



Mémoire de fin d'études

PRESENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE : Master

Filière : Physique
Option : Physique des Matériaux

THÈME :
Étude du mouvement hyperbolique en relativité :
Simulation de quelques effets physiques d'un
voyage relativiste.

Préparé par : Talha Hadjer

Soutenu le : 01/07/2018

Devant le jury :

Président : Kahoul Abdelhalim	Professeur	Université de BBA
Rapporteur : Khalfallah Farid	M.C.A	Université de BBA
Examineur : Kebir Hadda	M.C.B	Université de BBA
Examineur : Imakhlaf Anis	M.A.A	Université de BBA

Année Universitaire 2017-2018

Remerciements

Nos remerciement vont tout premièrement a Dieu tout puissant, pour le courage, la patience et la santé qu'il nous a accordées durant toutes ces années d'étude en particulier, et de vie en général, pour affronter toutes les difficultés et les obstacles qui se sont hissés au travers de nos chemins.

Ce travail est réalisé a l'université de bordj Bou Arreridj, facultés des sciences et la technologie, département des sciences de la matière.

Nous remercions

monsieur Khalfallah Farid qui nous a fait l'honneur d'accepter d'encadrer ce mémoire pour ses conseils, sa gentillesse, son soutien et sa patience pendant la correction de la thèse. Son aide durant la réalisation du mémoire

nos remerciement vont aussi a tous les enseignants du département des sciences de la matière pour leurs apports de connaissance durant mes années d'études nous remercions également tous les membres du jury d'avoir accepté de lire ce manuscrit et d'évaluer ce modeste travail

A tous les amis et collègues du département de SM pour leurs Encouragement. Enfin tous nos remerciement a toutes les personnes qui ont Contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail nous leur exprimons toutes nos reconnaissances.

SOMMAIRE

Introduction

Chapitre I: Rappel des principes de la base de la relativité restreinte	01
I-1 Historique de la naissance de la relativité restreinte.....	02
I-1-1 Relativité galiléenne.....	02
I-1-2 Crise de la physique classique	02
I-1-3 La relativité restreinte.....	04
I-2 -Principes de base la relativité restreinte.....	04
I-2-1 -Postulat de la relativité.....	04
I-2-2 Transformation de Lorentz-Poincaré et ses conséquences	05
I-2-3 Contraction des longueurs.....	06
I-2-4 Dilatation du temps	07
I-2-5 Paradoxe des jumeaux	08
I-2-6 Repère instantané propre et temps propre.....	09
I-3 Transformation des grandeurs cinématiques	10
I-3-1 Transformation de la vitesse.....	10
I-3-2 Transformation de l'accélération.....	11
I-4 Rapidité et grandeurs physiques.....	13
I 4-1 Notions de rapidité.....	13
I-4-2 Transformation de la rapidité.....	13
I 4-3 Grandeurs physiques en fonction de la rapidité.....	14
I 4-4 Mouvements à accélération propre constante.....	15
I-5 Effet Doppler et aberration de la lumière	16
I 5-1 Effet Doppler.....	16
I-5-2 Aberration de la lumière.....	17
Chapitre II : Mouvement hyperbolique en relativité restreinte	19
II-1 Définition du mouvement hyperbolique en relativité.....	20
II-2 Mouvement à force constante.....	20
II-2-1 Exemple de mouvement hyperbolique.....	21
II-3 Cinématique du mouvement hyperbolique	21
II-3-1 Rapidité.....	21
II-3-2 Vitesse.....	23
II-3-3 Accélération.....	24

SOMMAIRE

II-3-4 Position.....	26
II-3-5 Temps relatif.....	27
II-4 Trajectoire du mouvement hyperbolique dans le plan (x, t)	28
Chapitre III : Etude de quelques effets physiques d'un voyage relativiste	31
III-1 Etude de l'effet Doppler	32
III-2 Etude de l'aberration des étoiles et aspect du ciel.....	34
III-2-1 variation des angles d'observation des étoiles.....	34
III-2-2 Simulation de la distribution de la position angulaire des étoiles	35
III-3 Etude des effets temporels d'un voyage interstellaire hyperbolique.....	38
III-3-1 Gravité fictive et motivation du mouvement hyperbolique	38
III-3-2 La fusée relativiste	39
III-3-3 Les étapes du voyage relativiste.....	45
III-3-4 Durée du voyage	47
III-3-5 Faisabilité du voyage hyperbolique	47
III-3-6 propulsion relativiste –défi technologique.....	50
Conclusion	

Chapitre I

Rappel des principes de la relativité restreinte

I-1 Historique de la naissance de la relativité restreinte

I-1-1 Relativité galiléenne :

Jusqu'à la fin du 19^e siècle, la mécanique newtonienne était basée sur le principe de relativité de Galilée qui stipule que les lois de la mécanique newtonienne sont valables dans les référentiels galiléens (dits aussi inertiels) qui sont définis comme les référentiels dans lesquels le principe d'inertie est vérifié, c'est-à-dire que tout corps libre qui n'est soumis à aucune force est en mouvement de translation rectiligne uniforme, ou au repos.

L'un des aspects cinématiques connus de la relativité Galiléenne est la loi d'addition des vitesses. Si v et v' sont les vitesses d'un mobile par rapport à deux référentiels Galiléens (R) et (R') tel que (R') est en mouvement de translation uniforme à une vitesse u par rapport à (R), alors nous avons la loi :

$$v' = v - u \quad (I)$$

Les vitesses des corps matériels sont donc simplement additives en physique Newtonienne. Mais est-ce le cas pour tout les corps "physiques" ?

I-1-2 Crise de la physique classique :

Un des volets de la crise qu'a connue la physique au début du 20^eème siècle concerne justement le traitement de la question d'addition des vitesses vis à vis du mouvement de la lumière et des ondes électromagnétiques. Les physiciens du XIX^e siècle, et en particulier Fresnel, n'admettaient pas l'idée d'une propagation ondulatoire de la lumière sans support matériel. A la fin du XIX^e siècle, James Clark Maxwell établit les équations régissant les ondes électromagnétiques et les interactions entre particules chargées électriquement, et plus généralement les effets de la variation des champs électriques et magnétiques sous l'appellation de champ électromagnétique.

La théorie électromagnétique de Maxwell a permis d'arriver à la conclusion que la lumière fait partie des ondes électromagnétiques qui ne sont en réalité que la propagation de champs électriques et magnétiques à une vitesse $C = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Cette vitesse n'est autre que la vitesse de la lumière qui dépend uniquement des constantes électriques et magnétiques du vide ϵ_0 et μ_0 .

Pour résoudre la question du support de propagation de ces ondes, les physiciens imaginèrent un milieu hypothétique baignant tout l'univers, qu'ils baptisèrent éther, et dont les vibrations assuraient la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. La lumière ne devait alors se propager avec une vitesse bien définie c , prédite par la théorie électromagnétique, que dans les milieux au repos par rapport à l'éther. Ce milieu hypothétique qu'est l'éther devait posséder des propriétés contradictoires : il ne devait offrir aucune résistance aux déplacements planétaires, mais pour transmettre des ondes transversales comme la lumière, il devait être pratiquement incompressible.

Chapitre I

Vers 1880, les physiciens, pour qui l'éther restait le substrat indispensable à la propagation des rayons lumineux, vont imaginer un certain nombre d'expériences pour mettre en évidence son existence. Telle est l'origine de l'expérience, restée célèbre, de Michelson en 1881, renouvelée en 1887 par Michelson et Morley [1]. Et ultérieurement de nombreuses fois avec une précision sans cesse grandissante. Partant du principe que la terre est en mouvement dans l'éther et que la vitesse de la lumière est constante par rapport à l'éther, Michelson suppose que la mesure de la vitesse de la lumière doit donner des résultats différents suivant l'orientation de la vitesse de la terre par rapport à l'éther.

Toutes ces expériences ont montré que la lumière et plus généralement les ondes électromagnétiques se propagent à la même vitesse indépendamment du mouvement de la source ou de l'observateur par rapport à l'éther. Elles n'obéissent donc pas à la loi classique d'addition des vitesses qui devra être modifiée pour inclure la lumière. L'idée de l'éther se trouvait discréditée de plus en plus.

Des formules de transformation pour passer d'un observateur à un autre furent établies par Hendrik Anton Lorentz avant 1904 [2]. Il s'agissant d'équations de compatibilité dont la signification n'était pas claire aux yeux de leur auteur. D'autres physiciens avaient eu une démarche similaire plus tôt encore. Henri Poincaré a publié des articles pour en trouver une interprétation, peu de temps avant Einstein.

La question qui se posait alors était : Comment expliquer les échecs successifs des expériences visant à détecter l'éther, milieu de propagation des ondes électromagnétiques et repère absolu ? L'expérience de Michelson-Morley se basait sur la validité de la transformation de Galilée elle-même basée sur un temps et un espace absolus, et sur l'addition Galiléenne des vitesses pour les rayons de lumière qui sont des ondes électromagnétiques. Or il s'avère que les équations de Maxwell, contrairement aux lois de la mécanique, sont en contradiction avec la transformation Galiléenne.

Comment faire pour concilier toutes les lois de la physique (mécanique et électromagnétisme) avec la transformation Galiléenne et l'expérience de Michelson-Morley ? On peut supposer que :

- Soit la théorie électromagnétique est fautive.
- Soit la théorie électromagnétique est valide mais qu'il fallait trouver ce milieu (l'éther).
- Soit la transformation de Galilée et les postulats de la mécanique Newtonienne (temps et espace absolus) sont faux.

Il s'est avéré que c'est la dernière supposition qui était la bonne. C'est Albert Einstein qui a fondé en 1905 [3] une nouvelle théorie de l'espace-temps basée sur le caractère non absolu de l'espace et du temps en énonçant deux postulats très simples qui vont expliquer toutes les contradictions dans les expériences précédentes et vont concilier toutes les lois de l'électromagnétisme avec le principe de relativité.



Figure 1 : Albert Einstein

I-1-3 La relativité restreinte :

La relativité restreinte est la théorie formelle de l'espace-temps élaborée par Albert Einstein en 1905 en vue de tirer toutes les conséquences physiques de l'échec des expériences visant à mettre en évidence l'hypothétique milieu qu'est l'éther.

La théorie d'Einstein est centrée sur le principe de relativité de l'observation et de la mesure des phénomènes en fonction du référentiel depuis lequel l'observateur (ou l'appareil de mesure) effectue ces mesures. Elle est dite restreinte car elle se limite aux référentiels inertiels, les autres référentiels sont l'objet d'étude de la relativité générale. Rappelons qu'un référentiel est dit inertiel si tout objet isolé de ce référentiel (sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle) est soit immobile, soit en mouvement de translation rectiligne uniforme. Par exemple : une fusée dans l'espace loin de toute masse constitue un référentiel inertiel si aucun moteur n'est allumé.

I-2 Principes de base de la relativité restreinte

I-2-1 Postulat de la relativité:

Einstein énonce deux postulats, d'une part il garde le principe de la relativité galiléenne et le généralise à tout les phénomènes physiques, et d'autre part, il abandonne l'idée de l'éther en émettant le principe selon lequel la vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur dans tous les référentiels inertiels, ce qui a permis de réconcilier les équations de Maxwell avec la mécanique classique. Ces postulats s'énoncent comme suit [4] :

Chapitre I

- Les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels galiléens
- La vitesse de la lumière dans le vide est une constante universelle, elle a la même valeur dans tous les référentiels galiléens.

Le premier postulat est le principe de relativité proprement dit, dans sa conception restreinte à la classe des référentiels inertiels. Il formalise un constat de Galilée selon lequel le mouvement rectiligne uniforme est strictement équivalent à l'absence de mouvement, et aucune loi physique ne permet de les distinguer.

Le second postulat formalise l'interprétation des équations de Maxwell suivant laquelle il n'y a pas d'éther, et il est conforme aux expériences (en premier lieu celle de Michelson et Morley). Il est équivalent au postulat que la vitesse de la lumière ne dépend pas de la vitesse de la source lumineuse ou du référentiel de l'observateur. Une des conséquences est que la lumière peut être utilisée, de manière identique dans tout référentiel inertiel, comme moyen de communication pour synchroniser les horloges qui y sont immobiles.

I-2-2 Transformation de Lorentz-Poincaré et ses conséquences :

La transformation spéciale de Lorentz-Poincaré a été introduite par Lorentz et Poincaré pour satisfaire l'invariance des équations de Maxwell par changement de référentiel galiléen. En étendant le principe de relativité à tous les phénomènes physiques, électromagnétisme compris, Poincaré puis Einstein réussirent à lever la crise provoquée par les résultats de l'expérience de Michelson et Morley [1],[3].

Nous rappelons ici la transformation de Lorentz [2]. Qui permet de passer d'un référentiel Galiléen (R) à un autre (R').

Transformation de Lorentz-Poincaré :

Soient deux référentiels galiléens, l'un (R) et l'autre (R') se déplaçant par rapport à (R) à la vitesse $\vec{u} = u\vec{i}$, dirigée suivant l'axe ox tel que à :

$$t = t' = 0 \text{ on a } x = x' = 0.$$

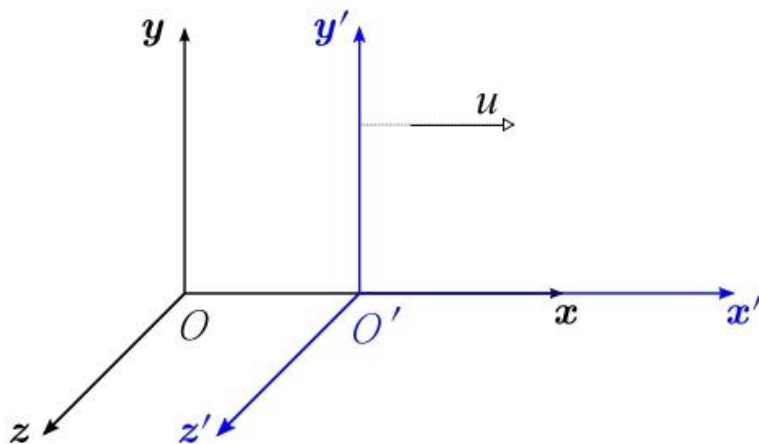


Figure 2 : Illustration du mouvement relatif des repères galiléens (R) et (R').

La transformation qui permet de passer des coordonnées spatio-temporelles (ct, x, y, z) d'un évènement dans (R) à ses coordonnées (ct', x', y', z') dans (R') est donnée par :

$$\boxed{\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}} \quad (\text{I-1})$$

Où β et γ sont des facteurs sans dimension définis par :

$$\beta = \frac{u}{c} \quad (\text{I-2})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\text{I-3})$$

β est appelée la vitesse réduite et γ le facteur de Lorentz (ou facteur relativiste). On note que $-1 \leq \beta \leq 1$ et $\gamma \geq 1$. La relativité restreinte impose donc une vitesse limite à toute particule qui est la vitesse de la lumière c . Ceci a été vérifié expérimentalement à mainte reprise dans les accélérateurs de particule.

I-2-3 Contraction des longueurs:

En relativité, la contraction des longueurs désigne la loi suivant laquelle la mesure de la longueur d'un objet en mouvement est diminuée par rapport à la mesure faite dans le référentiel où l'objet est immobile, du fait notamment, de la relativité de la simultanéité d'un référentiel à l'autre. Toutefois, seule la mesure de la longueur parallèle à la vitesse est contractée, les mesures perpendiculaires à la vitesse ne changent pas d'un référentiel à l'autre [2].

Prenons l'exemple suivant :

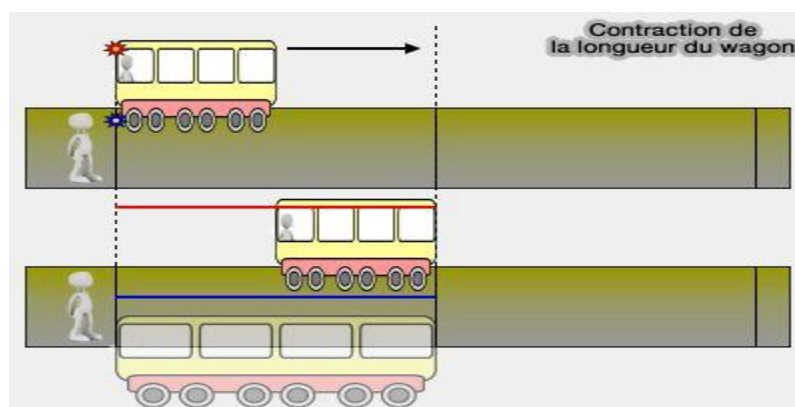


Figure 3 : Contraction de la longueur d'un train en mouvement [5].

