^n z_i(\nabla x_i) + \sum_{j=1}^m y_j(\nabla(b - Ax)) = 0, \\ A^t x = b, \\ z_i x_i = 0. \end{cases}$$

Après la dérivation de premier équation de ce système on obtient :

$$\begin{cases} c - z - A^t y = 0, \\ A^t x = b, \\ zx = 0. \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} Ax = b, \\ A^t y + z = c, \\ xz = 0, x > 0, z > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.1)$$

Dont la dernière équation est dite équation de complémentarité.

- L'idée principal de la méthode de trajectoire est de perturbé la dernière équation le système(2.1). Alors, on obtient :

$$\begin{cases} Ax = b, \\ A^t y + z = c, \\ xz = \mu e, x > 0, z > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (2.2)$$

tel que $\mu > 0$, $e = (1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$. Il est prouvé [22] qu'il existe une solution unique $(x(\mu), y(\mu), z(\mu))$ pour le système (2.2) pour tout $\mu > 0$. L'ensemble $(x(\mu), y(\mu), z(\mu)); \mu > 0$ s'appelle la trajectoire central (voir [17, 23]). De plus, si $\mu \rightarrow 0$ alors $x^t z$ tend vers le zéro c-à-d trouver une solution optimale pour **(P)** et **(D)** revient à résoudre le système (2.2).

2.5.2 Nouvelle direction de recherche

Afin d'obtenir de nouvelles directions de recherche , Darvay [8], a remplacé l'équation de centralité $xz = \mu e$ par $\psi\left(\frac{xz}{\mu}\right) = \psi(e)$, où $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ qu'on suppose l'inverse ψ^{-1}

existe. Donc le système (2.2) s'écrit sous la forme équivalent suivante :

$$\begin{cases} Ax = b, x \geq 0, \\ A^t y + z = c, z \geq 0, \\ \psi\left(\frac{xz}{\mu}\right) = \psi(e). \end{cases} \quad (2.3)$$

En utilisant la méthode de Newton pour résoudre le système non linéaire (2.3), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} A\Delta x = 0, \\ A^t \Delta y + \Delta z = 0, \\ \frac{z}{\mu} \psi'\left(\frac{xz}{\mu}\right) \Delta x + \frac{x}{\mu} \psi'\left(\frac{xz}{\mu}\right) \Delta z = \psi(e) - \psi\left(\frac{xz}{\mu}\right). \end{cases} \quad (2.4)$$

Où $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ désigne les directions de recherche, par conséquent on définit le vecteur v pour tout vecteur réalisable primal $x > 0$, et le vecteur réalisable dual $z > 0$:

$$v = \sqrt{\frac{xz}{\mu}}.$$

On définit les vecteurs normés de la direction de déplacement d_x et d_z comme suit :

$$d_x := \frac{v\Delta x}{x}, \quad d_z := \frac{v\Delta z}{z}. \quad (2.5)$$

On a,

$$\mu v(d_x + d_z) = z\Delta x + x\Delta z, \quad (2.6)$$

et

$$d_x d_z = \frac{\Delta x \Delta z}{\mu}. \quad (2.7)$$

On peut facilement vérifier que le système (2.4) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0, \\ \bar{A}^t \frac{\Delta y}{\mu} + d_z = 0, \\ d_x + d_z = p_v, \end{cases} \quad (2.8)$$

où

$$\bar{A} := A \operatorname{diag}\left(\frac{x}{v}\right),$$

et

$$p_v := \frac{\psi(e) - \psi(v^2)}{v\psi'(v^2)}.$$

2.5.3 La mesure de proximité

pour analyser l'algorithme on définit une mesure de proximité comme suit :

$$\delta(v) = \frac{\|p_v\|_2}{2}.$$

- Pour les différents choix de ψ on obtient des valeurs différents pour p_v et $\delta(v)$:

1. Si $\psi(t) = t$ alors $p_v = v^{-1} - v$ et $\delta(v) = \frac{1}{2}\|v^{-1} - v\|$ qui étudié par Ross [22].
2. Si $\psi(t) = \sqrt{t}$ alors $p_v = 2(e - v)$ et $\delta(v) = \|e - v\|$ présenté par Darvay [5].
3. Si $\psi(t) = t - \sqrt{t}$ alors :

$$p_v = \frac{2(v - v^2)}{2v - e}, \quad (2.9)$$

et

$$\delta(v) = \left\| \frac{v - v^2}{2v - e} \right\|_2,$$

présenté par dravay[8]

C'est facile de vérifie que :

$$\delta(v) = 0 \Leftrightarrow v = e \Leftrightarrow xz = \mu e.$$

Soit

$$q_v = d_x - d_z.$$

Puisque d_x et d_z sont orthogonal, c-à-d $d_x^t d_z = 0$ alors :

$$\|p_v\|_2 = \|q_v\|_2,$$

c-à-d :

$$\|d_x + d_z\|_2 = \|d_x - d_z\|_2.$$

Et par conséquent :

$$\delta(x, z; \mu) = \frac{\|q_v\|_2}{2} = \frac{\|p_v\|_2}{2}.$$

De plus,

$$d_x = \frac{p_v + q_v}{2} \text{ et } d_z = \frac{p_v - q_v}{2},$$

alors :

$$d_x d_z = \frac{p_v^2 - q_v^2}{4}. \quad (2.10)$$

Les bornes inférieure et supérieure sur les composantes du vecteur v sont présentées par le lemme suivant.

Lemme 2.5.1. ([15], Lemme 2) Si $\delta := \delta(v)$, alors

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4\rho(\delta)} \leq v_i \leq \frac{1}{2} + \rho(\delta), \quad i = 1, \dots, n,$$

où $\rho(\delta) = \delta + \sqrt{\frac{1}{4} + \delta^2}$.

2.6 Algorithme correcteur-prédicteur

2.6.1 Description de l'algorithme

Dans cette section, on présente un algorithme de trajectoire central (TC) pour les problèmes PL basés sur les techniques de Darvay et al. Pour cela, on définit un voisinage $\mathcal{N}(\tau)$ du trajectoire central comme suit :

$$\mathcal{N}(\tau) := \left\{ (x, y, z) : Ax = b, A^t y + z = c, x > 0, z > 0, \delta(x, z; \mu) \leq \tau \right\},$$

où $0 < \tau < 1$. L'algorithme commence par une solution primale-duale strictement réalisable donnée $(x^0, y^0, z^0) \in \mathcal{N}(\tau)$. Si pour l'itération courante (x, y, z) , $n\mu > \epsilon$, alors l'algorithme calcule une nouvelle itération en exécutant les étapes de correction et prédiction.

Dans l'étape de correction, on définit :

$$v = \sqrt{\frac{xz}{\mu}}, \quad \bar{A} = A \operatorname{diag}\left(\frac{x}{v}\right),$$

on obtient les directions de recherche d_x et d_z par la résolution de (2.8) avec p_v donné en (2.9), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0, \\ \bar{A}^t \frac{\Delta y}{\mu} + d_z = 0, \\ d_x + d_z = \frac{2(v-v^2)}{2v-\epsilon}. \end{cases} \quad (2.11)$$

En utilisant (2.5), on obtient :

$$\Delta x = \frac{x}{v}d_x, \quad \Delta z = \frac{z}{v}d_z, \quad (2.12)$$

l'itération du correcteur est obtenue par une étape de Newton complet comme suit :

$$(x^+, y^+, z^+) := (x, y, z) + (\Delta x, \Delta y, \Delta z).$$

Dans l'étape du prédiction, on définit :

$$v^+ = \sqrt{\frac{x^+z^+}{\mu}}, \quad \bar{A}^+ = A \operatorname{diag}\left(\frac{x^+}{v^+}\right),$$

et on obtient les directions de recherche d_x^p et d_z^p en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{A}^+d_x^p = 0, \\ \bar{A}^{+t} \frac{\Delta^p y}{\mu} + d_z^p = 0, \\ d_x^p + d_z^p = -2v^+. \end{cases} \quad (2.13)$$

On note que la partie droite du système (2.13) est inspirée de l'étape du prédicteur proposée dans Darvay (2005). Comme pour Δx et Δz , on définit

$$\Delta^p x = \frac{x^+}{v^+}d_x^p, \quad \Delta^p z = \frac{z^+}{v^+}d_z^p, \quad (2.14)$$

et l'itération du prédiction est obtenue par :

$$(x^p, y^p, z^p) := (x^+, y^+, z^+) + \theta(\Delta^p x, \Delta^p y, \Delta^p z),$$

où $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ et aussi $\mu^p = (1 - 2\theta)\mu$. Au début de l'algorithme, on suppose que $(x^0, y^0, z^0) \in \mathcal{N}(\tau)$. On veut déterminer les valeurs de τ et θ de telle manière qu'après une étape de correction $(x^+, y^+, z^+) \in \mathcal{N}(\omega(\tau))$ (où $\omega(\tau) < \tau$) et après une étape de prédiction $(x^p, y^p, z^p) \in \mathcal{N}(\tau)$. L'algorithme répète alternativement les étapes du correcteur et du prédicteur jusqu'à ce que $x^t z \leq \epsilon$ soit satisfaite. Une description formelle de l'algorithme est donnée dans la fig .2.1.

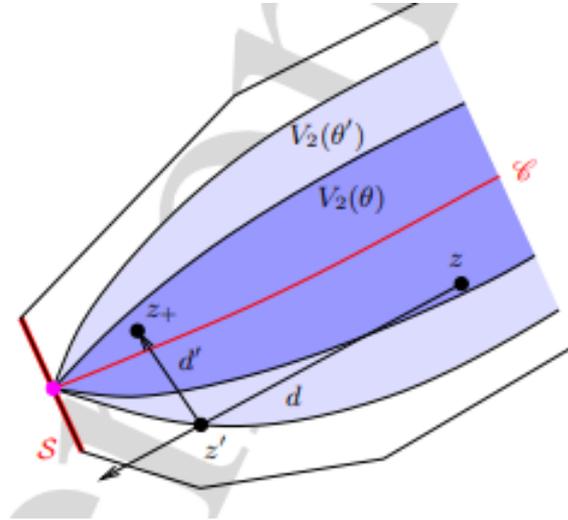


FIGURE 2.1 – Un algorithme prédicteur-correcteur.

