

Université Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme

MASTER

FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Systèmes dynamique

Thème

Résolution numérique des équations différentielles
d'ordre fractionnaire par la méthode de perturbation
d'homotopie

Présenté par :
MELIZI Meriem

Sous la direction de :
Mme. ABBAS DJOUAHAR

Soutenu publiquement, le 21 juin 2023, devant le jury composé de :

ZEGHDANE REBIHA MCA Président
MAADADI ASMA MCB Examineur

Année universitaire
2022/2023

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES	III
LISTE DES TABLEAUX	IV
INTRODUCTION	1
1 NOTIONS DE BASE DU CALCUL FRACTIONNAIRE	3
1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire	3
1.1.1 Fonction Gamma	3
1.1.2 Fonction Bêta	5
1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler	6
1.2 Intégration fractionnaire	6
1.2.1 Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$	6
1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	7
1.2.3 Quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	8
1.3 Dérivées fractionnaires	9
1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	9
1.3.2 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	10
1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov	10
1.3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	12
1.3.5 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo	12
1.3.6 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo	13
2 LA MÉTHODE DE PERTURBATION D'HOMOTOPIE COMBINÉE AVEC QUELQUES TRANSFORMATIONS	14
2.1 Méthode de perturbation de l'homotopie HPM	14
2.1.1 Description de la méthode	15
2.1.2 Analyse de la convergence	15
2.1.3 Applications de la méthode HPM :	20
2.2 Méthode de perturbation de l'homotopie combinée avec la transformation ZZ	23
2.2.1 Description de la méthode HPM combinée avec transformation ZZ fractionnaire (HPZZTMF)	24

2.2.2	Applications de la méthode ZZHPM :	25
2.3	Méthode de perturbation d'homotopie combinée avec la transformation de Laplace (LHPTM)	30
2.3.1	Description de la méthode LHPTM	31
2.3.2	Application de la méthode LHPTM :	33
3	LA MÉTHODE HPM MODIFIÉE POUR RÉSOUDRE L'ÉQUATION KDV D'ORDRE FRACTIONNAIRE	37
3.1	Méthode HPM modifiée	37
3.2	Description de la méthode MIGHPM	38
3.3	Applications de la méthode MIGHPM	40
3.4	Convergence de la solution	47
	CONCLUSION	49
	BIBLIOGRAPHIE	50

TABLE DES FIGURES

2.1	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode HPM de l'équation (2.31)	22
2.2	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode HPM de l'équation (2.31) avec $x = 1$	22
2.3	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode ZZHPM de l'équation (2.47)	27
2.4	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec trois termes par la méthode ZZHPM de l'équation (2.56)	29
2.5	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec trois termes par la méthode ZZHPM de l'équation (2.56) avec $x = 1$	29
2.6	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode LHPTM de l'équation (2.78)	35
2.7	la solution approximative de l'équation (2.78) pour différentes valeurs de α par la méthode LHPTM avec $t = 0.5$	36
3.1	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec neuf termes par la méthode MIGHPM de l'équation (3.13)	44
3.2	La solution approchée de l'équation (3.13) pour différentes valeurs de α par la méthode MIGHPM avec $t = 0.5$	45
3.3	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et les solutions approximatives avec cinq termes par la méthode MIGHPM de l'équation (3.39)	49

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode LHPTM pour différentes valeurs d'ordre α de l'équation (2.78) avec $t = 0.5$	35
3.1	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec neuf termes par la méthode MIGHPM de l'équation (3.13) pour $\alpha = 1$ et des valeurs différentes de $t = 0, 1, 2, 3$	43
3.2	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec cinq termes par la méthode MIGHPM de l'équation (3.39) avec $\alpha = 1$ et pour différentes de $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$	48

LISTE DES NOTATIONS ET ABRÉVIATIONS

- \mathbb{N} :ensemble des nombres entiers naturels.
- \mathbb{R} :ensemble des nombres réels.
- \mathbb{C} :ensemble des nombres complexes.
- \mathbb{Z} :ensemble des nombres entiers
- $L^p(\Omega)$:espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty[$ intégrables sur Ω .
- $C(\Omega)$:espace des fonctions continues sur Ω .
- $C^n(\Omega)$:espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois et $f^{(n)}$ continues.
- $AC(\Omega)$:espace des fonctions absolument continues sur Ω .
- $AC^n(\Omega)$:espace des fonctions dérivables à l'ordre $n - 1$ et elle que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.
- $\Gamma(\cdot)$:fonction Gamma.
- $B(\cdot, \cdot)$:fonction Bêta.
- $E_\alpha(\cdot)$:fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.
- $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$:fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
- D^n :dérivation d'ordre entier.
- I_{a+}^α :intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α à gauche.
- I_{b-}^α :intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α à droite.
- ${}^{RL}D_{a+}^\alpha$:dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α à gauche.
- ${}^{GD}I_{a+}^\alpha$:intégrale fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'ordre α à gauche .
- ${}^{GD}D_{a+}^\alpha$:dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'ordre α à gauche .
- ${}^CD_{a+}^\alpha$:dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α à gauche .
- HPM :méthode de perturbation d'homotopie.
- HPZZTMF :méthode de perturbation d'homotopie combinée avec la transformation ZZ.
- LHPTM :méthode de perturbation d'homotopie combinée avec la transformation de Laplace.
- MIGHPM :méthode de perturbation d'homotopie modifiée avec le condition initiale.
- KDV :Korteweg-de Vries.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je remercie **mon dieu** qui ma donné la santé et la puissance pour terminer ce modeste travail.

Mon remerciements s'adressent à : **Mm. ABBAS Djouahar**. Tout au long de ce travail, elle a su m'apporter un soutien constant, une disponibilité, une écoute, une confiance et des conseils précieux et avisés à la hauteur de ses compétences et de ses réelles qualités humaines.

Je tiens á remercier les membres du jury **MAADADI Asma, ZEGHDANE Rebiha**, pour l'honneur qu'il m'ont fait, en acceptant de juger mon travail.

Mes remerciements s'adressent également á tous mes enseignants tout long de ma formation á l'université de Bordj Bou-Arréridj .

J'adresse également mes sincères remerciements et ma gratitude á mon cher père **Djamel** et á ma chère mère **Malika** pour l'aide qu'ils m'ont apportée, pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin,je remercie ma famille **Imane, Sara, Anis, Ania, kenzi, Moncef** et mes proches et á tous ceux qui ont contribué de près ou de loin á l'accomplissement de ce modeste travail par leur aide, leur sympathie et leur soutien moral.

Merci

DÉDICACES

Ce travail est dédié

À celui qui a trempé la coupe vide, pour me donner une goutte d'amour, à celui dont le bout des doigts était épuisé pour me donner une goutte d'amour, pour offrir un moment de bonheur, à celui qui a récolté des épines sur mon chemin, pour ouvrir la voie de la connaissance au grand cœur. **Mon chéri Père Djamel.**

À celle qui m'a nourri d'amour et de tendresse, au symbole de l'amour, et au nom de la guérison, au cœur qui brille en blanc. **Ma chère mère Malika .**

À Mon chère frère **Anis** et mes sœurs **Sarah, Imane**, leurs enfants **Ania, Kenzi**, merci pour leur dévouement, leur compréhension, qui en plus de m'avoir encouragé tout le long de mes études, m'ont consacré beaucoup de temps et disponibilité, et qui par leur soutien, leurs conseils et leur amour, m'ont permis d'arriver jusqu'à ici car ils ont toujours cru en moi, Merci de m'avoir toujours soutenu.

À mon meilleure amie **Asrar** et compagnon que nous n'avons jamais rencontré sans rire, qui est ma boîte de secrets et mon analgésique que j'ai le chance d'avoir dans ma vie.

À ma proche **Noor** merci pour ta patience et tes bons conseils. Merci infiniment.

A tous mes collègues de ma promotion.

INTRODUCTION

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ses origines remontent à la fin du 17^{ième} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? Cette lettre de l'hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'hôpital a demandé pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Le calcul fractionnaire s'est développé, plusieurs applications sont apparues dans de nombreux domaines scientifiques. En 1974, Oldham et Spanier ont écrit le premier livre du calcul fractionnaire, qui regroupe des définitions et les propriétés des opérateurs intégral-différentielles d'ordre fractionnaire. Sur le plan mathématiques, il faut citer le livre de Samko, Kilbas et Marichev paru en 1993 [9], qui regroupe un ensemble de définitions et de théories importantes sur le calcul d'ordre fractionnaire. En 1999, Podlubny [12] a écrit un livre qui présente plusieurs applications issues du calcul fractionnaire. Après 2000, plusieurs conférences, livres [11] et articles ont été écrits sur la théorie et l'application du calcul fractionnaire.

Dans tous ces domaines scientifiques, il est important de trouver la solution des équations différentielles d'ordre non entier. Généralement, on ne peut pas trouver l'expression explicite de ces équations et on doit donc utiliser des méthodes numériques pour obtenir la solution approchée. Plusieurs méthodes analytiques et numériques ont été proposées pour résoudre les équations différentielles ordinaires fractionnaires, les équations intégrales et les équations différentielles partielles fractionnaires d'intérêt physique. Les plus couramment utilisées sont la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), la méthode d'itération variationnelle (VIM), la méthode des différences finies (FDM), la méthode de la transformation différentielle (DTM), la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) .

Dans [1, 4, 7, 13, 16], les auteurs ont appliqué la méthode de perturbation d'homotopie aux équations différentielles fractionnaires, qui a été proposée par Ji-Huan He en 1998 [7]. La solution numérique selon la méthode HPM est considérée comme une série de fonctions qui converge rapidement vers la solution exacte (quand elle existe). Cette méthode permet de transformer la résolution d'un problème difficile en un problème simple à résoudre.

L'objectif principal de ce mémoire est d'appliquer la méthode de perturbation d'homotopie **HPM**, **HPM modifiée**. De même qu'une étude est faite sur la combinaison de chacune de ces méthodes avec **la transformation de Laplace** et **ZZ**, pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Notre mémoire est organisé selon le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions de base liées à la théorie de calcul fractionnaire dont on aura besoin dans la suite de ce travail telle que la fonction Gamma, Bêta et la fonction de Mittag-Leffler, intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, Caputo.

Nous apportons dans le deuxième chapitre, la description de la méthode de perturbation d'homotopie et nous donnons quelques méthodes numériques comme la méthode **HPM**, la méthode perturbation d'homotopie combinée avec quelques transformations, et à la fin quelques applications pour la résolution des équations d'ordre fractionnaire temporel avec la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Dans le troisième chapitre, nous prenons comme exemple l'équation **Korteweg-de Vries** la résoudre par la méthode de perturbation d'homotopie modifiée.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE DU CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions spécifiques utiles : la fonction **Gamma**, la fonction **Bêta** et la fonction **Mittag-Leffler**. Ensuite, nous présenterons la définition d'une dérivée fractionnaire puis on étudie les trois approches des dérivés fractionnaires les plus connues : **Grünwald-Letnikov**, **Riemann-Liouville** et de **Caputo** ainsi que leurs propriétés.

1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions : Gamma, Bêta et l'exponentielle de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses applications.

1.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma d'Euler** $\Gamma(z)$ qui a été introduite par le mathématicien Suisse Léonarde Euler en 1927, dans son objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entier.

Définition 1.1. [12] La fonction **Gamma** $\Gamma(z)$ est définie par l'intégral suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0), \quad (1.1)$$

avec $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

Exemple 1.1.1.

$$1.\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{t=+\infty} = 1.$$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \sqrt{\pi}$.

• On utilise le changement de variable $t = \tau^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt, \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau, \quad (\text{d'après L'intégrale de Gauss}) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

3. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Proposition 1.1.

$$1. \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0). \tag{1.2}$$

2. $\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$.

3. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

PREUVE.

1. La relation de **récurrence** qu'on peut la démontrer par une intégration par partie

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt, \\ &= \left[-e^{-t} t^z\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

2. En utilisant la relation (1.2) nous obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n), \\ &= n(n - 1)\Gamma(n - 2), \\ &= n(n - 1)(n - 2) \dots \Gamma(1), \\ &= n!. \end{aligned}$$

3. Nous allons démontrer la propriété (3) par **récurrence** pour $n \in \mathbb{N}$

• Pour $n = 0$, on a

$$\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{0!\sqrt{\pi}}{4^0(0!)} = \sqrt{\pi}.$$

• Supposons que la formule est vérifiée pour $(n - 1)$ et considérons n . C-à-d que supposons que $\Gamma\left((n - 1) + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2(n - 1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}((n - 1)!)}$, est vérifiée.

Alors :

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{(2(n-1))! \sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\
 &= \frac{2n}{2n-2} \frac{(2n-2)! \sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\
 &= \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}.
 \end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n . □

Remarque 1.1.1.

1. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$.
2. $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$.

1.1.2 Fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.2. [12] La fonction **Bêta** est un type d'intégrale d'Euler définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (p, q \in \mathbb{C}) \quad (Re(p) > 0, Re(q) > 0). \quad (1.3)$$

Théorème 1.2. *Les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation suivante :*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (1.4)$$

Proposition 1.3.

1. $B(p, q) = B(q, p)$.

2. $B(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha}$.

PREUVE.

1.

$$\begin{aligned}
 B(p, q) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \\
 &= \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)} \\
 &= B(q, p).
 \end{aligned}$$

Donc, la fonction **Bêta** est symétrique.

2.

$$\begin{aligned} B(\alpha, 1) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

□

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Pour La fonction **Mittag-Leffler**, qui tient son nom du mathématicien Suédois Gösta Mittag-Leffler (1903). Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, elle joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.

Définition 1.3. [12] Pour $z \in \mathbb{C}$ la fonction de Mittag-Leffler est définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}; \quad (\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0), \quad (1.5)$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée à deux paramètre est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}; \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{C}). \quad (1.6)$$

Exemple 1.1.2.

1. $E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$

2. $E_{2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).$

3. $E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}.$

4. $E_{2,2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} \sinh z.$

1.2 Intégration fractionnaire

Le but de cette partie est d'introduire les deux plus importantes approches du calcul fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville**, y compris quelques unes de leurs propriétés

1.2.1 Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Définition 1.4. [9] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$

Notons par $I_a^1 f$ la primitive qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a, b] : (I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (1.7)$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned}
 I_a^2 f(t) &= \int_a^t I^1 f(u) du, \\
 &= \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau) d\tau \right) du, \\
 &= \int_a^t \left(\int_\tau^t du \right) f(\tau) d\tau, \\
 &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

En répétant n fois, on arrive à la $n^{\text{ième}}$ primitive de la fonction f sous la forme :

$$\left(I_a^{(n)} f \right) (t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{(n-1)} f(\tau) d\tau, \quad t > a, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.8)$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$.

1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.5. [9] L'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** à gauche $\alpha > 0$ de f est définie par

$$\forall t \in [a, b], (I_{a+}^\alpha f) (t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.9)$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** à droite d'ordre $\alpha > 0$ de f , par

$$\forall t \in [a, b]; (I_{b-}^\alpha f) (t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Remarque 1.2.1.

Dans tout ce qui suit, on utilise uniquement l'**intégrale à gauche**.

Exemple 1.2.1.