Chapitre I

Soit L_0 la longueur propre d'un train, c'est-à-dire sa longueur mesurée dans son propre référentiel (R_0). Si le train est en mouvement à une vitesse v par rapport à un référentiel (R) alors sa longueur L mesurée dans (R) subit une contraction qui peut être obtenue à partir de la transformation de Lorentz. Elle est donnée par :

$$L = \frac{L_0}{\gamma_v} \quad (\text{I-4})$$

Puisque $\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ est toujours supérieur à 1 alors on a : $L \leq L_0$. La longueur mesurée dans le référentiel propre est toujours la plus grande.

I-2-4 Dilatation du temps:

Le terme dilatation du temps désigne un effet de la relativité restreinte selon lequel l'intervalle de temps entre deux événements mesuré dans un référentiel inertiel quelconque est toujours supérieur à l'intervalle de temps mesuré dans le référentiel inertiel où ces deux événements ont la même position spatiale (mais n'ont pas lieu au même moment, bien sûr) [1].

Etant donné que le temps est défini, dans la théorie de la relativité, par la donnée initiale d'une horloge pour chaque référentiel, on peut en déduire que pour un observateur, une horloge en mouvement semble ralentir par rapport à une horloge immobile. Bien sur, cet effet intervient sur toute mesure du temps [3], [4].

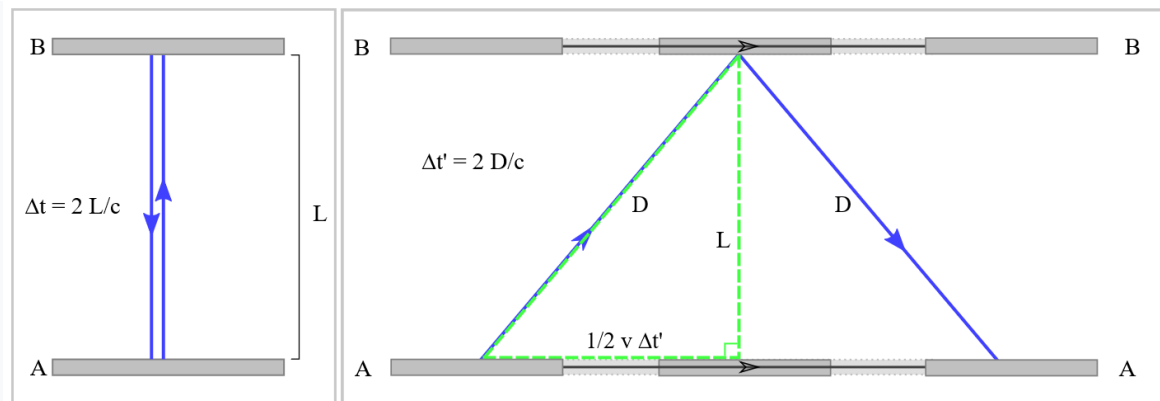


Figure 4 : trajet aller-retour de la lumière sur un miroir en mouvement [6].

La figure 4 montre un schéma utilisant la lumière pour dériver la loi de la dilatation du temps :

Dessin de gauche : pour l'observateur immobile par rapport aux miroirs A et B, le départ et le retour de la lumière se font au même endroit, et la lumière parcourt la distance $2L$ à la vitesse c donc pendant un temps Δt , tel que :

$$2L = c \Delta t$$

Chapitre I

Dessin de droite : ce même observateur voit passer à une vitesse v une installation identique, il voit que la distance parcourue par la lumière entre le départ et le retour (qui n'ont pas lieu au même endroit) est $2D$ et est supérieure à $2L$, mais la vitesse de la lumière est toujours c , même si la source lumineuse est en mouvement (postulat de la relativité restreinte). Pour lui, cet aller-retour dans l'installation en mouvement prend plus de temps que dans l'installation immobile :

$$D^2 = L^2 + \left(\frac{1}{2}v\Delta t'\right)^2$$
$$\Rightarrow \frac{c^2(\Delta t'^2)}{4} = \frac{c^2(\Delta t)^2}{4} + \frac{v^2(\Delta t')^2}{4}$$
$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Delta t$$

La relation entre les deux intervalles de temps est donnée par :

$$\boxed{\Delta t' = \gamma_v \Delta t} \quad (\text{I-5})$$

On a toujours $\Delta t' \geq \Delta t$, ainsi le même phénomène prend plus de temps, donc paraît plus lent, quand il est vu en mouvement.

I-2-5 Paradoxe des jumeaux :

En physique le paradoxe des jumeaux ou paradoxe des horloges, présenté par Paul Langevin au congrès de Bologne en 1911 [7]. Est un paradoxe issu d'une expérience de pensée qui semble montrer que la relativité restreinte est contradictoire.

Des jumeaux sont nés sur terre. L'un fait un voyage aller-retour dans l'espace à bord d'une fusée à une vitesse proche de celle de la lumière. D'après le phénomène de dilatation des durées de la relativité restreinte, pour celui qui est resté sur terre la durée du voyage est plus grande que pour celui qui est parti dans l'espace (figure 5).

Toutefois, celui qui voyage est endroit de considérer, les lois de la physique par changement de référentiel, qu'il est immobile et que c'est son frère et la terre qui s'éloignent à grande vitesse de lui. Il pourrait donc conclure que c'est son frère resté sur terre, qui est plus jeune à la fin du voyage.

La conclusion, admise par l'écrasante majorité des spécialistes, dit que le jumeau voyageur finit plus jeune que celui resté sur terre, et peut être considérée comme due à la dissymétrie entre les jumeaux car le voyageur change de référentiel galiléen pour revenir (décélération et accélération au point de départ et au point de demi-tour), alors que l'autre n'en change pas. Des observations, notamment sur les durées de vie (entre création et l'annihilation) de muons atmosphériques, sont considérées comme en accord avec cette conclusion.

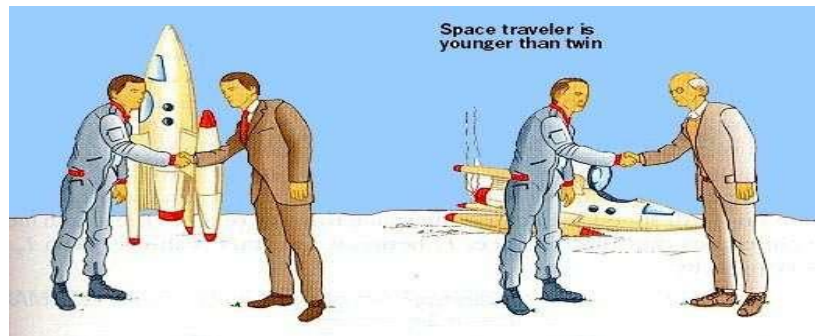


Figure 5: Illustration du paradoxe des jumeaux [6].

À titre d'exemple :

Considérons un voyageur en route vers alpha du centaure (l'étoile la plus proche de nous) distance de $L_0 = 4,3$ année lumière (AL) voyageant à une vitesse de $0.5c$, donc à un facteur de Lorentz :

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1,15.$$

Il synchronise son horloge avec son frère jumeau au départ. En accélérant rapidement à $0.5c$, il change de système de référence. De son point de vue, depuis son référentiel, la distance de l'étoile est contractée et vaut maintenant $L = \frac{L_0}{\gamma} \cong 3,72 AL$. À sa vitesse de $0.5c$, il prendra environ 7,44 année pour l'aller de 7,44 année pour le retour, donc 14,88 année au total.

Du point de vue de son frère resté sur terre, le voyage (aller-retour) durera $2(4,3 AL / 0.5c)$ (aller-retour) = 17,2 ans.

Le voyageur revient donc $17,2 - 14,88 = 2,32$ année plus jeune que son frère.

I-2-6 Repère instantané propre et temps propre :

Le référentiel instantané propre (R_0) ou repère propre de la particule à l'instant t est le repère inertiel dont l'origine est la position de la particule à l'instant t et dont la vitesse est celle de la particule au même instant t (ce repère n'est donc pas unique, à chaque instant est accompagné un repère propre qui dépend de la position et de la vitesse de la particule) [8].

Le temps propre τ de la particule est le temps mesuré dans le référentiel lié à la particule. Donc si $(R') = (R_0)$ est le repère propre de la particule, alors pour deux instants infiniment proches on a la relation suivante entre le temps propre τ et le temps relatif t mesuré dans (R) :

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \beta_v^2} = \frac{dt}{\gamma_v} \quad (\text{I-6})$$

I-3 Transformation des grandeurs cinématiques

Transformation des vitesses et des accélérations :

L'expérience de Michelson et Morley a révélé que la composition newtonienne des vitesses dans un changement de référentiel galiléen ne constituait qu'une approximation qui n'était justifiée que si les vitesses étaient faibles devant la vitesse de la lumière dans le vide.

Nous allons établir les formules de transformation des vitesses et des accélérations entre deux repères galiléens (R) et (R') en cinématique relativiste. Nous appliquerons ces résultats à plusieurs exemples dont l'aberration des étoiles et l'effet doppler.

I-3-1 Transformation de la vitesse :

Il s'agit d'établir la relation entre les vitesses \vec{v} et \vec{v}' d'une particule par rapport aux référentiels galiléens (R) et (R') , tel que (R') se déplace parallèlement à (ox) à une vitesse \vec{u} comme indiqué dans la figure 2 :

Les formules de transformation des vitesses s'obtiennent directement à partir de la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (\text{I-7})$$

En différenciant ces équations, nous obtenons :

$$cdt' = \gamma(cdt - \beta dx) \quad (\text{I-8})$$

$$dx' = \gamma(dx - \beta cdt) \quad (\text{I-9})$$

En divisant (I-9) par (I-8), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{cdt'} &= \frac{dx - \beta cdt}{cdt - \beta dx} = \frac{dx - \beta cdt}{dt - \frac{\beta dx}{c}} = \frac{dx - \beta cdt}{dt - \frac{\beta dx}{c}} \\ &= \frac{\frac{1}{dt} \left[\frac{dx}{dt} - \beta c \right]}{\frac{1}{dt} \left[1 - \frac{\beta dx}{cdt} \right]} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ &= \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \end{aligned}$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad (\text{I-10})$$

Les mêmes étapes pour v'_y et v'_z conduisent à :

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})} \quad (\text{I-11})$$

et :

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})} \quad (\text{I-12})$$

La loi de transformation des vitesses en cinématique relativiste peut s'écrire sous forme vectorielle comme suit :

Pour la composante de vitesse parallèle à \vec{u} :

$$\boxed{\vec{v}'_{\parallel} = \frac{\vec{v}_{\parallel} - \vec{u}}{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}}} \quad (\text{I-13})$$

Pour la vitesse perpendiculaire à \vec{u} :

$$\boxed{\vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\gamma(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2})}} \quad (\text{I-14})$$

I-3-2 Transformation de l'accélération :

Dérivons par rapport au temps la formule de transformation des vitesses suivant l'axe ox , afin de faire apparaître les accélérations :

$$a'_x = \frac{dv'}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left[\frac{(v_x - u)}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \right]$$

D'après la transformation de Lorentz :

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$cdt' = \gamma(cdt - \beta dx)$$

Nous différencions la première équation par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
 dt' &= \gamma dt \left(1 - \frac{\beta dx}{cdt}\right) = \gamma dt \left(1 - \beta \frac{dx}{cdt}\right) \\
 &= \gamma dt \left(1 - \beta \frac{v_x}{c}\right) \\
 \frac{dt}{dt'} &= \frac{1}{\gamma \left(1 - \beta \frac{v_x}{c}\right)}
 \end{aligned}$$

et comme : $1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$ donc :

$$\begin{aligned}
 a'_x &= \frac{dt}{dt'} \frac{\left[\frac{dv_x}{dt} \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right) + \frac{u}{c^2} \frac{dv_x}{dt} (v_x - u) \right]}{\left[1 - \frac{uv_x}{c^2}\right]^2} \\
 &= \frac{\frac{dt}{dt'} \left[\left(1 - \frac{uv_x}{c^2} + \frac{uv_x}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}\right) a_x \right]}{\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \beta \frac{v_x}{c}\right)} \frac{[(1 - \beta^2) a_x]}{\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} \\
 a'_x &= \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^3} \tag{I-15}
 \end{aligned}$$

Les même étapes pour a'_y et a'_z donnent :

$$a'_y = \frac{1}{\gamma^2 \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} a_y + \frac{uv_y}{c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} a_x \tag{I-16}$$

$$a'_z = \frac{1}{\gamma^2 \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} a_z + \frac{uv_z}{c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} a_x \tag{I-17}$$

La loi de transformation des accélérations peut elle aussi être écrite sous forme vectorielle, pour les composantes parallèle et perpendiculaire à \vec{u} :

$$\boxed{\vec{a}'_{\parallel} = \frac{\vec{a}_{\parallel}}{\gamma^3 \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^3}} \tag{I-18}$$

$$\boxed{\vec{a}'_{\perp} = \frac{\vec{a}_{\perp} + \frac{[\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{a})]}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^3}} \tag{I-19}$$

I-4 Rapidité et grandeurs physiques

I-4-1 Notion de rapidité

La rapidité θ , ou paramètre de vélocité, d'une particule en mouvement est une grandeur sans dimension très utile en relativité restreinte, elle peut remplacer la vitesse comme paramètre en simplifiant considérablement les calculs. L'intérêt de la rapidité vient du fait que, de par son caractère linéaire, elle préserve la relation d'addition des vitesses de la mécanique classique. Elle est définie à partir de la vitesse v à l'aide des fonctions hyperboliques par :

$$\text{th}(\theta) = \frac{v}{c} = \beta \quad (\text{I-20})$$

$$\theta = \text{arcth}(\beta) \quad (\text{I-21})$$

β Peut varier entre -1 et +1, donc θ peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Notons les relations utiles suivantes :

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = ch\theta \quad (\text{I-22})$$

$$dt = ch\theta d\tau \quad (\text{I-23})$$

$$\beta\gamma = sh\theta \quad (\text{I-24})$$

$$v = c\beta = c\text{th}\theta \quad (\text{I-25})$$

Pour obtenir les formules correspondant à la transformation inverse il suffit de changer β en $-\beta$, et donc θ en $-\theta$

I-4-2 Transformation de la rapidité :

Soit θ et θ' les rapidités de la particule par rapport à (R) et (R') suivant l'axe (ox) et soit θ_u la rapidité de (R') par rapport à (R) .

On a d'après les relations précédentes :

$$\begin{cases} \text{th}\theta' = \frac{v'_x}{c} \\ \text{th}\theta = \frac{v_x}{c} \\ \text{th}\theta_u = \frac{u}{c} \end{cases} \quad (\text{I-26})$$

Maintenant, nous composons v'_x, v_x, u :

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

Donc :

$$c \operatorname{th} \theta' = \frac{c \operatorname{th} \theta - c \operatorname{th} \theta_u}{1 - \operatorname{th} \theta \cdot \operatorname{th} \theta_u}$$

$$\operatorname{th} \theta' = \frac{\operatorname{th} \theta - \operatorname{th} \theta_u}{1 - \operatorname{th} \theta \cdot \operatorname{th} \theta_u}$$

$$\operatorname{th} \theta' = \operatorname{th}(\theta - \theta_u)$$

Et finalement, nous obtenons :

$$\boxed{\theta' = \theta - \theta_u} \quad (\text{I-27})$$

On voit bien ici que la rapidité est une grandeur additive tout comme la vitesse en mécanique newtonienne.

I-4-3 Grandeurs physiques en fonction de la rapidité

Considérons une particule de masse propre m en mouvement dans l'espace parallèlement à l'axe (ox) d'un repère inertiel (R). Soit θ sa rapidité par rapport à (R) et soit $\beta = \operatorname{th} \theta$ et $\gamma = \operatorname{ch} \theta$ sa vitesse réduite et son facteur de Lorentz par rapport à ce repère. Travailler en terme de temps propre et de rapidité simplifie considérablement les calculs, nous allons donc exprimer les grandeurs physiques suivantes de la particule: vitesse, impulsion, accélération, force, énergie cinétique et totale en fonction de la rapidité. Notons que nous considérons uniquement le cas d'un mouvement rectiligne où les grandeurs vectorielles ont une seule composante. Nous pouvons donc omettre la notation vectorielle.