2.6.2 Algorithme

Dans cette partie, on présente un algorithme de point intérieur de type correcteur-prédicteur basé sur une nouvelle direction de recherche pour (PL) :

Algorithme de point intérieur de type correcteur-prédicteur pour PL
<p>Début Algorithme</p> <p>Données :</p> <p>Un paramètre de précision $\epsilon > 0$;</p> <p>Un paramètre de proximité τ, $0 < \tau < 1$ (défaut $\tau = \frac{1}{4}$);</p> <p>Un paramètre θ, $0 < \theta < \frac{1}{2}$ (défaut $\theta = \frac{1}{5\sqrt{n}}$);</p> <p>Un paramètre de barrière $\mu^0 = \frac{(x^0)^t z^0}{n}$.</p> <p>Initialisation : soit (x^0, y^0, z^0) vérifiant CPI tel que :</p> <p>$\delta(x^0, z^0; \mu^0) \leq \tau$, $v^0 = \sqrt{\frac{x^0 z^0}{\mu^0}} > \frac{1}{2}e$ et $k = 0$;</p> <p>Tant que $x^t z > \epsilon$ faire :</p> <ul style="list-style-type: none"> • l'étape de correcteur : résoudre le système (2.11) et calculer $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ via (2.5); $((x^+)^k, (y^+)^k, (z^+)^k) = (x^k, y^k, z^k) + (\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta z^k)$; • l'étape de prédicteur : résoudre le système (2.13) et calculer $(\Delta^p x, \Delta^p y, \Delta^p z)$ via (2.14); $((x^p)^k, (y^p)^k, (z^p)^k) = ((x^+)^k, (y^+)^k, (z^+)^k) + \theta(\Delta^p x^k, \Delta^p y^k, \Delta^p z^k)$; • mise à jour : $x^{k+1} = (x^p)^k$; $y^{k+1} = (y^p)^k$; $z^{k+1} = (z^p)^k$; $\mu^{(k+1)} := (1 - 2\theta)\mu^{(k)}$, et $k = k + 1$; <p>Fin Tant que</p> <p>Fin algorithme.</p>
Algorithme 2.6.2

2.7 La convergence de l'algorithme et la analyse de la complexité

On a le lemme technique suivant :

Lemme 2.7.1. ([26], Lemme 5.3)

Soit u et v deux vecteurs arbitraires dans \mathbb{R}^n avec $u^t v \geq 0$. Alors :

$$\|uv\| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \|u + v\|^2.$$

Par la suite, on analyse en détail les étapes du correcteur et du prédicteur.

L'étape de correcteur

Dans cette sous-section, on va traiter l'étape du correcteur. On peut observer que l'algorithme 2.6.2 effectue une étape de Newton complète comme une étape de correcteur, qui peut être obtenu de la même manière que celui présenté dans l'algorithme primal-dual de Darvay et al .(2016). Ainsi, pour l'analyse de ce cas les Lemmes prouvés dans [8] On peut appliquée .

2.7.1 Analyse de la strictement faisabilité après la phase de correction

Dans le Lemme suivant, on donne une condition pour assurer la stricte faisabilité du pas de Newton complet.

Lemme 2.7.2. (*[8], Lemme 5.1*)

Soit $\delta := \delta(x, z, \mu) < 1$ et on suppose que $v > \frac{1}{2}e$. Alors, $x^+ > 0$ et $z^+ > 0$.

Preuve.

Pour chaque $0 \leq \alpha \leq 1$ on note $x^+(\alpha) = x + \alpha\Delta x$ et $z^+(\alpha) = z + \alpha\Delta z$. Maintenant, on écrit

$$\begin{aligned} x^+(\alpha)z^+(\alpha) &= (x + \alpha\Delta x)(z + \alpha\Delta z), \\ &= xz + \alpha(z\Delta x + x\Delta z) + \alpha^2\Delta x\Delta z. \end{aligned}$$

Donc

$$x^+(\alpha)z^+(\alpha) = xz + \alpha(z\Delta x + x\Delta z) + \alpha^2\Delta x\Delta z.$$

En utilisant (2.6) et (2.7), on obtient :

$$\frac{1}{\mu}x^+(\alpha)z^+(\alpha) = v^2 + \alpha v(d_x + d_z) + \alpha^2 d_x d_z. \quad (2.15)$$

De (2.8) et (2.10), il résulte que :

$$\frac{1}{\mu}x^+(\alpha)z^+(\alpha) = (1 - \alpha)v^2 + \alpha(v^2 + vp_v) + \alpha^2\left(\frac{p_v^2}{4} - \frac{q_v^2}{4}\right).$$

De plus, d'après (2.9) on obtient :

$$\begin{aligned} v^2 + vp_v &= v^2 + \frac{2(v^2 - v^3)}{2v - e}, \\ &= \frac{v^2}{2v - e}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donc on obtient :

$$\frac{1}{\mu}x^+(\alpha)z^+(\alpha) = (1 - \alpha)v^2 + \alpha\left(e + \frac{(v-e)^2}{2v-e} + \alpha\frac{p_v^2}{4} - \alpha\frac{q_v^2}{4}\right). \quad (2.17)$$

En utilisant $v > \frac{1}{2}e$, on obtient :

$$\frac{(v - e)^2}{2v - e} \geq -\frac{p_v^2}{4}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\mu}x^+(\alpha)z^+(\alpha) \geq (1 - \alpha)v^2 + \alpha\left(e - (1 - \alpha)\frac{p_v^2}{4} - \alpha\frac{q_v^2}{4}\right).$$

L'inégalité est $x^+(\alpha)z^+(\alpha) > 0$ vraie si

$$\left\| (1-\alpha)\frac{p_v^2}{4} + \alpha\frac{q_v^2}{4} \right\|_\infty < 1.$$

On a :

$$\begin{aligned} \left\| (1-\alpha)\frac{p_v^2}{4} + \alpha\frac{q_v^2}{4} \right\|_\infty &\leq (1-\alpha)\frac{\|p_v^2\|_\infty}{4} + \alpha\frac{\|q_v^2\|_\infty}{4}, \\ &\leq (1-\alpha)\frac{\|p_v\|_2^2}{4} + \alpha\frac{\|q_v\|_2^2}{4} = \delta^2 < 1. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que pour chaque n l'inégalité $x^+(\alpha)z^+(\alpha) > 0$ est vraie, ce qui signifie que les fonctions linéaire de α , $x^+(\alpha)$ et $z^+(\alpha)$ ne change pas de signe sur l'intervalle $[0, 1]$. En conséquence, $x^+(0) = x > 0$ et $z^+(0) = z > 0$ donne $x^+(1) = x^+ > 0$ et $z^+(1) = z^+ > 0$. \square

2.7.2 La convergence quadratique de la mesure de proximité

On a le lemme technique suivant :

Lemme 2.7.3. ([8], Lemme 5.2)

Soit $f : D \rightarrow (0, \infty)$ une fonction décroissante, où $D = [d, \infty]$, $d > 0$.

De plus, on considère le vecteur $v \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\min(v) > d$. Puis,

$$\|f(v).(e - v^2)\| \leq f(\min(v)).\|e - v^2\| \leq f(d).\|e - v^2\|.$$

Dans le Lemme suivant, on donne la convergence quadratique de la mesure de la de proximité après une étape de correction.

Lemme 2.7.4. ([8], Lemme 5.3)

Si $\delta := \delta(x, y, \mu) < \frac{1}{2}$ et $v > \frac{1}{2}e$. Alors, $v^+ > \frac{1}{2}e$, de plus

$$\delta^+ := \delta(x^+, z^+; \mu) \leq \frac{3-3\delta^2-3\sqrt{1-\delta}(1-2\delta^2)}{3-4\delta^2}. \quad (2.18)$$

En outre,

$$\delta^+ := \delta(x^+, z^+; \mu) \leq \frac{9-3\sqrt{3}}{2}\delta^2, \quad (2.19)$$

Preuve.

On a le Lemme 2.7.2 que $x^+ > 0$ et $z^+ > 0$. En considérant la notation

$$v^+ = \sqrt{\frac{x^+z^+}{\mu}},$$

et la substitution $\alpha = 1$ dans l'inégalité (2.17), après quelques réductions on obtient :

$$(v^+)^2 = e - \frac{e-2v-v^2}{v^2} \cdot \frac{p_v^2}{4} - \frac{q_v^2}{4}. \quad (2.20)$$

De la condition $v > \frac{1}{2}e$, on obtient :

$$v^2 + 2v - e > 0,$$

et cela implique

$$(v^+)^2 \geq e - \frac{q_v^2}{4}.$$

Par conséquent,

$$\min(v^+) \geq \sqrt{1 - \frac{1}{4}\|q_v^2\|_\infty} \geq \sqrt{1 - \frac{\|q_v\|_2^2}{4}} = \sqrt{1 - \delta^2}. \quad (2.21)$$

De $\delta < \frac{1}{2}$ il s'ensuit que

$$\min(v^+) > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donc

$$v^+ > \frac{1}{2}e.$$

De plus, on a :

$$\delta(x^+, z^+; \mu) = \left\| \frac{v^+ - (v^+)^2}{2v^+ - e} \right\|_2 = \left\| \frac{v^+}{(2v^+ - e)(e + v^+)} \cdot (e - (v^+)^2) \right\|_2.$$

Considérons la fonction $f(t) = \frac{t}{(2t-1)(1+t)} > 0$ pour tout $t > \frac{1}{2}$. De $f'(t) < 0$ il s'ensuit que f est décroissante, donc en utilisant (2.21) et le Lemme (2.7.3), on obtient :

$$\delta(x^+, z^+; \mu) \leq \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{2(1-\delta^2)+\sqrt{1-\delta^2}-1} \cdot \|e - (v^+)^2\|_2. \quad (2.22)$$

On écrit $f(t)$ de la manière suivante :

$$f(t) = \frac{t(2t+1)(1-t)}{(4t^2-1)(1-t^2)}.$$

En substituant $\sqrt{1-\delta^2}$ et en faisant quelques réductions élémentaires on obtient :

$$f(\sqrt{1-\delta^2}) = \frac{1-\delta^2 - \sqrt{1-\delta^2}(1-2\delta^2)}{\delta^2(3-4\delta^2)}. \quad (2.23)$$