• L'intégrale de $f(x) = (x - a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = a + (x - a)\tau$, qui à donne

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau.$$

En utilisant les relations (1.3) et (1.4), on obtient

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} (x - a)^{\beta+\alpha}. \quad (1.11)$$

On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ où on a

$$\begin{aligned} I_a^1(x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(x-a)^{\beta+1}, \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\beta+1}. \end{aligned}$$

1.2.3 Quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Théorème 1.4. [9] Si $f \in L^1([a, b])$ alors $I_a^\alpha f$ existe pour tout $\alpha > 0$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a, b])$.

Proposition 1.5. [9] Pour $(\alpha > 0)$, $(\beta > 0)$ et pour toute fonction $f \in L^1([a, b])$, on a :

$$I_a^\alpha [I_a^\beta f(t)] = I_a^{\alpha+\beta} f(t) = I_a^\beta [I_a^\alpha f(t)],$$

pour presque tout $t \in [a, b]$.

PREUVE.

$$I_a^\alpha [I_a^\beta f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds.$$

Où $f \in L^1([a, b])$ D'après le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha [I_a^\beta f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) ds d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $s = \tau + u(t - \tau)$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha [I_a^\beta f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du, \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau. \end{aligned}$$

Est vrai presque pour tout $t \in [a, b]$ où B désigne la fonction Bêta. D'après la relation (1.4) on trouve

$$\begin{aligned} I_a^\alpha [I_a^\beta f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau, \\ &= I_a^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.6. [9] Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :

$$1. (I_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

$$2. (I_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}.$$

1.3 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions mathématiques concernant la dérivation d'ordre fractionnaire. On va présenter les trois célèbres approches de la dérivée fractionnaire : l'approche de **Riemann-Liouville** (1847), **Caputo** (1967) et de **Grünwald-Letnikov** (1868).

1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.6. [9] Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n$. La dérivée fractionnaire d'ordre α d'une fonction f au sens de **Riemann-Liouville** est définie par

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha f(t) &= D^n (I^{n-\alpha}) f(t), \\ {}^{RL}D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.12)$$

En particulier, si $\alpha = n-1 \in \mathbb{N}$, $a=0$, alors

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{n-1} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) \int_0^t f(\tau) d\tau, \\ &= \int_0^t \frac{d^n f(\tau)}{dt^n} d\tau, \\ &= f^{n-1}(t). \end{aligned}$$

Ainsi la dérivée fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** coïncide avec la dérivée classique pour ($\alpha \in \mathbb{N}$).

Si de plus ($0 < \alpha < 1$), alors $n = 1$, d'où

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, \quad t > a.$$

Exemple 1.3.1.

• **La dérivée de $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville**

Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $\beta > -1$, alors on a :

$${}^{RL}D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau. \quad (1.13)$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha} (t-a)^\beta, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{\beta+n-\alpha}, \quad (\text{d'après (1.11)}). \end{aligned}$$

Alors

$${}^{RL}D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (1.14)$$

Pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.5$ on a :

$${}^{RL}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En particulier, si ($\beta = 0$), la dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** d'une fonction constante $f(t) = C$ est non nulle, sa valeur est :

$${}^{RL}D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

1.3.2 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'opérateur de dérivation au sens de **Riemann-Liouville** possède les propriétés résumées dans la proposition suivantes :

Proposition 1.7. *Pour $n-1 < \alpha \leq n$, $m-1 < \beta \leq m$, tel que $n, m \in \mathbb{N}^*$.*

- ${}^{RL}D^\alpha(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda {}^{RL}D^\alpha f(t) + \mu {}^{RL}D^\alpha g(t)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- *En générale :* ${}^{RL}D^\alpha ({}^{RL}D^\beta f(t)) \neq {}^{RL}D^\beta ({}^{RL}D^\alpha f(t))$.
- *Pour $f \in L^1([a,b])$, l'égalité :* ${}^{RL}D^\alpha (I^\alpha (f(t))) = f(t)$, *est vraie pour presque tout $t \in [a, b]$.*
- *Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a,b])$, la relation*

$${}^{RL}D^\beta (I^\alpha (f(t))) = I^{\alpha-\beta} f(t),$$

est vraie presque par tout sur $[a, b]$.

- *Si $\beta \geq \alpha > 0$, et la dérivée fractionnaire $D^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a :*

$${}^{RL}D^\beta (I^\alpha (f(t))) = {}^{RL}D^{\alpha-\beta} f(t).$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

On peut utiliser une approche alternative pour définir les expressions des dérivées fractionnaires en considérant des différences finies. Il est connu que la dérivée entière d'une fonction $f(x)$ s'exprime sous la forme suivante [9]

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \quad (1.15)$$

En utilisant la définition (1.15), la dérivée seconde est définie par :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}.$$

Pour généraliser les relations précédentes, la dérivée générale d'ordre, $n \in \mathbb{N}$, aura la forme suivante :

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(h)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x-jh).$$

Où $\binom{n}{j}$ représentent les coefficients binomiaux définis par la

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

La dérivée d'ordre non entier peut être obtenue en remplaçant un entier n par un réel α positif et en utilisant l'égalité suivante :

$$\alpha \in \mathbb{R}^+, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (-1)^j \binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)}.$$

Définition 1.7. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $f(a) = 0$.

• **La dérivée fractionnaire** au sens de **Grünwald-Letnikov** est définie par l'expression :

$${}^{GL}(D_a^\alpha f)(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(h)^\alpha} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f(x-jh) \quad \text{avec} \quad K = \left\lceil \frac{x-a}{h} \right\rceil.$$

• L'intégrale fractionnaire au sens de **Grünwald-Letnikov** se définit en utilisant la propriété suivante :

$${}^{GL}(I_a^\alpha f(x)) = {}^{GL}(D_a^{-\alpha} f(x)) \quad \text{avec} \quad \alpha > 0.$$

En effet, dans le cas $\alpha = 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} {}^{GL}(D_a^{-\alpha} f(x)) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(h)^{-1}} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(1)\Gamma(j+1)} f(x-jh), \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{K-1} f(x_i) h, \\ &= \int_a^x f(t) dt = {}^{GL}(I_a^1 f(x)), \quad \text{avec} \quad i = k-j \quad \text{et} \quad x_i = a + ih. \end{aligned}$$

La définition de **Grünwald-Letnikov** présente la dérivée fractionnaire sous la forme d'une série infinie. Cette formulation est moins utilisée dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. Cependant cette forme est généralement employée pour obtenir une approximation numérique des dérivées ou intégrales fractionnaires.

1.3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.8. [9] Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) et f une fonction telle que $f \in AC^n([a, b])$. La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de **Caputo** définie par

a) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}^c D_a^\alpha f(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \\ &= \left(I_a^{n - \alpha} D^n f \right) (t). \end{aligned} \quad (1.16)$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a, b])$, alors :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, \\ &= I_a^{1 - \alpha} f'(t). \end{aligned}$$

b) Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

Exemple 1.3.2.

1. La dérivée de $f(t) = (t - a)^\beta$ au sens de Caputo.

Soit α un entier et $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ avec $\beta > n - 1$, alors on a

$${}^c D^\alpha (t - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} [(\tau - a)^\beta]^{(n)} d\tau,$$

on a :

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - n},$$

d'où

$${}^c D^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}.$$

2. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$${}^c D^\alpha C = 0.$$

1.3.5 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Proposition 1.8. Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Caputo existent, pour λ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors on a :

- ${}^c D^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^c D^\alpha f(t) + \mu {}^c D^\alpha g(t)$, (Linéarité).

- Soit $\alpha > 0, \beta > 0$, si $f \in C^q([a, b])$, $q = [\alpha + \beta] + 1$, alors

$$\left({}^c D_a^\alpha \quad {}^c D_a^\beta f \right) (t) = \left({}^c D_a^{\alpha + \beta} f \right) (t).$$

1.3.6 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

La relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par :

Théorème 1.9. *Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), supposons que f est une fonction telle que ${}^c D_a^\alpha f(t)$ et ${}^{RL} D_a^\alpha f(t)$ existent, alors,*

$${}^c D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) \right).$$

Remarque 1.3.1. Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, on déduit que :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t).$$

Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

L'opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville mais pas un inverse à droite car : Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ on a :

$${}^c D_a^\alpha (I^\alpha f) = f(t) \text{ et } I^\alpha ({}^c D_a^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k,$$

en particulier si $0 < \alpha \leq 1$, on a $I^\alpha ({}^c D_a^\alpha f(t)) = f(t) - f(a)$.

L'avantage principal de l'approche Caputo et que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier.

CHAPITRE 2

LA MÉTHODE DE PERTURBATION D'HOMOTOPIE COMBINÉE AVEC QUELQUES TRANSFORMATIONS

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode **HPM** et la méthode **HPM** combinée avec quelques transformations pour traiter d'une manière simple et efficace les équations au dérivée partielle non-linéaire d'ordre fractionnaire.

Nous commencerons par présenter les principes de base de la méthode **HPM**, la méthode **ZZHPTM**, et la méthode **LHPTM**.

A la fin, quelques applications pour la résolution des équations fractionnaires temporelle au sens de Caputo.

2.1 Méthode de perturbation de l'homotopie **HPM**

La méthode de perturbation d'homotopie a été proposée et développée par le mathématicien chinois **Ji-Haun-He** [7]. Cette méthode a été largement utilisée pour résoudre des problèmes de aux limites non-linéaire et linéaire et à valeurs initiales.

La méthode de perturbation d'homotopie est un outil mathématique puissant pour étudier une grande variété de problèmes apparaissant dans différents domaines. Elle est obtenue avec succès par de combinaison de la théorie de l'homotopie dans la topologie avec la théorie de la perturbation.

La solution numérique selon la méthode **HPM** est de considérée une série de fonctions qui converge rapidement vers la solution exacte (quand elle existe).

Cette méthode permet de transformer la résolution d'une problème difficile en un problème simple à résoudre.

La méthode de perturbation d'homotopie est basée sur l'hypothèse de l'existence d'un petit paramètre $p \in [0, 1]$ affublé à l'équation étudiée.

2.1.1 Description de la méthode

Pour illustrer l'idée de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non linéaire suivante [7]

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites

$$B \left(u, \frac{\partial u}{\partial n} \right) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (2.2)$$

où A est un opérateur différentiel général, B est un opérateur de limite, $f(r)$ est une fonction analytique connue et Γ est la frontière du domaine Ω .

En général, l'opérateur A peut être divisé en deux parties L et N , où L est un opérateur linéaire, tandis que N est non linéaire.

L'équation (2.1) peut être réécrite comme suit :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (2.3)$$

Par la technique d'homotopie, on construit une homotopie $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait à

$$H(v, p) = (1 - p) [L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad p \in [0, 1], r \in \Omega, \quad (2.4)$$

où

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (2.5)$$

où $p \in [0, 1]$ est un paramètre d'homotopie et u_0 est une approximation initiale de (2.1) qui satisfait les conditions aux limites. A partir de (2.4) et (2.5), on a

$$\begin{aligned} H(v, 0) &= L(v) - L(u_0) = 0, \\ H(v, 1) &= A(v) - f(r) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le changement de p de zéro à l'unité transforme $u_0(r)$ en $u(r)$, en topologie avec cette dernière propriété la fonction $v(r; p)$ est une fonction itératif, est appelée homotopie. Maintenant, supposons que la solution de (2.4) et (2.5) s'écrit comme une série de puissance en p

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i. \quad (2.7)$$

La solution approximative de (2.1) peut être obtenue en mettant $p = 1$

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (2.8)$$

2.1.2 Analyse de la convergence

Dans cette section, on étudie la convergence de la méthode **HPM**, on peut réécrire (2.5) comme suit [2]

$$L(v) - L(u_0) = p [f(r) - L(u_0) - N(v)]. \quad (2.9)$$

En remplaçant (2.7) dans (2.9) , on obtient

$$L\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) - L(u_0) = p \left[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) \right]. \quad (2.10)$$

Ainsi

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p \left[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) \right]. \quad (2.11)$$

Selon le développement de Maclaurin de $N(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i)$ par rapport à p , nous aurons :

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) \right)_{p=0} p^n. \quad (2.12)$$

D'après [6], on obtient

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) \right)_{p=0} = \left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^n v_i p^i\right) \right)_{p=0}. \quad (2.13)$$

Donc

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^n v_i p^i\right) \right)_{p=0} p^n. \quad (2.14)$$

On pose

$$H_n(v_0, v_1, \dots, v_n) = \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^n v_i p^i\right) \right)_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

H_n sont appelés polynômes de **He**. Alors

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i. \quad (2.16)$$

En remplaçant (2.16) dans (2.11) , on trouve

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p \left[f(r) - L(u_0) - \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i \right]. \quad (2.17)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances p , on trouve

$$\begin{cases} p^0 : L(v_0) - L(u_0) = 0, \\ p^1 : L(v_1) = f(r) - L(u_0) - H_0, \\ p^2 : L(v_2) = -H_1, \\ p^3 : L(v_3) = -H_2, \\ p^4 : L(v_4) = -H_3, \\ \vdots \\ p^{n+1} : L(v_{n+1}) = -H_n, \\ \vdots \end{cases} \quad (2.18)$$

En utilisant l'opérateur inverse L^{-1}

$$\begin{cases} v_0 = u_0, \\ v_1 = L^{-1}[f(r)] - u_0 - L^{-1}(H_0), \\ v_2 = -L^{-1}(H_1), \\ v_3 = -L^{-1}(H_2), \\ v_4 = -L^{-1}(H_3), \\ \vdots \\ v_{n+1} = -L^{-1}(H_n), \\ \vdots \end{cases} \quad (2.19)$$

Description de la méthode de perturbation d'homotopie pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires

Pour illustrer l'algorithme de modification du **HPM**, considérerons l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante avec une dérivée temporelle de n'importe quel ordre de la forme

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) + f(x, t), \quad t > 0, \quad (2.20)$$

où L est un opérateur linéaire et N est un opérateur non linéaire qui pourrait également inclure d'autres dérivées fractionnaires d'ordre inférieur à α . La fonction f est une fonction connue et ${}^c D_t^\alpha, m - 1 < \alpha \leq m$, est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , soumise aux conditions initiales

$$u^k(x, 0) = g_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m - 1.$$

Selon la méthode **HPM**, on peut construire l'homotopie suivante

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} - L(u, u_x, u_{xx}) - f(x, t) = p \left[\frac{\partial u^m}{\partial t^m} + N(u, u_x, u_{xx}) - {}^c D_t^\alpha u \right], \quad (2.21)$$

où

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} - f(x, t) = p \left[\frac{\partial u^m}{\partial t^m} + L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) - {}^c D_t^\alpha u \right], \quad (2.22)$$

où $p \in [0, 1]$. Le paramètre d'homotopie p varie toujours de zéro à l'unité. dans le cas $p = 0$, l'équation (2.21) devient l'équation linéaire suivante

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} = L(u, u_x, u_{xx}) + f(x, t), \quad (2.23)$$

et l'équation (2.22) linéaire

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} = f(x, t), \quad (2.24)$$

et lorsqu'il s'agit d'une équation (2.23) ou (2.24) s'avère être l'équation différentielle fractionnaire originale (2.20). L'hypothèse de base est que la solution de l'équation (2.21) ou (2.22) peut être

écrit comme une série de puissance en p :

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots \quad (2.25)$$

Donc la solution approximative donnée par

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t). \quad (2.26)$$

Analyse de convergence de la méthode de perturbation d'homotopie pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires

Considérons les équations aux dérivées partielles fractionnaires suivantes : [5]

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha u(t) &= f(t, u(t), D^{n_1}u(t), D^{n_2}u(t), \dots, D^{n_q}u(t)), t \in [0, T] \\ u^k(0) &= b^k, \quad u(x, t) = g(x, t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.27)$$

où $D_t^\alpha = \partial^\alpha / \partial t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , $m-1 \leq \alpha \leq m$, $n_i \in \mathbb{N}$ pour chaque i .