Expression de la vitesse : On rappelle que :

$$\boxed{v = c \cdot \operatorname{th} \theta} \quad (\text{I-28})$$

Expression de l'accélération : L'accélération est la dérivée de la vitesse, sachant que

$$\frac{d}{d\theta} \operatorname{th} \theta = \frac{1}{\operatorname{ch} \theta^2} \quad \text{et} \quad \frac{dt}{d\tau} = \operatorname{ch} \theta \quad \text{donc :}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} [c \operatorname{th} \theta] \\ &= \frac{c}{\operatorname{ch} \theta^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{\operatorname{ch} \theta^2 \cdot \operatorname{ch} \theta} \frac{d\theta}{d\tau} \end{aligned}$$

$$\boxed{a = \frac{c}{\operatorname{ch} \theta^3} \frac{d\theta}{d\tau}} \quad (\text{I-29})$$

Expression de l'impulsion : l'impulsion (ou la quantité de mouvement) p d'un corps relativiste est donnée par :

$$p = m \gamma v = mc \beta \gamma \quad \text{et sachant que} \quad \beta \gamma = \operatorname{sh} \theta$$

Donc :

$$p = mc \operatorname{sh} \theta \quad (\text{I-30})$$

On peut montrer aussi que :

$$p = \frac{E}{c \operatorname{th} \theta} \quad (\text{I-31})$$

Où E est l'énergie totale.

Expression de la force : La force est définie par :

$$f = \frac{dp}{dt} = mc \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d}{d\theta} \cdot \operatorname{sh} \theta = mc \operatorname{ch} \theta \frac{d\theta}{dt} = mc \frac{d\theta}{d\tau}$$

Donc :

$$f = mc \frac{d\theta}{d\tau} \quad (\text{I-32})$$

Expression de l'énergie totale : l'énergie totale d'une particule est :

$$E = m\gamma c^2 = mc^2 \operatorname{ch} \theta \quad (\text{I-33})$$

Expression de l'énergie cinétique : l'énergie cinétique est l'énergie totale diminuée de l'énergie de masse mc^2 , donc :

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2 = mc^2(\operatorname{ch} \theta - 1) \quad (\text{I-34})$$

I-4-4 Mouvement à accélération propre constante :

Soit une particule en mouvement à une vitesse \vec{v} par rapport à (R). Soit (R') = (R₀) le repère instantanée propre liée à la particule. Notons $\vec{\alpha} = \vec{a}'$ l'accélération de la particule dans (R'), c'est-à-dire son accélération instantanée propre.

On a dans ce cas $\vec{u} = \vec{v}$, et $\gamma = \gamma_u = \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ en utilisant la relation de transformation de l'accélération (I-18) on trouve :

$$\alpha = a' = \frac{a}{\gamma^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}$$

$$= \frac{a}{\gamma_v^3 (\gamma_v^{-2})^3}$$

$$\Rightarrow a' = \alpha = \gamma^3 a$$

On obtient finalement la relation suivante entre l'accélération relative a d'une particule (dans un repère (R)) et son accélération propre α :

$$\boxed{a = \frac{\alpha}{\gamma^3}} \quad (\text{I-35})$$

I-5 Effet Doppler et Aberration de la lumière

I-5-1 Effet Doppler :

L'effet Doppler, ou effet Doppler-Fizeau, est le décalage de fréquence (et de longueur d'onde) d'un phénomène ondulatoire d'une source qui est en mouvement par rapport à l'observateur qui effectue la mesure. Si on désigne de façon générale ce phénomène physique sous le nom d'effet Doppler, le nom « d'effet Doppler-Fizeau » est réservé aux ondes électromagnétiques [9].

Formule du décalage Doppler : soit λ_0 la longueur d'onde propre d'une onde dont la source (S) est en mouvement à une vitesse réduite $\beta = v/c$, par rapport à (R) et soit φ l'angle d'observation de la particule $\varphi = \widehat{xOs}$ (voir figure ci-dessous).

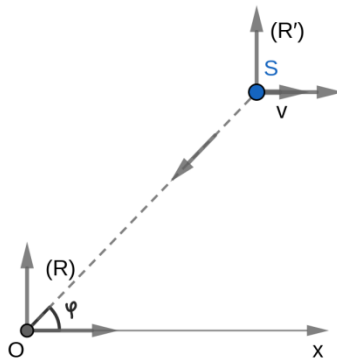


Figure 6: Illustration de l'effet Doppler-Fizeau

On peut démontrer que la longueur d'onde λ mesurée dans (R) est :

$$\boxed{\lambda = \gamma \lambda_0 (1 + \beta \cos \varphi)} \quad (\text{I-36})$$

Effet Doppler longitudinale : Lorsque l'observateur se trouve sur l'axe de mouvement de la source ($\cos \varphi = \pm 1$). On a alors deux cas :

Lorsque la source se rapproche: décalage vers le bleu

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \quad (\text{I-37})$$

Lorsque la source s'éloigne : décalage vers le rouge.

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} \quad (\text{I-38})$$

Effet Doppler transversale: c'est lorsque l'observateur se trouve sur l'axe perpendiculaire à l'axe de mouvement de la source ($\cos\varphi = 0$).

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\text{I-39})$$

I-5-2 Aberration de la lumière :

Phénomène de l'aberration :

C'est un phénomène qui se traduit par le fait que la direction apparente d'un mobile dépend de la vitesse de celui qui l'observe (plus exactement de la composante de cette vitesse perpendiculaire à la direction d'observation), de la même façon que pour un passager d'un véhicule qui se déplace par exemple à l'horizontale, la pluie semble tomber depuis une direction située vers l'arrière, et non selon la verticale [10].

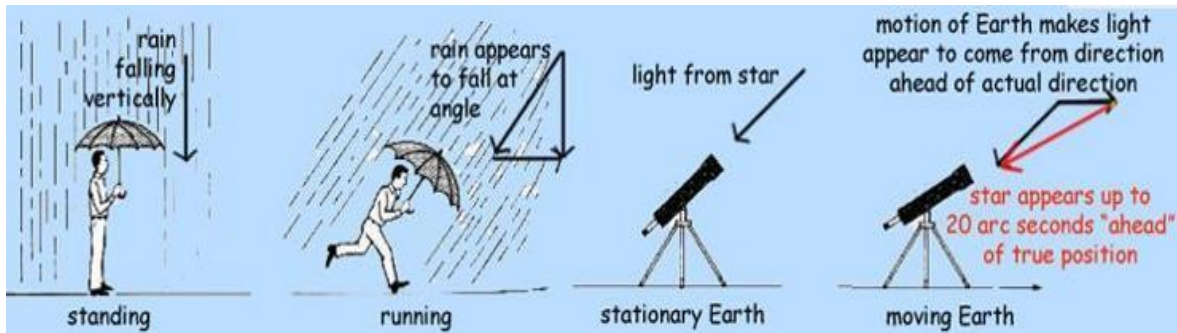


Figure 7 : Aberration de la pluie et de la lumière "tombant" vers un observateur en mouvement [11].

Sur la figure ci-dessus, à gauche, un observateur court sous la pluie. L'observateur mobile ne verra pas la pluie tomber depuis sa vraie direction, mais à un angle déterminé par sa vitesse. Plus il va vite, plus la pluie paraîtra horizontale. De même, comme indiqué à droite, un faisceau de lumière provenant d'une étoile éloignée semblera provenir d'un peu à droite de sa position réelle à cause du mouvement de la Terre, à un angle de sa position réelle déterminée par la vitesse de la Terre.

Chapitre I

Formule de l'aberration pour la lumière :

Soit une particule de vitesse \vec{v} dans (R) et \vec{v}' dans (R') , soit φ l'angle entre (ox) et \vec{v} (dans (R)) et ϕ l'angle entre (ox) et \vec{v}' (dans (R')).

On a d'après les relations de transformation des vitesses :

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \quad \text{et} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)}$$

Pour des photons de lumière :

$$v = c = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{et} \quad v' = c = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y}$$

Dans (R) :

$$v_x = v \cdot \cos \varphi = c \cdot \cos \varphi \quad , \quad v_y = v \cdot \sin \varphi = c \sin \varphi$$

Dans (R') :

$$v'_x = v' \cos \phi = c \cdot \cos \phi \quad , \quad v'_y = v' \sin \phi = c \cdot \sin \phi$$

$$\tan \phi = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{\gamma(v_x - \beta)} = \frac{c \sin \varphi}{\gamma(c \cos \varphi - \beta c)}$$

$$\tan \phi = \frac{\sin \varphi}{\gamma(\cos \varphi - \beta)}$$

$$\boxed{\phi = \arctan \left(\frac{\sin \varphi}{\gamma(\cos \varphi - \beta)} \right)} \quad (\text{I-40})$$

Ou bien, pour lever l'ambiguïté entre l'angle ϕ et $\phi + \pi$ dans la formule de la tangente, on utilise les deux formules suivantes:

$$\cos \phi = \frac{\cos \varphi - \beta}{1 - \beta \cos \varphi} \quad , \quad \sin \phi = \frac{\sin \varphi}{\gamma(1 - \beta \cos \varphi)} \quad (\text{I-41})$$

Chapitre II

Mouvement hyperbolique en relativité restreinte

II-1 Définition du mouvement hyperbolique

C'est le mouvement relativiste d'un mobile à accélération propre constante. C'est-à-dire, l'accélération dans le repère instantané propre α du mobile reste constante [12], [13].

$$\alpha = Cte$$

Comme nous avons vu dans les relations précédentes, l'accélération relative est donnée en fonction de l'accélération propre par :

$$a = \frac{\alpha}{\gamma^3} \quad (\text{II-1})$$

dans un mouvement de type hyperbolique α étant constante et comme γ dépend de la vitesse v du mobile qui est variable, il en résulte que l'accélération relative a dans un mouvement hyperbolique n'est pas constante.

II-2 Mouvement à force constante : soit une particule soumise à force F qui l'accélère à une accélération relative a (dans (R)).

D'après les relations précédentes (I-29) et (I-32) on a :

$$\begin{cases} f = mc \frac{d\theta}{d\tau} \\ a = \frac{c}{ch\theta^3} \cdot \frac{d\theta}{d\tau} \end{cases} \quad (\text{II-2})$$

$$\Rightarrow f = mc \frac{ch\theta^3}{c} a$$

$$f = m ch\theta^3 \cdot a$$

Alors :

$$a = \frac{1}{m ch\theta^3} \cdot f = \frac{1}{\gamma^3} \left(\frac{f}{m} \right)$$

Or d'après (II-1) :

$$a = \frac{\alpha}{\gamma^3}$$

Finalement :

$$\frac{f}{m} = \alpha \quad (\text{II-3})$$

Chapitre II

Ainsi, dans le cas d'un mouvement hyperbolique, l'accélération propre α étant constante ce qui implique que la force f est constante. Par conséquent, tout mouvement à force constante est un mouvement hyperbolique.

Notons un fait remarquable, on retrouve la loi de la dynamique de Newton :

$$f = m\alpha.$$

Qui est donc valable uniquement dans le repère instantané propre.

II-2-1 Exemple de mouvement hyperbolique :

- La chute libre dans un champ de gravité uniforme est un mouvement hyperbolique à accélération propre $\alpha = g$ en effet:

$$f = mg = m\alpha \Rightarrow \alpha = g.$$

- Le mouvement d'une charge électrique q dans un champ électrique uniforme E est un mouvement hyperbolique à accélération propre $\alpha = \frac{qE}{m}$. en effet la charge q subit la force :

$$f = qE = m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{qE}{m}$$

II-3 Cinématique du mouvement hyperbolique :

Nous allons par la suite exprimer puis tracer à l'aide du logiciel Maple les graphes des grandeurs cinématiques en fonction du temps relatif t (dans (R)) et propre τ (dans (R_0)) pour un mouvement hyperbolique [14].

Pour cela, nous considérons un mobile en mouvement hyperbolique selon la direction positive de l'axe (ox) avec une position initiale nulle ($x = 0$) et une vitesse initiale nulle ($v = 0$) dans les deux repères, celui du mobile (repère propre (R_0)) et le repère relatif (celui de l'observateur (R)) aux instants initiaux ($t = \tau = 0$). Nous allons supposer (pour des raisons qui apparaîtront au chapitre III) que l'accélération propre est égale à l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre $\alpha = g = 10(m/s^2)$. Pour des raisons pratiques nous allons prendre l'année (A) comme unité de temps et l'année lumière (AL) comme unité de distance. Dans ces unités, la vitesse de la lumière vaut $c = 1 (AL/A)$, et l'accélération propre $\alpha = g = 1.05 (AL/A^2)$.

II-3-1 Rapidité

Calculons la rapidité θ en fonction du temps propre τ . D'après la relation (II-2) :

$$\frac{f}{mc} = \frac{d\theta}{d\tau}$$

Chapitre II

Or :

$$\frac{f}{m} = \alpha$$

Par conséquence :

$$d\theta = \frac{\alpha}{c} \cdot d\tau$$

En intégrant :

$$\int d\theta = \frac{\alpha}{c} \int d\tau$$

En supposant qu'à $\tau = 0$ nous avons $\theta = 0$, on obtient alors :

$$\boxed{\theta(\tau) = \frac{\alpha}{c} \tau} \quad (\text{II-4})$$

Calculons maintenant la rapidité θ en fonction du temps relatif t :

D'après la relation (I-22) sachant que $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ on a :

$$\frac{f}{mc} = \frac{\gamma d\theta}{dt}$$

En remplaçant $\frac{f}{m} = \alpha$ on trouve :

$$\frac{\alpha}{c} \cdot dt = \gamma \cdot d\theta$$

D'autre part $\gamma = \text{ch}\theta$ alors :

$$\frac{\alpha}{c} dt = \text{ch}\theta d\theta$$

En intégrant avec la condition $\theta(t=0) = 0$ on obtient :

$$\Rightarrow \int \frac{\alpha}{c} dt = \int \text{ch}(\theta) d\theta$$
$$\text{sh}\theta = \frac{\alpha}{c} t \quad (\text{II-5})$$

Finalement :

$$\theta(t) = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\alpha}{c}t\right) \quad (\text{II-6})$$

La variation de θ en fonction de t et τ est illustrée dans les figures ci-dessus :

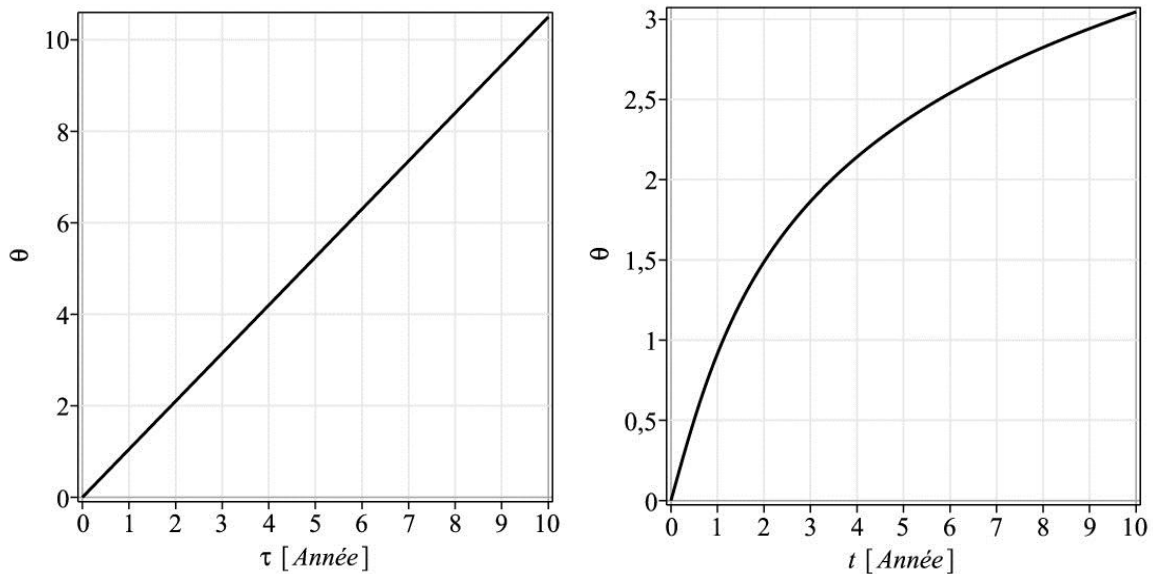


Figure 8 : Représentation de la rapidité θ dans un mouvement hyperbolique : à gauche θ en fonction du temps propre τ et à droite en fonction du temps relatif t .