On a $1 < \frac{t^2+2t-1}{t^2} \leq 2$, pour tout $t > \frac{1}{2}$ et

$$e - (v^+)^2 = \frac{e - 2v - v^2}{v^2} \cdot \frac{p_v^2}{4} + \frac{q_v^2}{4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|e - (v^+)^2\|_2 &\leq 2 \left\| -\frac{p_v^2}{4} \right\|_2 + \left\| \frac{q_v^2}{4} \right\|_2, \\ &\leq 2\delta^2 + \delta^2, \\ &= 3\delta^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Et en utilisant (2.22) et (2.23) on obtient (2.18), ce qui prouve la première partie du Lemme. De plus on a :

$$\delta(x^+, z^+; \mu) \leq \frac{3(1 - \sqrt{1 - \delta^2})}{3 - 4\delta^2} + \frac{3\delta^2(-1 + 2\sqrt{1 - \delta^2})}{3 - 4\delta^2}.$$

Soit

$$\Phi_1(\delta) := \frac{3(1 - \sqrt{1 - \delta^2})}{3 - 4\delta^2} \quad \text{et} \quad \Phi_2(\delta) := \frac{3\delta^2(-1 + 2\sqrt{1 - \delta^2})}{3 - 4\delta^2}.$$

De $\delta < \frac{1}{2}$, il s'ensuit que :

$$1 + \sqrt{1 - \delta^2} > \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

On a :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \delta^2}} < 4 - 2\sqrt{3},$$

et

$$\frac{1}{3}\Phi_1(\delta) < \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3 - 4\delta^2}\delta^2.$$

De plus, si $\delta < \frac{1}{2}$, alors $4\delta^2 < 1$. Ainsi, $\frac{1}{3 - 4\delta^2} < \frac{1}{2}$ et on obtient :

$$\frac{1}{3}\Phi_1(\delta) < \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}\delta^2. \quad (2.25)$$

Un calcul simple donne :

$$\frac{1}{3}\Phi_2(\delta) = \frac{\delta^2}{1 + 2\sqrt{1 - \delta^2}}.$$

On a $\frac{1}{1 + 2\sqrt{1 - \delta^2}} < \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ et

$$\frac{1}{3}\Phi_2(\delta) < \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\delta^2. \quad (2.26)$$

De (2.25) et (2.26), on obtient :

$$\frac{1}{3}(\Phi_1(\delta) + \Phi_2(\delta)) < \frac{4 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1}{2}\delta^2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\delta^2,$$

et il en résulte (2.19), ce qui prouve le Lemme. □

L'influence de nouveau itéré en saut de dualité après la phase de correction

Le lemme suivant donne une borne supérieur du saut de dualité après une étape de correction.

Lemme 2.7.5. ([8], Lemme 5.4)

soit $\delta := \delta(x, z, \mu) < \frac{1}{2}$ et $v > \frac{1}{2}e$. Alors,

$$(x^+)^t z^+ \leq \mu \left(n + \frac{1}{4}\right).$$

Preuve.

En substituant $\alpha = 1$ dans (2.15) et en utilisant (2.8) on a :

$$\frac{1}{\mu}x^+z^+ = v^2 + vp_v + d_x d_z.$$

En utilisant (2.9) et (2.16) on déduit :

$$\frac{1}{\mu}x^+z^+ \leq e + \frac{p_v^2}{4} + d_x d_z.$$

Par conséquent, en utilisant l'orthogonalité des vecteurs d_x et d_z , on obtient

$$\begin{aligned} (x^+)^t z^+ &= e^t (x^+ z^+), \\ &\leq \mu \left(e^t e + \frac{e^t p_v^2}{4} + e^t d_x d_z \right), \\ &= \mu \left(n + \frac{\|p_v\|_2^2}{4} + d_x^t d_z \right), \\ &= \mu(n + \delta^2). \end{aligned}$$

Ceci complète la première partie du Lemme. De $\delta < \frac{1}{2}$ on a $\delta^2 < \frac{1}{4}$. En utilisant cela, on obtient

$$(x^+)^t z^+ \leq \mu \left(n + \frac{1}{4} \right).$$

Ce qui prouve la seconde affirmation du Lemme. □

L'étape de prédicteur

2.7.3 Analyse de la stricte faisabilité

Le Lemme suivant montre la stricte faisabilité après une étape de prédiction

Lemme 2.7.6. [Darvay 2020]

Soit (x^+, y^+, z^+) une solution primale-dual strictement réalisable obtenue après un pas de correction et $\mu > 0$. De plus, soit $0 < \theta < \frac{1}{2}$, et

$$x^p = x^+ + \theta \Delta^p x, y^p = y^+ + \theta \Delta^p y, z^p = z^+ + \theta \Delta^p z,$$

désignent les itérations après une étape de prédicteur. Alors (x^p, y^p, z^p) est une solution primale-duale strictement réalisable si :

$$h(\delta^+, \theta, n) := \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\rho(\delta^+)} \right]^2 - \frac{\sqrt{2}\theta^2 n}{1-2\theta} \left[\frac{1}{2} + \rho(\delta^+) \right]^2 > 0,$$

où $\delta^+ := \delta(x^+, z^+; \mu)$.

Preuve.

Pour chaque $0 \leq \alpha \leq 1$, on note que $x^p(\alpha) = x^+ + \alpha \theta \Delta^p x$ et $z^p(\alpha) = z^+ + \alpha \theta \Delta^p z$. Par conséquent, on a :

$$\begin{cases} \overline{A^+} d_x^p = 0, \\ \overline{A^+}^t \frac{\Delta^p y}{\mu} + d_z^p = 0, \\ d_x^p + d_z^p = -2v^+. \end{cases} \quad (2.27)$$

En utilisant la troisième équation de (2.27), on obtient :

$$\begin{aligned} x^p(\alpha) z^p(\alpha) &= \frac{x^+ z^+}{(v^+)^2} \left(v^+ + \alpha \theta d_x^p \right) \left(v^+ + \alpha \theta d_z^p \right), \\ &= \mu \left[(v^+)^2 + \alpha \theta v^+ \left(d_x^p + d_z^p \right) + \alpha^2 \theta^2 d_x^p d_z^p \right], \\ &= \mu \left[(1 - 2\alpha\theta)(v^+)^2 + \alpha^2 \theta^2 d_x^p d_z^p \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

De (2.28), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
 \min \left[\frac{x^p(\alpha)z^p(\alpha)}{(1-2\alpha\theta)\mu} \right] &= \min \left[(v^+)^2 + \frac{\alpha^2\theta^2}{1-2\alpha\theta} d_x^p d_z^p \right], \\
 &\geq \min((v^+)^2) - \frac{\alpha^2\theta^2}{1-2\alpha\theta} \|d_x^p d_z^p\|_\infty, \\
 &\geq \min((v^+)^2) - \frac{\theta^2}{1-2\theta} \|d_x^p d_z^p\|_\infty, \\
 &\geq \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\rho(\delta^+)} \right]^2 - \frac{\theta^2}{2\sqrt{2}(1-2\theta)} \|d_x^p + d_z^p\|_2^2, \\
 &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\rho(\delta^+)} \right]^2 - \frac{4\theta^2}{2\sqrt{2}(1-2\theta)} \|v^+\|_2^2, \\
 &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\rho(\delta^+)} \right]^2 - \frac{4\theta^2}{2\sqrt{2}(1-2\theta)} \sum_{i=1}^n (v^+)_i^2, \\
 &\geq \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\rho(\delta^+)} \right]^2 - \frac{\sqrt{2}\theta^2 n}{(1-2\theta)} \left[\frac{1}{2} + \rho(\delta^+) \right]^2, \\
 &= h(\delta^+, \theta, n) > 0.
 \end{aligned}$$

La deuxième inégalité est satisfaite de fait que $f(\alpha) := \frac{\alpha^2\theta^2}{1-2\alpha\theta}$ est croissant monotone par rapport à α et $0 < \alpha < 1$; c'est, $f(\alpha) \leq f(1)$. La troisième inégalité découle des Lemmes 2.5.1 et 2.7.1. La deuxième égalité peut être dérivée de la troisième équation (2.27). L'inégalité avant la dernière ligne découle de la borne supérieure donnée dans le Lemme 2.5.1. L'inégalité ci-dessus implique que $x^p(\alpha)z^p(\alpha) > 0$, pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$. Donc, $x^p(\alpha)$ et $z^p(\alpha)$ ne changent pas de signe sur $0 \leq \alpha \leq 1$. Puisque $x^p(0) = x^+ > 0$ et $z^p(0) = z^+ > 0$, donc on conclue que $x^p(1) = x^+ + \theta\Delta^p x = x^p > 0$ et $z^p(1) = z^+ + \theta\Delta^p z = z^p > 0$ et la preuve est complète. \square

On définit :

$$v^p = \sqrt{\frac{x^p z^p}{\mu^p}}. \quad (2.29)$$

Il résulte de (2.28) avec $\alpha = 1$, que

$$(v^p)^2 = (v^+)^2 + \frac{\theta^2}{1-2\theta} d_x^p d_z^p, \quad (2.30)$$

et

$$\min(v^p)^2 \geq h(\delta^+, \theta, n). \quad (2.31)$$

2.7.4 La convergence quadratique de la mesure de la proximité après la phase de prédiction

Lemme 2.7.7. [Darvay 2020]

Soit (x^+, y^+, z^+) une solution primale-duale strictement réalisable et $\mu^p = (1-2\theta)\mu$ avec $0 < \theta < \frac{1}{2}$. De plus, soit $h(\delta^+, \theta, n) > \frac{1}{4}$ et on suppose que (x^p, y^p, z^p) désigne l'itération après une étape de prédiction. Alors $v^p > \frac{1}{2}e$ et

$$\delta^p := \delta(x^p, z^p; \mu^p) \leq \frac{\sqrt{h(\delta^+, \theta, n)} \left[3\delta^2 + \frac{\sqrt{2}\theta^2 n}{1-2\theta} \left[\frac{1}{2} + \rho(\delta^+) \right]^2 \right]}{2h(\delta^+, \theta, n) + \sqrt{(\delta^+, \theta, n)} - 1}.$$

Preuve.