On considère que l'application $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, avec l'hypothèse que $f(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$ existe avec des dérivées continues et bornées $\partial f / \partial u_i$ satisfaisant à la condition de Lipschitz

$$\begin{aligned} &| f(t, u_1(t), D^{n_1}u_1(t), \dots, D^{n_q}u_1(t)) - f(t, u_2(t), D^{n_1}u_2(t), \dots, D^{n_q}u_2(t)) | \\ &\leq L | (u_1, D^{n_1}u_1, D^{n_2}u_1, \dots, D^{n_q}u_1) - (u_2, D^{n_1}u_2, D^{n_2}u_2, \dots, D^{n_q}u_2) |, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

où L est la constante de Lipschitz.

Pour illustrer les concepts de base de la méthode **HPM** pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires (2.27) avec les conditions initiales, nous construisons l'homotopie suivante :

$$(1-p)^c D_t^\alpha u(x, t) + p({}^c D_t^\alpha u(x, t) - f(t, u(t), D^{n_1}u, D^{n_2}u(t), \dots, D^{n_q}u(t))) = 0.$$

Ou bien

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = p(f(t, u(t), D^{n_1}u(t), D^{n_2}u(t), \dots, D^{n_q}u(t))). \quad (2.29)$$

En substituant (2.25) dans (2.29) et en mettant les termes en équation avec une puissance identique de p , on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : {}^c D_t^\alpha u_0(x, t) &= f(x, t), \\ p^1 : {}^c D_t^\alpha u_1(x, t) &= f(t, u_0, D^{n_1}u_0(t), D^{n_2}u_0(t), \dots, D^{n_q}u_0(t)), \\ p^2 : {}^c D_t^\alpha u_2(x, t) &= f(t, u_1, D^{n_1}u_1(t), D^{n_2}u_1(t), \dots, D^{n_q}u_1(t)), \\ p^3 : {}^c D_t^\alpha u_3(x, t) &= f(t, u_2, D^{n_1}u_2(t), D^{n_2}u_2(t), \dots, D^{n_q}u_2(t)), \\ &\vdots \\ p^n : {}^c D_t^\alpha u_n(x, t) &= f(t, u_{n-1}, D^{n_1}u_{n-1}(t), D^{n_2}u_{n-1}(t), \dots, D^{n_q}u_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

En utilisant l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville I^α , qui est l'opérateur inverse de la dérivée de Caputo ${}^cD_t^\alpha$ (si $0 < \alpha \leq 1$) dans les deux côtés de systèmes précédent ($p^n, n = 0, 1, 2, \dots$), les premiers termes de la solution sont données par

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b^k t^k}{k!} + I^\alpha(f(x, t)), \\ u_1(x, t) &= I^\alpha(f(t, u_0, D^{n_1}u_0(t), D^{n_2}u_0(t), \dots, D^{n_q}u_0(t))), \\ u_2(x, t) &= I^\alpha(f(t, u_1, D^{n_1}u_1(t), D^{n_2}u_1(t), \dots, D^{n_q}u_1(t))), \\ &\vdots \\ u_n(x, t) &= I^\alpha(f(t, u_{n-1}, D^{n_1}u_{n-1}(t), D^{n_2}u_{n-1}(t), \dots, D^{n_q}u_{n-1}(t))). \end{aligned}$$

La solution de (2.27) est donnée par

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots \quad (2.30)$$

• Définissons que $(C[0, T], \|\cdot\|)$ est l'espace de Banach, l'espace de toutes les fonctions continues sur $[0, T]$ avec la norme

$$\|f(t)\| = \max_{\forall t \in [0, T]} |f(t)|.$$

Théorème 2.1. (*Existence et l'unicité des solutions*) Si f une fonction qui satisfait la condition de Lipschitz (2.28), alors le problème (2.27) admet une solution unique $u(x, t)$, pour tout $0 < \gamma < 1$.

Théorème 2.2. (*Convergence*) Soient $u_n(x, t)$ et $u(x, t)$ définies dans un espace de Banach $(C[0, T], \|\cdot\|)$. Alors la solution sous forme de série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ définies dans (2.30) converge vers la solution de (2.27), pour tout $0 < \gamma < 1$.

Théorème 2.3. (*Estimation d'erreur*)

L'estimation de l'erreur de la solution en série (2.30) du problème (2.27) est donnée par

$$\left| u(x, t) - \sum_{i=0}^m u_i(x, t) \right| \leq \frac{\gamma^{m+1}}{(1-\gamma)} \|u_0(t)\|.$$

Remarque 2.1.1. Dans ce travail, nous considérons la dérivée fractionnaire temporelle au sens de Caputo.

Définition 2.1. La dérivée fractionnaire temporelle au sens de Caputo de u , est définie pour $t > 0, \alpha \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} {}^cD_t^\alpha u(x, t) &= \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau, & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m}, & \alpha = m. \end{cases} \end{aligned}$$

2.1.3 Applications de la méthode HPM :

• On considère l'équation de **Fokker-Planck** non-linéaire d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u = \left(\frac{x}{3}u\right)_x - \left(\frac{4}{x}u^2\right)_x + (u^2)_{xx}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.31)$$

Avec la condition initiale

$$u(x, 0) = x^2.$$

La solution exacte de l'équation (2.31) pour $\alpha = 1$ est donnée par

$$u(x, t) = x^2 e^t.$$

Selon la méthode **HPM**, on construit l'homotopie suivante

$$(1 - p) \left({}^c D_t^\alpha u - {}^c D_t^\alpha u^0 \right) = p \left[\left(\frac{x}{3}u\right)_x - \left(\frac{4}{x}u^2\right)_x + (u^2)_{xx} \right],$$

où

$${}^c D_t^\alpha u = p \left[\left(\frac{x}{3}u\right)_x - \left(\frac{4}{x}u^2\right)_x + (u^2)_{xx} \right]. \quad (2.32)$$

En remplaçant (2.25) dans (2.32)

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) &= p \left[\left[\left(\frac{x}{3}\right) (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) \right]_x - \left[\left(\frac{4}{x}\right) (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)^2 \right]_{xx} \right] \\ &\quad + p \left[(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)^2 \right]_{xx}. \end{aligned}$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances p , on trouve

$$p^0 : {}^c D_t^\alpha u_0 = 0,$$

$$p^1 : {}^c D_t^\alpha u_1 = \left[\frac{x}{3}u_0 \right]_x - \left[\frac{4}{x}u_0u_0 \right]_x + [u_0u_0]_{xx},$$

$$p^2 : {}^c D_t^\alpha u_2 = \left[\frac{x}{3}u_1 \right]_x - \left[\frac{8}{x}u_0u_1 \right]_x + 2[u_0u_1]_{xx}, \quad (2.33)$$

$$p^3 : {}^c D_t^\alpha u_3 = \left[\frac{x}{3}u_2 \right]_x - \left[\frac{8}{x}u_0u_2 \right]_x - \left[\frac{x}{4}u_1u_1 \right]_x + 2[u_0u_2]_{xx} + [u_1u_1]_{xx},$$

⋮

En utilisant l'opérateur fractionnaire de **Riemann-Liouville** I^α sur les deux côtés de (2.33),

on obtient

$$\bullet I^\alpha ({}^c D_t^\alpha u_0) = u_0(x, t) = x^2.$$

$$\begin{aligned} \bullet I^\alpha ({}^c D_t^\alpha u_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left(\left(\frac{x}{3} u_0 \right)_x - \left(\frac{4}{x} u_0 u_0 \right)_x + (u_0 u_0)_{xx} \right) d\tau, \\ &= x^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \end{aligned}$$

$$u_1(x, t) = x^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

$$\begin{aligned} \bullet I^\alpha ({}^c D_t^\alpha u_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left(\left(\frac{x}{3} u_1 \right)_x - \left(\frac{8}{x} u_0 u_1 \right)_x + 2(u_0 u_1)_{xx} \right) d\tau, \\ u_2(x, t) &= x^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet I^\alpha ({}^c D_t^\alpha u_3) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left(\left(\frac{x}{3} u_2 \right)_x - \left(\frac{8}{x} u_0 u_2 \right)_x - \left(\frac{x}{4} u_1 u_1 \right)_x + 2(u_0 u_2)_{xx} + (u_1 u_1)_{xx} \right) d\tau, \\ u_3(x, t) &= x^2 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

⋮

Alors

$$u_0(x, t) = x^2,$$

$$u_1(x, t) = x^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)},$$

$$u_2(x, t) = x^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)},$$

$$u_3(x, t) = x^2 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)},$$

⋮

Les quatre premiers termes de la solution de la série de décomposition sont donnés par

$$u(x, t) = x^2 + x^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + x^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + x^2 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots$$

D'où

$$u(x, t) = x^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = x^2 E_\alpha(t^\alpha),$$

où $E_\alpha(t^\alpha)$ est une fonction de **Mittag-leffler** définie comme :

$$E_\alpha(t^\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}.$$

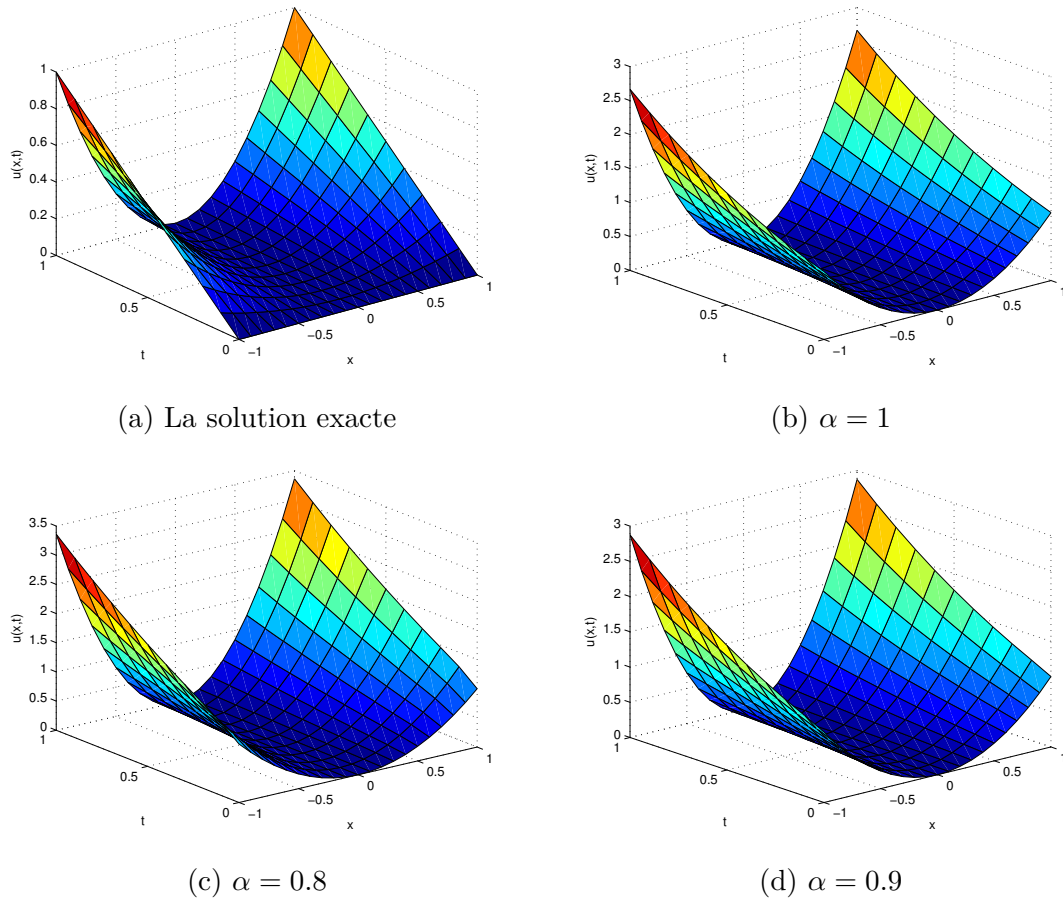


FIGURE 2.1 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode HPM de l'équation (2.31) .

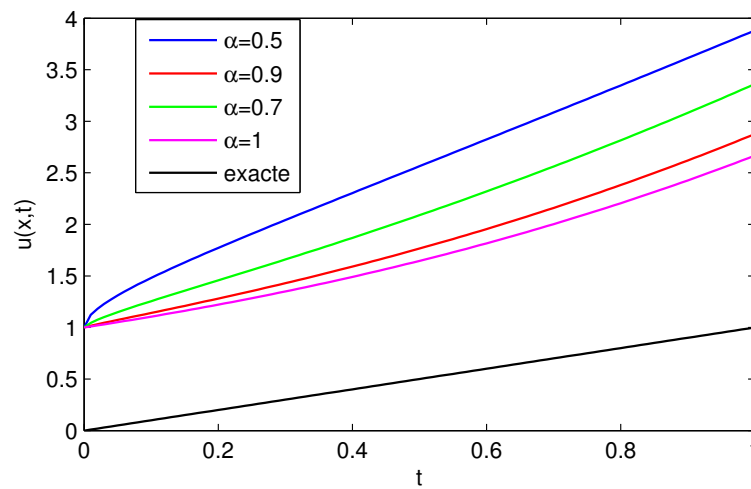


FIGURE 2.2 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode HPM de l'équation (2.31) avec $x = 1$.

2.2 Méthode de perturbation de l'homotopie combinée avec la transformation ZZ

Dans cette section, nous présentons la méthode **HPM combinée avec la transformation ZZ**, cette méthode à consiste combiner deux méthodes puissantes pour résoudre des équations différentielles partielles non linéaires d'ordre fractionnaire.

Nous commençons par présente la définition et quelques résultats fondamentaux sur les propriétés de **transformation ZZ** [15]

Définitions et propriétés de la transformée ZZ.

Définition 2.2. [15] Soit $u(t)$ une fonction définie pour tout $t \geq 0$. La transformée ZZ de $u(t)$ est la fonction $T(v, s)$ définie par

$$Z[u(t)] = T(v, s) = s \int_0^{\infty} u(vt)e^{-st} dt. \quad (2.34)$$

Théorème 2.4. Si $u(t)$ est continue par morceaux dans tout intervalle fini $0 \leq t \leq K$ et d'ordre exponentiel γ pour $t > K$, alors sa transformée ZZ $T(v, s)$ existe pour tout $s > \gamma, v > \gamma$.