θ est toujours croissante. Pour la figure à gauche, θ croît linéairement en fonction du temps propre τ . La rapidité du mouvement hyperbolique est donc linéaire dans le repère instantané propre. Pour la figure à droite la rapidité croît moins rapidement en fonction de t .

II-3-2 Vitesse :

Calculons la vitesse en fonction du temps propre τ : D'après les relations précédentes (I-25), nous avons trouvé :

$$v(\tau) = c \operatorname{th}\theta$$

Et d'après la relation (II-4)

$$\Rightarrow \theta = \frac{\alpha\tau}{c}$$

En remplaçant dans la relation de vitesse on obtient finalement :

$$v(\tau) = c \operatorname{th}\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) \quad (\text{II-7})$$

Chapitre II

Exprimons maintenant la vitesse en fonction du temps t : D'après le chapitre I, nous avons trouvé : $v = c \operatorname{th} \theta$ et on a :

$$\operatorname{th} \theta = \frac{sh\theta}{ch\theta} = \frac{sh\theta}{\sqrt{1+sh^2\theta}} \quad \text{et} \quad sh\theta = \frac{\alpha t}{c}$$

Finalement :

$$v(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}}} \quad (\text{II-8})$$

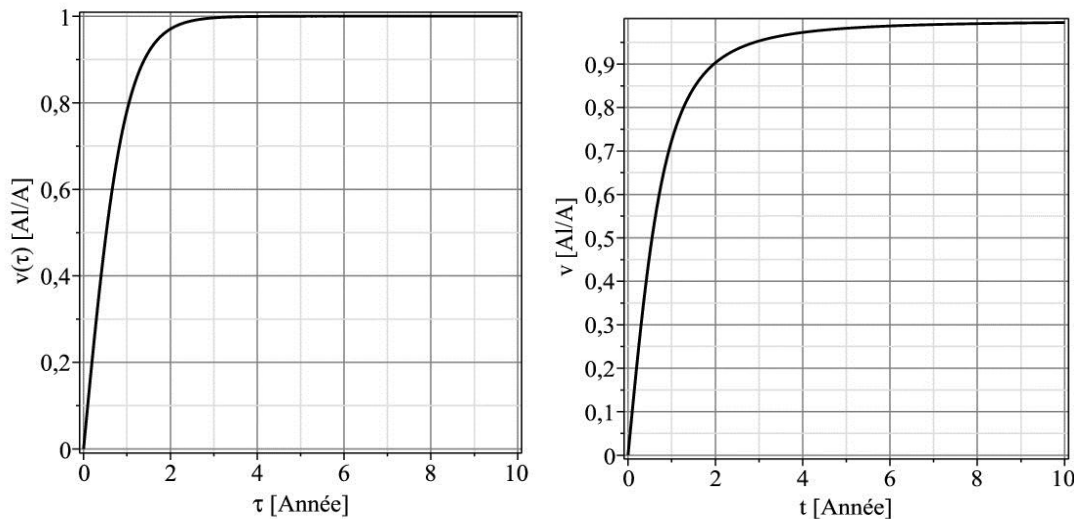


Figure 9 : Variation de la vitesse v dans un mouvement hyperbolique: à gauche v en fonction du temps propre τ et à droite v en fonction du temps relatif t .

La vitesse augmente asymptotiquement en termes de τ et en termes de t vers un plateau qui est la valeur maximale permise (la vitesse de la lumière c). Ce plateau est atteint plus rapidement en fonction du temps propre dans le repère (R_0) à cause de la dilatation du temps.

II-3-3 Accélération:

Calculons l'accélération en fonction du temps propre τ : On a :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Et d'après la relation (I-6) on a :

$$dt = \gamma d\tau$$

En dérivant la relation de la vitesse précédente (II-7) par rapport au temps propre τ :

$$a(\tau) = \frac{dv}{\gamma d\tau} = \frac{1}{\text{ch}\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right)} \frac{c \alpha}{c \text{ch}\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right)^2} = \frac{\alpha}{\left[\text{ch}\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right)\right]^3}$$

On obtient finalement:

$$a(\tau) = \frac{\alpha}{\left[\text{ch}\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right)\right]^3} \quad (\text{II-9})$$

Calculons l'accélération a en fonction du temps t : On dérive la relation (II-8) de la vitesse par rapport au temps t :

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\alpha t}{\left(1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$= \frac{\left[\alpha \left(1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2\alpha^2 t}{2c^2} \left(1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]}{\left(1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}\right)}$$

On obtient finalement :

$$a(t) = \frac{\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad (\text{II-10})$$

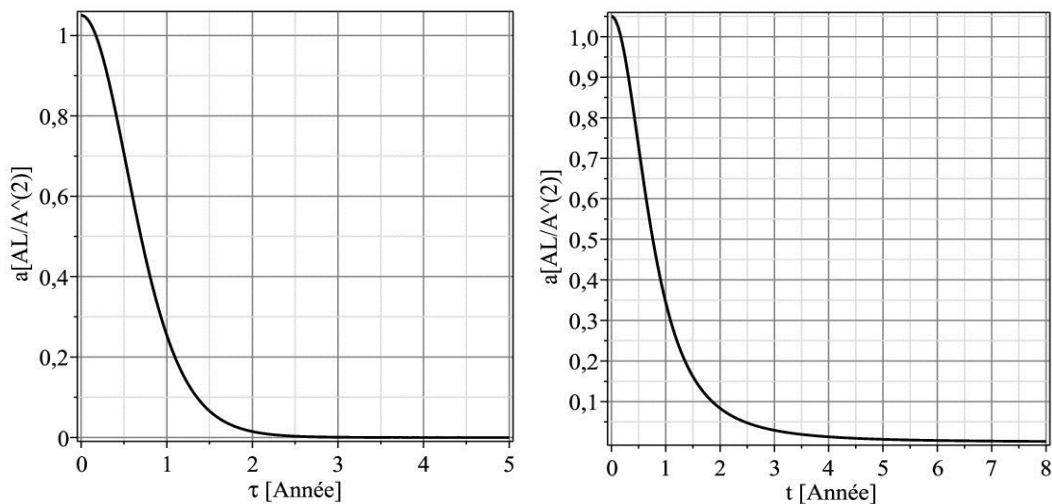


Figure 10: Représentation graphique de l'accélération relative a dans un mouvement hyperbolique: à gauche a en fonction du temps propre τ et à droite a en fonction du temps relatif t .

Chapitre II

On remarque que l'accélération diminue progressivement à partir de la valeur maximale, qui est $a_0 = \alpha$ jusqu'à zéro. Ce qui est normal étant donné que l'accélération est la dérivée de la vitesse et que la vitesse tend asymptotiquement vers c .

II-3-4 Position:

Calculons la position x en fonction du temps propre τ : On a d'après la relation (I-25) :

$$v = c \operatorname{th}\theta$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\operatorname{ch}\theta} \cdot \frac{dx}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\tau} = v \operatorname{ch}\theta = c \operatorname{th}\theta \operatorname{ch}\theta = c \operatorname{sh}\theta$$

En intégrant avec la condition initiale $x(\tau = 0) = 0$:

$$dx(\tau) = c \operatorname{sh}\theta d\tau = c \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) d\tau$$

$$\int dx(\tau) = \int c \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) d\tau$$

Alors :

$$x(\tau) = c \frac{c}{\alpha} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) - 1 \right]$$

Finalement on obtient :

$$\boxed{x(\tau) = \frac{c^2}{\alpha} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) - 1 \right)} \quad (\text{II-11})$$

Pour la position x en fonction du temps t : On a d'après (II-11) :

$$\begin{aligned} x &= \frac{c^2}{\alpha} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) - 1 \right) \text{ et } \frac{\alpha\tau}{c} = \theta \\ &= \frac{c^2}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\theta} - 1 \right) \end{aligned}$$

Et d'après la relation $\operatorname{sh}\theta = \frac{\alpha t}{c}$, on obtient :

$$x(t) = \frac{c^2}{\alpha} \left[\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}} - 1 \right] \quad (\text{II-12})$$

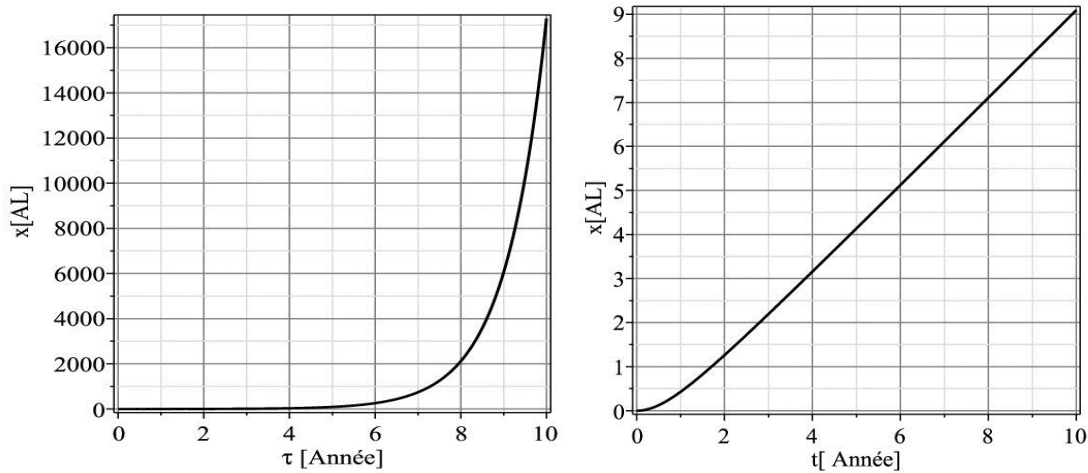


Figure 11 : Variation de la position x dans un mouvement hyperbolique: à gauche x en fonction du temps propre τ et à droite x en fonction du temps relatif t .

D'après la figure 11, on remarque que la position (ou distance) du mobile en terme de temps relatif (à droite) croit de façon quasi-linéaire après une courte période de temps de l'ordre de l'année. Ceci est prévisible, étant donné qu'après cette courte période, la vitesse atteint et garde une valeur très proche de c .

II-3-5 Temps relatif:

D'après la relation (I-6) on a :

$$d\tau = \frac{dt(\tau)}{\gamma}$$

En intégrant avec la condition initiale $\tau(t = 0) = 0$ et en remplaçant γ par $ch\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right)$ on obtient :

$$\int d\tau \cdot \gamma = \int dt(\tau) \Rightarrow t(\tau) = \int ch\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) d\tau$$

Finalement, le temps relatif dans (R) s'exprime en fonction du temps propre par :

$$t(\tau) = \frac{c}{\alpha} \text{sh}\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) \quad (\text{II-13})$$

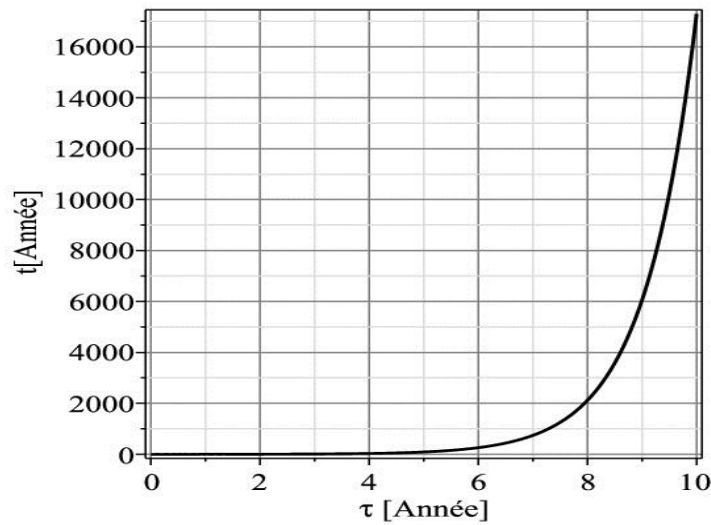


Figure 12 : Représentation du temps relatif t en fonction de temps propre τ .

La figure 12 représente le temps relatif en fonction du temps propre. Elle illustre de façon claire le phénomène de dilatation du temps. Pour des valeurs du temps propre de l'ordre de dizaine d'année, on obtient des temps relatifs de l'ordre de dizaine de millier d'années pour le temps écoulé dans le repère de l'observateur.

II-4 Trajectoire du mouvement hyperbolique dans le plan (x, t)

D'après la relation de $x(t)$ on a :

$$x(t) = \frac{c^2}{\alpha} \left[\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}} - 1 \right]$$

$$\frac{\alpha}{c^2} x(t) = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}} - 1$$

et

$$\left[\frac{\alpha}{c^2} x(t) + 1 \right]^2 = 1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}$$

Finalement :

$$\boxed{\frac{\left[x + \frac{c^2}{\alpha} \right]^2}{c^4/\alpha^2} - \frac{t^2}{c^2/\alpha^2} = 1} \quad (\text{II-14})$$

Chapitre II

Cette équation représente l'équation d'une hyperbole dans le plan (x, t) d'où l'appellation mouvement hyperbolique. Le centre de l'hyperbole se situe au point $(x_0, t_0) = (-c^2/\alpha, 0)$ et ses deux branches ont une pente égale à $\pm 1/c$.

Pour des valeurs de v négligeables devant c , c'est-à-dire au début du mouvement pour lequel $\frac{\alpha t}{c} \ll 1$, on retrouve l'équation du mouvement parabolique de la mécanique Newtonienne à une accélération propre α . En effet, d'après l'équation (II-12) et en utilisant le développement de Taylor du premier ordre on obtient :

$$x(t) \cong \frac{c^2}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 t^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (\text{II-15})$$

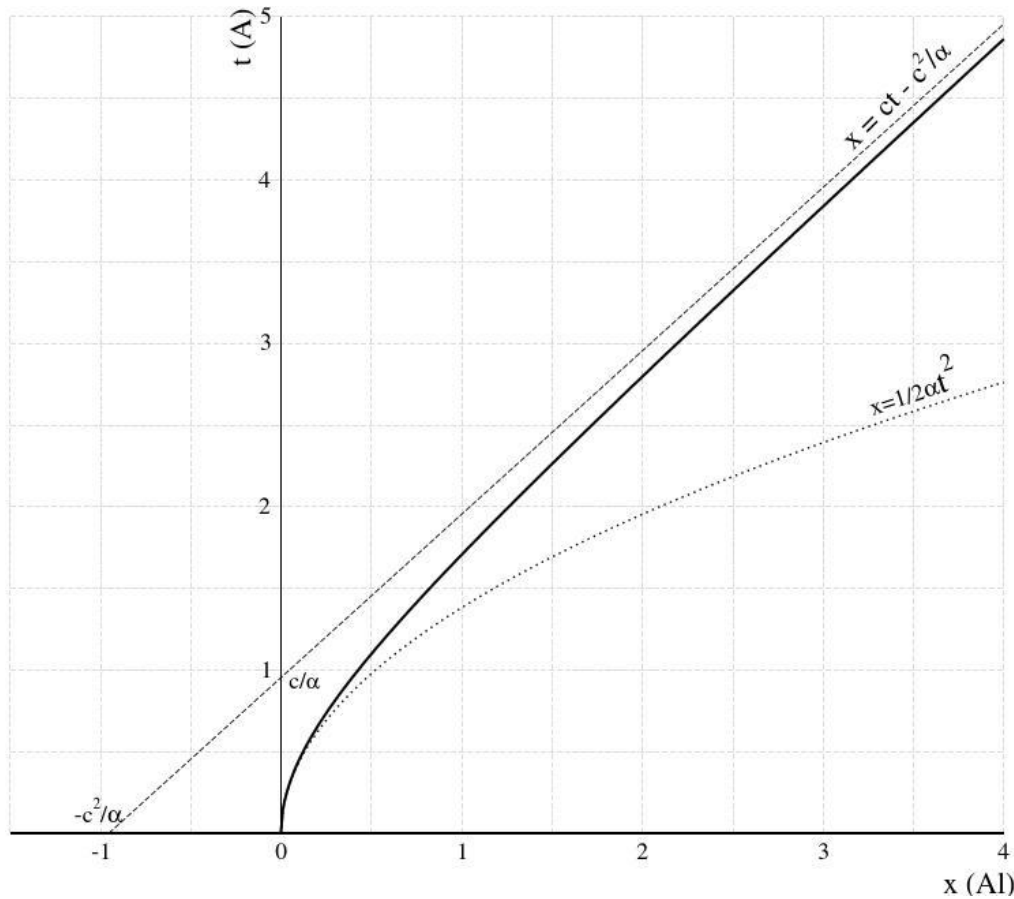


Figure 13 : Ligne d'univers (t en fonction de x) d'un mobile en mouvement hyperbolique. La ligne en pointillé représente l'approximation parabolique du cas Newtonien.