Puisque $h(\delta^+, \theta, n) > \frac{1}{4}$, d'après (2.31) on a $\min(v^p)^2 \geq \frac{1}{4}$, ce qui donne $v^p > \frac{1}{2}e$. De plus, du Lemme 2.7.6 on déduit que l'étape de prédiction est strictement réalisable; $x^p > 0$ et $z^p > 0$. Maintenant, par la définition de la mesure de proximité, on a :

$$\begin{aligned}
 \delta^p : &= \delta(x^p, z^p; \mu^p) = \left\| \frac{v^p - (v^p)^2}{2v^p - e} \right\|_2 = \left\| \frac{v^p}{(2v^p - e)(e + v^p)} (e - (v^p)^2) \right\|_2, \\
 &\leq \frac{v_{\min}^p}{(2v_{\min}^p)(v_{\min}^p + 1)} \left\| (e - (v^p)^2) \right\|_2, \\
 &\leq \frac{\sqrt{h(\delta^+, \theta, n)}}{2h(\delta^+, \theta, n) + \sqrt{h(\delta^+, \theta, n) - 1}} \left\| e - (v^p)^2 \right\|_2, \\
 &= \frac{\sqrt{h(\delta^+, \theta, n)}}{2h(\delta^+, \theta, n) + \sqrt{h(\delta^+, \theta, n) - 1}} \left\| e - (v^+)^2 - \frac{\theta^2}{1 - 2\theta} d_x^p d_z^p \right\|_2, \\
 &\leq \frac{\sqrt{h(\delta^+, \theta, n)}}{2h(\delta^+, \theta, n) + \sqrt{h(\delta^+, \theta, n) - 1}} \left[\left\| e - (v^+)^2 \right\|_2 + \frac{\theta^2}{1 - 2\theta} \left\| d_x^p d_z^p \right\|_2 \right],
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

où les deux première inégalités sont dues au Lemme 5.2 dans [8] et (2.31), respectivement. La dernière égalité découle de (2.30) et la dernière inégalité est due à l'inégalité triangulaire.

On donne une limite supérieure pour $\|e - (v^+)^2\|_2$. En utilisant la définition de $v^+ = \sqrt{\frac{x^+ z^+}{\mu}}$ et (2.10), on a :

$$\begin{aligned}
 \|e - (v^+)^2\|_2 &= \|(v + d_x)(v + d_z) - e\|_2, \\
 &= \|v^2 + v(d_x + d_z) - e + d_x d_z\|_2, \\
 &\leq \|v^2 + v p_v - e\|_2 + \left\| \frac{p_v^2 - q_v^2}{4} \right\|_2.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

De plus, la troisième équation du système (2.11) donne :

$$\begin{aligned}
 v^2 + v p_v - e &= v^2 + \frac{2v^2(e - v)}{2v - e} - e, \\
 &= \frac{(v - e)^2}{2v - e}, \\
 &\leq \frac{(v - e)^2 v^2}{(2v - e)^2} = \frac{p_v^2}{4}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

En utilisant (2.33), (2.34) et le fait que $\|x^2\|_2 \leq \|x\|_2^2$, on a :

$$\|e - (v^+)^2\|_2 \leq \frac{\|p_v\|_2^2}{4} + \frac{\|p_v\|_2^2}{4} + \frac{\|q_v\|_2^2}{4} \leq 3\delta^2. \tag{2.35}$$

Ainsi, en utilisant (2.35) et les Lemmes 2.5.1 et 2.7.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \|e - (v^+)^2\|_2 + \frac{\theta^2}{1 - 2\theta} \|d_x^p d_z^p\|_2 &\leq 3\delta^2 + \frac{\theta^2}{2\sqrt{2}(1 - 2\theta)} \|d_x^p + d_z^p\|_2^2, \\
 &= 3\delta^2 + \frac{\sqrt{2}\theta^2}{1 - 2\theta} \|v^+\|_2^2, \\
 &\leq 3\delta^2 + \frac{\sqrt{2}\theta^2 n}{1 - 2\theta} \left[\frac{1}{2} + \rho(\delta^+) \right]^2.
 \end{aligned}$$

La substitution de cette borne dans (2.32) donne l'inégalité souhaitée. □

2.7.5 L'influence du nouveau itéré en saut de dualité après la phase de prédiction

Le but de l'algorithme est de réduire le saut de dualité produit de la paire primale-duale. Par conséquent, pour mesurer cette réduction, dans le Lemme suivant on donne une borne supérieure pour le saut de dualité obtenu après la phase de prédiction.

Lemme 2.7.8. [Darvay 2020]

Supposons que $\delta := \delta(x, z; \mu) < \frac{1}{2}$ et $v > \frac{1}{2}e$. De plus, soit $0 < \theta < \frac{1}{2}$.

Alors

$$(x^p)^t z^p \leq \mu^p \left(n + \frac{1}{4} \right).$$

Preuve.

En utilisant (2.29) et (2.30), on obtient :

$$\begin{aligned} (x^p)^t z^p &= \mu^p e^t (v^p)^2 = (1 - 2\theta) \mu e^t \left[(v^+)^2 + \frac{\theta^2}{1 - 2\theta} d_x^p d_z^p \right], \\ &= (1 - 2\theta) (x^+)^t z^+ + \mu \theta^2 (d_x^p)^t d_z^p, \\ &\leq \mu (1 - 2\theta) \left(n + \frac{1}{4} \right), \\ &= \mu^p \left(n + \frac{1}{4} \right), \end{aligned}$$

où l'inégalité est due au Lemme 2.7.5 et $(d_x^p)^T d_z^p = 0$. Ceci termine la preuve. \square

2.7.6 La mise à jour du paramètre barrière μ après la phase de prédiction

Dans cette section, on veut fixer les paramètres τ et θ avec des valeurs appropriées, qui garantissent qu'après une itération principale, la mesure de proximité ne dépassera pas τ .

Soit $(x, y, z) \in \mathcal{N}(\tau)$ soit l'itéré au début d'une itération principale avec $x > 0$ et $z > 0$ tel que $\delta = \delta(x, z; \mu) \leq \tau \leq \frac{1}{2}$. Après une étape de correcteur, d'après Lemme 2.7.4, on a

$$\delta^+ \leq \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2} \delta^2.$$

Il est évident que le membre droite de l'inégalité ci-dessus est croissante de façon monotone par rapport à δ , et cela implique que :

$$\delta^+ \leq \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2} \tau^2 =: \omega(\tau). \quad (2.36)$$

Après l'étape du prédicteur et la mise à jour de μ , d'après le Lemme 2.7.7, on a :

$$\delta^p := \delta(x^p, z^p; \mu^p) \leq \frac{\sqrt{h(\delta^+, \theta, n)} \left[3\delta^2 + \frac{\sqrt{2n}\theta^2}{1-2\theta} \left[\frac{1}{2} + \rho(\delta^+) \right]^2 \right]}{2h(\delta^+, \theta, n) + \sqrt{h(\delta^+, \theta, n)} - 1}, \quad (2.37)$$

où δ^+ et $h(\delta^+, \theta, n)$ sont définis comme dans le Lemme 2.7.6. On peut facilement vérifier que $h(\delta^+, \theta, n)$ est décroissante par rapport à δ^+ , donc $h(\delta^+, \theta, n) \geq h(\omega(\tau), \theta, n)$.

On considère la fonction $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t + \sqrt{t} - 1}$, pour $t > \frac{1}{4}$. De $f'(t) < 0$, il s'ensuit que f est décroissant, donc :

$$f(h(\delta^+, \theta, n)) \leq f(h(\omega(\tau), \theta, n)). \quad (2.38)$$

En utilisant (2.36), (2.37), (2.38) et le fait que ρ est croissante par rapport à δ^+ , on obtient :

$$\delta^p \leq \frac{\sqrt{h(\omega(\tau), \theta, n)} \left[3\tau^2 + \frac{\sqrt{2n}\theta^2}{1-2\theta} \left[\frac{1}{2} + \rho(\omega(\tau)) \right]^2 \right]}{2h(\omega(\tau), \theta, n) + \sqrt{h(\omega(\tau), \theta, n)} - 1},$$

quand $h(\omega(\tau), \theta, n) > \frac{1}{4}$. Si on prend $\tau = \frac{1}{4}$ et $\theta = \frac{1}{5\sqrt{n}}$, ensuite $\delta^p < \tau$ et $h(\delta^+, \theta, n) > \frac{1}{4}$. Il convient de mentionner, que les itérations après les étapes du correcteur sont dans le voisinage $\mathcal{N}(\omega(\tau))$, tandis que les itérations après les étapes du prédicteur sont dans le voisinage $\mathcal{N}(\tau)$.

2.7.7 Analyse de la complexité

Dans cette partie, on présente le nombre d'itération à partir du quel l'algorithme 3.1.2 converge.

Lemme 2.7.9. [Darvay 2020]

Soit (x^0, y^0, z^0) être une solution primale-duale strictement réalisable $\mu^0 = \frac{(x^0)^t z^0}{n}$ et $\delta(x^0, z^0, \mu^0) \leq \tau$. De plus, soit x^k et z^k les itérations obtenues après k itérations, alors

$$(x^k)^t z^k \leq \epsilon,$$

est satisfaite si :

$$k \geq 1 + \left\lceil \frac{1}{2\theta} \log \frac{5(x^0)^t z^0}{4\epsilon} \right\rceil.$$

Preuve.

D'après le Lemme 2.7.8, on a :

$$(x^k)^t z^k \leq \mu^k \left(n + \frac{1}{4} \right) < \frac{5}{4} (1 - 2\theta)^{k-1} \mu^0 n = \frac{5}{4} (1 - 2\theta)^{k-1} (x^0)^t z^0.$$

Avec

$$\mu^k = (1 - 2\theta)^{k-1} \mu^0.$$

Cela signifie que l'inégalité $(x^k)^t z^k \leq \epsilon$ est satisfait si :

$$\frac{5}{4} (1 - 2\theta)^{k-1} (x^0)^t z^0 \leq \epsilon.$$

En utilisant la fonction log on obtient :

$$(k - 1) \log(1 - 2\theta) + \log \frac{5(x^0)^t z^0}{4} \leq \log \epsilon.$$

Puisque $\log(1 + \xi) \leq \xi$, pour $\xi > -1$, en utilisant $\xi = -2\theta$, on obtient que l'inégalité ci-dessus est vrai si :

$$-2\theta(k - 1) + \log \frac{5(x^0)^t z^0}{4} \leq \log \epsilon.$$

Ceci prouve le Lemme. □

Théorème 2.7.1 (Darvay 2020).