PREUVE. (voir[15]) □

Quelques propriétés de la transformée ZZ

- La transformée ZZ de la dérivée n^{th} de $u(t)$ est donnée par

$$Z[u^{(n)}(t)] = \frac{s^n}{v^n} Z[u(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{n-k}}{v^{n-k}} u^{(k)}(0). \quad (2.35)$$

- Quelques fonctions élémentaires et leurs transformations :

$u(t)$	$Z[u(t)]$
1	1
t	$\frac{v}{s}$
t^n	$n! \frac{v^n}{s^n}, n = 0, 1, 2, \dots$
t^α	$\Gamma(\alpha + 1) \frac{v^\alpha}{s^\alpha}, \alpha \geq 0.$

Théorème 2.5. La transformée ZZ de la dérivée fractionnaire temporelle au sens de Caputo est définie comme suit

$$Z\left[({}^c D_{0+}^\alpha u)(t); (v, s)\right] = \frac{s^\alpha}{v^\alpha} Z[u(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-k}}{v^{\alpha-k}} u^{(k)}(0) \quad , \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

PREUVE. (voir[14]) □

2.2.1 Description de la méthode HPM combinée avec transformation ZZ fractionnaire (HPZZTMF)

Pour illustrer l'idée de base de cette méthode, nous considérons une équation différentielle partielle fractionnaire non linéaire générale non homogène avec des conditions initiales de la forme [13]

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t), \quad (2.37)$$

où $t > 0, x \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq 1$ et la condition initiale

$$u(x, 0) = h(x). \quad (2.38)$$

${}^c D_t^\alpha u(x, t)$, est la dérivée fractionnaire temporelle au sens Caputo de la fonction $u(x, t)$, R est l'opérateur différentiel linéaire, N représentent l'opérateur différentiel non linéaire général, et $g(x, t)$ est le terme de source.

En appliquant **la transformation ZZ** de part et d'autre de (2.37) et en utilisant la propriété de différentiation de cette transformation (2.36), on obtient

$$Z[u(x, t)] = h(x) + \frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z[g(x, t)] - \frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z[Ru(x, t) + Nu(x, t)], \quad (2.39)$$

en utilisant **la transformation ZZ inverse** des deux côtés des équations du système (2.39), puis en utilisant les conditions initiales (2.38), nous avons

$$u(x, t) = G(x, t) - Z^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z[Ru(x, t) + Nu(x, t)] \right), \quad (2.40)$$

où $G(x, t)$ représente les termes provenant des termes non homogènes et des conditions initiales prescrites. En appliquant la technique classique de perturbation, on peut supposer que la solution peut être exprimée sous la forme d'une série de puissances en p , comme indiqué ci-dessous

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t), \quad (2.41)$$

où le paramètre d'homotopie p est considéré comme un petit paramètre ($p \in [0, 1]$). Les termes non linéaires peuvent être décomposés comme suit

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u), \quad (2.42)$$

où H_n sont les polynômes de **He** [6] de $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$, et ils peuvent être calculés par les formules suivantes

$$H_n(u_0, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.43)$$

Utilisation (2.41) et (2.42), on peut réécrire (2.40) comme suit

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n = G(x, t) - p \left(Z^{-1} \left[\frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z \left[R \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \right] \right] \right). \quad (2.44)$$

Il s'agit le lien de **la transformation ZZ** et des méthodes de perturbation de l'homotopie (**ZZHPM**) utilisant les polynômes de **He**. Maintenant, en égalisant le coefficient de la puissance correspondante de p des deux côtés de (2.44), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= G(x, t), \\ &\vdots \\ u_n(x, t) &= -Z^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z [R u_{n-1}(x, t) + H_{n-1}(u)] \right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, la solution approximative est calculée par

$$u(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, t). \quad (2.46)$$

La convergence de la série (2.46) a été prouvée dans ([3, 4]).

2.2.2 Applications de la méthode ZZHPM :

Exemple 2.2.1.

• Nous considérons l'équation **Korteweg-de Vries** (KDV) temporelle d'ordre fractionnaire suivante :

$${}^c D_t^\alpha u - 3 \left(u^2 \right)_x + u_{xxx} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.47)$$

avec la condition initial

$$u(x, 0) = 6x. \quad (2.48)$$

En appliquant **la transformation ZZ** dans (2.47), on obtient

$$Z [{}^c D_t^\alpha u] - 3Z \left[\left(u^2 \right)_x \right] + Z [u_{xxx}] = 0, \quad (2.49)$$

en utilisant la propriété de différentiation de cette transformation (2.36) dans (2.49), puis en utilisant les conditions initiales (2.48), on obtient

$$Z[u(x, t)] = 6x + \frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z \left[3 \left(u^2 \right)_x - u_{xxx} \right], \quad (2.50)$$

en utilisant **la transformée ZZ inverse** des deux côtés de (2.50), nous aurons

$$u(x, t) = 6x + Z^{-1} \left[\frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z \left[3 \left(u^2 \right)_x - u_{xxx} \right] \right], \quad (2.51)$$

on applique la méthode **HPM**, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n = 6x + p \left(Z^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z \left[3 \sum_{n=0}^{\infty} p^n (H_n(u))_x - \sum_{n=0}^{\infty} (p^n u_n)_{xxx} \right] \right) \right), \quad (2.52)$$

en égalisant le coefficient de la puissance de p de part et d'autre de (2.52), on obtient

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, t) &= 6x, \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, t) &= Z^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z \left[3 (H_{n-1}(u))_x - (u_{n-1})_{xxx} \right] \right), \end{aligned} \quad (2.53)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, les premières composantes des polynômes de He sont données par

$$\begin{aligned} H_0 &= u_0^2, \\ H_1 &= 2u_0 u_1, \\ H_2 &= 2u_0 u_2 + u_1^2, \\ H_3 &= 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.54)$$

En utilisant les polynômes de He (2.54) et les formules d'itération (2.53), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= 6x, \\ u_1(x, t) &= 6x(36) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha, \\ u_2(x, t) &= 6x(36)^2 \frac{2}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha}, \\ u_3(x, t) &= 6x(36)^3 \frac{4\Gamma^2(\alpha + 1) + \Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.55)$$

Les quatre premiers termes de la solution de la série de pour (2.47) sont donnés par

$$u(x, t) = 6x + 6x(36) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha + 6x(36)^2 \frac{2}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha} + 6x(36)^3 \frac{4\Gamma^2(\alpha + 1) + \Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha} + \dots$$

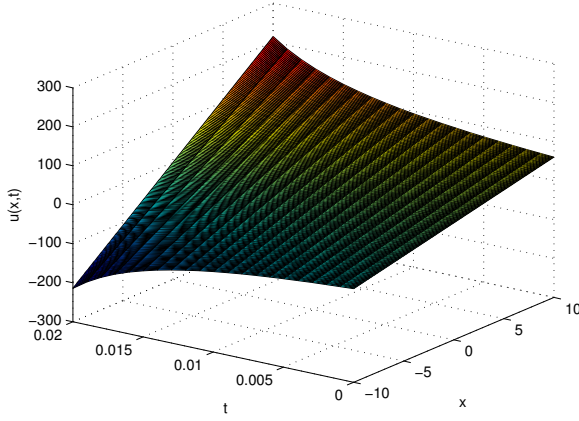
Les trois premiers termes de la solution pour le cas $\alpha = 1$, sont donnés par

$$u(x, t) = 6x \left[1 + (36)t + (36)^2 t^2 + \dots \right],$$

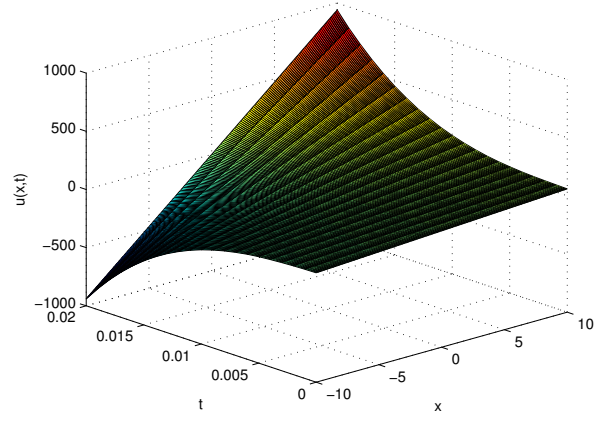
cela donne

$$u(x, t) = \frac{6x}{1 - 36t}, |36t| < 1,$$

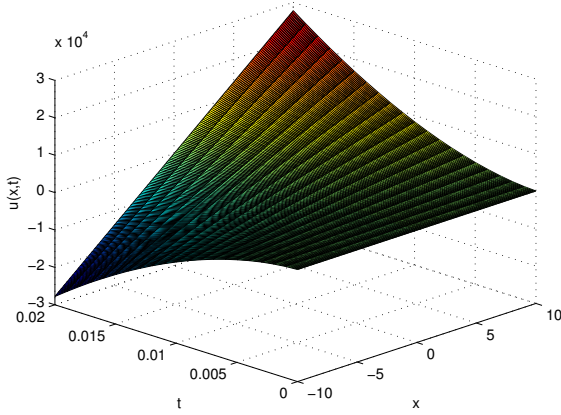
qui est la solution exacte de l'équation de **KdV** présentée dans [16].



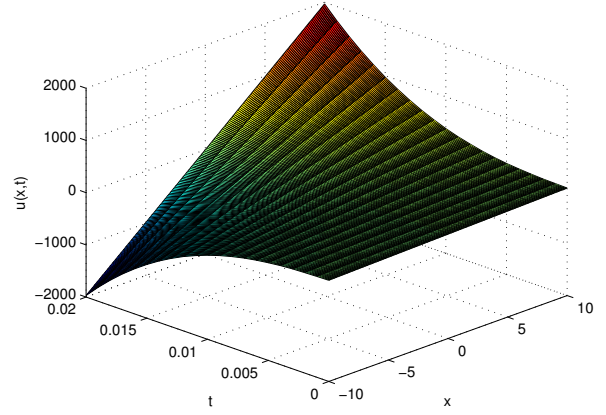
(a) La solution exacte



(b) $\alpha = 1$



(c) $\alpha = 0.6$



(d) $\alpha = 0.9$

FIGURE 2.3 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode **ZZHPM** de l'équation (2.47) .

Exemple 2.2.2.

• Nous considérons l'équation de **Burger** temporelle d'ordre fractionnaire suivante :

$${}^c D_t^\alpha u + uu_x = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.56)$$

avec la condition initial

$$u(x, 0) = x. \quad (2.57)$$

En appliquant la **transformation ZZ** dans (2.57), on obtient

$$Z [{}^c D_t^\alpha] + Z [uu_x] = 0, \quad (2.58)$$

en utilisant la propriété de différentiation de cette transformation (2.36) dans (2.58), puis en utilisant les conditions initiales (2.57) on obtient

$$Z[u(x, t)] = x - \frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z [uu_x], \quad (2.59)$$

en utilisant **la transformée ZZ inverse** des deux côtés de (2.59), nous aurons

$$u(x, t) = x - Z^{-1} \left[\frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z [uu_x] \right], \quad (2.60)$$

on applique la méthode **HPM**, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n = x - p \left(Z^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z \left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n \right] \right) \right), \quad (2.61)$$

en égalisant le coefficient de la puissance de p de part et d'autre de (2.61), on obtient

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, t) &= x, \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, t) &= -Z^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} Z [H_{n-1}(u)] \right), \end{aligned} \quad (2.62)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, les premières composantes des polynômes de He sont données par

$$\begin{aligned} H_0 &= u_0 u_{0x}, \\ H_1 &= u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x}, \\ H_2 &= u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.63)$$

en utilisant les polynômes de He (2.63) et les formules d'itération (2.62), nous obtenons

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, t) &= x, \\ p^1 : u_1(x, t) &= -\frac{xt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \\ p^2 : u_2(x, t) &= \frac{2xt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.64)$$

les trois premiers termes de la solution sont donnés par

$$u(x, t) = x - \frac{xt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2xt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots$$

Pour $\alpha = 1$, la solution de exacte l'équation (2.56) est définie par

$$u(x, t) = x \left(1 - t + t^2 - \dots \right) = \frac{x}{1 + t}, \quad |t| < 1.$$

Cette solution approchée tout à fait comme à la solution exacte.

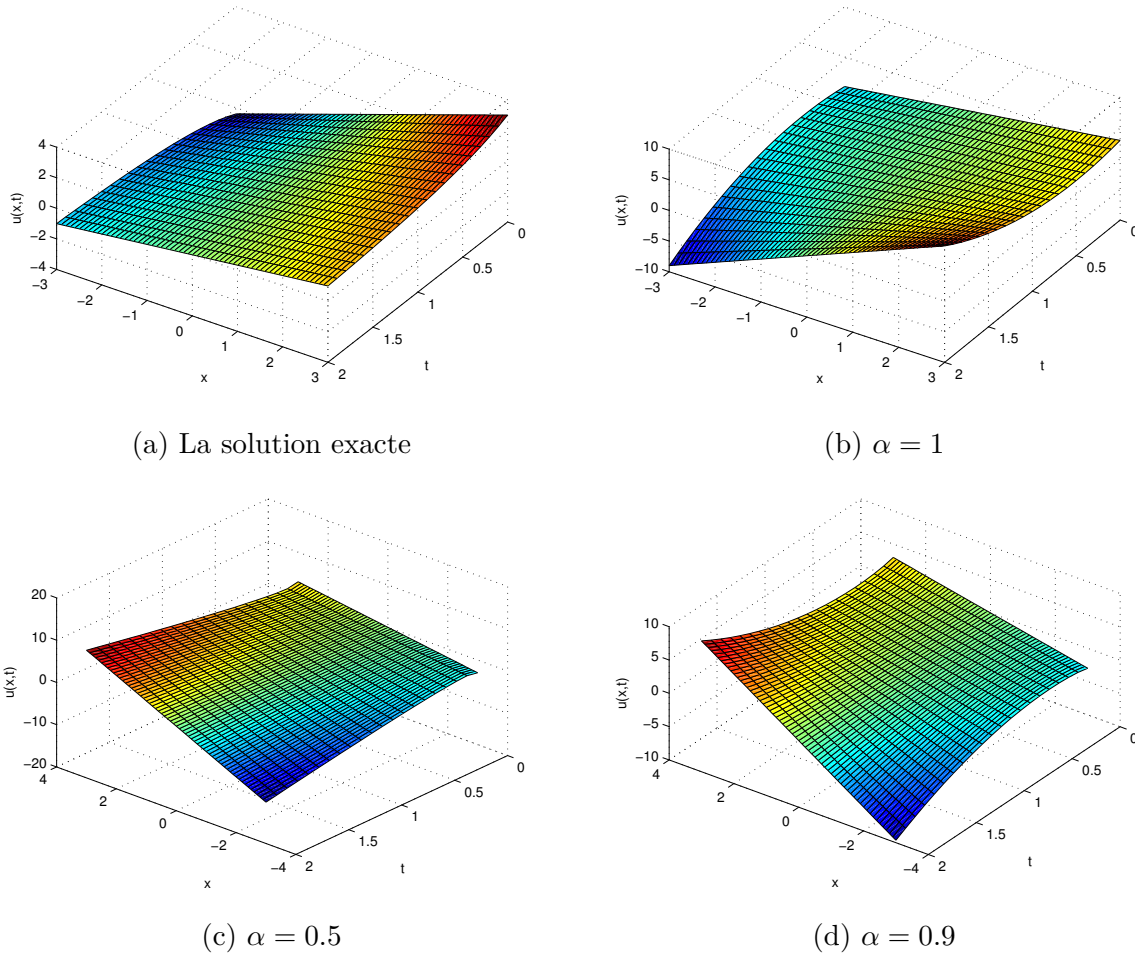


FIGURE 2.4 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec trois termes par la méthode **ZZHPM** de l'équation (2.56) .