Chapitre II

La figure 13 représente la trajectoire du mouvement hyperbolique dans le plan (x, t) , appelée aussi ligne d'univers du mobile, et son approximation parabolique pour les faibles vitesses.

Chapitre III

Étude de quelques effets physiques d'un voyage relativiste

Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'étude de trois effets physiques de la relativité restreinte. Nous allons considérer un observateur qui voyage dans l'espace dans un vaisseau qui se déplace à des vitesses proches de la vitesse de la lumière. On va d'abord étudier l'effet Doppler relativiste sur la lumière des étoiles lorsqu'elle est observée depuis le vaisseau, puis on passera à la simulation de l'aberration des étoiles du ciel. On finira ce chapitre par l'étude des effets de ralentissement temporel dans le cas d'un voyage interstellaire en mouvement hyperbolique. Tous les calculs ont été effectués à l'aide du logiciel Maple.

III-1 Etude de l'effet Doppler

Comme on a vu au chapitre 1, la longueur d'onde de toute source d'onde en mouvement subit un décalage dû à son déplacement par rapport à l'observateur. Le mouvement étant relatif, si l'observateur se trouve dans un vaisseau qui se déplace à des vitesses relativistes $v = \beta c$ alors pour lui, tout se passe comme si c'était le ciel et les étoiles qui se déplaçaient à la même vitesse v dans le sens inverse.

D'après le chapitre 1, la formule de l'aberration s'écrit en changeant β en $-\beta$:

$$\lambda = \gamma \lambda_0 (1 - \beta \cos \varphi)$$

Cette formule dépend de deux variables, la vitesse β et la position angulaire de la source (étoile) φ . Dans les deux figures ci-dessous nous avons tracé la longueur d'onde Doppler λ (Mesurée par l'observateur dans le vaisseau) pour une lumière jaune (provenant de l'étoile) dont la longueur d'onde propre est $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$.

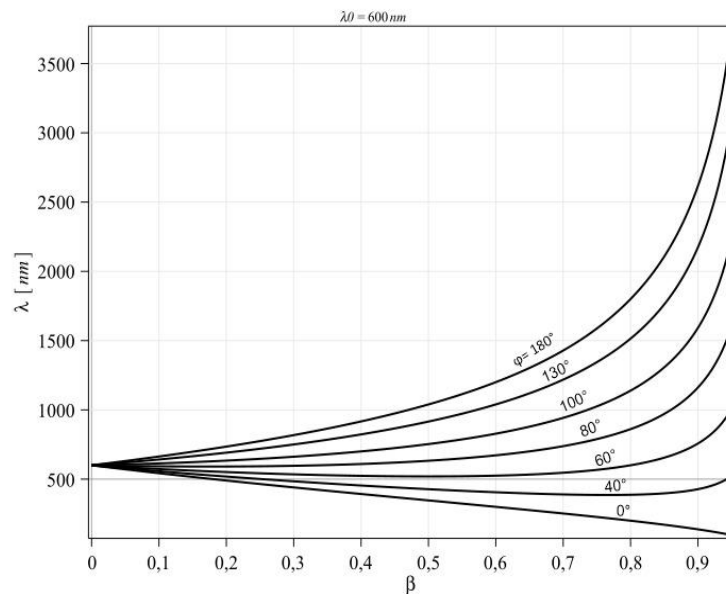


Figure 14 : Longueur d'onde λ en fonction de la vitesse de la fusée β pour différentes valeurs de la position angulaire φ de l'étoile

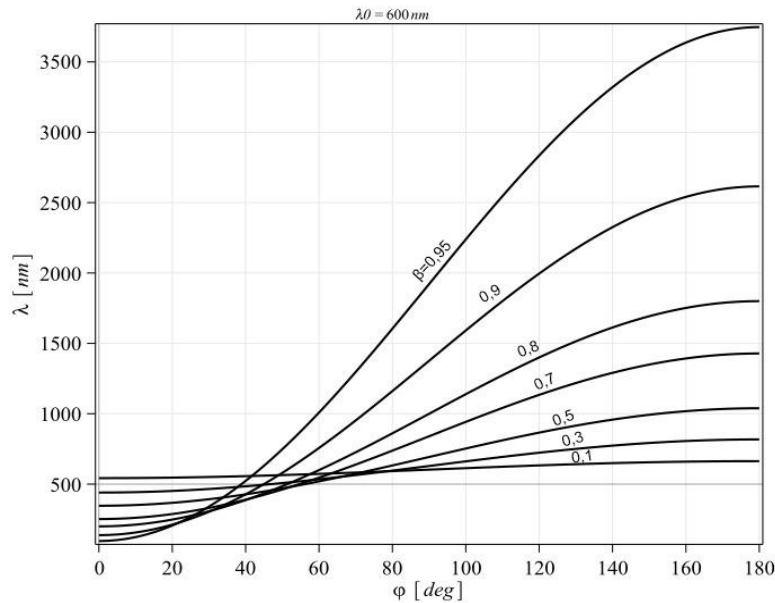


Figure 15 : Longueur d'onde λ en fonction de l'angle φ pour différentes valeurs de β .

La première figure représente la variation de λ en fonction de la vitesse du vaisseau β pour plusieurs valeurs de la position angulaire de l'étoile φ . On observe bien le décalage vers le rouge pour les étoiles en avant du vaisseau (angle petit, vaisseau se rapproche) et un décalage vers le bleu pour les étoiles à l'arrière du vaisseau (angle large, vaisseau s'éloigne).

On constate aussi sur la figure qu'il y a un seuil autour de $\varphi_s \sim 50^\circ$ pour lequel le décalage Doppler s'inverse. En effet, si la position angulaire d'une étoile se trouve à l'intérieur du cône dont le demi-angle est égal à cet angle seuil ($\varphi \leq \varphi_s$), alors la longueur d'onde de sa lumière tel que vue depuis le vaisseau sera inférieure à son longueur propre ($\lambda \leq \lambda_0$) et ce quelque soit la vitesse du vaisseau, elle subira donc un décalage vers le bleu puis vers l'ultraviolet pour des vitesses ultra-relativistes. Pour les étoiles à l'extérieur de ce cône (angle large $\varphi \geq \varphi_s$), leurs lumière subira un décalage vers le rouge pour des vitesses moyennes et vers l'infrarouge et les micro-ondes pour des vitesses proches de la vitesse de la lumière.

On observe aussi un comportement remarquable pour le cas des étoiles dont la position se trouve dans une bande autour de la valeur seuil, par exemple la courbe $\varphi = 60^\circ$). Cette courbe décroît vers la barre des 500 nm pour des valeurs moyennes de la vitesse avant de remonter vers des longueurs plus grandes que 600 nm . On a donc un décalage vers le rouge pour les grandes vitesses malgré le fait que l'étoile se rapproche du vaisseau (car à un angle de 60° l'étoile se trouve vers l'avant du vaisseau). Ce fait s'explique par la contribution croissante de la dilatation du temps (facteur γ) dans l'effet Doppler pour des vitesses relativistes.

Dans la deuxième figure, on a fait l'inverse, on représente la variation de λ en fonction de la position angulaire de l'étoile φ pour plusieurs valeurs de la vitesse du vaisseau β . On observe là aussi le même phénomène de seuil. On voit mieux autour de l'angle seuil, la compétition entre l'effet Doppler classique (dû au rapprochement ou à l'éloignement de la source) et l'effet relativiste dû à la dilatation du temps. Par exemple pour une vitesse $\beta = 0.95$, au

dessus de l'angle seuil dans l'intervalle entre $\sim 40^\circ$ et 90° , la longueur d'onde se décale vers le rouge malgré que tout les étoile dans cet intervalle se rapproche du vaisseau, ici c'est l'effet relativiste qui l'emporte sur l'effet classique.

III-2 Etude de l'aberration des étoiles et aspect du ciel

Dans cette section nous allons étudier un autre effet de la relativité restreinte, l'aberration ou le changement de la position angulaire apparente des étoiles vu par l'observateur qui voyage dans le vaisseau à de grandes vitesses en fonction de cette vitesse et de l'angle réel de l'étoile vu depuis la terre.

III-2-1 Variation des angles d'observation des étoiles :

Dans le chapitre I, nous avons présenté les relations suivantes entre les angles φ et ϕ qui sont les angles entre le vecteur vitesse de la particule et l'axe de mouvement (ox) dans (R) et (R').

$$\cos\phi = \frac{\cos\varphi - \beta}{1 - \beta\cos\varphi}, \quad \sin\phi = \frac{\sin\varphi}{\gamma(1 - \beta\cos\varphi)} \quad (\text{III-1})$$

pour trouver la formule qui utilise les angles d'observation, il suffit de faire la transformation $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ et $\phi \rightarrow \phi + \pi$.

Ce qui donne :

$$\phi = \arccos\left(\frac{\cos\varphi + \beta}{1 + \beta\cos\varphi}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\gamma(1 + \beta\cos\varphi)}\right) \quad (\text{III-2})$$

Dans le repère fixe lorsque $\beta = 0$ on a :

$$\phi = \varphi \quad (\text{III-3})$$

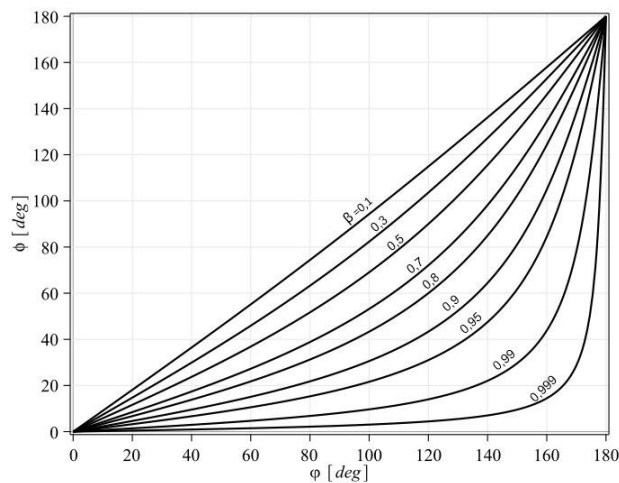


Figure 16 : Angle d'aberration ϕ en fonction de l'angle réel φ pour différentes valeurs de β .

La figure 16 représente l'angle d'aberration ϕ d'une étoile en fonction de son angle réel φ pour différentes valeurs croissantes de la vitesse β de la fusée. On constate bien qu'à des vitesses faibles devant c , la variation est linéaire et l'aberration est marginale. Il faut noter que le phénomène d'aberration de la lumière, vu la valeur très élevée de la vitesse de la lumière c , est un phénomène essentiellement relativiste et la contribution classique est négligeable.

A des vitesses plus grande, la différence d'angle entre φ et ϕ commence à se faire sentir. Par exemple, pour la courbe $\beta = 0.8$, toutes les étoiles qui ont un angle $\varphi \leq 120^\circ$ subissent une aberration notable et se retrouvent à l'intérieur d'un cône de demi-angle $\phi = 60^\circ$. Pour des vitesses ultra-relativiste, par exemple $\beta = 0.999$ l'aberration est très forte et l'ensemble des étoiles pour lesquels $\varphi \leq 170^\circ$ se retrouve écrasé sur l'axe de mouvement avec un angle $\phi \leq 20^\circ$.

III-2-2 Simulation de la distribution de la position angulaire des étoiles :

Nous avons simulé à l'aide du logiciel Maple [15] la distribution de la position angulaire des étoiles dans le ciel tel que observée par les voyageurs dans la fusée. Comme mentionnée précédemment, cette distribution résulte de l'effet de l'aberration de la lumière émise par ces étoiles lorsqu'elle est observée depuis un repère en mouvement qui est celui du vaisseau.

Distribution dans un plan parallèle à la direction du mouvement :

On génère à l'aide de Maple une distribution angulaire uniforme des étoiles qui correspond à repère fixe, c'est-à-dire une vitesse nulle $\beta = 0$ de la fusée. Il s'agit d'une partie du ciel en couronne situé dans un plan qui sera parallèle à la direction du mouvement.

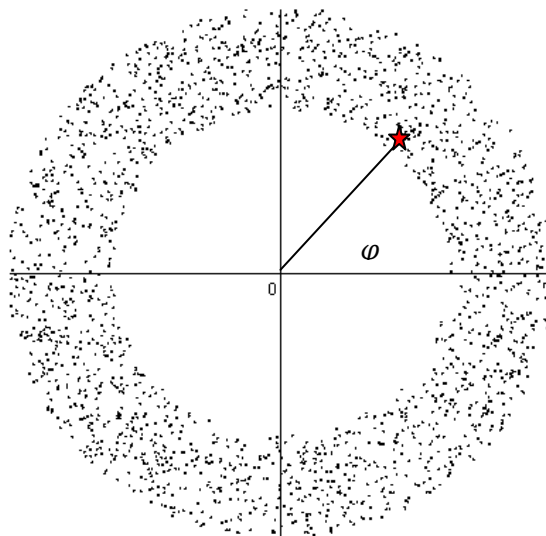


Figure 17 : Distribution angulaire uniforme des étoiles dans un plan parallèle à la direction du mouvement pour un observateur fixe.

Cette distribution uniforme est présentée dans la figure ci-dessus. On applique en suite à cette distribution les équations de l'aberration (III-2) pour obtenir la distribution angulaire après aberration pour plusieurs valeurs de la vitesse du vaisseau. Les figures suivantes représentent ces distributions.

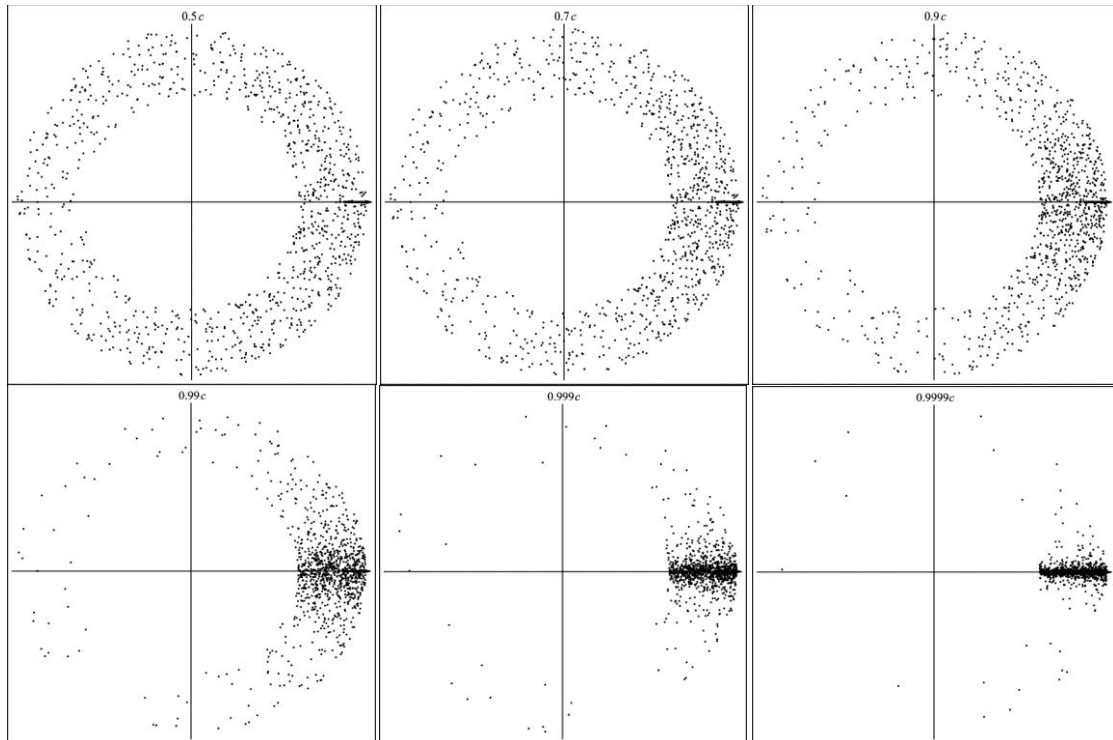


Figure 18 : Distributions angulaires de la position des étoiles dans un plan parallèle au mouvement tel que observé par un voyageur à bord du vaisseau pour plusieurs valeurs de la vitesse de la fusée.