Soit $\tau = \frac{1}{4}$ et $\theta = \frac{1}{5\sqrt{n}}$. Alors, l'algorithme de point intérieur de type correcteur-prédicteur est

bien défini et l'algorithme nécessite au plus $O(5\sqrt{n} \log \frac{5(x^0)^t z^0}{4\epsilon})$ itération.

La sortie est une solution primale-duale strictement réalisable (x, y, z) satisfaisant $x^t z \leq \epsilon$.

Chapitre 3

Implémentation numérique

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux expériences numériques issues de l'application de l'algorithme 2.6.2 sur quelques problèmes linéaires, avec la comparaison entre le choix théorique de θ et une autre alternative du pas de déplacement. On utilise le langage de MATLAB et exécuté sur (R2009a) sous windows intel Core i3.

On note par :

- (x^0, y^0, z^0) : un point initial strictement réalisable et vérifie $\delta(x^0, z^0; \mu^0) \leq \frac{1}{4}$ pour l'algorithme 2.6.2 avec $\mu^0 = \frac{(x^0)^t z^0}{n} > 0$.
- (x^*, y^*, z^*) : la solution optimale du problème primal (**P**) et dual (**D**), respectivement.
- **iter** : le nombre des itérations produites par l'algorithme 2.4.2.
- **CPU** : le temps d'exécution d'un algorithme en seconde.

3.1 Calcul des directions

L'algorithme de point intérieur de type correcteur-prédicteur consiste à résoudre le programme linéaire (**P**) et (**D**) en deux phase comme suite :

3.1.1 La phase de correction

Pour obtenir les directions $(\Delta x; \Delta y; \Delta z)$, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0, \\ \bar{A}^t \frac{\Delta y}{\mu} + d_z = 0, \\ d_x + d_z = \frac{2(v-v^2)}{2v-e}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Tel que :

$$\bar{A} = A \text{diag}\left(\frac{x}{v}\right).$$

On obtient, les directions $(d_x; \Delta y; d_z)$. puis on utilisant le changement de variable :

$$d_x := \frac{v\Delta x}{x}, \quad d_z := \frac{v\Delta z}{z}.$$

Alors on obtient, les directions $(\Delta x; \Delta y; \Delta z)$.

pour éviter ce changement de variable, on résoud le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} A\Delta x = 0, \\ A^t \Delta y + \Delta z = 0, \\ \frac{z}{\mu} \psi' \left(\frac{xz}{\mu} \right) \Delta x + \frac{x}{\mu} \psi' \left(\frac{xz}{\mu} \right) \Delta z = \psi(e) - \psi \left(\frac{xz}{\mu} \right). \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans ce travail, on s'intéresse par $\psi(t) = t - \sqrt{t}$ alors, $\psi'(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

On pose $t = \frac{xz}{\mu}$, alors on obtient :

$$\psi \left(\frac{xz}{\mu} \right) = \frac{xz}{\mu} - \sqrt{\frac{xz}{\mu}}, \quad (3.3)$$

$$\psi' \left(\frac{xz}{\mu} \right) = e - \frac{e}{2\sqrt{\frac{xz}{\mu}}}, \quad (3.4)$$

$$\psi(e) = e - \sqrt{e} = 0. \quad (3.5)$$

En remplaçant (3.3),(3.4) et (3.5) dans la troisième équation de le système (3.2) on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{z}{\mu} \psi' \left(\frac{xz}{\mu} \right) \Delta x + \frac{x}{\mu} \psi' \left(\frac{xz}{\mu} \right) \Delta z = \psi(e) - \psi \left(\frac{xz}{\mu} \right), \\ \Leftrightarrow & \frac{z}{\mu} \left(e - \frac{e}{2\sqrt{\frac{xz}{\mu}}} \right) \Delta x + \frac{x}{\mu} \left(e - \frac{e}{2\sqrt{\frac{xz}{\mu}}} \right) \Delta z = -\frac{xz}{\mu} + \sqrt{\frac{xz}{\mu}}, \\ \Leftrightarrow & z \left(e - \frac{e}{2\sqrt{\frac{xz}{\mu}}} \right) \Delta x + x \left(e - \frac{e}{2\sqrt{\frac{xz}{\mu}}} \right) \Delta z = -xz + \sqrt{xz\mu}, \\ \Leftrightarrow & \left(e - \frac{e}{2\sqrt{\frac{xz}{\mu}}} \right) (z\Delta x + x\Delta z) = -xz + \sqrt{xz\mu}, \\ \Leftrightarrow & (z\Delta x + x\Delta z) = \frac{2\sqrt{\frac{xz}{\mu}}(-xz + \sqrt{xz\mu})}{2\sqrt{\frac{xz}{\mu}} - e}, \\ \Leftrightarrow & (z\Delta x + x\Delta z) = \frac{2xz \left(e - \sqrt{\frac{xz}{\mu}} \right)}{2\sqrt{\frac{xz}{\mu}} - e}, \\ \Leftrightarrow & (z\Delta x + x\Delta z) = p_v. \end{aligned}$$

Tel que

$$p_v = \frac{2xz \left(e - \sqrt{\frac{xz}{\mu}} \right)}{2\sqrt{\frac{xz}{\mu}} - e}, \quad v = \sqrt{\frac{xz}{\mu}} > \frac{1}{2}e.$$

Alors on obtient le le système suivant :

$$\begin{cases} A\Delta x = 0, \\ A^t\Delta y + \Delta z = 0, \\ z\Delta x + x\Delta z = p_v. \end{cases}$$

La forme matricielle est :

$$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A^t & 0 & I \\ 0 & Z & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta x \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_v \end{pmatrix}.$$

Avec $X = \text{diag}(x)$ et $Z = \text{diag}(z)$, ce dernier est un système linéaire carré a $(m + 2n)$ équations, et $(m + 2n)$ inconnus. on résoud ce dernier système pour obtenir $(\Delta x; \Delta y; \Delta z)$.

Par conséquent, le nouveau itéré obtenu après la phase de correction est donnée par :

$$x^+ = x + \Delta x ; y^+ = y + \Delta y ; z^+ = z + \Delta z.$$

3.1.2 La phase de prédiction

Pour calculer les nouvelles directions de la phase de prédiction, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{A}^+ d_x^p = 0, \\ \bar{A}^+ \frac{\Delta^p y}{\mu} + d_z^p = 0, \\ d_x^p + d_z^p = -2v^+. \end{cases} \quad (3.6)$$

Avec

$$v^+ := \sqrt{\frac{x^+ z^+}{\mu}}, \quad \bar{A}^+ := A \text{diag}\left(\frac{x^+}{v^+}\right),$$

et

$$d_x^p := \frac{v^+ \Delta^p x}{x^+}, \quad d_z^p := \frac{v^+ \Delta^p z}{z^+}.$$

En remplaçant v^+ , \bar{A}^+ , d_x^p et d_z^p dans le système (3.6) on obtient :

$$\begin{aligned} \bullet \bar{A}^+ d_x^p = 0 &\iff A \text{diag}\left(\frac{x^+}{v^+}\right) \begin{pmatrix} v^+ \\ x^+ \end{pmatrix} \Delta^p x = 0, \\ &\iff A \Delta^p x = 0, \end{aligned}$$

car

$$\text{diag}\left(\frac{x^+}{v^+}\right) \begin{pmatrix} v^+ \\ x^+ \end{pmatrix} = e.$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \bar{A}^{t+} \frac{\Delta^p y}{\mu} + d_z^p = 0 &\iff \text{diag}\left(\frac{x^+}{v^+}\right) \frac{A^t}{\mu} \Delta^p y + \frac{\sqrt{v^+}}{z^+} \Delta^p z = 0, \\
 &\iff \text{diag}\left(\frac{x^+}{\sqrt{\frac{x^+ z^+}{\mu}}}\right) \frac{A^t}{\mu} \Delta^p y + \frac{\sqrt{\frac{x^+ z^+}{\mu}}}{z^+} \Delta^p z = 0, \\
 &\iff \text{diag}\sqrt{\frac{x^+ \mu}{z^+}} \frac{A^t}{\mu} \Delta^p y + \sqrt{\frac{x^+}{z^+ \mu}} \Delta^p z = 0, \\
 &\iff \left(\text{diag}\sqrt{\frac{x^+}{\mu}} A^t \Delta^p y \right) + \left(\sqrt{\frac{x^+}{\mu}} \Delta^p z \right) = 0, \\
 &\iff (A^t \Delta^p y + I \Delta^p z) = 0. \\
 \\
 \bullet \quad d_x^p + d_z^p = -2v^+ &\iff \frac{v^+}{x^+} \Delta^p x + \frac{v^+}{z^+} \Delta^p z = -2\sqrt{\frac{x^+ z^+}{\mu}}, \\
 &\iff \frac{\sqrt{\frac{x^+ z^+}{\mu}}}{x^+} \Delta^p x + \frac{\sqrt{\frac{x^+ z^+}{\mu}}}{z^+} \Delta^p z = -2\sqrt{\frac{x^+ z^+}{\mu}}, \\
 &\iff \sqrt{\frac{z^+}{\mu x^+}} \Delta^p x + \sqrt{\frac{x^+}{\mu z^+}} \Delta^p z = -2\sqrt{\frac{x^+ z^+}{\mu}}, \\
 &\iff \sqrt{\frac{z^+}{x^+}} \Delta^p x + \sqrt{\frac{x^+}{z^+}} \Delta^p z = -2\sqrt{x^+ z^+},
 \end{aligned}$$

en multipliant les deux membres de cette équation par $\sqrt{x^+ z^+}$, on obtient :

$$z^+ \Delta^p x + x^+ \Delta^p z = p_{v^+},$$

tel que

$$p_{v^+} = -2x^+ z^+.$$

par conséquent, on obtient le nouveau système suivant :

$$\begin{cases} A \Delta x = 0, \\ A^t \Delta^p y + I \Delta^p z = 0, \\ z^+ \Delta^p x + x^+ \Delta^p z = p_{v^+}. \end{cases} \quad (3.7)$$

La forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A^t & 0 & I \\ 0 & Z^+ & X^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^p y \\ \Delta^p x \\ \Delta^p z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{v^+} \end{pmatrix}.$$

Avec $X^+ = \text{diag}(x^+)$ et $Z^+ = \text{diag}(z^+)$, ce dernier est un système linéaire carré à $(m + 2n)$ équations et $(m + 2n)$ inconnus. On résout ce dernier système pour obtenir $(\Delta^p x; \Delta^p y; \Delta^p z)$. Par conséquent, le nouveau itéré obtenu après la phase de correction est donnée par :

$$x^p = x^+ + \theta \Delta^p x ; \quad y^p = y^+ + \theta \Delta^p y ; \quad z^p = z^+ + \theta \Delta^p z.$$

Avec $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$

3.2 Choix alternative du pas de déplacement

On cherche à résoudre le problème linéaire par l'algorithme 2.6.2 selon le choix de θ . On établit numériquement l'influence de pas de déplacement θ durant la phase de prédiction sur le comportement numérique de cet algorithme, dont le choix théorique de θ est donné par :

$$\theta_{tho} = \frac{1}{5\sqrt{n}}$$

et le choix pratique est basé sur la stratégie suivante qui été déjà présenté par Achache [2] pour PL. A chaque phase de prédiction, on calcule le pas de déplacement maximal θ_{alter} tel que

$$x^p = x^+ + \rho\theta_{alter}\Delta^p x$$

et

$$z^p = z^+ + \rho\theta_{alter}\Delta^p z$$

avec

$$\theta_{alter} = \min(\theta_x, \theta_z)$$

et $\rho \in]0, 1[$, où θ_x et θ_z sont les pas de déplacement réalisable primal et dual donnés par :

$$\theta_x \begin{cases} \min(-\frac{x_i}{\Delta^p x_i}) & \text{if } \Delta^p x_i < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{if } \Delta^p x_i \geq 0, \end{cases}$$

et

$$\theta_z \begin{cases} \min(-\frac{z_i}{\Delta^p z_i}) & \text{if } \Delta^p z_i < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{if } \Delta^p z_i \geq 0. \end{cases}$$

3.3 Tests numériques

Exemple 3.1. .

On considère le programme linéaire $n = 5$ et $m = 3$, on a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 42 \\ 41 \\ 24 \end{bmatrix},$$

$$c = [8 \ 8 \ 5 \ 2 \ 2]^t.$$

On prend comme un point réalisable initial

$$x^0 = [10 \ 9 \ 13 \ 7 \ 15]^t,$$

$$y^0 = [3 \ 1 \ 1]^t,$$

$$z^0 = [1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1]^t.$$

On a $\epsilon = 10^{-5}$ avec $\mu^{(0)} = ((x^0)^t z^0)/n = 14$, $\rho = 0.89$ et $\delta(x^0, z^0; \mu^0) = 0.2299 \leq \frac{1}{4}$.

Une solution optimale approximative est donnée par :

$$\begin{aligned} x^* &= [14.3333 \ 13.3333 \ 0.0001 \ 0 \ 10.6667]^t, \\ y^* &= [3.3333 \ 1.3333 \ 2]^t, \\ z^* &= [0 \ 0 \ 0.3333 \ 2 \ 0]^t. \end{aligned}$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est 242.6667.

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus par l'algorithme 2.6.2

	θ_{tho}	θ_{alter}
iter	81	9
CPU	0.0270	0.0157

Tableau 1. Résultats comparatifs entre le choix théorique et alternative de θ .

Exemple 3.2. .

Soient $n = 6$ et $m = 5$, on a

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ -8 & -6 & 2 & 7 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & -5 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 & -1 & 5 & -8 \\ -5 & 1 & -4 & 9 & 10 & 9 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 122 \\ -12 \\ 17 \\ 27 \\ 60 \end{bmatrix},$$

$$c = [-2 \ 26 \ -11 \ 84 \ 77 \ 48]^t.$$

On prend comme un point réalisable initial

$$\begin{aligned} x^0 &= [3 \ 7 \ 4 \ 1 \ 3 \ 5]^t, \\ y^0 &= [2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 5]^t, \\ z^0 &= [3 \ 1 \ 2 \ 8 \ 4 \ 2]^t. \end{aligned}$$

On a $\epsilon = 10^{-5}$ avec $\mu^{(0)} = ((x^0)^t z^0)/n = 9, \rho = 0.89$ et $\delta(x^0, z^0; \mu^0) = 0.2174$.

Une solution optimale approximative est donnée par :

$$\begin{aligned} x^* &= [0 \ 9.7728 \ 4.2460 \ 1.6842 \ 2.2764 \ 3.2544]^t, \\ y^* &= [2.3417 \ 3.9295 \ 1.2587 \ 4.6860 \ 4.8982]^t, \\ z^* &= [2.2157 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t. \end{aligned}$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est 680.3528.

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus par l'algorithme 2.6.2

	θ_{tho}	θ_{alter}
iter	88	9
CPU	0.0260	0.0191

Tableau 2. Résultats comparatifs entre le choix théorique et alternative de θ .

Exemple 3.3. .

Soient $n = 7$ et $m = 4$, on a

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -8 & 6 & -3 & -1 & 7 \\ -5 & 10 & -2 & -9 & 4 & -4 & -5 \\ -8 & 1 & -1 & -3 & -8 & -6 & -6 \\ -4 & -3 & -4 & -2 & 6 & -3 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -99 \\ -88 \\ -204 \\ -94 \end{bmatrix},$$

$$c = [-57 \quad -28 \quad -35 \quad 54 \quad -32 \quad -14 \quad 36]^t.$$

On prend comme un point réalisable initial

$$x^0 = [9 \quad 6 \quad 8 \quad 6 \quad 5 \quad 7 \quad 5]^t,$$

$$y^0 = [5 \quad -3 \quad 4 \quad 2]^t,$$

$$z^0 = [8 \quad 14 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 9 \quad 12]^t.$$

On a $\epsilon = 10^{-5}$ avec $\mu^{(0)} = ((x^0)^t z^0)/n = 74.2857$, $\rho = 0.89$ et $\delta(x^0, z^0; \mu^0) = 0.1778 \leq \frac{1}{4}$.

Une solution optimale approximative est donnée par :

$$x^* = [8.3138 \quad 2.9970 \quad 0 \quad 0 \quad 1.8489 \quad 20.9492 \quad 0]^t,$$

$$y^* = [5.6730 \quad -1.5396 \quad 1.8897 \quad 1.0491]^t,$$

$$z^* = [0 \quad 0 \quad 13.3912 \quad 13.8726 \quad 0 \quad 0 \quad 0.9779]^t.$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est -910.2548.

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus par l'algorithme 2.6.2

	θ_{tho}	θ_{alter}
iter	110	11
CPU	0.0451	0.0239

Tableau 3. Résultats comparatifs entre le choix théorique et alternative de θ .

Exemple 3.4. .

Soient $n = 9$ et $m = 6$, on a

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 7 & -6 & 8 & -2 & 9 & 10 & 7 & -8 \\ -2 & -5 & 8 & 7 & 4 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 7 & 1 & 9 & 8 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & -1 & 1 & 5 & -6 & -8 & 2 & 3 \\ -9 & 5 & 4 & 2 & 7 & -8 & -3 & -4 & 5 \\ 1 & 8 & -5 & -3 & 1 & 2 & 7 & 9 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -91 \\ 67 \\ 240 \\ 126 \\ 17 \\ 51 \end{bmatrix},$$

$$c = [-68 \quad 78 \quad 25 \quad 127 \quad 86 \quad 59 \quad 16 \quad 88 \quad -17]^t.$$

On prend comme un point réalisable initial

$$\begin{aligned}x^0 &= [10 \ 1 \ 4 \ 2 \ 11 \ 1 \ 4 \ 5 \ 9]^t, \\y^0 &= [8 \ 7 \ 2 \ 5 \ 4 \ 2]^t, \\z^0 &= [1 \ 9 \ 2 \ 5 \ 1 \ 8 \ 3 \ 2 \ 1]^t.\end{aligned}$$

On a $\epsilon = 10^{-4}$ avec $\mu^{(0)} = ((x^0)^t z^0)/n = 9.6667, \rho = 0.89$ et $\delta(x^0, z^0; \mu^0) = 0.1956 \leq \frac{1}{4}$.
Une solution optimale approximative est donnée par :

$$\begin{aligned}x^* &= [10.6395 \ 0 \ 4.5250 \ 0 \ 16.5498 \ 0.1372 \ 3.7816 \ 2.1878 \ 0]^t, \\y^* &= [8.2826 \ 7.1190 \ 2.3845 \ 4.9568 \ 3.7238 \ 1.7774]^t, \\z^* &= [0 \ 12.4897 \ 0 \ 1.4492 \ 0 \ 0.0001 \ 0 \ 0 \ 2.0616]^t.\end{aligned}$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est $1.0741.10^3$.

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus par l'algorithme 2.6.2

	θ_{tho}	θ_{alter}
iter	97	10
CPU	0.0297	0.0186

Tableau 4. Résultats comparatifs entre le choix théorique et alternative de θ .

Exemple 3.5. .