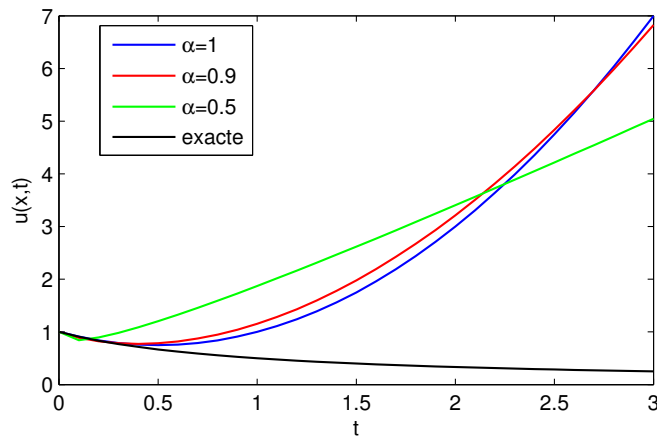


FIGURE 2.5 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec trois termes par la méthode **ZZHPM** de l'équation (2.56) avec $x = 1$.

2.3 Méthode de perturbation d'homotopie combinée avec la transformation de Laplace (LHPTM)

Transformation de Laplace

La transformée de Laplace est un outil puissant en mathématiques appliquées et en ingénierie. Pratiquement tous les cours d'équations différentielles introduit cette technique de résolution d'équations différentielles linéaires. La transformée de Laplace est indispensable dans certains domaines de la théorie du contrôle.

Définition 2.3. [11] la transformée de Laplace $F(s)$ est définie

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx} dx \quad \text{où, } s \in \mathbb{C}. \quad (2.65)$$

Proposition 2.6.

1. $\mathcal{L}[f(x) + g(x)] = F(s) + G(s).$

2. $\mathcal{L}[x^\beta] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}, \quad \beta > -1.$

3. $\mathcal{L}[\int_0^x f(t)dt] = \frac{F(s)}{s}.$

Théorème 2.7. (théorème de la convolution)

Si $f, g \in ([0, T])$, $T > 0$, alors $(f * g) \in L^1([0, T])$ et la transformation de Laplace du produit de convolution des deux fonctions originales est le produit des transformées de Laplace des fonctions f et g .

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) = F(s).G(s).$$

Lemme 2.8. [11] La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier de la fonction $f(t)$ peut s'écrire

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0) = s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(n-j-1)}(0). \quad (2.66)$$

Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

Lemme 2.9. [11] Soit $f \in ([0, T])$, l'intégrale de **Riemann-Liouville** peut être définie comme un produit de convolution de deux fonctions

$$I^\alpha f = \left[\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f \right] = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt.$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient

$$\mathcal{L}(I^\alpha f) = \mathcal{L}\left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \mathcal{L}(f) = s^{-\alpha} F(s).$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** de la fonction $f(t)$, on applique (2.66), puis on utilise le lemme (2.9), on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{L} [{}^{RL}D^\alpha f(t)] &= \mathcal{L} \left(\frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha} f(t) \right), \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} \left(I^{n-\alpha} f \right)^{(j)}(0).\end{aligned}$$

Lemme 2.10. [11] *La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de **Caputo**, de même on applique le lemme (2.9), puis on utilise (2.66), on aura*

$$\mathcal{L} [{}^cD_a^\alpha f(t)] = \mathcal{L} \left(I^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \right) = s^\alpha F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{\alpha-j-1} f^{(j)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

Lemme 2.11. [11] *La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de **Grünwald-Letnikov** d'ordre α est*

$$\mathcal{L} [{}^{GL}D_a^p f(t)] = s^p F(s), \quad 0 \leq p < 1.$$

Transformation de Laplace inverse et propriétés

Définition 2.4. [11] *La transformée de Laplace inverse de $F(s)$ est définie comme suit*

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{i-\tau T}^{i+\tau T} e^{sx} F(s) ds. \quad (2.67)$$

Proposition 2.12. *Pour $\alpha, \beta > 0$, a dans \mathbb{R} et $s^\alpha > |a|$, nous avons les deux formules de transformation de Laplace inverse suivante*

$$1. \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{(\alpha-\beta)}}{s^\beta - a} \right] = t^{\alpha-1} E_{\beta, \alpha} (at^\beta), \quad \alpha, \beta > 0, s^\alpha > |a|.$$

$$2. \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{-\alpha}}{(s-a)^2} \right] = tE(t, \alpha, a) - \alpha E(t, \alpha + 1, a).$$

2.3.1 Description de la méthode LHPTM

Khan et Wu [8] donnent l'idée de base de cette méthode, où ils considèrent une équation de la forme

$${}^cD_t^\alpha u(x, t) = L(u(x, t)) + N(u(x, t)) + g(x, t) \quad n-1 \leq \alpha \leq n, t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (2.68)$$

où u est une fonction indéfinie, L et N sont des opérateurs linéaires et non linéaires, respectivement, et g est le terme source. L'équation (2.68) est soumise à la condition initiale suivante

$$u(x, 0) = f(x). \quad (2.69)$$

L'application de l'algorithme **LHPTM** à l'équation (2.68) se résume aux étapes suivantes :

- Prenons la transformée de Laplace (\mathcal{L}) pour l'équation (2.68)

$$\mathcal{L}[{}^c D_t^\alpha u(x, t)] = \mathcal{L}[L(u(x, t))] + \mathcal{L}[N(u(x, t))] + \mathcal{L}[g(x, t)]. \quad (2.70)$$

- En utilisant la propriété de différenciation de la transformée de Laplace

$$s^\alpha \mathcal{L}[u(x, t)] - s^{\alpha-1} u(x, 0) = \mathcal{L}[L(u(x, t))] + \mathcal{L}[N(u(x, t))] + \mathcal{L}[g(x, t)], \quad (2.71)$$

ou sous la forme

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[L(u(x, t))] + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[N(u(x, t))] + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[g(x, t)]. \quad (2.72)$$

- Par utilisation la transformée inverse de Laplace (\mathcal{L}^{-1}) aux deux membres de l'équation (2.72)

$$u(x, t) = G(x, t) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} (\mathcal{L}[Lu(x, t)] + \mathcal{L}[Nu(x, t)]) \right], \quad (2.73)$$

où

$$G(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{f(x)}{s} + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[g(x, t)] \right].$$

- A présent, appliquons la méthode HPM introduite par Liao et supposez $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n p^n$, où p est un paramètre d'intégration tel que $0 < p < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n p^n = G(x, t) + p \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left(\mathcal{L} \left[L \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n p^n \right) \right] + \mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) p^n \right] \right) \right]. \quad (2.74)$$

- H_n est appelée polynôme de He [6].

$$H_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i p^i \right)_{p=0}. \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.75)$$

- Par comparaison avec les coefficients de mêmes puissances de p dans (2.74) on obtient les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, t) &= G(x, t), \\ p^1 : u_1(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \{ \mathcal{L} [Lu_0(x, t)] + \mathcal{L} [H_0] \} \right], \\ p^2 : u_2(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \{ \mathcal{L} [Lu_1(x, t)] + \mathcal{L} [H_1] \} \right], \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \{ \mathcal{L} [Lu_{n-1}(x, t)] + \mathcal{L} [H_{n-1}] \} \right]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Si $p \rightarrow 1$:

alors la forme de la solution approximative devient

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n p^n. \quad (2.77)$$

Elle peut finalement conduire à la solution approximative de l'équation (2.68) .

2.3.2 Application de la méthode LHPTM :

• Nous considérons l'équation de **d'écoulement de l'écume** non linéaire temporelle d'ordre fractionnaire suivante :

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{2} u(x, t) u_{xx}(x, t) - 2u^2(x, t) u_x(x, t) + u_x^2(x, t). \quad (2.78)$$

Avec la condition initial

$$u(x, 0) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{1 + e^x}. \quad (2.79)$$

La solution exacte de (2.78) pour $\alpha = 1$ est

$$u(x, t) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{1 + e^{x - \frac{t}{4}}}.$$

On appliquant **la transformée de Laplace** aux deux membres de(2.78), il vient

$$\mathcal{L} [{}^c D_t^\alpha u(x, t)] = \mathcal{L} \left[\frac{1}{2} u(x, t) u_{xx}(x, t) - 2u^2(x, t) u_x(x, t) + u_x^2(x, t) \right]. \quad (2.80)$$

par suit

$$\mathcal{L}(u(x, t)) = \frac{u(x, 0)}{s} + \frac{1}{s^\alpha} \left[\mathcal{L} \left(\frac{1}{2} u(x, t) u_{xx}(x, t) - 2u^2(x, t) u_x(x, t) + u_x^2(x, t) \right) \right], \quad (2.81)$$

par utilisation **la transformée inverse de Laplace** aux deux cotés de (2.81), on obtient

$$u(x, t) = u(x, 0) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\mathcal{L} \left(\frac{1}{2} u(x, t) u_{xx}(x, t) - 2u^2(x, t) u_x(x, t) + u_x^2(x, t) \right) \right] \right] \quad (2.82)$$

L'application de la méthode **HPM** donne

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n &= u(x, 0) + p \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n \right)_{xx} \right] \right] \\ &\quad - p \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n \right)^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n \right)_x^2 \right] \right] \end{aligned}$$

par comparaison avec les coefficients de même puissance de p , nous obtenons

$$p^0 : u_0(x, t) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{1 + e^x}$$

$$p^1 : u_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\mathcal{L} \left(\frac{1}{2} u_0 u_{0,xx} - 2u_0^2 u_{0,x} + u_{0,x}^2 \right) \right] \right] \quad (2.83)$$

$$p^2 : u_2(x, t) = p \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\mathcal{L} \left(\frac{1}{2} u_1 u_{0,xx} + u_0 u_{1,xx} - 2 \left(u_0^2 u_{1,x} + 2u_0 u_1 u_{0,x} \right) + 2u_{0,x} u_{1,x} \right) \right] \right]$$

⋮

l'utilisation des formules d'itération (2.83) donnent

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + e^x}$$

$$u_1(x, t) = \left(\frac{2e^x \left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{2} \right)^2}{(e^x + 1)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2e^{2x}}{(e^x + 1)^3} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \right) \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^4} \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)^2},$$

$$u_2(x, t) = \frac{e^x (e^x - 1) t^{2\alpha}}{16 (e^x + 1)^3 \Gamma(2\alpha + 1)},$$

$$u_3(x, t) = \frac{e^x (-4e^x + e^{2x} + 1) t^{3\alpha} ((6e^x + e^{2x} + 1) \Gamma(\alpha + 1)^2 - 2e^x \Gamma(2\alpha + 1))}{64 (e^x + 1)^6 \Gamma(\alpha + 1)^2 \Gamma(3\alpha + 1)},$$

⋮

(2.84)

les quatre premiers termes de la solutions de l'équation (2.78) sont donnée par

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots$$

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + e^x} + \left(\frac{2e^x \left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{2} \right)^2}{(e^x + 1)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2e^{2x}}{(e^x + 1)^3} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \right) \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^4} \right)$$

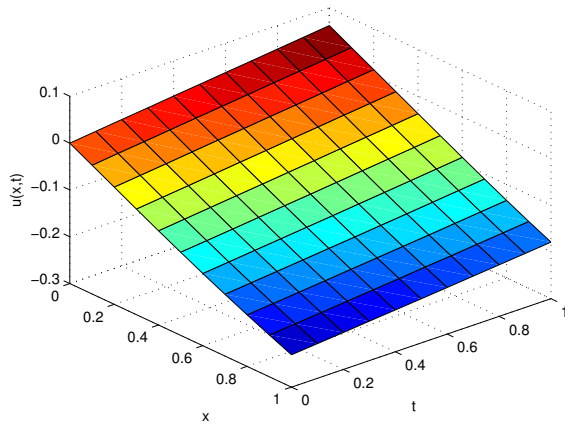
$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{e^x (e^x - 1) t^{2\alpha}}{16 (e^x + 1)^3 \Gamma(2\alpha + 1)} +$$

$$\frac{e^x (-4e^x + e^{2x} + 1) t^{3\alpha} ((6e^x + e^{2x} + 1) \Gamma(\alpha + 1)^2 - 2e^x \Gamma(2\alpha + 1))}{64 (e^x + 1)^6 \Gamma(\alpha + 1)^2 \Gamma(3\alpha + 1)} + \dots$$

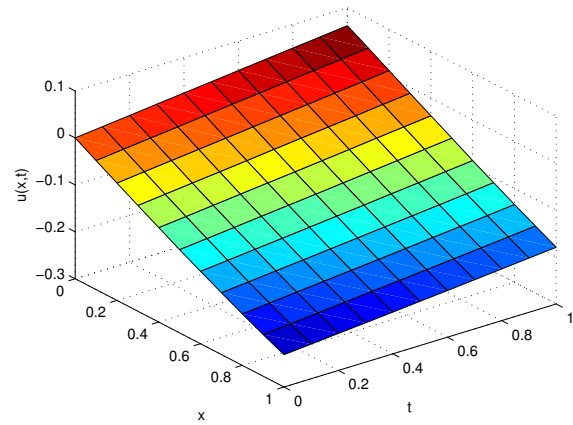
(2.85)

x	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$	solution exacte	error absolue
0.2	-0.0003691469	-0.0095774884	-0.0187407807	-0.0187412159	$4.351357160 \times 10^{-7}$
0.4	-0.0498754916	-0.0592038651	-0.0683191208	-0.0683199835	$8.626737062 \times 10^{-7}$
0.6	-0.0984098958	-0.1076757551	-0.1165653476	-0.1165665045	$1.156901751 \times 10^{-6}$
0.8	-0.1450961539	-0.1541177042	-0.1626205477	-0.1626218372	$1.289448636 \times 10^{-6}$
1.0	-0.1891896209	-0.1978010519	-0.2057837600	-0.2057850278	$1.267803479 \times 10^{-6}$

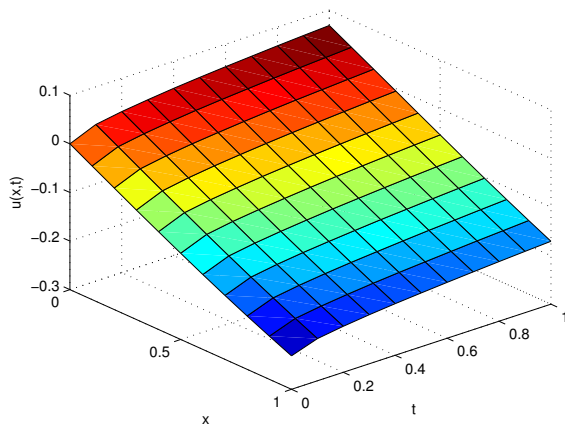
TABLE 2.1 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode **LHPTM** pour différentes valeurs d'ordre α de l'équation (2.78) avec $t = 0.5$.