On observe bien à partir de ces figures le résultat obtenu dans la figure 16. En effet à des vitesses relativistes et ultra relativistes les positions angulaires des étoiles migrent à des valeurs ϕ très faibles. Vu depuis le vaisseau, des étoiles qui paraissaient à l'arrière de la fusée ($\phi > 90^\circ$) lorsque celle-ci était immobile, deviennent visibles à l'avant de la fusée.

Distribution dans un plan perpendiculaire à la direction du mouvement (Aspect réaliste du ciel vu depuis la fusée) :

Pour simuler un aspect réaliste du ciel étoilé tel que observée par les voyageurs dans le vaisseau nous avons effectué la même simulation précédente à l'aide de Maple mais dans un plan perpendiculaire à la direction du mouvement. La figure suivante montre un aspect assez réaliste de la distribution uniforme des étoiles du ciel lorsque le vaisseau est immobile.

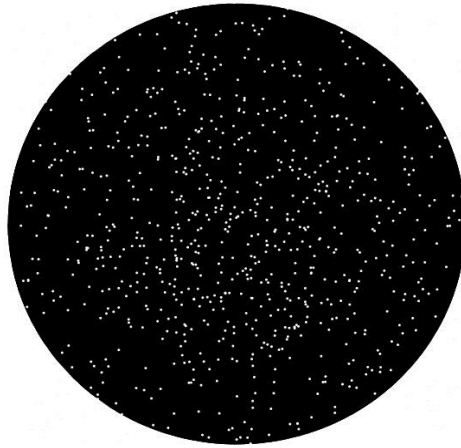


Figure 19 : Aspect uniforme du ciel étoilé dans un plan perpendiculaire au mouvement vu depuis le repère fixe.

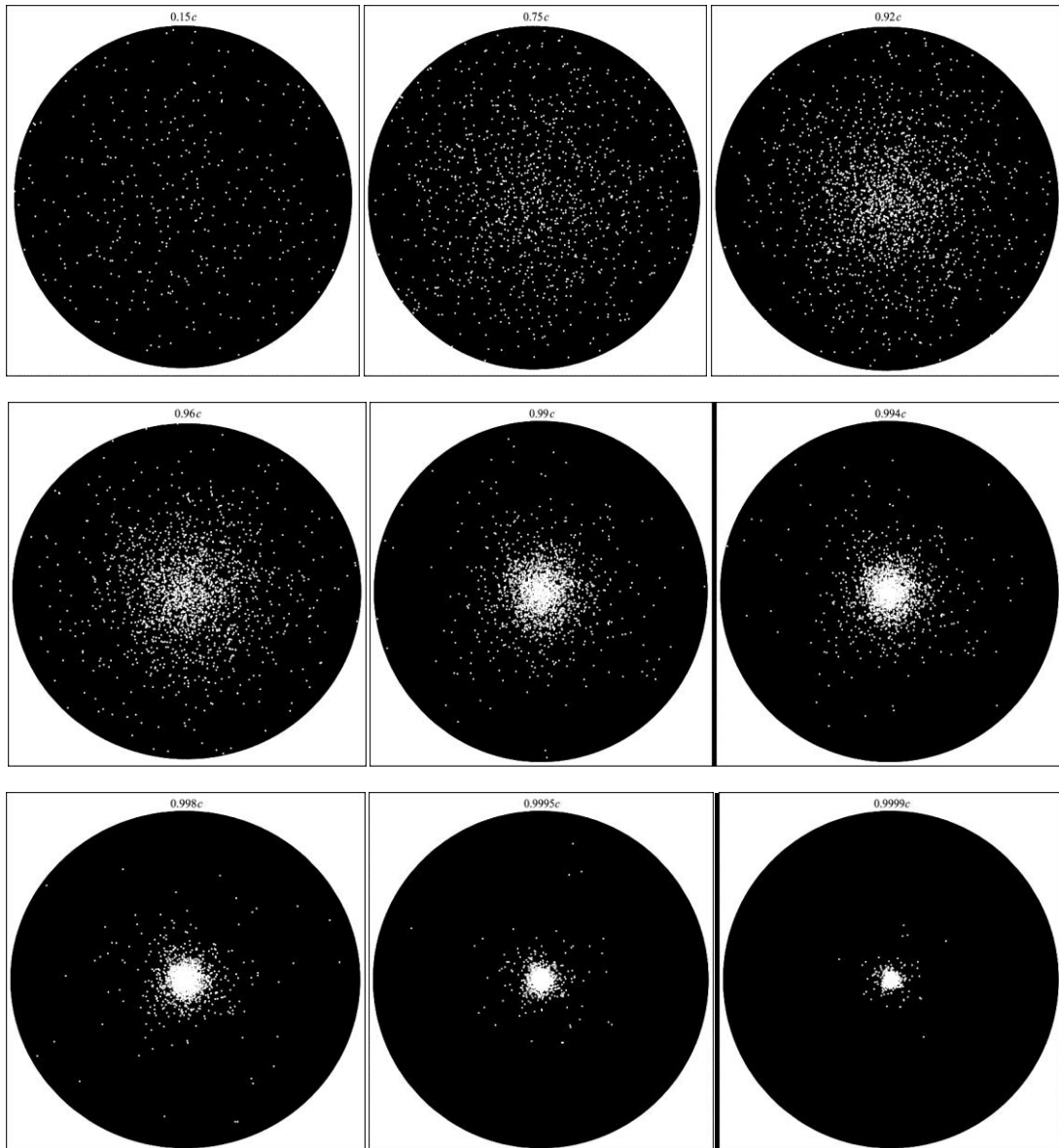


Figure 20 : Aspect du ciel observé depuis le vaisseau pour plusieurs valeurs de la vitesse.

Chapitre III

Lorsque la fusée est en mouvement, en utilisant les formules III-2, la simulation à l'aide de Maple nous a donné les figures ci-dessus (figure 20) pour différentes valeurs de la vitesse du vaisseau.

On observe bien le même phénomène de migration des étoiles vers l'avant du vaisseau lorsque la vitesse augmente. Ce phénomène s'accroît pour des vitesses très proches de c et l'écrasante majorité des étoiles du ciel se concentre dans une petite région à l'avant sur l'axe de mouvement.

III-3 Etude des effets temporels d'un voyage interstellaire aller-retour :

Nous allons à présent appliquer l'étude cinématique du chapitre I à un cas concret de voyage interstellaire aller-retour vers une destination éloignée de la terre d'une distance d (par exemple, l'étoile α -Centaure distante de $d = 4,3 \text{ Al}$). Nous allons considérer un voyage en mouvement hyperbolique pour des raisons que nous allons expliciter par la suite.



Figure 21 : Fusée à propulsion en préparation du voyage [16].

III-3-1 Gravité fictive et motivation du mouvement hyperbolique :

Considérons donc un vaisseau spatial ou une fusée à propulsion (figure 21) à bord duquel voyage des passagers humains se dirigeant vers l'étoile en question. Afin de créer un champ gravitationnel artificiel fictif constant à l'intérieur de la fusée nécessaire pour la survie normale des passagers, montrons que le mouvement du vaisseau doit être un mouvement hyperbolique (à accélération propre constante).

Considérons donc une petite expérience de pensée [14] : Un ressort à bord d'une fusée en mouvement hyperbolique au quel est attachée une masse test. L'accélération de la fusée fait

Chapitre III

naitre des pseudo-forces inertielles à l'intérieur de la fusée. La masse test est donc attirée au sens inverse du mouvement. Pour obtenir une force inertielle constante, la masse devra atteindre un équilibre avec la force de tension du ressort et devenir immobile par rapport à la fusée. Dans ce cas l'étude de son mouvement dans le repère instantané propre révèle que la masse a une accélération propre constante. En effet, dans ce repère inertielle instantané, la masse est soumise à la seule force de tension du ressort et sa vitesse est instantanément nulle, son accélération propre est donc constante ce qui correspond comme nous l'avons vu au chapitre (II) à un mouvement hyperbolique. Si on considère cela depuis le repère de l'observateur on obtient le même constat, la masse est soumise à la force constante de tension du ressort, or on a vu précédemment qu'à une force constante correspond une accélération relative hyperbolique. La valeur de la pesanteur à bord, égale à la tension du ressort (divisé par la masse), est égale l'accélération propre de la fusée [12], [14].

III-3-2 La fusée relativiste :

La science des fusées a été théorisée par le russe Constantin Tsiolkovski [17]. A la fin du XIX siècle et mise en pratique dès 1935 par Hermann Oberth, puis par les chercheurs allemands durant la seconde guerre mondiale, pour la conception des premiers missiles balistiques V2. A compter de la fin des années 1950, les fusées ont été utilisées pour mettre en orbite des satellites à des fins commerciales, militaires, de télécommunication ou de recherche, et envoyer des sondes spatiales vers les autres planètes du système solaire, ou des hommes dans l'espace proche, ainsi que sur la lune. La technologie des fusées n'évolue pratiquement plus depuis la fin des années 1960.

Définition de la fusée

Une fusée, dans le domaine de l'aéronautique, est un véhicule capable d'échapper à l'attraction terrestre et de se déplacer dans l'espace grâce à un moteur-fusée de grande puissance. Une fusée doit ainsi atteindre la vitesse de libération en emportant à la fois le combustible et le carburant nécessaires à son fonctionnement, mais aussi une charge utile. Elle est pour cela dotée de plusieurs étages mis à feu successivement. Les plus grosses fusées construites permettent de placer jusqu'à 150 tonnes en orbite basse.

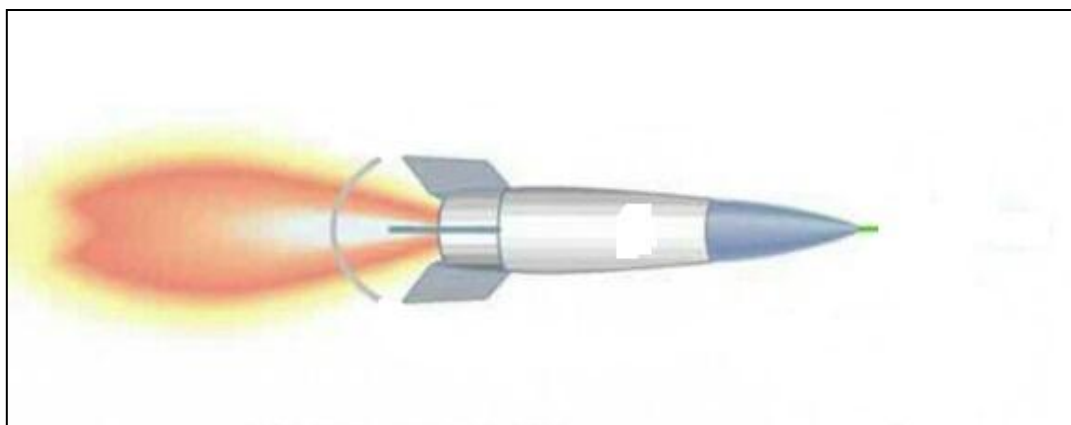


Figure 22 : Fusée à propulsion, le gaz éjecté permet à la fusée d'avancer [18].

Chapitre III

La fusée utilise le principe des actions réciproques pour accélérer en éjectant derrière elle de la matière appelée masse d'appui (ou charge utile, en forme de gaz), à l'aide d'un ou de plusieurs moteurs à propulsion.

C'est la pression interne exercée contre la paroi située du côté opposé à celui où se trouve l'orifice de sortie (tuyère) qui, étant supérieure à la pression ambiante fait se déplacer le corps de la fusée dans le sens de la poussée la plus forte (principe de conservation de l'impulsion). L'éjection de masse est l'unique processus permettant de se déplacer dans l'espace en modifiant la quantité de mouvement d'une partie de la masse de la fusée (combustible).

Equation de la fusée : cas classique :

L'équation de la fusée, appelée aussi équation de Tsiolkovski [17] est l'équation fondamentale de l'astronautique. Elle donne la variation de la vitesse de la fusée en fonction de sa masse, dans le cas de vitesses non-relativistes, elle s'écrit :

$$v = \ln \left(\frac{m}{m_0} \right)^{-u} \quad (\text{III-4})$$

Où m est la masse de la fusée à l'instant t et m_0 sa masse initiale, u la vitesse d'éjection du gaz.

Etude d'une fusée à propulsion relativiste :

Dans le cas relativiste : La vitesse du gaz éjecté (par rapport à la fusée) et la vitesse de la fusée elle-même ne sont pas négligeable devant la vitesse de la lumière c .

Nous allons par la suite détailler les calculs permettant de dériver l'équation de la fusée relativiste à partir de principes simples de conservation de l'impulsion et de l'énergie [19].

Pour dériver l'équation de notre fusée, nous allons appliquer le principe de conservation de l'Energie-Impulsion sur l'ensemble fusée-gaz. Considérons donc une fusée de masse propre initiale m_0 (à $t = 0$). C'est la masse propre totale carburant inclut. Soit $m(t)$ sa masse propre à l'instant t après l'éjection d'une certaine quantité de gaz et soit p_f et p_g les impulsions de la fusée et du gaz et E_f et E_g leurs énergies relativistes respectives. Nous allons supposer un mouvement rectiligne et une vitesse d'éjection de gaz u constante par rapport au référentiel propre de la fusée.

Nous allons utiliser dans nos équations les variables rapidité θ de la fusée et φ du gaz par rapport à l'observateur (R) ainsi que la rapidité ϕ du gaz par rapport à la fusée, on verra que cela simplifie considérablement les calculs. Le but est de dériver l'expression de la vitesse $v(t)$ de la fusée en fonction de sa masse propre à l'instant t $m(t)$ ainsi que la condition sur le débit de masse (taux d'éjection des gaz) pour obtenir un mouvement de type hyperbolique.

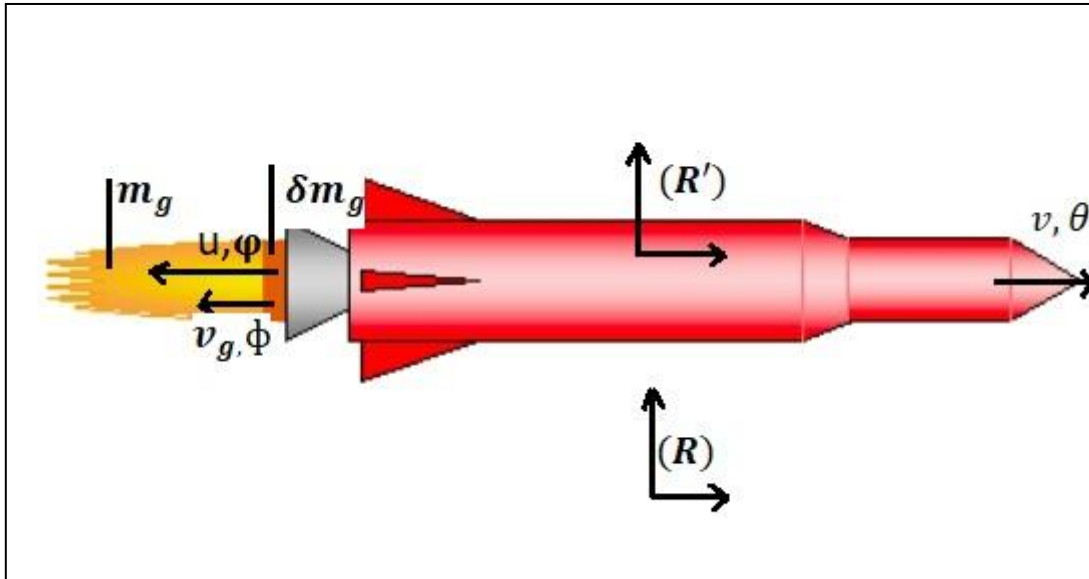


Figure 23 : Schéma représentant les propriétés dynamiques de la fusée.