Soient $n = 10$ et $m = 8$, on a

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & -8 & -5 & 2 & 6 & 10 & 5 & 2 \\ 2 & -8 & -6 & -7 & 6 & 5 & 5 & 6 & -9 & -8 \\ 6 & 1 & 9 & 5 & -2 & 3 & 10 & -5 & 6 & -7 \\ 6 & 3 & -2 & 1 & -4 & 7 & -8 & 10 & 8 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & -8 & -4 & 4 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & 5 & -8 & 4 & 1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -8 & 8 & 8 & -2 & -1 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & -9 & -5 & 5 & 4 & -8 & -6 & 5 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 47 \\ 79 \\ 63 \\ 107 \\ -108 \\ 85 \\ 246 \\ 155 \end{bmatrix},$$

$$c = [223 \ -115 \ 12 \ -210 \ 106 \ 204 \ 68 \ 125 \ 117 \ 21]^t.$$

On prend comme un point réalisable initial

$$\begin{aligned}x^0 &= [12 \ 1 \ 2 \ 1 \ 14 \ 5 \ 3 \ 4 \ 2 \ 6]^t, \\y^0 &= [9 \ 10 \ 6 \ 5 \ 1 \ 3 \ 10 \ 7]^t, \\z^0 &= [1 \ 15 \ 5 \ 13 \ 1 \ 3 \ 4 \ 3 \ 5 \ 2]^t.\end{aligned}$$

On a $\epsilon = 10^{-4}$ avec $\mu^{(0)} = ((x^0)^t z^0)/n = 12.5, \rho = 0.89$ et $\delta(x^0, z^0; \mu^0) = 0.2218 \leq \frac{1}{4}$.

Une solution optimale approximative est donnée par :

$$\begin{aligned}x^* &= [12.8335 \ 0 \ 3.4809 \ 0 \ 12.2422 \ 5.0197 \ 1.0532 \ 3.1823 \ 0.8708 \ 5.1070]^t, \\y^* &= [8.3769 \ 10.5129 \ 5.6116 \ 5.0390 \ 2.9947 \ 3.0126 \ 11.6177 \ 6.4280]^t,\end{aligned}$$

$$z^* = [0 \quad 25.4914 \quad 0 \quad 13.6418 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t.$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est $5.9039.10^3$.

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus par l'algorithme 2.6.2

	<i>tho</i>	<i>alter</i>
iter	105	9
CPU	0.0226	0.0162

Tableau 5. Résultats comparatifs entre le choix théorique et alternative de θ .

Exemple 3.6.

Soient $n = 15$ et $m = 13$, on a

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 9 & -5 & -14 & -2 & 13 & 11 & 15 & 12 & 25 & 16 & 32 & -17 & -22 \\ -2 & 8 & 5 & 7 & 16 & 25 & -15 & 11 & -9 & 8 & 32 & 18 & -15 & 51 & -10 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & -5 & 9 & -7 & -12 & 16 & -27 & 36 & -24 & -29 & 38 & 42 \\ 9 & 8 & -12 & -31 & 4 & -7 & 8 & 20 & 48 & -64 & 18 & 19 & -27 & 48 & 4 \\ -1 & -2 & -5 & 8 & 4 & -4 & -2 & 34 & -24 & -25 & 17 & 29 & -31 & 26 & 56 \\ 8 & 10 & -9 & -5 & 10 & 4 & -8 & -6 & 6 & 7 & -1 & 3 & -2 & 5 & -8 \\ 4 & 1 & -6 & 4 & -2 & 6 & -8 & 8 & 12 & -2 & -1 & 6 & 17 & 7 & \\ 8 & 11 & 10 & -9 & -5 & 7 & 4 & -8 & -6 & 5 & 26 & 13 & -9 & -36 & 18 \\ 47 & 79 & 63 & 10 & -18 & 53 & 24 & 15 & 68 & 21 & 14 & 13 & -15 & 17 & -7 \\ 22 & 14 & 17 & -29 & -30 & 21 & 45 & 36 & 27 & -31 & -24 & 12 & 9 & 19 & 22 \\ -2 & -5 & -2 & 11 & 12 & 16 & 32 & -17 & 18 & 5 & -6 & 2 & 21 & 13 & -18 \\ 8 & 19 & -12 & -31 & 10 & 7 & 3 & 1 & -5 & 14 & 12 & 6 & -11 & 18 & 11 \\ 14 & 51 & 23 & -19 & 11 & 6 & 34 & -18 & 13 & 19 & 10 & 17 & 29 & 26 & 9 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 317 & 1320 & 835 & 732 & 1847 & 45 & 441 & 432 & 1971 & 888 & -104 & 838 & 1279 \end{bmatrix}^t,$$

$$c = \begin{bmatrix} 1351 & 1897 & 1177 & -741 & -363 & 1853 & 1970 & 668 & 2181 & -114 & 792 & 995 & 343 & 1968 & 321 \end{bmatrix}^t.$$

On prend comme un point réalisable initial $x^0 = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 8 & 1 & 15 & 2 & 5 & 17 & 1 & 9 & 13 & 7 & 1 & 9 & 16 \end{bmatrix}^t$,

$$y^0 = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 & 5 & 1 & 3 & 10 & 7 & 12 & 19 & 21 & 9 & 7 \end{bmatrix}^t, \quad z^0 = \begin{bmatrix} 1 & 16 & 2 & 13 & 1 & 9 & 3 & 1 & 15 & 2 & 1 & 2 & 18 & 2 & 1 \end{bmatrix}^t,$$

On a $\epsilon = 10^{-4}$ avec $\mu^{(0)} = ((x^{(0)t}z^{(0)})/n = 15.6667, \rho = 0.9$ et $\delta(x^0, z^0; \mu^0) = 0.2327 \leq \frac{1}{4}$.

Une solution optimale approximative est donnée par :

$$x^* = [14.0125 \ 0 \ 8.2989 \ 0.9732 \ 13.3889 \ 1.1786 \ 5.1504 \ 15.4611 \ 0.8829 \ 9.6936 \ 12.5683 \ 8.2176 \ 0 \ 9.8387 \ 15.826]^t$$

$$y^* = [8.8205 \ 9.9097 \ 5.876 \ 5.17 \ 1.05 \ 2.5128 \ 10.5706 \ 7.2279 \ 12.1843 \ 18.7913 \ 21.3726 \ 8.9889 \ 6.8437]^t,$$

$$z^* = [0 \ 15.8769 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 23.8163 \ 0 \ 0]^t,$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est $8.9169.10^4$.
 tableau suivant présente les résultats numériques obtenus par l'algorithme 2.6.2

	θ_{tho}	θ_{alter}
iter	136	8
CPU	0.0569	0.0168

Tableau 6. Résultats comparatifs entre le choix théorique et alternative de θ .

Exemple 3.7. .

Soient $n = 18$ et $m = 17$ on a

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 11 & 16 & 14 & 10 & -9 & -4 & 12 & 15 & 17 & 42 & 36 & -15 & 4 & 21 & 21 & 33 \\ 51 & -10 & 18 & 32 & 19 & -13 & 16 & 12 & 10 & 2 & 8 & 5 & 15 & 7 & 35 & -15 & -19 & 14 \\ 56 & 26 & -32 & 17 & -25 & -6 & 8 & -4 & 16 & 27 & -39 & 45 & 10 & 9 & 6 & -12 & 7 & 9 \\ 19 & 11 & 16 & 12 & -5 & -17 & 14 & -11 & -19 & 13 & 21 & 8 & -12 & 4 & -8 & 7 & 23 & -18 \\ 20 & 48 & -63 & 14 & 19 & 36 & -27 & 4 & 41 & 27 & 50 & 63 & -20 & 32 & 66 & 45 & 34 & 19 \\ 14 & 22 & 17 & -29 & 2 & -17 & -1 & 2 & 5 & 18 & 34 & 13 & 21 & 9 & 14 & 34 & 13 & -27 \\ 10 & 5 & 1 & 17 & 19 & 25 & 22 & -21 & -30 & -24 & -25 & 7 & 9 & -3 & 6 & 5 & -8 & -6 \\ 46 & 70 & 9 & -59 & 17 & 81 & 22 & 6 & 10 & 5 & -9 & 13 & 21 & -11 & 33 & -56 & 14 & 16 \\ 15 & -59 & -23 & 31 & 18 & 24 & 67 & 13 & 14 & 54 & -39 & 10 & 4 & -6 & -21 & 37 & 30 & 17 \\ -44 & 21 & -88 & 91 & -33 & -29 & 13 & 21 & 20 & 38 & -8 & -36 & -18 & 13 & 27 & 45 & 12 & 23 \\ 51 & 23 & 14 & -68 & 55 & -28 & 26 & -11 & 6 & -7 & 45 & 17 & -35 & -9 & 22 & -14 & 10 & 9 \\ 11 & -16 & 23 & -19 & -29 & 25 & 9 & 18 & 21 & 49 & 14 & -13 & 6 & -3 & 18 & 41 & 48 & 53 \\ 26 & 17 & -10 & -1 & 11 & 20 & 12 & 14 & -16 & 6 & 34 & 11 & -6 & 4 & 22 & 60 & 46 & 51 \\ 17 & 6 & -17 & -28 & 6 & 18 & 52 & -12 & -21 & 16 & 77 & 29 & 26 & 50 & -30 & 11 & 16 & -2 \\ 8 & 19 & 61 & 80 & 71 & 26 & -41 & -9 & -5 & 27 & 14 & -88 & -51 & 15 & 20 & 31 & 22 & -17 \\ 18 & -29 & 17 & 31 & 6 & -34 & 10 & -17 & 26 & 9 & -7 & 33 & -22 & 37 & 41 & 10 & -11 & 22 \\ 14 & -26 & 18 & 11 & -2 & 5 & -4 & 12 & 16 & 35 & -19 & 12 & -14 & 9 & 26 & 17 & 14 & -19 \end{bmatrix}$$

$$b = [1652 \ 1591 \ 980 \ 386 \ 3060 \ 1029 \ 78 \ -16 \ 1236 \ 632 \ 630 \ 1027 \ 1749 \ 666 \ 1062 \ 1679 \ 992]^t,$$

$$c = [2063 \ 1965 \ 751 \ 1138 \ 1942 \ -21 \ -211 \ -475 \ 1682 \ 1569 \ 3256 \ 1326 \ -757 \ 1294 \ 3740 \ 1293 \ 1472 \ 2029]^t.$$

On prend comme un point réalisable initial

$$x^0 = [11 \ 1 \ 5 \ 12 \ 7 \ 1 \ 2 \ 5 \ 12 \ 1 \ 7 \ 13 \ 4 \ 1 \ 7 \ 14 \ 1 \ 2]^t,$$

$$y^0 = [22 \ 15 \ -5 \ 12 \ 17 \ 3 \ 4 \ 8 \ -12 \ 11 \ 17 \ 16 \ -8 \ 4 \ 11 \ 20 \ -6]^t,$$

$$z^0 = [1 \ 14 \ 2 \ 1 \ 2 \ 14 \ 7 \ 2 \ 1 \ 13 \ 2 \ 1 \ 3 \ 12 \ 2 \ 1 \ 13 \ 7]^t.$$

On a $\epsilon = 10^{-4}$ avec $\mu^{(0)} = ((x^0)^t z^0)/n = 12.7778, \rho = 0.9$ et $\delta(x^0, z^0; \mu^0) = 0.2482 \leq \frac{1}{4}$.