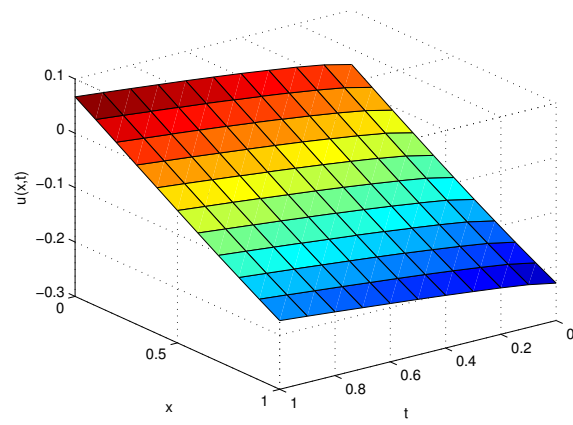
(a) La solution exacte



(b) $\alpha = 1$



(c) $\alpha = 0.5$



(d) $\alpha = 0.75$

FIGURE 2.6 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode **LHPTM** de l'équation (2.78) .

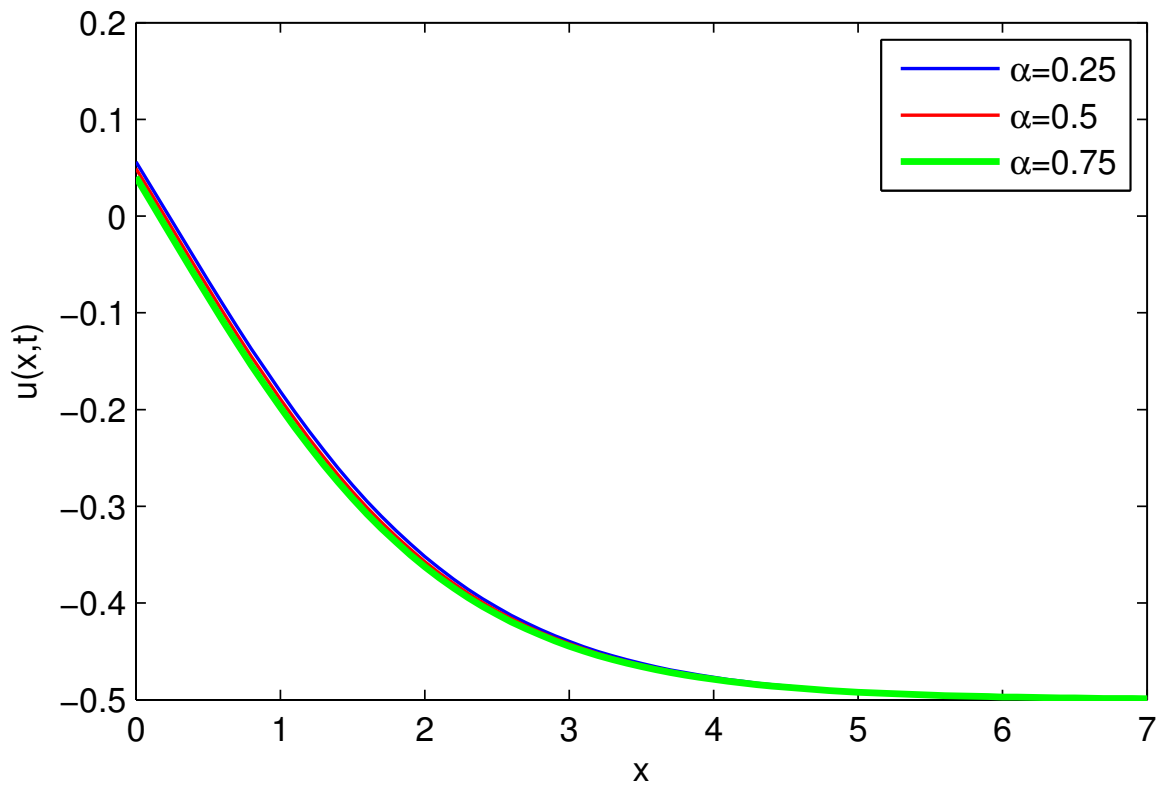


FIGURE 2.7 – la solution approximative de l'équation (2.78) pour différentes valeurs de α par la méthode **LHPTM** avec $t = 0.5$.

CHAPITRE 3

LA MÉTHODE HPM MODIFIÉE POUR RÉSoudre L'ÉQUATION KDV D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, on introduit les idées de base de la méthode **HPM modifiée** composé d'une fonction en série de puissance d'ordre arbitraire et la méthode de perturbation d'homotopie. La méthodologie a été démontrée à l'aide d'une équation **KDV** généralisée, et nous l'avons appliqué pour résoudre des équations de **Korteweg-de Vries** linéaires et non-linéaire d'ordre fractionnaire temporelle. L'applicabilité et l'efficacité de la méthode ont été établies comme en série réalisable d'ordre arbitraire se rapprochent vers la solution exacte. Des simulations numérique ont été réalisées pour étudier l'effet des dérivées fractionnaires de Caputo dans la dispersion et la propagation des vagues d'eau en faisant varier l'ordre α sur l'intervalle $[0, 1]$.

Enfin, nous présentons des résultats de la simulation, qui ont été présentes et discutés sous forme des graphiques, et démontre que le degré de liberté de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo est essentiel pour contrôler l'ampleur des risques environnementaux liés aux vagues d'eau lois qu'elle sont ajustées.

3.1 Méthode HPM modifiée

Récemment, Adedapo Ismaile Alaje [1] ont proposée une nouvelle technique pour obtenir des solutions en série convergentes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire appelée (**MIGHPM**) .

Elle est obtenue en combinant avec la méthode **HPM** pour permettre le calcul d'une solution approximative de l'équation de **Korteweg-de Vries** d'ordre fractionnaire.

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) + \xi u(x, t) u_x(x, t) + \gamma u_{xxx}(x, t) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.1)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (3.2)$$

$u(x, t)$ est une fonction de variables réelles qui représente l'allongement de l'onde avec le variable d'espace x et au temps t , $u(x, t)u_x(x, t)$ est le terme non linéaire, $u_{xxx}(x, t)$ représente la direction de la dispersion de l'onde et ξ, γ sont des constantes arbitraires.

3.2 Description de la méthode MIGHPM

Compte tenu de la proposition de la méthode **HPM modifié** avec la condition initiale, on construite une fonction corrective en série de puissance d'ordre arbitraire [1] pour l'équation (3.1)

$$u(x, t) = u(x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n t^{n\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.3)$$

En substituant la condition initiale $u(x, 0) = \phi(x)$ dans l'équation (3.3), on trouve

$$u(x, t) = \phi(x) + \lambda_1 t^\alpha + \lambda_2 t^{2\alpha} + \dots \quad (3.4)$$

D'après l'équation (3.4) on a

$$\lambda_1 t^\alpha = u_1(x, t), \quad \lambda_2 t^{2\alpha} = u_2(x, t) \dots \text{et ainsi de suite.}$$

En tant que solution supposée de l'équation (3.1), l'équation (3.4) doit satisfaire l'équation (3.1) avec des valeurs uniques de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$.

Ainsi, pour évaluer ces valeurs, on obtient les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha u(x, t) &= {}^c D_t^\alpha (\phi(x) + \lambda_1 t^\alpha + \lambda_2 t^{2\alpha} + \dots) \\ {}^c D_t^\alpha u(x, t) &= {}^c D_t^\alpha (\phi(x)) + \lambda_1 {}^c D_t^\alpha (t^\alpha) + \lambda_2 {}^c D_t^\alpha (t^{2\alpha}) + \dots \\ \left\{ \begin{array}{l} {}^c D_t^\alpha u(x, t) = \lambda_1 \Gamma(\alpha + 1) + \lambda_2 \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha + \dots, \\ u_x(x, t) = \phi'(x), \\ \text{et} \\ u_{xxx}(x, t) = \phi'''(x). \end{array} \right. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Ainsi, l'évaluation de l'équation (3.1) à l'aide de l'équation (3.4) donne :

$$\left(\lambda_1 \Gamma(\alpha + 1) + \lambda_2 \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha + \dots \right) + \xi (\phi(x) + \lambda_1 t^\alpha + \lambda_2 t^{2\alpha} + \dots) \phi'(x) + \gamma \phi'''(x) = 0. \quad (3.6)$$

Si $t = 0$, l'équation (3.6) devient

$$\lambda_1 \Gamma(\alpha + 1) + \xi \phi(x) \phi'(x) + \gamma \phi'''(x) = 0, \quad (3.7)$$

et la résolution de (3.7) donne λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{-(\xi\phi(x)\phi'(x) + \gamma\phi'''(x))}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (3.8)$$

Depuis $u_1(x, t) = \lambda_1 t^\alpha$, la première approximation est :

$$u_1(x, t) = \frac{-(\xi\phi(x)\phi'(x) + \gamma\phi'''(x))}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha. \quad (3.9)$$

Les approximations suivantes peuvent être obtenues en construisant une homotopie pour l'équation (3.1) :

$$(1 - p) [{}^c D_t^\alpha u(x, t)] + p [{}^c D_t^\alpha u(x, t) + \xi u(x, t) u_x(x, t) + \gamma u_{xxx}(x, t)] = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.10)$$

En simplifiant l'équation (3.10), on obtient :

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) + p [\xi u(x, t) u_x(x, t) + \gamma u_{xxx}(x, t)] = 0. \quad (3.11)$$

En substituant l'équation (2.7) dans l'équation (3.11) et en identifiant les termes avec ceux de même puissance de p^n , $n \geq 2$

$$\left. \begin{aligned} p^2 : \frac{\partial^\alpha u_2(x, t)}{\partial t^\alpha} + \xi \left(u_0(x, t) \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} + u_1(x, t) \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right) + \gamma \frac{\partial^3 u_0(x, t)}{\partial x^3} = 0 \\ p^3 : \frac{\partial^\alpha u_3(x, t)}{\partial t^\alpha} + \xi \left(u_0(x, t) \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} + u_1(x, t) \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} + u_2(x, t) \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right) + \gamma \frac{\partial^3 u_1(x, t)}{\partial x^3} = 0 \\ \vdots \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Le coefficient de p^2 est évalué à l'aide de l'équation (3.9), par utilisation l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville I^α sur les deux cotés de (3.12), on obtient la deuxième approximation $u_2(x, t)$.

Les approximations suivantes $u_3(x, t), u_4(x, t), \dots$ sont calculées de la même manière.

Théorème 3.1. [10] Soit l'application non linéaire contractive $\tau : \mathfrak{N} \rightarrow Y$ définie sur deux espaces de Banach \mathfrak{N}, Y , $\forall m, n \in \mathfrak{N}$ alors $\| \tau(m) - \tau(n) \|_Y \leq \varepsilon \| m - n \|_{\mathfrak{N}}$, $0 < \varepsilon < 1$ telle que la suite $m_{s+1} = \tau^n(m_0) = \tau(m_0)$ pour quelque $m_0 \in \mathfrak{N}$ qui converge vers un point fixe unique τ .

PREUVE.

Considérons la suite de Picard $m_{s+1} = \tau(m_s) \subseteq Y$ nous voulons montrer que m_s est convergente dans Y pour tout $r \geq s$ $\|m_s - m_r\| \leq \|m_s - m_{s+1}\| + \|m_{s+1} - m_{s+2}\| + \|m_{s+2} - m_{s+3}\| + \dots + \|m_{s-1} - m_r\|$.

Nous définissons la preuve en appliquant l'induction mathématique sur la propriété contrac-

tion de (C) :

$$\begin{aligned} \|m_s - m_{s+1}\| &\leq \varepsilon^s \|m_0 - m_1\| \quad \text{par conséquent ,} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|m_s - m_r\| &\leq \frac{\varepsilon^s}{1 + \varepsilon} \|m_0 - m_1\| = 0 \quad \text{que } s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Cela prouve que (m_s) est convergent en Y et par complète de Y , on peut trouver $\omega \in Y$:
 $\lim_{s \rightarrow \infty} (m_s) = \omega \in Y$.

Il est clair que la continuité de τ est assurée par la contraction (C).

$$\text{Ainsi, } \omega = \lim_{s \rightarrow \infty} m_{s+1} = m_r.$$

□

3.3 Applications de la méthode MIGHPM

Exemple 3.3.1.

• Considérons l'équation de **Korteweg–de Vries** linéaire d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} + 7 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + 6 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x^3} = 0, \quad (3.13)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \cos(x). \quad (3.14)$$

Par la méthode de **HPM modifiée avec la condition initiale** , nous pouvons construire

$$u(x, t) = u_0(x, 0) + \lambda_1 t^\alpha + \lambda_2 t^{2\alpha} + \dots . \quad (3.15)$$

En substituant l'équation (3.14) dans l'équation (3.15), on obtient

$$u(x, t) = \cos(x) + \lambda_1 t^\alpha + \lambda_2 t^{2\alpha} + \dots . \quad (3.16)$$

D'après l'équation (3.16)

$$\lambda_1 t^\alpha = u_1(x, t), \quad \lambda_2 t^{2\alpha} = u_2(x, t) \dots \text{et ainsi de suite.}$$

En tant que solution supposée de l'équation (3.13), l'équation (3.16) doit satisfaire l'équation (3.13) avec des valeurs uniques de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$.

Ainsi, pour évaluer ces valeurs, on obtient les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha u(x, t) &= {}^c D_t^\alpha (\cos(x) + \lambda_1 t^\alpha + \lambda_2 t^{2\alpha} + \dots). \\ {}^c D_t^\alpha u(x, t) &= {}^c D_t^\alpha (\cos(x)) + \lambda_1 {}^c D_t^\alpha (t^\alpha) + \lambda_2 {}^c D_t^\alpha (t^{2\alpha}) + \dots. \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= -\sin(x), \quad \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = \sin(x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ainsi, l'évaluation de l'équation (3.13) à l'aide de l'équation (3.17) donne :

$$\left(\lambda_1 \Gamma(\alpha + 1) + \lambda_2 \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha + \dots \right) + 7(-\sin x) + 6(\sin x) = 0.$$

Si $t = 0$, on a

$$\lambda_1 \Gamma(\alpha + 1) + 7(-\sin x) + 6(\sin x) = 0. \quad (3.18)$$

La résolution de l'équation (3.18) donne λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{\sin(x)}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (3.19)$$

Puisque $u_1(x, t) = \lambda_1 t^\alpha$, alors

$$u_1(x, t) = \frac{\sin(x)}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha. \quad (3.20)$$

Pour obtenir d'autres approximations, nous construisons une homotopie pour l'équation (3.13) :

$$(1 - p) \left[\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} \right] + p \left[\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} + 7 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + 6 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x^3} \right] = 0. \quad (3.21)$$

En simplifiant l'équation (3.21), on trouve

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = p \left[-7 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - 6 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x^3} \right]. \quad (3.22)$$

Nous supposons une solution en série de la forme :

$$u(x, t) = u_0(x, t) + p u_1(x, t) + p^2 u_2(x, t) + \dots + p^n u_n(x, t). \quad (3.23)$$

En substituant l'équation (3.23) dans l'équation (3.22) et en comparant les coefficients des puissances égales de p^n , $n \geq 2$,

$$\frac{\partial^\alpha u_2(x, t)}{\partial t^\alpha} = -7 \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} - 6 \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x^3}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^\alpha u_3(x, t)}{\partial t^\alpha} = -7 \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} - 6 \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x^3}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^\alpha u_4(x, t)}{\partial t^\alpha} = -7 \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial x} - 6 \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial x^3}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^\alpha u_5(x, t)}{\partial t^\alpha} = -7 \frac{\partial u_4(x, t)}{\partial x} - 6 \frac{\partial u_4(x, t)}{\partial x^3},$$