Soit θ la Rapidité de la fusée par rapport à (R) nous avons vu celui-ci dans la section (I-24) :

$$\text{th } \theta = \frac{v}{c} \quad (\text{III-5})$$

Soit φ la rapidité du gaz par rapport à (R) :

$$\text{th } \varphi = \frac{v_g}{c} \quad (\text{III-6})$$

Soit ϕ la rapidité du gaz par rapport à la fusée (R') :

$$\text{th } \phi = \frac{u}{c} \quad (\text{III-7})$$

m est la masse de la fusée totale : $m = m_0$ à $t = 0$

Equation de la fusée relativiste :

Plaçons-nous dans le référentiel inertiel d'un observateur. A l'instant t et durant un intervalle de temps infiniment petit dt , si l'énergie et l'impulsion acquise par la fusée sont dE_f et dp_f et ce après l'éjection d'une quantité élémentaire de gaz de masse propre δm_g , d'énergie dE_g et d'impulsion dp_g alors d'après le principe de conservation de l'impulsion énergie nous avons:

$$dE_f = -dE_g \quad \text{et} \quad dp_f = -dp_g \quad (\text{III-8})$$

Exprimons par la suite ces deux relations en fonction de la rapidité.

Chapitre III

Conservation de l'énergie :

On a d'après les relations (III-3) et en tenant compte de la variation de la masse propre de la fusée:

Pour la fusée:

$$dE_f = d(mc^2 ch\theta) = c^2(m sh\theta d\theta + ch\theta dm) \quad (\text{III-9})$$

Pour le gaz éjecté :

$$dE_g = \delta m_g c^2 ch\phi \quad (\text{III-10})$$

Il s'en suit donc de la conservation de l'énergie la relation suivante :

$$m sh\theta d\theta + ch\theta dm = -\delta m_g ch\phi \quad (\text{III-11})$$

Conservation de l'impulsion :

De même, en utilisant l'expression de l'impulsion p en fonction de la rapidité dans (III-6) on a : Pour la fusée:

$$dp_f = d(mc sh\theta) = c(m ch\theta d\theta + sh\theta dm)$$

Pour le gaz éjecté :

$$dp_g = \delta m_g c sh\phi \quad (\text{III-12})$$

La conservation de l'impulsion implique donc:

$$m ch\theta d\theta + sh\theta dm = -\delta m_g sh\phi \quad (\text{III-13})$$

Equation de la fusée :

En éliminant la quantité δm_g des équations (III-10) et (III-12) on obtient:

$$\frac{m ch\theta d\theta + sh\theta dm}{m sh\theta d\theta + ch\theta dm} = th\phi \quad (\text{III-14})$$

Chapitre III

La rapidité étant additive, nous pouvons exprimer ϕ en fonction de θ et φ (qui est constante) par:

$$\phi = \theta - \varphi \quad (\text{III-15})$$

Ce qui implique :

$$th\phi = \frac{th\theta - th\varphi}{1 - th\theta th\varphi} \quad (\text{III-16})$$

En remplaçant dans l'équation (III-13):

$$\frac{mch\theta d\theta + sh\theta dm}{msh\theta d\theta + ch\theta dm} = \frac{th\theta - th\varphi}{1 - th\theta th\varphi} \quad (\text{III-17})$$

$$\Rightarrow mch\theta d\theta - msh\theta th\varphi d\theta + sh\theta dm - sh\theta th\theta th\varphi dm = msh\theta th\theta d\theta - msh\theta th\varphi d\theta + sh\theta dm - ch\theta th\varphi dm$$

Après simplification et regroupement des termes:

$$m(ch\theta - sh\theta th\theta)d\theta = -th\varphi (ch\theta - sh\theta th\theta)dm \quad (\text{III-18})$$

On obtient finalement l'équation différentielle simple suivante :

$$d\theta = -th\varphi \frac{dm}{m} = -\frac{u}{c} \frac{dm}{m} \quad (\text{III-19})$$

L'intégration est directe (en supposant $\theta = 0$ à $t = 0$):

$$\int_0^\theta d\theta = -\frac{u}{c} \int_{m_0}^m \frac{dm}{m}$$

Ce qui donne:

$$\theta = -\frac{u}{c} \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) \quad (\text{III-20})$$

Et finalement la vitesse de la fusée en fonction de sa masse est:

$$v = c \operatorname{th} \left[\ln \left(\frac{m}{m_0} \right)^{-\frac{u}{c}} \right]$$

Ou bien :

$$v = \frac{1 - (m/m_0)^{2u/c}}{1 + (m/m_0)^{2u/c}} \quad (\text{III-21})$$

Pour tracer la vitesse v de la fusée en fonction de la variation relative de sa masse r , on utilise le changement de variable :

$$r = 1 - \frac{m}{m_0} = \frac{m_0 - m}{m_0} = \frac{\Delta m}{m_0}$$

La formule de la vitesse en fonction de ce paramètre r devient donc :

$$v(r) = \frac{1 - (1-r)^{2u/c}}{1 + (1-r)^{2u/c}} \quad (\text{III-22})$$

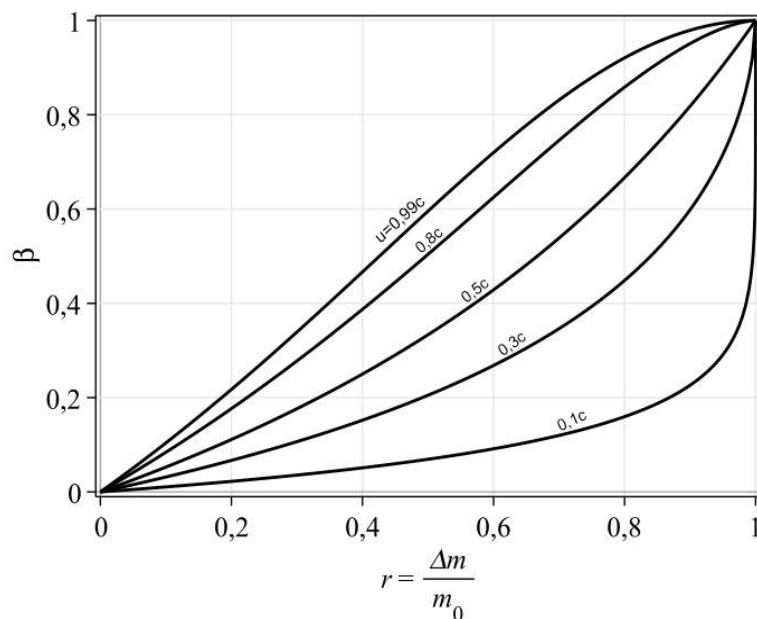


Figure 24 : La vitesse de la fusée en fonction de la variation relative de sa masse.

Chapitre III

La figure ci-dessus représente la variation de la vitesse de la fusée en fonction de la variation relative de sa masse due à l'éjection du gaz combustible pour différentes valeurs de la vitesse d'éjection. Comme prévu, les courbes sont croissantes et plus la vitesse d'éjection du gaz est grande, plus la variation de la vitesse de la fusée est rapide. On constate aussi que la vitesse de la fusée tend vers c ($\beta = 1$) pour $r = 1$, c'est à dire pour $m = m_0$, cela signifie que toute la masse de la fusée est consommée (même sa masse propre). En pratique, ça ne peut pas être le cas, puisque à la fin de consommation de tout le carburant, il doit rester la masse propre de la fusée, il y a donc un seuil au paramètre r qui correspond à la masse minimale (celle de la fusée vide) à ne pas dépasser ce qui signifie que la vitesse de la lumière ne peut bien évidemment jamais être atteinte.

Condition du mouvement hyperbolique :

Pour avoir un mouvement de la fusée de type hyperbolique, il faut que la vitesse de la fusée soit celle du mouvement hyperbolique. Ainsi nous devons savoir:

$$v = c \operatorname{th} \left[\ln \left(\frac{m}{m_0} \right)^{-\frac{u}{c}} \right] = c \operatorname{th} \left(\frac{\alpha \tau}{c} \right) \quad (\text{III-23})$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\alpha \tau}{c} = \ln \left(\frac{m}{m_0} \right) \quad (\text{III-24})$$

Et donc :

$$\boxed{m = m_0 e^{-\frac{\alpha}{u} \tau}} \quad (\text{III-25})$$

Ainsi, afin d'obtenir un mouvement hyperbolique, la masse propre de la fusée doit diminuer de façon exponentielle en fonction du temps propre τ . Ceci implique que le débit de gaz éjecté doit croître exponentiellement avec le temps propre (temps des passagers).

III-3-3 Les étapes de voyage relativiste :

En astronautique, un voyage relativiste est un voyage interstellaire dans lequel on essaye d'exploiter les effets relativistes de dilatation du temps pour franchir, en principe, des distances arbitrairement grandes dans un laps de temps local au vaisseau compatible avec la longueur de la vie humaine. En effet, bien qu'il soit physiquement impossible de dépasser la vitesse de la lumière, le temps local au vaisseau se ralentit « par rapport au reste de l'univers » d'autant plus que celui-ci se rapproche de la vitesse de la lumière (voir dilatation du temps et paradoxe des jumeaux). Ainsi, comme nous allons le voir, il serait possible que le vaisseau parcoure l'univers à une vitesse proche de la lumière pendant des centaines ou des milliers d'années, tandis que quelques années seulement passeraient à bord du vaisseau. En d'autres termes, c'est comme si le vaisseau avait voyagé dans le futur de la terre.

Chapitre III

Afin d'assurer une pesanteur à l'intérieur du vaisseau spatial constante égale à la pesanteur terrestre $g = 10 \text{ m/s}^2$ durant toute la durée du voyage aller-retour, il est nécessaire de diviser le voyage en quatre étapes ou phases, chacune avec la même accélération propre $|\alpha| = g$ (voir figure ci-dessous) mais dans des directions opposées.

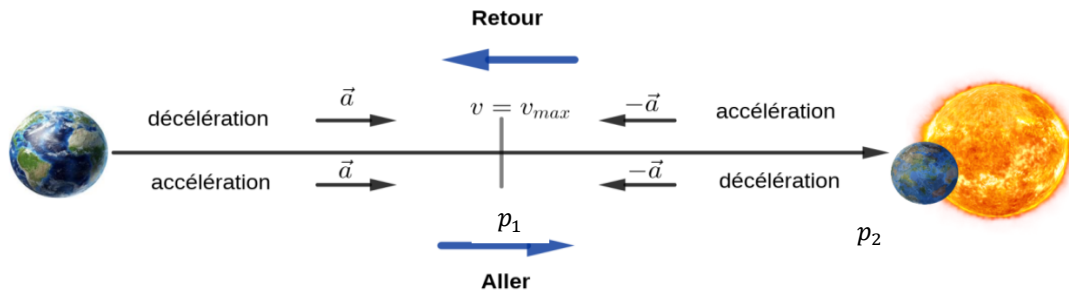


Figure 25 : Les quatre phases du voyage aller-retour.

Durant la première étape du voyage, le vaisseau accélère jusqu'au point p_1 situé à mi-chemin $x_{p_1} = d/2$ avec une accélération propre constante $\alpha = +g$. Au point p_1 , pour la deuxième phase, la direction de poussée des propulseurs est inversée afin d'obtenir une décélération constante $\alpha = -g$ et donc la même pesanteur mais en sens inverse. Cela permettra aussi au vaisseau de ralentir progressivement pour atteindre une vitesse nulle au point p_2 , lieu de destination $x_{p_2} = d$, et pouvoir entreprendre la phase de retour.

Pour le retour on refait les deux premières étapes au sens inverse. La troisième étape de p_2 à p_1 est identique à la première, en mouvement accéléré avec $\alpha = -g$. La quatrième étape, de p_1 jusqu'au lieu de départ est identique à la seconde mais dans le sens inverse, mouvement décéléré avec $\alpha = +g$ pour atteindre une vitesse nulle au point de départ. Pour des raisons de symétries évidentes, les lignes d'univers du vaisseau durant les étapes 2 à 4 sont eux aussi, comme pour les premières étapes, des branches d'hyperbole.

Les figures suivantes représentent la variation de la vitesse et de l'accélération relatives du vaisseau durant les quatre phases du voyage aller-retour.

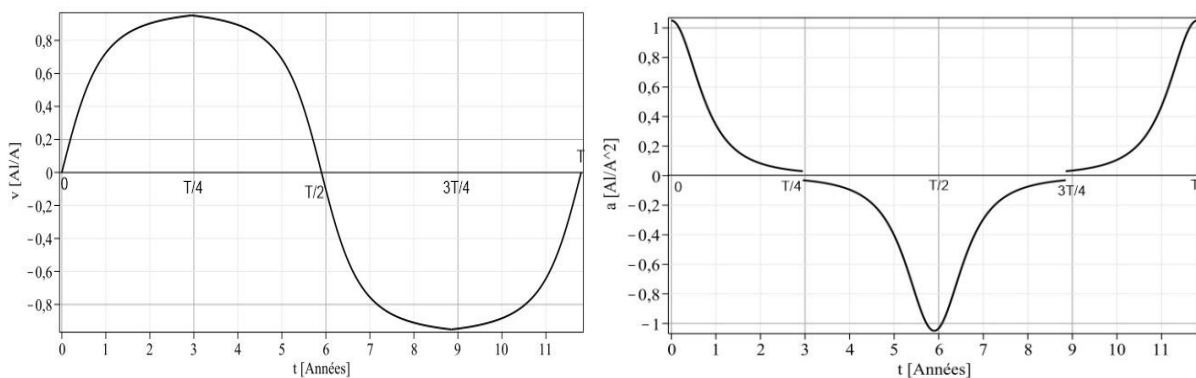


Figure 26 : Courbes des vitesses et accélération durant le voyage en fonction du temps relatif (pour $\alpha = 10 \text{ m/s}^2$ et $d = 4.3Al$).

Chapitre III

III-3-4 Durée du voyage :

Le mouvement étant hyperbolique, il suffit d'appliquer directement les résultats des chapitres précédents. Par exemple, pour un voyage vers l'étoile α -Centaure, la durée de chaque étape du voyage $T/4$ mesuré par l'observateur terrestre est la même. D'après la formule (II-12) elle est égale à $T/4=2,95$ Année. Donc la durée totale est $T=11,8$ Année. Dans le repère du vaisseau, c'est-à-dire pour les voyageurs à bord et pour la même destination (étoile α -Centaure), la durée de chaque étape est d'après la formule (II-11) $\tau/4=1.76$ Année, et la durée totale est $\tau=7.05$ Année. Nos calculs sont illustrés dans le tableau 1 pour différentes destinations.

Destination	S.S	$\alpha - c$	Vega	Lyra	Voie lactée	Andromède	Univers
d [AL]	0.1	4.3	27	1000	10^5	2×10^6	13.7×10^9
T [A]	1.250	11.8	57.6	2003.6	200003.6	4000003.6	27.4×10^9
τ [A]	1.229	7.05	13	26.50	44.04	55.45	89.08
u_{\max}/c	0.311	0.951	0.997	0.9999982	0.9999999998	0.9999999999...	≈ 1
γ_{\max}	1.052	3.25	15.17	525.25	52502.3	1050001	7.19×10^9

Tableau 1 : temps des voyageurs τ et temps terrestre T du trajet aller-retour pour plusieurs destinations.

Le tableau donne les valeurs du temps propre et du temps terrestre nécessaire pour faire un aller-retour pour chacune des destinations suivantes : Limite du système solaire (S.S), les étoiles α -Centaure, Vega et Lyre, limite de notre galaxie la voie lactée, la galaxie voisine Andromède et la limite de l'univers observable.

Les effets relativistes de dilatation du temps se manifestent par une durée (τ) du voyage aller-retour plus courte pour les voyageurs. Ces différences sont plus prononcées pour des destinations plus lointaines. Plus la distance est grande, plus la différence entre temps terrestre et temps du vaisseau est grande. En effet, à une accélération constante $\alpha = g$, le vaisseau atteint une vitesse de $0.95c$ au bout de $\cong 3$ ans, à ces vitesses la dilatation du temps est très importantes. Un fait assez surprenant, par exemple on pourra en théorie aller à l'autre bout de la galaxie et revenir en moins de 45 ans, alors que plus de 200000 ans se seront écoulées sur terre. C'est comme si l'on avait voyagé durant 44 ans vers le future de la terre à l'an 2002021.

III-3-5 Faisabilité du voyage hyperbolique - Etude énergétique :

On a vu que, dans le cas d'une fusée fonctionnant sur la base de la propulsion relativiste, la condition du mouvement hyperbolique impose à la masse totale m de la fusée une variation en exponentielle décroissante à tout instant τ :

$$m = m_0 e^{-\frac{\alpha}{u}\tau} \quad (\text{III-26})$$

Cette décroissance se traduit par l'éjection du gaz du carburant à de grandes vitesses u . Le débit de masse éjectée dépendra de la vitesse d'émission u . La figure ci-dessous montre la variation de la masse totale de la fusée en fonction du temps propre pour une vitesse d'éjection de gaz $u = 0.87 c$ et une masse initiale (fusée + carburant) $m_0 = 70408$ tonne. Nous allons voir par la suite la raison du choix de ces valeurs.