Une solution optimale approximative est donnée par :

$$x^* = [10.9407 \ 1.3032 \ 5.2473 \ 12.0278 \ 6.8655 \ 1.22 \ 2.1124 \ 5.1849 \ 11.8104 \ 1.4931 \ 7.1376 \ 13.2997 \ 3.5676 \ 0.6783 \ 6.7844 \ 14.3127 \ 0 \ 2.1714]^t$$

$$y^* = [22.1341 \ 14.7693 \ -4.9554 \ 11.9192 \ 16.7897 \ 3.0414 \ 3.7455 \ 8.3139 \ -12.0118 \ 11.1156 \ 16.8928 \ 15.7754 \ -7.7422 \ 4.1773 \ 11.1 \ 20.2289 \ -5.8313]^t,$$

$$z^* = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t,$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est $1.6270.10^5$.

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus par l'algorithme 2.6.2

	θ_{tho}	θ_{alter}
iter	149	9
CPU	0.0752	0.0241

Tableau 7. Résultats comparatifs entre le choix théorique et alternative de θ .

Discussins :

Pour voir l'influence du pas de déplacement durant la phase de prédiction sur le comportement numérique de l'algorithme, on a fait une comparaison entre le choix théorique de θ et le choix alternative. On déduit que malgré le choix théorique garantie la convergence de la méthode, il conduit à des résultats non favorable c'est à dire la convergence de l'algorithme correspondant est lente, mais dans le choix alternative on obtient des résultats encourageant.

Conclusion

Dans ce travail, on s'intéresse à résoudre le problème linéaire (PL) par une méthode primale-duale de point intérieur de type correcteur-prédicteur basée sur une nouvelle direction de recherche, on utilise la transformation algébrique présentée par Darvay (2020), il introduit ψ à l'équation de centralité pour obtenir des nouvelles directions de recherche et on note que Darvay a montré la complexité polynomiale de cet algorithme qui de l'ordre $O(5\sqrt{n} \log \frac{5(x^0)^t z^0}{4\epsilon})$, avec les paramètres qui ont un rôle important dans l'algorithme : $\theta = \frac{1}{5\sqrt{n}}$, $\tau = \frac{1}{4}$ et la mesure de proximité $\delta(x^0, z^0; \mu^0) \leq \frac{1}{4}$ et $v^0 = \sqrt{\frac{x^0 z^0}{\mu^0}} > \frac{1}{2}$ justifiant la difficulté (le point initial qui vérifie la condition de trajectoire central, et être positive).

Notons que notre étude a réalisé les contributions suivantes :

- On a appliqué cet algorithme sur quelques problèmes linéaires pour montrer son efficacité.
- On compare entre le choix théorique durant la phase de prédiction $\theta = \frac{1}{5\sqrt{n}}$ et autre alternative de pas de déplacement pour voir l'influence de θ sur le comportement numérique de cet algorithme.

Bibliographie

- [1] M. Achache. A new primal-dual path-following method for convex quadratic programming. *Computational and Applied Mathematics*, (25) pp. 97-110, (2006).
- [2] M. Achache. A new parameterized kernel function for LO yielding the best known iteration bound for a large-update interior point algorithm, article (2015).
- [3] M. Achache, L. Guerra. A full-Nesterov-Todd-step primal-dual interior point algorithm for convex quadratic semidefinite optimization. *Computational and Applied Mathematics*,(231) : 581-590, (2014).
- [4] B. Bounibane, Extension de quelques méthodes de points intérieurs pour un problème d'optimisation, thèse doctorat, université de Batna 2, (2019).
- [5] Zs. Darvay, New interior point algorithms in linear programming, *Advanced modeling and optimisation* , 51-92, (2003).
- [6] Zs. Darvay, A new predictor-corrector algorithm for linear programming. *Alkalm Mat Laplok* 22 : 135-161, (2005).
- [7] Zs. Darvay, predictor-corrector algorithm for linearly constrained convex optimization. *Studia Uni Babeş-Bolyai Ser Inform* 54(2) : 121-138, (2009).
- [8] Zs. Darvay, I. M. Papp and P. R. Takács, Complexity analysis of a full-Newton step interior-point method for linear optimization, *Period. Math. Hungar.* 73(1), 27–42, (2016).
- [9] Zs. Darvay, P-R. Takács. New method for determining search directions for interior-point algorithms in linear optimization. *Optimization Letter.* (2017).
- [10] Zs. Darvay, T. Illés, B. Kheirfam, P. R. Rigó, A corrector-predictor interior-point method with new search direction for linear optimization. *Central European Journal of Operation Research*, 28 : 1123-1140, (2020).
- [11] Zs. Darvay, T. Illés, P. Renáta Rigó, Predictor-corrector interior-point algorithm for $P_*(k)$ -linear complementarity problems based on a new type of algebraic equivalent transformation technique, *European Journal of Operation Research* (298), 25-35, (2022).
- [12] H. Debbiche, Cours optimisation sans contrainte, Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj, (2015).
- [13] J. CH. Gilbert, Extrait de Fragments d'optimisation Différentiable : Théorie et Algorithmes, mémoire de master en France, (2020).
- [14] N. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica.* 4, 373-395, (1984).
- [15] B. Kheirfam, An infeasible interior point method for the monotone SDLCP based on a transformation of the central path. *J Appl Math Comput*, 57(1), 685-702. (2018).
- [16] E. De Klerk. Interior point methods for semidefinite programming. Master of Science in the Faculty of Engineering University of Pretoria, (1997).

-
- [17] N. Megiddo, Pathways to the optimal set in linear programming. In : N.Megiddo (ed) Progress in mathematical programming. Interior-point and related methods. Springer, New York : 131-158, (1989).
- [18] S. Mehrotra, On the implementation of a primal-dual interior point metho. SIAM J Optim, 24(1), 575-601, (1992).
- [19] Y. E. Nesterov and A. S. Nemirovskii, Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming (SIAM, Philadelphia, PA, 1994).
- [20] Z. Ramdani. Cours d'optimisation non linéaire, Université Mohamed El Bachir El Ibrahim de Bordj Bou Arréridj, (2021).
- [21] Z. Ramdani. Cours de programmation linéaire, Université Mohamed El Bachir El Ibrahim de Bordj Bou Arréridj, (2021).
- [22] C. Roos, T. Terlaky, J. Ph. Vial, Theory and algorithms for linear optimization. An interior point approach. John-Wiley. Sons, Chichester, UK, (1997).
- [23] Gy. Sonnevend, An "analytic center" for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming. In : A Prékopa, J Szelezsán, B Strazi-cký (eds) System Modelling and Optimization : Proceedings of the 12th IFIP-Conference held in Budapest, Hungary, September 1985, Lecture Notes in Control and Information Sciences. vol. 84 Springer, Berlin, 866-876, (1986).
- [24] T. Terlaky, An easy way to teach interior-point methods. Eur J Oper Res 130(1), 1-19, (2001).
- [25] Gy Sonnevend, J Stoer, G Zhao, On the complexity of following the central path by linear extrapolation in linear programming. Methods Oper Res 62 : 19-31, (1990).
- [26] SJ. Wright, Primal-dual interior-point methods . SIAM, Philadelphia, (1997).

• ملخص:

في هذه العمل، درسنا خوارزمية اولية-ثانوية للنقاط الداخلية لحل البرمجة الخطية من النوع مصحح-مقرب التي تعتمد على إتجاهات البحث الجديدة وذلك بادخال تحويل جبري على المعادلة المركزية $xz = \mu e$. من خلال دراسة (Darvay (2020) $\psi(t) = t - \sqrt{t}$ حيث اثبت أن الخوارزمية ذات تعقيد حدودي، أما نحن فقمنا باختبارات عددية للمقارنة بين الإختيار النظري لخطوة الإزاحة أثناء مرحلة مقرب والإختيار البديل لمعرفة تأثير هذه الوسائط على السلوك العددي لهذه الخوارزمية.

• الكلمات المفتاحية:

طرق النقاط الداخلية، البرمجة الخطية، خوارزمية مصحح-مقرب، تحويل جبري مكافئ، تعقيد حدودي.

• Résumé :

Dans ce travail, on a étudié un algorithme primal-dual de points intérieurs de type correcteur-prédicteur basé sur une nouvelle direction de recherche pour résoudre un problème linéaire (PL) on déduit une transformation algébrique sur l'équation de centralité $xz = \mu e$. Par l'étude de Darvay(2020) ou $\psi(t) = t - \sqrt{t}$ qui a prouvé que l'algorithme a une complexité polynomiale, nous avons fait des tests numériques comparatives entre le choix théorique du pas de déplacement durant la phase de prédiction et le choix alternative pour voir l'influence de ces paramètres sur le comportement numérique de cet algorithme.

• Mots clés :

Méthode de points intérieurs, Programmation linéaire, Algorithme correcteur- predicteur, transformation algébrique équivalente, Complexité polynomiale.

• Abstract:

In this work, we studied a primal-dual algorithm of interior points of corrector-predictor type based on a new search direction to solve a linear problem (LP), we have introduce algebraic transformation on the equation of centrality $xz = \mu e$.

By the study of Darvay(2020), $\psi(t) = t - \sqrt{t}$ who proved that the algorithm has polynomial complexity, we have done comparative numerical tests between the theoretical choice of the displacement step during the prediction phase and the alternative choice to see the influence of these parameters on the numerical behavior of this algorithm.

• Keywords:

interior point method, linear optimisation, corrector-predictor algorithm, algebraic equivalent transformation, polynomial complexity.