⋮

$$\frac{\partial^\alpha u_n(x, t)}{\partial t^\alpha} = -7 \frac{\partial u_{n-1}(x, t)}{\partial x} - 6 \frac{\partial u_{n-1}(x, t)}{\partial x^3}. \quad (3.27)$$

En utilisant $u_0(x, t), u_1(x, t)$ et en appliquant I^α aux deux côtés au l'équation (3.24)

$$\frac{\partial^\alpha u_2(x, t)}{\partial t^\alpha} = -\frac{\cos x}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha, \quad (3.28)$$

et

$$I^\alpha \left(\frac{\partial^\alpha u_2(x, t)}{\partial t^\alpha} \right) = I^\alpha \left(-\frac{\cos x}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha \right), \quad (3.29)$$

tel que

$$u_2(x, t) = -\frac{\cos x}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha}. \quad (3.30)$$

L'évaluation de l'équation (3.26) en utilisant $u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t)$ donne

$$\frac{\partial^\alpha u_3(x, t)}{\partial t^\alpha} = -\frac{\sin x}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha}, \quad (3.31)$$

en appliquant l'opérateur I^α

$$u_3(x, t) = -\frac{\sin x}{\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha}. \quad (3.32)$$

Par la suite, les itérations suivantes sont effectuées :

$$\left. \begin{aligned} u_4(x, t) &= \frac{\cos x}{\Gamma(4\alpha+1)} t^{4\alpha}, & u_5(x, t) &= \frac{\sin x}{\Gamma(5\alpha+1)} t^{5\alpha}, & u_6(x, t) &= -\frac{\cos x}{\Gamma(6\alpha+1)} t^{6\alpha}, \\ u_7(x, t) &= -\frac{\sin x}{\Gamma(7\alpha+1)} t^{7\alpha}, & u_8(x, t) &= \frac{\cos x}{\Gamma(8\alpha+1)} t^{8\alpha}, & u_9(x, t) &= \frac{\sin x}{\Gamma(9\alpha+1)} t^{9\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Le résultat approximatif est le suivant

$$u_n(x, t) = \left. \begin{aligned} &\cos x + \frac{\sin x}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha - \frac{\cos x}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} - \frac{\sin x}{\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha} + \frac{\cos x}{\Gamma(4\alpha+1)} t^{4\alpha} \\ &+ \frac{\sin x}{\Gamma(5\alpha+1)} t^{5\alpha} - \frac{\cos x}{\Gamma(6\alpha+1)} t^{6\alpha} + \frac{\cos x}{\Gamma(8\alpha+1)} t^{8\alpha} + \frac{\sin x}{\Gamma(7\alpha+1)} t^{7\alpha} - \frac{\sin x}{\Gamma(9\alpha+1)} t^{9\alpha} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Lorsque $\alpha = 1$,

$$u_n(x, t) = \cos x \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} + \dots \right) + \sin x \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \right). \quad (3.35)$$

La méthode modifiée convient que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = u(x, t). \quad (3.36)$$

Par convergence, la solution exacte est

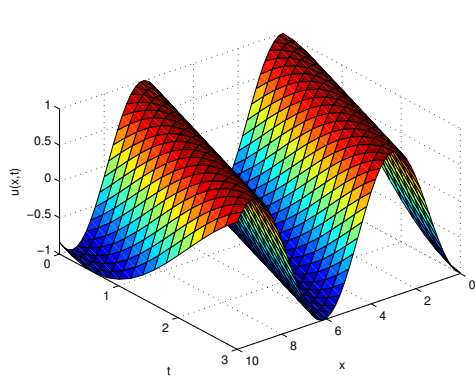
$$u(x, t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t, \quad (3.37)$$

$$u(x, t) = \cos(x - t). \quad (3.38)$$

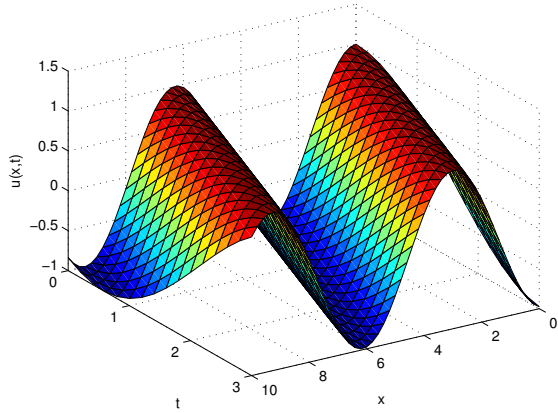
Les résultats sous forme (Fig. (3.1), Fig. (3.2), Tableau (3.1)),

t	valeur de (x)	solution approchée	solution exacte	<i>erreur absolue</i>
0	0	1.0000000000	1.0000000000	0
	2	-0.4161468365	-0.4161468365	0
	4	-0.6536436209	-0.6536436209	0
	6	0.9601702867	0.9601702867	0
	8	-0.1455000338	-0.1455000338	0
	10	-0.8390715291	-0.8390715291	0
1	0	0.5403025794	0.5403023059	$2.734969395 \times 10^{-7}$
	2	0.5403022147	0.5403023059	$9.118039990 \times 10^{-8}$
	4	-0.9899926942	-0.9899924966	$1.976080695 \times 10^{-7}$
	6	0.2836624411	0.2836621855	$2.556483460 \times 10^{-7}$
	8	0.7539022392	0.7539022543	$1.516643167 \times 10^{-8}$
	10	-0.9111305049	-0.9111302619	$2.430254208 \times 10^{-7}$
2	0	-0.4158730159	-0.4161468365	$2.738206741 \times 10^{-4}$
	2	0.9999315297	1.00000000	$6.847031898 \times 10^{-5}$
	4	-0.4163636698	-0.4161468365	$2.168332608 \times 10^{-4}$
	6	-0.6533946816	-0.6536436209	$2.489392701 \times 10^{-4}$
	8	0.9601799293	0.9601702867	$9.642681356 \times 10^{-6}$
	10	-0.1457569986	-0.1455000338	$2.569648128 \times 10^{-4}$
3	0	-0.9747767857	-0.9899924966	$1.521571089 \times 10^{-2}$
	2	0.5377825581	0.5403023059	$2.519747818 \times 10^{-3}$
	4	0.5271837651	0.5403023059	$1.311854072 \times 10^{-2}$
	6	-0.9765542703	-0.9899924966	$1.343822626 \times 10^{-2}$
	8	0.2855961755	0.2836621855	$1.933990027 \times 10^{-3}$
	10	0.7388543804	0.7539022543	$1.504787392 \times 10^{-2}$

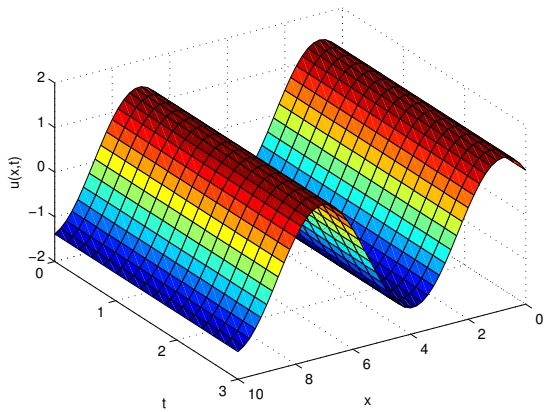
TABLE 3.1 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec neuf termes par la méthode **MIGHPM** de l'équation (3.13) pour $\alpha = 1$ et des valeurs différentes de $t = 0, 1, 2, 3$.



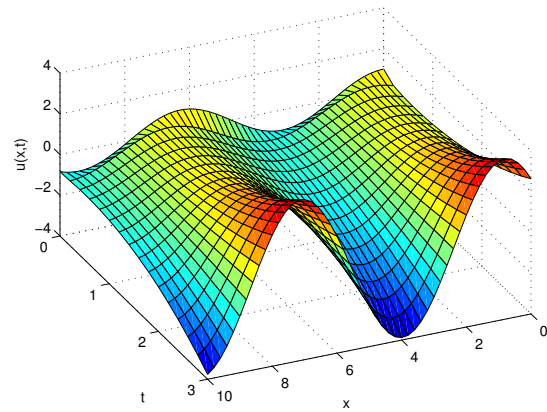
(a) La solution exacte



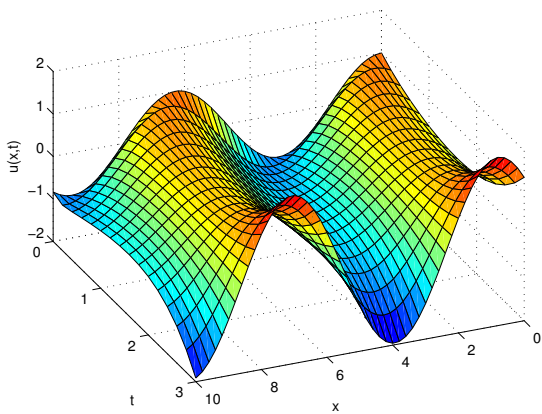
(b) $\alpha = 1$



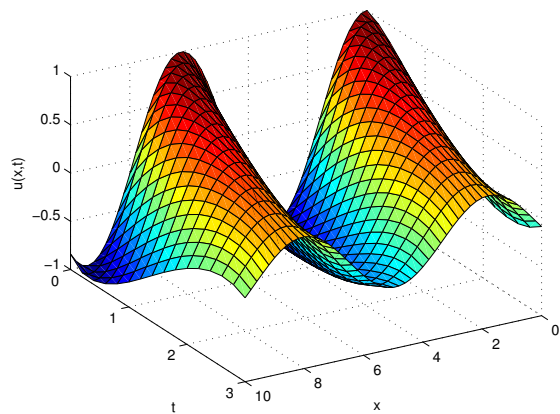
(c) $\alpha = 0$



(d) $\alpha = 0.25$



(e) $\alpha = 0.5$



(f) $\alpha = 0.75$

FIGURE 3.1 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec neuf termes par la méthode **MIGHPM** de l'équation (3.13) .

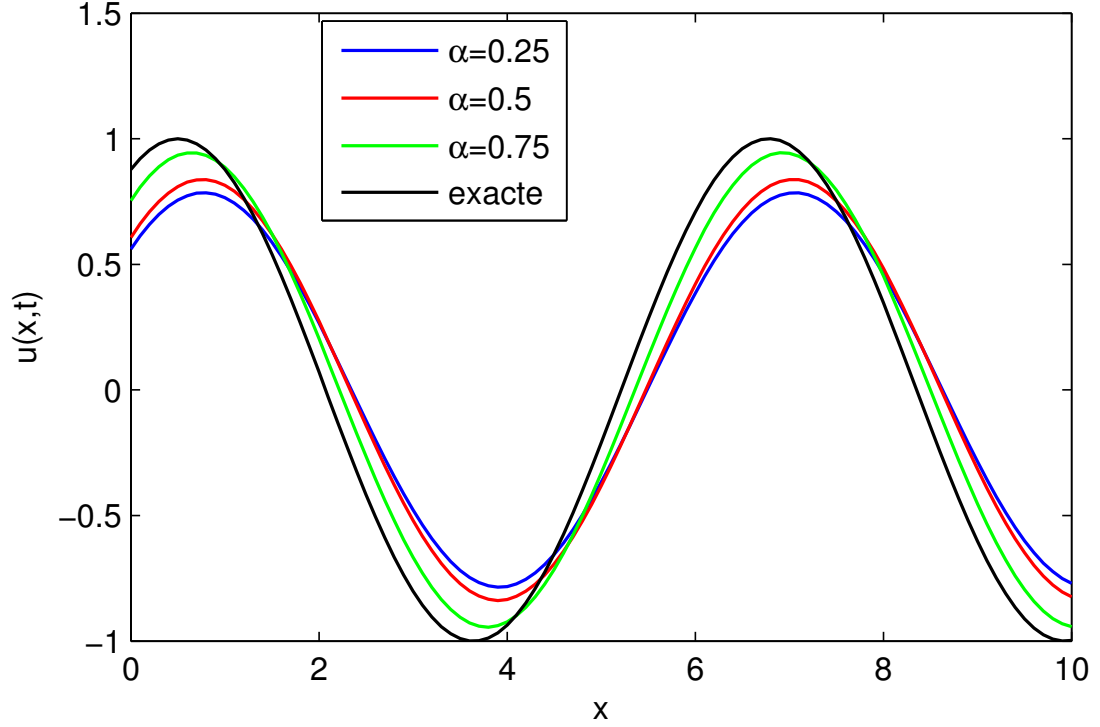


FIGURE 3.2 – La solution approchée de l'équation (3.13) pour différentes valeurs de α par la méthode **MIGHPM** avec $t = 0.5$.

Exemple 3.3.2.

• Considérons l'équation **Korteweg–de Vries** non-linéaire homogène d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - 6u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = 0, \quad (3.39)$$

avec la condition initiale :

$$u(x, 0) = \frac{x - 2}{12}. \quad (3.40)$$

Par la méthode de **MIGHPM**

$$u(x, t) = u(x, 0) + \lambda_1 t^\alpha + \dots, \quad (3.41)$$

l'équation (3.39) est évaluée à l'aide des dérivées suivantes de l'équation (3.42)

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \lambda_1 \Gamma(\alpha + 1), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{12}, \quad \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = 0. \quad (3.42)$$

Tel qu'à $t = 0$,

$$\lambda_1 = \frac{(x - 2)}{24\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (3.43)$$

Par conséquent

$$u_1(x, t) = \frac{(x - 2)}{24\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha. \quad (3.44)$$

Construction d'une homotopie pour l'équation (3.39)

$$(1-p)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + p\left(\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - 6u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}\right) = 0. \quad (3.45)$$

En simplifiant l'équation (3.45), on trouve

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + p\left(-6u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}\right) = 0. \quad (3.46)$$

Nous pouvons supposer une solution en série de la forme :

$$u(x,t) = u_0(x,t) + pu_1(x,t) + p^2u_2(x,t) + \dots + p^nu_n(x,t). \quad (3.47)$$

En substituant l'équation (3.47) dans l'équation (3.46) et en égalisant les coefficients égales des puissances p^n , $n \geq 2$

$$\begin{cases} p^2 : \frac{\partial^\alpha u_2(x,t)}{\partial t^\alpha} - 6\left(u_0(x,t)\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} + u_1(x,t)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial^3 u_0(x,t)}{\partial x^3} = 0. \\ p^3 : \frac{\partial^\alpha u_3(x,t)}{\partial t^\alpha} - 6\left(u_0(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} + \mu_1(x,t)\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} + u_2(x,t)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial^3 u_1(x,t)}{\partial x^3} = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

En évaluant l'équation (3.48) à l'aide de $u_0(x,t)$ et $u_1(x,t)$, on obtient

$$\frac{\partial^\alpha u_2(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{(x-2)}{24\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha = 0 \Rightarrow \frac{\partial^\alpha u_2(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{(x-2)}{24\Gamma(\alpha+1)}t^{2\alpha}. \quad (3.49)$$

En appliquant l'opérateur l^α aux deux côtés de l'équation (3.49), on obtient

$$u_2(x,t) = \frac{(x-2)}{24\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha}. \quad (3.50)$$