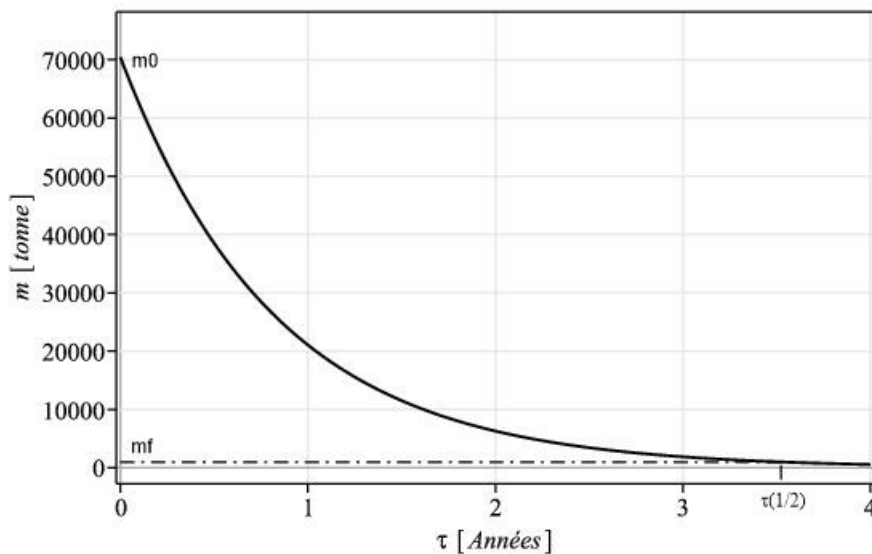


Figure 27 : Variation de la masse totale de la fusée en fonction du temps propre (temps des voyageurs).

Soit m_f la masse de la fusée (sans carburant) et m_c la masse initiale du carburant, on a :

$$m_0 = m_f + m_c \quad (\text{III-27})$$

Pour estimer la masse de carburant de départ m_c nécessaire pour effectuer un trajet aller vers une certaine destination, nous avons étudié le rapport de masse $Rm = \frac{m_c}{m_f}$ entre la masse initiale du carburant m_c et celle de la fusée m_f en fonction de la distance de la destination d et de la durée propre du voyage.

A une distance donnée d correspond un temps de voyage (aller simple) propre total que nous notons $\tau_{1/2}$. Pour arriver à destination, nous supposons que la masse du carburant m_c est

Chapitre III

consommée dans sa totalité. Ainsi, pour une durée de voyage $\tau = \tau_{1/2}$, la masse finale totale correspondante sera $m = m_f$. Il s'en suit la relation :

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\alpha}{u}\tau_{1/2}} = (m_c + m_f) e^{-\frac{\alpha}{u}\tau_{1/2}} \quad (\text{III-28})$$

Ce qui implique :

$$Rm = \frac{m_c}{m_f} = e^{\frac{\alpha}{u}\tau_{1/2}} - 1 \quad (\text{III-29})$$

La masse de carburant nécessaire au voyage en unité de masse fusée est une fonction exponentielle de la durée propre du voyage $\tau_{1/2}$. La figure (28) représente cette fonction en échelle logarithmique :

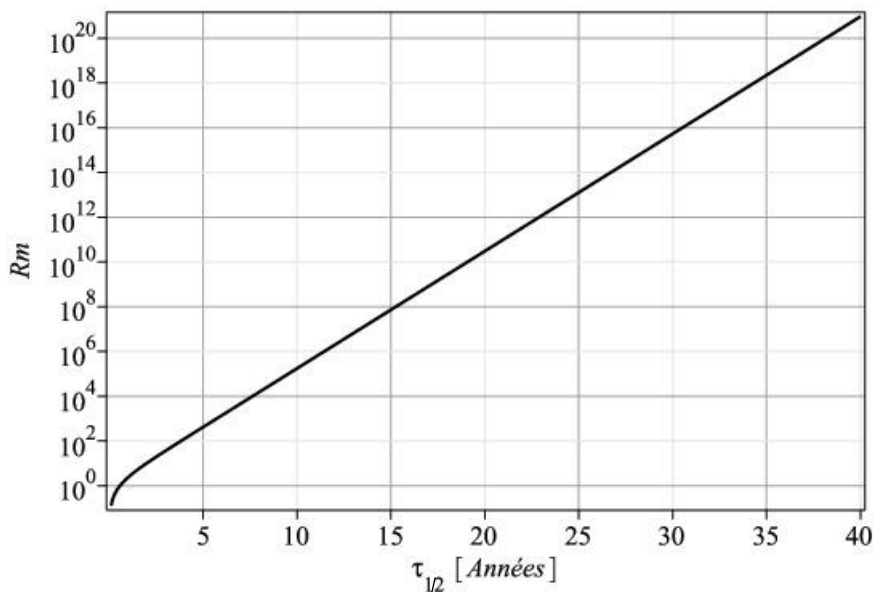


Figure 28 : Rapport entre masse du carburant et masse de la fusée en fonction de la durée du voyage.

Nous avons pris à titre d'exemple la masse de la fusée $m_f = 1000$ tonne. Pour un voyage hyperbolique « aller-simple » à l'étoile la plus proche α -Centaure à une distance $d = 4.3$ Al, nous avons d'après les calculs de la section précédente $\tau_{1/2} = \frac{7.05}{2} = 3.525$ Année. Le rapport de masse nécessaire à ce voyage sera $Rm = 69.4$ donc une masse de carburant 69.4 fois la masse de la fusée vide ce qui vaut $m_c = 69400$ tonne. Ceci correspond à une masse initiale totale de la fusée : $m_0 = 70400$ tonne.

Dans le tableau suivant, nous donnons les rapports de masse Rm ainsi que la masse initiale totale de la fusée m_0 pour différentes destinations :

Chapitre III

Destination	S.S	a-C	Lyre	Vega	Galaxie	Andromède	Univers
d [Al]	0.1	4.3	27	1000	100000	$2 \cdot 10^6$	$1.37 \cdot 10^{10}$
$\tau_{1/2}$ [Année]	0.616	3.52	6.49	13.25	22.02	27.72	44.55
m_0 [Tonnes]	2100	70400	$2.54 \cdot 10^6$	$8.85 \cdot 10^9$	$3.49 \cdot 10^{14}$	$3.41 \cdot 10^{17}$	$2.24 \cdot 10^{26}$
$Rm = m_c/m_f$	1.10	69.4	2546.86	$8.85 \cdot 10^6$	$3.49 \cdot 10^{11}$	$3.41 \cdot 10^{14}$	$2.24 \cdot 10^{23}$

Tableau 2 : Rapport de masse carburant / fusée en fonction de la destination.

Par exemple, pour effectuer un voyage aller à accélération propre constante égale à $1g$ vers la galaxie la plus proche Andromède, il faut une masse de carburant de l'ordre de la masse de la lune. Ce qui est gigantesque et techniquement très loin des moyens de l'homme actuellement.

III-3-6 Propulsion relativiste - défi technologique :

L'autre défi technologique à la réalisation de ce type de voyage et que l'on n'a pas mentionné jusqu'ici est la méthode technique qui permet d'éjecter de grandes quantités de gaz à des vitesses proche de la vitesse de la lumière. Par exemple, un calcul simple permet de constater que pour un voyage vers la galaxie d'Andromède, le débit initial d'éjection du gaz est égal à 13 Milliards de tonnes par seconde. Le seul processus physique permettant d'accélérer cette masse à des vitesses proche de c est le processus de conversion masse-énergie $E = mc^2$ par annihilation en utilisant de l'antimatière.

Dans ce cas, une partie de la masse-énergie de la fusée sera utilisée pour l'accélération du gaz. Une vitesse d'éjection $u = 0.87c$ correspond à un facteur de Lorentz $\gamma_u = 2$. L'énergie cinétique du gaz est alors $E = (\gamma_u - 1)mc^2 = mc^2$, cela signifie que la moitié de la masse de la fusée sera utilisée pour accélérer l'autre moitié.

Conclusion

Conclusion

L'objet de notre travail était l'étude du mouvement hyperbolique dans le cadre de la relativité restreinte en considérant les effets relativistes sur trois phénomènes physiques, le décalage Doppler, l'aberration de la lumière et le décalage temporel. Comme on a vu au chapitre I, l'étude du mouvement hyperbolique, qui est un mouvement à accélération propre constante, se trouve grandement simplifié en utilisant un formalisme basée sur la notion de rapidité de part le caractère additif de cette dernière.

Dans le chapitre II, on a étudié les différentes grandeurs cinématiques et leur variation dans le cas du mouvement hyperbolique en fonction du temps propre et relatif. Les courbes de ces grandeurs ont été tracées à l'aide du logiciel Maple. L'étude de l'accélération par le biais de la rapidité a montré que le mouvement hyperbolique n'est autre que le mouvement à force constante. En dérivant l'équation du mouvement hyperbolique, on a montré que la trajectoire, ou ligne d'univers, du mouvement hyperbolique est une hyperbole qui tend vers la parabole du mouvement classique à force constante pour des vitesses faibles devant la vitesse de la lumière. L'étude du temps relatif en fonction du temps propre a mis en lumière le phénomène de dilatation du temps et comment le décalage temporel devient très important pour des vitesses relativistes.

L'application des résultats théoriques des chapitres I et II pour l'étude de trois effets relativistes dans un mouvement de type hyperbolique a été réalisée dans le chapitre III. On a étudié l'exemple hypothétique d'un voyage relativiste hyperbolique pour une mission habitée aller-retour vers différentes destinations. Comme nous l'avons montré, la motivation principale du choix d'un mouvement de type hyperbolique est de simuler un champ de gravité fictif constant (égal à $1g$) à l'intérieur du vaisseau afin d'assurer une survie normale et le confort nécessaire aux voyageurs.

L'étude de l'effet Doppler sur la lumière des étoiles observée par les voyageurs a montré que, en plus de l'effet classique dû au rapprochement (décalage vers le bleu) ou à l'éloignement (décalage vers le rouge) de la source, l'effet de dilatation du temps introduit un facteur supplémentaire qui peut inverser le décalage Doppler. Ainsi, à des vitesses très proches de c , on obtient un décalage vers le rouge même si les étoiles émettrices se trouvent dans la direction avant du vaisseau et se rapprochent de celui-ci.

A l'aide du logiciel Maple on a étudié l'effet de l'aberration sur la position angulaire des étoiles en simulant un aspect visuel réaliste du ciel étoilé tel que vu par les membres du vaisseau. Contrairement à ce qui pourrait penser, l'étude a montré qu'en se rapprochant de la vitesse de la lumière, l'ensemble des étoiles (même ceux initialement à l'arrière du vaisseau) migrent et se concentrent vers l'avant du vaisseau et donnent l'impression de s'éloigner de ce dernier.

Le troisième effet étudié est l'effet temporel de dilatation du temps sur les voyageurs dans un trajet aller-retour sur 4 phases hyperboliques et pour plusieurs destinations. Après la dérivation de l'équation de la fusée relativiste, la comparaison des durées propres et terrestres du voyage a montré qu'il est théoriquement possible de parcourir de grandes distances, de

Conclusion

l'ordre de millions et même de milliards d'années lumière, en des temps propres de l'ordre de dizaines d'années alors que le temps écoulé sur terre se comptera en milliards d'années.

Ainsi, la théorie de la relativité a permis de montrer que le voyage vers le futur est en principe possible et n'est pas physiquement interdit, mais il faut que les moyens technologiques existent. En effet, l'étude énergétique de ce type de voyage a montré que l'énergie nécessaire pour ce type de voyage est astronomique et très loin des moyens que possède l'humanité actuellement.

Référence :

- [1] A. Michelson and E. W. Morley, On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether, American Journal of Science, 34, 333-345 (1887)
- [2] Lorentz, Hendrik Antoon, "The Relative Motion of the Earth and the Aether, Zittingsverlag Akad. V. Wet., 1: 74–79 (1892),
- [3] Albert Einstein, On the Electrodynamics of Moving Bodies, Annalen der Physik (ser. 4), 17, 891–921. 1905.
- [4] Albert Einstein, La Relativité , Payot-Rivages (1916)
- [5] Ressources en ligne : <http://vetopsy.fr/>
- [6] Ressources en ligne : <https://fr.wikipedia.org>
- [7] Paul Langevin, « L'évolution de l'espace et du temps », Scientia, no 10, p. 31-54, (1911)
- [8] E. F. Taylor, J. A. Wheeler, Spacetime Physics, Freeman & Co (1992)
- [9] On the Possibility of a New Test of the Relativity Principle, Annalen der Physik (ser. 4), 23, 197–198 (1907)
- [10] Richard A. Mould, Basic Relativity (2nd ed.). Springer. (2001).
- [11] Ressources en ligne : <https://cseligman.com/>
- [12] Claude Semay, Bernard Silvestre-Brac, Relativité restreinte, Dunod (2010)
- [13] José-Philippe Pérez, Relativité, Fondements et applications, Dunod (1999)
- [14] F. Khalfallah, Relativité Restreinte, Manuel de cours pour la Licence. Polycopié, université de B.B.A.
- [15] Maplesoft, Logiciel de calcul formel, Waterloo Maple Inc. Ver 13.0, www.maplesoft.com
- [16] Ressources en ligne : <http://serge.bertorello.free.fr>
- [17] Tsiolkovsky, Konstantin E. "The Exploration of Cosmic Space by Means of Reaction Devices, The Russian Academy, (1903)
- [18] Ressources en ligne : <http://courses.lumenlearning.com/physics>
- [19] W . Greiner, Classical mechanics, point particle and relativity, Springer (1989)

Résumé :

L'objet de ce travail est l'étude du mouvement hyperbolique dans le cadre de la relativité restreinte. Nous avons utilisé un formalisme basé sur la notion de rapidité qui a des propriétés additives lors de passage entre repères Galiléens. Trois phénomènes physiques ont été étudiés dans le cadre d'un voyage relativiste en mouvement hyperbolique, il s'agit de l'effet Doppler, de l'aberration de la lumière et des effets de la dilatation temporelle. Notre étude de simulation à l'aide du logiciel Maple a montré que pour des vitesses relativistes, la relativité introduit des effets supplémentaires sur le décalage Doppler et l'aberration de la lumière ainsi que sur l'écoulement du temps dans le repère en mouvement. On a vu que selon la théorie de la relativité, le voyage vers le futur est théoriquement possible à condition de posséder des moyens technologiques très avancés du fait de la grande quantité d'énergie nécessaire à ce type de voyage.

Abstract :

The object of this work is the study of hyperbolic motion within the framework of special relativity. We have used a formalism based on the notion of rapidity which has additive properties when transforming between Galilean frames of reference. Three physical phenomena have been studied in the context of a relativistic journey in hyperbolic motion: the Doppler effect, the aberration of light and the effects of temporal dilation. Our simulation study using the Maple software has shown that for relativistic velocities, relativity introduces additional effects on the Doppler shift and the aberration of light as well as on the flow of time in the moving coordinate system. We saw that according to the theory of relativity, time travel to the future is theoretically possible provided you have advanced technological means because of the colossal quantity of energy required in this type of travel.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة الحركة الزائدية في إطار النسبية الخاصة. استخدمنا في حساباتنا مفهوم الـ « rapidity » التي لها خصائص خطية عند العبور بين معالم عطالية. تمت دراسة ثلاثة ظواهر فيزيائية في سياق رحلة فضائية خاضعة للحركة الزائدية : تأثير دوبلر، انحراف الضوء وتأثير التمدد الزمني. أظهرت دراسة المحاكاة باستخدام برنامج « Maple » أنه بالنسبة للسرعات النسبية القريبة من سرعة الضوء، تقدم النسبية تأثيرات إضافية على تأثير دوبلر وانحراف الضوء وكذلك على تدفق الزمن في النظام الإحداثي المتحرك. رأينا ان السفر في الزمن إلى المستقبل ممكن نظرياً شريطة أن يتوفر لدينا وسائل تكنولوجية متقدمة بسبب الطاقة الهائلة التي يتطلبها هذا النوع من السفر.