Répéter le processus itératif,

$$u_3(x,t) = \left(\frac{(x-2)4(\Gamma(1+\alpha))^2 + \Gamma(1+2\alpha)}{96(\Gamma(1+\alpha))^2\Gamma(1+3\alpha)}t^{3\alpha}\right) \quad (3.51)$$

$$u_4(x,t) = \left(\frac{(x-2)4(\Gamma(1+\alpha))^2\Gamma(1+2\alpha) + (\Gamma(1+2\alpha))^2 + 2\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}{96(\Gamma(1+\alpha))^2\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+4\alpha)}t^{4\alpha}\right)$$

⋮

$$\left. \begin{aligned} u_n(x,t) = & \frac{x-2}{12} + \frac{(x-2)}{24\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + \frac{(x-2)}{24\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha} + \frac{(x-2)4(\Gamma(1+\alpha))^2 + \Gamma(1+2\alpha)}{96(\Gamma(1+\alpha))^2\Gamma(1+3\alpha)}t^{3\alpha} \\ & + \frac{(x-2)4(\Gamma(1+\alpha))^2\Gamma(1+2\alpha) + (\Gamma(1+2\alpha))^2 + 2\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}{96(\Gamma(1+\alpha))^2\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+4\alpha)}t^{4\alpha} + \dots \end{aligned} \right\}$$

Si $\alpha = 1$,

$$u_n(x, t) = \frac{(x-2)}{12} + \frac{(x-2)}{24}t + \frac{(x-2)}{48}t^2 + \frac{(x-2)}{96}t^3 + \frac{(x-2)}{192}t^4 + \dots$$

Et la forme de la solution exacte est

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \frac{x-2}{12-6t}.$$

3.4 Convergence de la solution

Suivant la théorème de l'application non linéaire, convergence de la méthode **MIGHPM** dépend strictement de la contraction.

$$\text{Ainsi, } \|u_0 - u_e\| = \left\| \frac{x-2}{12} - \frac{x-2}{12-6t} \right\| = \frac{1}{12} \left\| \frac{(x-2)t}{(t-2)} \right\|.$$

Pour $\frac{1}{2} < k$, $0 < k < 1$,

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_e\| &= \|u_0 + u_1 - u_e\| \\ &= \left\| \frac{1}{24} \frac{(x-2)t^2}{(t-2)} \right\| \leq k \|u_0 - u_e\|, \\ \|u_2 - u_e\| &= \|u_0 + u_1 + u_2 - u_e\| \\ &= \left\| \frac{1}{48} \frac{(x-2)t^3}{(t-2)} \right\| \leq k^2 \|u_0 - u_e\|, \\ \|u_3 - u_e\| &= \|u_0 + u_1 + u_2 + u_3 - u_e\| \\ &= \left\| \frac{1}{96} \frac{(x-2)t^4}{(t-2)} \right\| \leq k^3 \|u_0 - u_e\|, \\ \|u_n - u_e\| &= \|(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n) - u_e\| \\ &= \left\| \frac{1}{12 \cdot 2^n} \frac{(x-2)t^4}{(t-2)} \right\| \leq k^n \|u_0 - u_e\|. \end{aligned}$$

Il est clair que, $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$, par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_e\| \leq k^n \|u_0 - u_e\| = 0.$$

Ainsi, la méthode de **MIGHPM** convient que

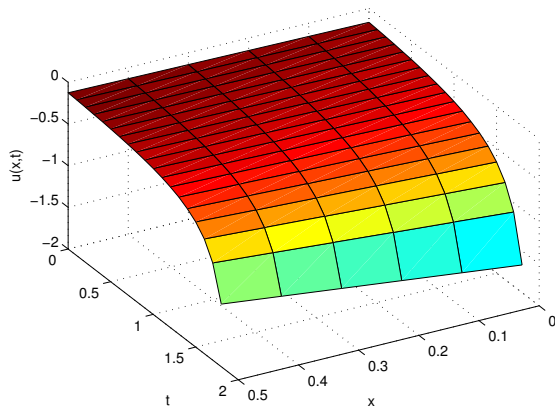
$$u_e = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \frac{x-2}{12-6t}.$$

Qui est la solution exacte de l'équation (3.39).

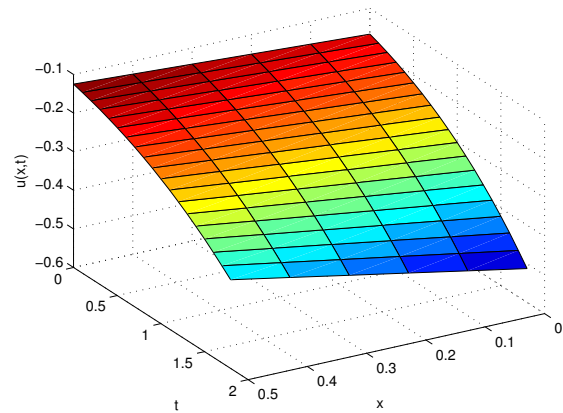
Les résultats sous forme (Fig. (3.3), Tableau (3.2)).

t	valeur de (x)	solution approchée	solution exacte	<i>erreur absolue</i>
0	0	-0.1666666667	-0.1666666667	0
	0.1	-0.1583333333	-0.1583333333	0
	0.2	-0.1500000000	-0.1500000000	0
	0.3	-0.1416666667	-0.1416666667	0
	0.4	-0.1333333333	-0.1333333333	0
	0.5	-0.1250000000	-0.1250000000	0
0.2	0	-0.1850833333	-0.1851851852	$1.018518519 \times 10^{-4}$
	0.1	-0.1758275000	-0.1759259259	$9.842592593 \times 10^{-5}$
	0.2	-0.1665716667	-0.1666666667	$9.500000000 \times 10^{-5}$
	0.3	-0.1573158333	-0.1574074074	$9.157407407 \times 10^{-5}$
	0.4	0.1480600000	-0.1481481481	$8.814814815 \times 10^{-5}$
	0.5	-0.1388041667	-0.1388888889	$8.472222222 \times 10^{-5}$
0.4	0	-0.2073333333	-0.2083333333	1×10^{-3}
	0.1	-0.1969511111	-0.1979166667	$9.655555556 \times 10^{-4}$
	0.2	-0.1865688889	-0.1875000000	$9.311111111 \times 10^{-4}$
	0.3	-0.1761866667	-0.1770833333	$8.966666667 \times 10^{-4}$
	0.4	-0.1658044444	-0.1666666667	$8.622222222 \times 10^{-4}$
	0.5	-0.1554222222	-0.1562500000	$8.277777778 \times 10^{-4}$
0.6	0	-0.2339166667	-0.2380952381	$4.178571429 \times 10^{-3}$
	0.1	-0.2221608333	-0.2261904762	$4.029642857 \times 10^{-3}$
	0.2	-0.2104050000	-0.2142857143	$3.880714286 \times 10^{-3}$
	0.3	-0.1986491667	-0.2023809524	$3.731785714 \times 10^{-3}$
	0.4	-0.1868933333	-0.1904761905	$3.582857143 \times 10^{-3}$
	0.5	-0.1751375000	-0.1785714286	$3.433928571 \times 10^{-3}$
0.8	0	-0.2653333333	-0.2777777778	$1.244444444 \times 10^{-2}$
	0.1	-0.2519066667	-0.2638888889	$1.198222222 \times 10^{-2}$
	0.2	-0.2384800000	-0.2500000000	$1.152000000 \times 10^{-2}$
	0.3	-0.2250533333	-0.2361111111	$1.105777778 \times 10^{-2}$
	0.4	-0.2116266667	-0.2222222222	$1.059555556 \times 10^{-2}$
	0.5	-0.1982000000	-0.2083333333	$1.013333333 \times 10^{-2}$
1	0	-0.3020833333	-0.3333333333	$3.125000000 \times 10^{-2}$
	0.1	-0.2866319444	-0.3166666667	$3.003472222 \times 10^{-2}$
	0.2	-0.2711805556	-0.3000000000	$2.881944444 \times 10^{-2}$
	0.3	-0.2557291667	-0.2833333333	$2.760416667 \times 10^{-2}$
	0.4	-0.2402777778	-0.2666666667	$2.638888889 \times 10^{-2}$
	0.5	-0.2248263889	-0.2500000000	$2.517361111 \times 10^{-2}$

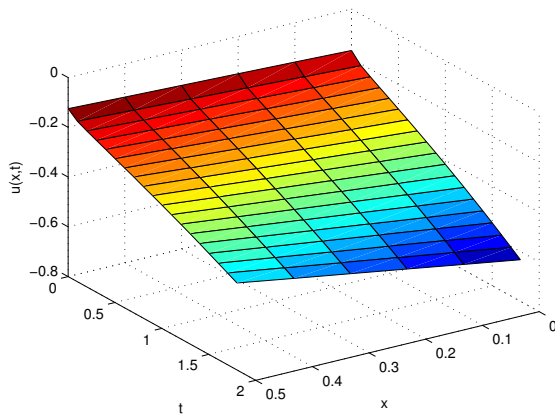
TABLE 3.2 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec cinq termes par la méthode **MIGHPM** de l'équation (3.39) avec $\alpha = 1$ et pour différentes de $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.



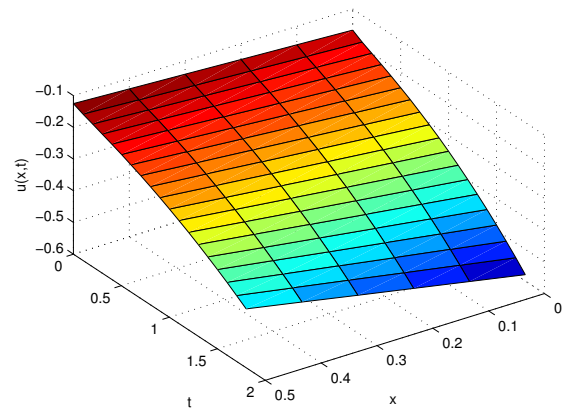
(a) La solution exacte



(b) $\alpha = 1$



(c) $\alpha = 0.5$



(d) $\alpha = 0.75$

FIGURE 3.3 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et les solutions approximatives avec cinq termes par la méthode **MIGHPM** de l'équation (3.39) .

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons essayé d'introduire quelques-unes des méthodes les plus utilisées dans le calcul des approximations numériques des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Nous avons cité comme exemple les méthodes HPM, HPZZTMF, LHPTM, et MIGHPM. Nous avons pris des exemples des équations différentielles d'ordre fractionnaire temporelle au sens de Caputo.

Dans le dernier chapitre, nous avons tenté de donner des algorithmes de résolution de ces équations linéaires et non linéaires par la méthode MIGHPM, pour arriver à des résultats précis. Nous comptons, dans l'avenir appliquer les méthodes citées dans ce mémoire à d'autres équations, et ainsi développer d'autres méthodes numériques de résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaires mais avec d'autres opérateurs de dérivée fractionnaire (au sens de Riemann-Liouville, de Grunwald-Letnikov, et au sens d'Hadamard).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. I. Alaje, M. O. Olayiwola, K. A. Adedokun, J. A. Adedeji, and A. O. Oladapo. Modified homotopy perturbation method and its application to analytical solitons of fractional-order korteweg–de vries equation. *Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Sciences*, 11(1) :139, 2022.
- [2] Z. Ayati and J. Biazar. On the convergence of homotopy perturbation method. *Journal of the Egyptian Mathematical society*, 23(2) :424–428, 2015.
- [3] J. Biazar and H. Aminikhah. Study of convergence of homotopy perturbation method for systems of partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 58(11-12) :2221–2230, 2009.
- [4] J. Biazar and H. Ghazvini. Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 10(5) :2633–2640, 2009.
- [5] A. Elbeleze, A. A. Kılıçman and B. M. Taib. Note on the convergence analysis of homotopy perturbation method for fractional partial differential equations. In *Abstract and Applied Analysis*. Hindawi, 2014.
- [6] A. Ghorbani. Beyond adomian polynomials : he polynomials. *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(3) :1486–1492, 2009.
- [7] J. H. He. Homotopy perturbation technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 178(3-4) :257–262, 1999.
- [8] Y. Khan and Q. Wu. Homotopy perturbation transform method for nonlinear equations using he’s polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(8) :1963–1967, 2011.
- [9] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier, North-Holland, 2006.
- [10] J. W. Miles. The korteweg-de vries equation : a historical essay. *Journal of fluid mechanics*, 106 :131–147, 1981.

- [11] C. Milici, G. Drăgănescu, and J. Tenreiro Machado. *Introduction to fractional differential equations*, volume 25. Springer, 2018.
- [12] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, New York, 1999.
- [13] L. Riabi, K. Belghaba, M. Hamdi Cherif, and D. Ziane. Homotopy perturbation method combined with zz transform to solve some nonlinear fractional differential equations. *International Journal of Analysis and Applications*, 17(3) :406–419, 2019.
- [14] Z. U. A. Zafar. Application of zz transform method on some fractional differential equations. *International Journal. Adv. Eng. Global Technol*, 4 :1355–1363, 2016.
- [15] Z. U. A. Zafar. Zz transform method. *International Journal. Adv. Eng. Global. Technol*, 4 :1605–1611, 2016.
- [16] D. Ziane, K. Belghaba, and M. Hamdi Cherif. Fractional homotopy perturbation transform method for solving the time-fractional kdv, k (2, 2) and burgers equations. *International Journal. Open Problems Compt. Math*, 8(2) :63–75, 2015.

ملخص

المعادلات التفاضلية ذات رتب ناطقة هي تعميم للمعادلات التفاضلية الكلاسيكية. في هذه المذكرة تطرقنا إلى دراسة تقريبات عددية لحل هذه المعادلات و ذلك باستخدام بعض الطرق أو الخوارزميات المعروفة و الكثيرة الاستعمال, حيث تم استخدام المشتقات الكسرية لكابيتو.

الكلمات المفتاحية: الاشتقاق الكسرى لـ كابيتو، معادلة تفاضلية خطية وغير خطية ذات رتبة كسرية، طريقة اضطراب التماثل ، طريقة اضطراب التماثل المدمجة مع بعض التحولات، طريقة اضطراب التماثل المعدلة.

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires sont des généralisations des équations différentielles classiques. Dans ce mémoire, nous étudions des approximations numériques de la solution d'un problème différentiel fractionnaire par les méthodes HPM, HPZZTMF, LHPTM et MIGHPM, en utilisant le dérivé fractionnaire au sens de Caputo. Nous avons traité plusieurs exemples, ainsi que l'équation de KDV que pour laquelle nous avons essayé de donner un algorithme de résolution par méthode MIGHPM, avec des résultats numériques.

Mots-Clés : Dérivée fractionnaire au sens de Caputo, Equation différentielle fractionnaire linéaire et non linéaire, Méthode de perturbation de l'homotopie, Méthode HPM combinée avec quelques transformations, Méthode HPM modifiée.

Abstract

Fractional differential equations are a generalizations of the classical differential equations. In this work, we study numerical approximations of the solution of a fractional differential problem by the HPM, HPZZTMF, LHPTM and MIGHPM methods, using the fractional derivative in the Caputo sense. We have treated several examples, as well as the KDV equation for which we have tried to give a solution algorithm by the MIGHPM method, with numerical results.

Keywords: Fractional derivative in the sense of Caputo, linear and nonlinear fractional differential equation, HPM homotopy perturbation method, HPM method combined with some transformations, modified HPM method.